Cálculo Integral

Matemática I

2018-2019

Primitivas

Definição de primitiva. Propriedades das primitivas.
Primitivas imediatas.
Métodos de primitivação: primitivação por partes, por substituição e por decomposição.

A primitivação é a operação inversa da derivação.

Definição

Seja f uma função definida num intervalo I e seja F uma função definida e diferenciável em I tal que

$$F'(x) = f(x)\,, \text{ para todo o } x \in I.$$

Então

- F diz-se uma **primitiva** de f em I.
- f diz-se **primitivável** em I pois admite uma primitiva em I.

Notação

Representa-se o conjunto de todas as primitivas de f por

$$P_x f(x)\,, \qquad P f(x) \qquad \text{e} \qquad \int f(x)\,dx.$$

Observação

Se F for uma primitiva de f, também $F + C$ (em que C é uma constante) é uma primitiva de f.

Proposição

Sejam F e G duas primitivas de f num intervalo I. Então, F e G diferem de uma constante.

Propriedades das Primitivas

Proposição

Sejam f e g funções primitiváveis no intervalo I e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, nesse intervalo, tem-se que:

- $P\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=Pf\left(x\right)+Pg\left(x\right);$
- $P\left(\alpha f\left(x\right)\right)=\alpha Pf\left(x\right).$

(**Atenção:** a primitiva do produto não é o produto das primitivas)

Proposição

Seja f uma função diferenciável no intervalo I. Então, nesse intervalo, tem-se

$$P\left[f'\left(x\right)\right]=f\left(x\right)+C.$$

(**Observação:** $\left[Pf\left(x\right)\right]'=f\left(x\right).$)

Proposição

Se f é uma função contínua num intervalo, então f é primitivável nesse intervalo.

Proposição

Se f é uma função contínua no intervalo I, para cada $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe uma e uma só primitiva F de f em I tal que

$$F(x_0) = y_0.$$

$F(x_0) = y_0 \rightarrow$ **condição inicial do problema**

A esta questão, de determinar a única primitiva que verifica uma certa condição inicial, chama-se **Problema de valores iniciais** ou **Problema de Cauchy.**

Primitivas Imediatas

Algumas Primitivas Imediatas

- $P\left(k\right) = kx + C$
- $P\left(x^{\alpha}\right) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$
- $P\left(e^{x}\right) = e^{x} + C$
- $P\left(\frac{1}{x}\right) = \ln|x| + C$
- $P\left(\cos x\right) = \operatorname{sen} x + C$
- $P\left(\operatorname{sen} x\right) = -\cos x + C$
- $P\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \operatorname{arctg} x + C$
- $P\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{arcsen} x + C$

Uma tabela de primitivas, é uma tabela de derivadas apresentada ao contrário.

Observação

Pela regra de derivação da função composta tem-se

$$(F(\varphi(x)))' = \varphi'(x)\, F'(\varphi(x)).$$

Assim, se F é uma primitiva de f, então

$$P\left(\varphi'(x)\, f(\varphi(x))\right) = F(\varphi(x)) + C.$$

Considere $\varphi(x) = u$ e $\varphi'(x) = u'$, então a versão mais geral da tabela anterior é:

- $P(k) = kx + C$
- $P(u' u^{\alpha}) = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$
- $P(u' e^{u}) = e^{u} + C$
- $P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln|u| + C$
- $P(u' \cos u) = \operatorname{sen} u + C$
- $P(u' \operatorname{sen} u) = -\cos u + C$
- $P\left(\frac{u'}{1+u^2}\right) = \operatorname{arctg} u + C$
- $P\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \operatorname{arcsen} u + C$

Tabela de Primitivas Imediatas

Sendo u uma função diferenciável, k e a constantes reais,

- $P\left(k\right) = kx + C$
- $P\left(x^{\alpha}\right) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$
- $P\left(u' u^{\alpha}\right) = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$
- $P\left(u' e^{u}\right) = e^{u} + C$
- $P\left(u' a^{u}\right) = \frac{a^{u}}{\ln a} + C, \quad a > 0$
- $P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln|u| + C$
- $P\left(u' \operatorname{sen} u\right) = -\cos u + C$
- $P\left(u' \cos u\right) = \operatorname{sen} u + C$
- $P\left(u' \operatorname{tg} u\right) = -\ln|\cos u| + C$
- $P\left(u' \operatorname{cotg} u\right) = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
- $P\left(u' \sec^2 u\right) = \operatorname{tg} u + C$
- $P\left(u' \operatorname{cosec}^2 u\right) = -\operatorname{cotg} u + C$
- $P\left(u' \sec u \operatorname{tg} u\right) = \sec u + C$
- $P\left(u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\right) = -\operatorname{cosec} u + C$
- $P\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \operatorname{arcsen} u + C$
- $P\left(-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arccos u + C$
- $P\left(\frac{u'}{1+u^2}\right) = \operatorname{arctg} u + C$
- $P\left(-\frac{u'}{1+u^2}\right) = \operatorname{arccotg} u + C.$

Técnicas de Primitivação

Primitivação por Partes

Proposição

Sejam f e g funções com derivada contínua no intervalo $[a, b]$. Então, neste mesmo intervalo,

$$P\left[f'(x)\,g(x)\right] = f(x)\,g(x) - P\left[f(x)\,g'(x)\right].$$

Técnicas de Primitivação

Primitivação por Substituição (ou mudança de variável)

Proposição

Seja f uma função contínua no intervalo I e $\varphi : J \to I$ uma função cuja derivada é contínua e não se anula em J. Então,

$$P_x f(x) = P_t \left[f(\varphi(t))\, \varphi'(t) \right] \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} .$$

Observações

- Prova-se que uma função definida num intervalo com derivada não nula é invertível.
- Uma das principais dificuldades na primitivação por substituição reside na escolha da mudança de variável adequada.

Algumas substituições aconselhadas

Seja f uma função racional,

Primitiva	**Substituição**
$Pf\left(e^{x}\right)$	$e^{x}=t \Leftrightarrow x=\ln t$
$Pf\left(\ln x\right)$	$\ln x=t \Leftrightarrow x=e^{t}$
$Pf\left(x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, \ldots\right)$	$x=t^{m}, \quad m=m.m.c.\left(q,s,\ldots\right)$
$Pf\left(\left(ax+b\right)^{\frac{p}{q}}, \left(ax+b\right)^{\frac{r}{s}}, \ldots\right)$	$ax+b=t^{m}, \quad m=m.m.c.\left(q,s,\ldots\right)$
$Pf\left(\sqrt{a^{2}-b^{2}x^{2}}\right)$	$x=\frac{a}{b}\operatorname{sen} t$

Técnicas de Primitivação

Primitivação por Decomposição

É uma técnica de primitivação de funções racionais.

Definição

Chama-se **função racional** a qualquer função que se possa escrever na forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, com P e Q polinómios de coeficientes reais.

A **função racional** diz-se **própria** se

$$grau\,(P\,(x)) < grau\,(Q\,(x))$$

e **imprópria** caso contrário.

Fase 1

Para primitivar devemos sempre trabalhar com funções racionais próprias. Qualquer função racional imprópria $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pode escrever-se na forma

polinómio + função racional própria

Basta fazer a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$.

Proposição (Regra da divisão)

Sendo $P(x)$ um polinómio e $Q(x)$ um polinómio de grau ≥ 1, existem sempre polinómios $C(x)$ e $R(x)$, univocamente determinados, tais que:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{C(x)}_{\text{polinómio}} + \underbrace{\frac{R(x)}{Q(x)}}_{\text{função racional própria}}}$$

com $grau(R(x)) < grau(Q(x))$, onde $C(x)$ é o quociente da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ e $R(x)$ é o resto dessa divisão.

Fase 2

Seja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional própria. Decompõe-se $Q(x)$ como o produto de parcelas mais simples:

- constantes;
- parcelas da forma $\underbrace{(x-r)^s}_{\text{com raízes reais}}$, com $s \in \mathbb{N} \rightarrow$ multiplicidade s
- parcelas da forma $\underbrace{\left(x^2+bx+c\right)^k}_{\text{sem raízes reais}}$, com $k \in \mathbb{N} \rightarrow$ multiplicidade k

Então $Q(x)$ fica escrito na forma:

$$\boxed{Q(x) = \underbrace{a}_{\text{constante}} \times \underbrace{(x-r)^s \times \cdots}_{\text{parcelas das raízes reais}} \times \underbrace{\left(x^2+bx+c\right)^k \times \cdots}_{\text{parcelas das raízes complexas conjugadas}}}$$

Fase 3

Fracções Elementares

Chamam-se **frações elementares** (ou frações simples) às funções racionais da forma

$$\underbrace{\frac{A}{(x-r)^s}}_{\text{com raízes reais}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{D+Ex}{\left(x^2+bx+c\right)^k}}_{\text{sem raízes reais}}$$

Proposição

Toda a função racional própria pode ser decomposta numa soma de frações elementares:

$$\underbrace{\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\cdots+\frac{A_s}{(x-r)^s}}_{s \text{ parcelas } = \text{ multiplicidade da raíz real}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{D_1+E_1x}{x^2+bx+c}+\frac{D_2+E_2x}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{D_k+E_kx}{(x^2+bx+c)^k}}_{k \text{ parcelas } = \text{ multiplicidade das raízes complexas}}$$

A decomposição pode ser feita pelo **método dos coeficientes indeterminados**.

Fase 4

Determinar as primitivas das frações simples:

- $P\left[\frac{A}{(x-r)^s}\right] = \begin{cases} A\ln|x-r| + C & \text{, se } s=1 \\ \\ P\left[A\,(x-r)^{-s}\right] = A \times \frac{(x-r)^{-s+1}}{-s+1} + C & \text{, se } s>1 \end{cases}$

Nota:

- $s = 1 \rightarrow$ obtém-se um logaritmo
- $s > 1 \rightarrow$ obtém-se uma potência

- $P\left[\frac{D+Ex}{x^2+bx+c}\right]$

Não tendo raízes reais, o polinómio x^2+bx+c pode escrever-se na forma

$$(x+\alpha)^2+\beta^2.$$

Fazendo diretamente as contas ou com a mudança de variável $x+\alpha=\beta t$, conclui-se que:

$$\boxed{P\left[\frac{D+Ex}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\right]=\frac{E}{2}\ln\left((x+\alpha)^2+\beta^2\right)+\frac{D-E\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)+C}$$

Nota:

- $E=0\rightarrow$ obtém-se um arco-tangente
- $E\neq 0\rightarrow\begin{cases}\text{um logaritmo}\\ \text{ou}\\ \text{a soma de um logaritmo com um arco-tangente}\end{cases}$

- $P\left[\frac{D+Ex}{(x^2+bx+c)^k}\right]$, com $k > 1$

Decompondo o polinómio como no caso anterior

$$x^2 + bx + c = (x+\alpha)^2 + \beta^2$$

e com a mesma mudança de variável

$$x + \alpha = \beta t$$

reduz-se esta situação ao cálculo de uma primitiva imediata e da primitiva:

$$P\left[\frac{1}{(1+t^2)^k}\right].$$

Esta primitiva (com $k > 1$) determina-se por partes, fazendo:

$$\frac{1}{(1+t^2)^k} = \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{1}{2} \times \underbrace{t}_{g} \times \underbrace{\frac{2t}{(1+t^2)^k}}_{f'}$$

e baixando sucessivamente o grau do denominador.

Algumas Fórmulas Trigonométricas

- $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\alpha)\right)$
- $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\alpha)\right)$
- $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$
- $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$
- $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$
- $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$

Integral de Riemann

Definição de integral de Riemann e sua interpretação geométrica; propriedades.
Integral indefinido e suas propriedades.
Teorema fundamental do cálculo integral e fórmula de Barrow.
Integração por partes e por substituição.
Aplicações do cálculo integral ao cálculo de áreas e do volume de sólidos de revolução.

Partições de intervalos

Definições

Seja $[a, b]$ um intervalo, com $b > a$.

- Chama-se **partição** (ou **decomposição**) de $[a, b]$ a qualquer conjunto $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, de números reais, tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

- Chama-se **norma** (ou **diâmetro**) da partição P a

$$\|P\| = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1})$$

(é um número sempre maior ou igual a zero).

- Chama-se **refinamento da partição** P a uma partição Q de $[a, b]$ tal que

$$P \subseteq Q.$$

Nesta situação diz-se que Q **é uma partição mais fina do que** P.

Proposição

Sejam P e Q partições de $[a,b]$ tais que $P \subseteq Q$, então

$$\|P\| \geq \|Q\|.$$

Isto é, quanto mais refinada for uma partição, menor será a sua norma.

Observação

Considerando, convenientemente, partições sucessivamente mais finas, podemos fazer a norma das partições com que trabalhamos tender para zero.

Soma de Riemann

O integral de Riemann em $[a, b]$ de uma função positiva pode interpretar-se geometricamente como a área da região do plano limitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos xx e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

Definição

Sejam $[a, b]$ um intervalo fechado limitado, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e $t_1, \ldots, t_n$ uma sequência de números reais tais que $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, para $1 \leq j \leq n$.

Chama-se **soma de Riemann de f relativamente à partição P** ao número

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Observação

Sejam $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, com $1 \leq j \leq n$, da definição de soma de Riemann, então

- se $t_j = x_{j-1}$ (o menor valor do intervalo $[x_{j-1}, x_j]$), então a soma de Riemann diz-se a **soma de Riemann à esquerda**;
- se $t_j = x_j$ (o maior valor do intervalo $[x_{j-1}, x_j]$), então a soma de Riemann diz-se a **soma de Riemann à direita**;
- se $t_j = \frac{x_{j-1}+x_j}{2}$ (o valor do meio do intervalo $[x_{j-1}, x_j]$), então a soma de Riemann diz-se a **soma de Riemann média**;
- se t_j é o maior valor da função f em $[x_{j-1}, x_j]$, então a soma de Riemann diz-se a **soma de Riemann superior**;
- se t_j é o menor valor da função f em $[x_{j-1}, x_j]$, então a soma de Riemann diz-se a **soma de Riemann inferior**.

Qualquer soma de Riemann sobre uma dada partição está entre as somas de Riemann inferior e superior.

Integral de Riemann

Definição

Seja $[a, b]$ um intervalo com $b > a$.

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitada em $[a, b]$, é **integrável à Riemann em** $[a, b]$ se existe $I \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f, P) = I.$$

Designa-se este limite por integral de Riemann e escreve-se

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

e diz-se que $\int_a^b f(x)\, dx$ é o **integral definido de** f **entre** a **e** b.

Terminologia

f → **função integranda**

$[a, b]$ → **intervalo de integração**

a e b → **limites de integração**

x → **variável de integração**

dx → **acréscimo infinitésimal**

$\int$ → **símbolo de integral**

Nota

Se nada for dito em contrário, por "função integrável" deverá entender-se "função integrável à **Riemann**". No entanto, há outras noções (não necessariamente equivalentes a esta) de integrabilidade.

Observação

Por definição, se f é integrável à Riemann em $[a, b]$, então f é limitada em $[a, b]$.

Mas o recíproco não é verdadeiro.

Proposição

As funções contínuas em intervalos fechados e limitados $[a, b]$ são integráveis à Riemann.

Observação

Há funções que são integráveis à Riemann num intervalo e não são contínuas nesse intervalo.

Pode provar-se que:

- Qualquer função **seccionalmente contínua** em $[a, b]$ (fechado e limitado) é integrável à Riemann.

  Observação:
  Uma função f definida em $[a, b]$ diz-se **seccionalmente contínua em** $[a, b]$ se é contínua em $[a, b]$ exceto num número finito de pontos e nesses pontos de descontinuidade existem e são finitos os limites laterais de f.

- Qualquer função monótona em $[a, b]$ (fechado e limitado) é integrável à Riemann.

Propriedades elementares do Integral de Riemann

Proposição

Se $f(x) = k$ para todo $x \in [a, b]$ e $k \in \mathbb{R}$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b k\ dx = k(b-a).$$

Proposição

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$ e $k \in \mathbb{R}$. Então:

1. $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx;$$

Proposição

2. kf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (kf(x))\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx;$$

3. $f \times g$ é integrável em $[a, b]$.

   Advertência: Mas **<u>não é verdade</u>** que o integral do produto seja o produto dos integrais.

4. se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0;$$

Proposição

5. se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx;$$

Observação: se $m \leq f(x) \leq M$, para todo o $x \in [a,b]$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

6. $|f(x)|$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx;$$

Advertência: Mas **não é verdade** que

$$|f(x)| \text{ integrável em } [a,b] \Rightarrow f(x) \text{ integrável em } [a,b].$$

Proposição (Decomposição do integral)

Se f é integrável em $[a, b]$ então f é integrável em todo o subintervalo (não degenerado) de $[a, b]$.

Mais, sendo $a < c < b$, se f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Definição

Se f é integrável em $[a, b]$, com $a < b$, então

- $\int_c^c f(x)\,dx = 0,$ para todo o $c \in [a, b]$;
- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

Observação

Se f é integrável num intervalo I que contenha a, b e c, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Advertência

As propriedades do integral da soma e do produto por um escalar são válidas se $b \leq a$. É preciso ter atenção com as propriedades que envolvem desigualdades, para $b < a$ a desigualdade é trocada.

Proposição

Seja f uma função integrável em $[-a, a]$, com $a > 0$, então

- se f é uma função ímpar, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$;
- se f é uma função par, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Teorema da Média

Definição

Seja f uma função integrável no intervalo $[a, b]$ (com $a < b$). O valor médio da função f no intervalo $[a, b]$ é dado por

$$f_{VM\ [a,b]} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}.$$

Proposição (Teorema da Média para funções contínuas)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b - a)\,.$$

Ou seja, se f é contínua em $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = f_{VM\ [a,b]}\,.$$

Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Definição

Seja f uma função integrável em $[a, b]$. À função definida em $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

chama-se **integral indefinido de f com origem no ponto a**.

Observação

F é crescente, se f é não negativa.

Proposição

Seja f uma função integrável no intervalo $[a, b]$. Então a função integral indefinido de f, $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, é contínua em $[a, b]$.

Observação

A função integral indefinido, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, de uma função integrável f é sempre "um pouco mais bem comportada" do que a função f:

- se f é integrável, então F é contínua;
- se f é contínua, então F é diferenciável;
- se f é diferenciável, então F tem derivadas contínuas;
- ...

Proposição (Teorema Fundamental do Cálculo Integral)

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$. Então a função integral indefinido de f, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, tem derivada em $[a,b]$ e

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=F'(x)=f(x).$$

Corolário (Fórmula de Barrow)

Sejam f uma função contínua em $[a,b]$ e G uma primitiva de f em $[a,b]$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx=[G(x)]_a^b=G(b)-G(a).$$

Observação

É possível enfraquecer ligeiramente as hipóteses da Fórmula de Barrow, basta considerar: "f uma função **integrável** em $[a,b]$..."

Corolário (do Teorema Fundamental do Cálculo Integral)

Qualquer função contínua num intervalo I é primitivável nesse intervalo.

Seja $a \in I$, $\int_a^x f(t)\,dt$ é a primitiva que se anula para $x = a$.

Observação

Sejam f uma função contínua em $[a, b]$ e g e h funções diferenciáveis em $]a, b[$:

1. a derivada de

$$L(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

é calculada pela regra de derivação da função composta, obtendo-se

$$L'(x) = f(g(x))\, g'(x)\,;$$

Observação

2. a derivada de
$$B(x)=\int_{g(x)}^{a} f(t)\,dt$$
resulta do caso anterior
$$B'(x)=\left(\int_{g(x)}^{a} f(t)\,dt\right)'=\left(-\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt\right)'=-f(g(x))\,g'(x)\,;$$

3. a derivada de
$$T(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$
resulta dos casos anteriores
$$T'(x)=\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right)'=\left(\int_{g(x)}^{a} f(t)\,dt+\int_{a}^{h(x)} f(t)\,dt\right)'=$$
$$=f(h(x))\,h'(x)-f(g(x))\,g'(x)\,.$$

Métodos de Integração

Integração por Partes

Proposição

Sejam f e g funções com derivada contínua em $[a,b]$. Então

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

Métodos de Integração

Integração por mudança de variável (ou substituição)

Proposição

Sejam I e J intervalos, f uma função contínua em I e φ uma função com derivada contínua em J, tal que $\varphi(J) \subseteq I$. Sejam α e β elementos de J tais que $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Observações

- Estamos a fazer a mudança de variável $x = \varphi(t)$.
- Existem versões da integração por substituição com hipóteses diferentes.

Algumas aplicações do integral definido

Cálculo de áreas

Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$ e A a área da região plana limitada pelos gráficos de f e g e pelas retas verticais $x=a$ e $x=b$. Então

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx.$$

Cálculo de volumes de sólidos de revolução

Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$ e V o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da região limitada pelos gráficos de f e g e pelas retas verticais $x=a$ e $x=b$. Então

$$V=\int_a^b \pi\left|f^2(x)-g^2(x)\right|\,dx.$$

Algumas aplicações do integral definido

Cálculo do comprimento de linha

Seja f uma função com derivada contínua em $[a,b]$ e L o comprimento da linha associada ao gráfico da função f entre $x=a$ e $x=b$ (isto é, entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$). Então

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Integrais Impróprios

Integrais impróprios de 1^a espécie e de 2^a espécie.

Integrais Impróprios

Extendem a noção de integral a intervalos não limitados e/ou funções não limitadas.

Os integrais impróprios podem ser dos seguintes tipos:

- **integrais impróprios de $1^{\underline{a}}$ espécie** $\rightarrow$ quando o intervalo de integração não é limitado (isto é, pelo menos um dos extremos de integração é infinito) mas a função é limitada em qualquer seu subintervalo limitado;
- **integrais impróprios de $2^{\underline{a}}$ espécie** $\rightarrow$ quando o intervalo de integração é limitado, mas a função integranda não é limitada no intervalo de integração;
- **integrais impróprios mistos** $\rightarrow$ são os integrais que têm situações dos dois tipos anteriores (ou seja, o intervalo de integração é ilimitado e existe um seu subintervalo limitado no qual a função é ilimitada).

Integrais Impróprios de 1^a espécie

Definição

Seja f uma função integrável em todo o subintervalo fechado e limitado de $[a, +\infty[$ (isto é, todo $[a, \beta]$, com $\beta \geq a$).

Chama-se **integral impróprio da função f em** $[a, +\infty[$ a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^{\beta} f(x)\, dx.$$

Caso o limite exista e seja finito, diz-se que o **integral impróprio** $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ **é convergente**, sendo esse o seu valor. Caso contrário, se o limite não existir ou não for finito, diz-se que o **integral impróprio é divergente**.

Integrais Impróprios de 1^a espécie

Exemplo importante

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx \quad \rightarrow \textbf{Integral de Dirichlet de } 1^a \textbf{ espécie}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{divergente}, & \text{se } k \leq 1 \\ \text{convergente}, & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

Integrais Impróprios de 1^a espécie

Definição

Seja f uma função integrável em todo o subintervalo fechado e limitado de $]-\infty, b]$ (isto é, todo $[\alpha, b]$, com $\alpha \leq b$).

Chama-se **integral impróprio da função f em $]-\infty, b]$** a

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx.$$

Caso o limite exista e seja finito, diz-se que o **integral impróprio $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ é convergente**. Caso contrário, se o limite não existir ou não for finito, diz-se que o **integral impróprio é divergente**.

Integrais Impróprios de 1^a espécie

Definição

Seja f uma função integrável em todo o intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$. Diz-se que o **integral impróprio**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

é convergente se, para algum $c \in \mathbb{R}$, forem convergentes ambos os integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

e nesse caso vem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Se algum dos integrais impróprios $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ ou $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ for divergente, então $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ **é divergente**.

Integrais Impróprios de 2^a espécie

Definição

Seja f uma função integrável em todo o subintervalo fechado e limitado de $[a,b[$ (isto é, em todo $[a,\beta] \subset [a,b[$) e não limitada em $[a,b[$.

Chama-se **integral impróprio da função f em $[a,b[$** a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Caso o limite exista e seja finito, diz-se que o **integral impróprio** $\int_a^b f(x)\,dx$ **é convergente**. Caso contrário, se o limite não existir ou não for finito, diz-se que o **integral impróprio é divergente**.

Integrais Impróprios de 2^a espécie

Definição

Seja f uma função integrável em todo o subintervalo fechado e limitado de $]a, b]$ (isto é, em todo $[\alpha, b] \subset]a, b]$) e não limitada em $]a, b]$.

Chama-se **integral impróprio da função f em $]a, b]$** a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

Caso o limite exista e seja finito, diz-se que o **integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente**. Caso contrário, se o limite não existir ou não for finito, diz-se que o **integral impróprio é divergente**.

Integrais Impróprios de 2^a espécie

Exemplo importante

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx \quad \rightarrow \textbf{Integral de Dirichlet de } 2^a \textbf{ espécie}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{divergente,} & \text{se } k \geq 1 \\ \text{convergente,} & \text{se } k < 1 \end{cases}$$

Integrais Impróprios de 2^a espécie

Observações

- **Se o problema é em c pertencente ao interior do intervalo $[a, b]$**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

sendo convergente sse ambos o forem (sendo o seu valor a soma) e divergente se pelo menos um deles for divergente.

- **Se o problema é em ambos os extremos**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx,$$

com $d \in \,]a, b[$, sendo convergente sse ambos o forem (sendo o seu valor a soma) e divergente se pelo menos um deles for divergente.

Integrais Impróprios Mistos

- Se o **integral impróprio for misto**, ou seja, se o intervalo for ilimitado e a função for ilimitada nesse intervalo, aplica-se o raciocínio anterior de modo a termos sempre um problema por integral e sempre num extremo.

- O **integral impróprio misto é convergente** sse todos os integrais impróprios em que foi decomposto o forem (e o seu valor será a soma do valor desses integrais).

- Se algum dos integrais impróprios em que foi decomposto for divergente, o **integral impróprio misto é divergente**.