Exercícios PL Resolvidos Semana 5 14/IV/2020 até 17/IV/2020

Exercício 2.15

`Determine, pelo método de substituição inversa, todas as soluções do sistema com incógnita` $x \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ `e matriz ampliada` $M = [A\, b]$ `seguinte:`

1. $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

3. $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

•(1)• Como a incógnita tem 4 linhas e 1 coluna, podemos interpretar a incógnita como um ponto $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. A matriz de coeficientes corresponde com as primeiras 4 colunas de M e a matriz dos termos independentes corresponde com a última coluna de M. O sistema é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 2z + 5t &= 4 \\ 2z + 4t &= 1 \\ t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos em ordem a t, z, x e admitimos que a variável restante y toma um valor qualquer (arbitrário) $y = a \in \mathbb{R}$. Temos então por substituição inversa:

$$\begin{cases} y = a \in \mathbb{R} \text{ arbitrário} \\ t = 0 \\ 2z + 4t = 1 \Rightarrow 2z = 1 - 4 \cdot 0 \Rightarrow z = 1/2 \\ x + 3y + 2z + 5t = 4 \Rightarrow x = 4 - 3a - 2(1/2) - 5 \cdot 0 = 3 - 3a \end{cases}$$

A solução geral é $\begin{bmatrix} 3-3a \\ a \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Podemos comprovar que todas estas colunas resolvem a equação matricial dada, sem importar o valor $a \in \mathbb{R}$ escolhido:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3-3a \\ a \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

•(2)• Como a incógnita tem 4 linhas e 1 coluna, podemos interpretar a incógnita como um ponto $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. A matriz de coeficientes corresponde com as primeiras 4 colunas de M e a matriz dos termos independentes corresponde com a última coluna de M. O sistema é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Portanto temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z - 3t &= 4 \\ y + 2z &= 1 \\ 3t &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos em ordem a t, y, x e admitimos que a variável restante z toma um valor qualquer (arbitrário) $z = a \in \mathbb{R}$. Temos então por substituição inversa:

$$\begin{cases} z = a \in \mathbb{R} \text{ arbitrário} \\ 3t = 9 \Rightarrow t = 3 \\ y + 2z = 1 \Rightarrow y = 1 - 2a \\ x - y + 2z - 3t = 4 \Rightarrow x = 4 + (1 - 2a) - 2a + 3 \cdot 3 = 14 - 4a \end{cases}$$

A solução geral é $\begin{bmatrix} 14 - 4a \\ 1 - 2a \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$

Podemos comprovar que todas estas colunas resolvem a equação matricial dada, sem importar o valor $a \in \mathbb{R}$ escolhido:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 - 4a \\ 1 - 2a \\ a \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

•(3)• Como a incógnita tem 4 linhas e 1 coluna, podemos interpretar a incógnita como um ponto $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. A matriz de coeficientes corresponde com as primeiras 4 colunas de M e a matriz dos termos independentes corresponde com a última coluna de M. O sistema é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto temos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\left.\begin{aligned} 2x + t = 0 \\ y = 1 \\ 0 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos em ordem a x, y e admitimos que as variáveis restantes z, t tomam valores quaisquer (arbitrários) $z = a \in \mathbb{R}$, $t = b \in \mathbb{R}$. Temos então por substituição inversa:

$$\begin{cases} z = a \in \mathbb{R},\ t = b \in \mathbb{R}, \text{ arbitrários} \\ y = 1 \\ 2x + t = 0 \Rightarrow 2x = 0 - b \Rightarrow x = -b/2 \end{cases}$$

A solução geral é $\begin{bmatrix} -b/2 \\ 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}$

Podemos comprovar que todas estas colunas resolvem a equação matricial dada, sem importar o valor $a \in \mathbb{R}$ escolhido:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -b/2 \\ 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.17

`Determine a forma triangular geral e calcule, pelo método de substituição inversa, a solução única do sistema matricial` $A{\cdot}X = B$ `com matriz ampliada` $M = [A\,B]$`:`

1. $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

2. $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

3. $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $X \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$

•(1)• Denotemos por x_1, x_2, x_3 as três linhas da matriz X. O sistema que temos é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Identificamos forma triangular geral, nomeadamente, na matriz A reordenar incógnitas na ordem (x_3, x_2, x_1) iria dar uma matriz de coeficientes triangular superior.

Portanto temos o seguinte sistema de equações:

$$\left.\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= [1\,0\,1] \\ 3x_1 + x_2 &= [2\,1\,2] \\ 2x_1 &= [3\,2\,3] \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos a última equação em ordem a x_1. Quando temos x_1 podemos resolver a equação segunda em ordem a x_2, finalmente podemos resolver a primeira equação em ordem a x_3

$$\begin{cases} 2x_1 = [3\,2\,3] \Rightarrow x_1 = [3/2\,1\,3/2] \\ 3x_1 + x_2 = [2\,1\,2] \Rightarrow x_2 = [2\,1\,2] - 3 \cdot [3/2\,1\,3/2] = [-5/2\ -2\ -5/2] \\ x_2 + 2x_3 = [1\,0\,1] \Rightarrow 2x_3 = [1\,0\,1] - [-5/2\ -2\ -5/2] = [7/2\,2\,7/2] \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow x_3 = [7/4\,1\,7/4] \end{cases}$$

Assim a solução, única, do sistema seria:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 3/2 \\ -5/2 & -2 & -5/2 \\ 7/4 & 1 & 7/4 \end{bmatrix}$$

•(2)• Denotemos por x_1, x_2, x_3 as três linhas da matriz X. O sistema que temos é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Identificamos forma triangular geral, nomeadamente, na matriz A ao escolhermos como última equação a segunda, e última incógnita x_3, depois a primeira equação, com incógnita x_2, e a seguir a terceira equação, com incógnita x_1, temos forma triangular geral, ao ordenar as equações na sequência $(3, 1, 2)$ e as incógnitas (x_3, x_2, x_1).

Portanto temos o seguinte sistema de equações:

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= [1\,0\,0] \\ 3x_3 &= [0\,1\,0] \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= [0\,0\,1] \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos a segunda equação em ordem a x_3. Quando temos x_3 podemos resolver a primeira equação em ordem a x_2, finalmente podemos resolver a terceira equação em ordem a x_1

$$\begin{cases} 3x_3 = [0\,1\,0] \Rightarrow x_3 = [0\,1/3\,0] \\ 2x_2 + 4x_3 = [1\,0\,0] \Rightarrow 2x_2 = [1\,0\,0] - 4 \cdot [0\,1/3\,0] = [1\,\,-4/3\,0] \Rightarrow x_2 = [1/2\,\,-2/3\,0] \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = [0\,0\,1] \Rightarrow x_1 = [0\,0\,1] - 3 \cdot [1/2\,\,-2/3\,0] - 5 \cdot [0\,1/3\,0] \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow x_1 = [-3/2\,1/3\,1] \end{cases}$$

Assim a solução, única, do sistema seria:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/3 & 1 \\ 1/2 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Na realidade acabamos de determinar a matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

•(3)• Denotemos por x_1, x_2, x_3, x_4 as quatro linhas da matriz X. O sistema que temos é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Podemos usar como última equação a quarta, onde resolvemos em ordem a x_1. A seguir, conhecido x_1, podemos usar a terceira equação e resolver em ordem a x_4. Depois a primeira equação, resolvida em ordem a x_2, e finalmente a equação segunda, resolvida em ordem a x_3.

Temos forma triangular geral, se ordenamos as equações na ordem $(2, 1, 3, 4)$ e as incógnitas na ordem (x_3, x_2, x_4, x_1).

Temos o seguinte sistema de equações:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= [1\,2] \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= [0\,0] \\ 4x_1 + 2x_4 &= [1\,1] \\ 3x_1 &= [3\,6] \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos na ordem indicada (algoritmo de substituição inversa):

$$\begin{cases} 3x_1 = [3\,6] \Rightarrow x_1 = [1\,2] \\ 4x_1 + 2x_4 = [1\,1] \Rightarrow 2x_4 = [1\,1] - 4 \cdot [1\,2] = [-3\ -7] \Rightarrow x_4 = [-3/2\ -7/2] \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = [1\,2] \Rightarrow x_2 = [1\,2] - [1\,2] - 2 \cdot [-3/2\ -7/2] \Rightarrow x_2 = [3\,7] \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = [0\,0] \Rightarrow 2x_3 = - \cdot [1\,2] - 3 \cdot [3\,7] - [-3/2\ -7/2] = [-17/2\ -39/2] \Rightarrow \\ \qquad x_3 = [-17/4\ -39/4] \end{cases}$$

Temos como solução única da equação matricial a seguinte:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ -17/4 & -39/4 \\ -3/2 & -7/2 \end{bmatrix}$$

Podemos comprovar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ -17/4 & -39/4 \\ -3/2 & -7/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.16

`Calcule a matriz inversa de` $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Queremos resolver a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso não temos um sistema triangular, nem sequer depois de reordenar equações ou incógnitas.

Chamemos x_1, x_2, x_3 as linhas da matriz X. Temos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos transformar num sistema com as mesmas soluções que é triangular, se subtraímos a primeira igualdade na segunda:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = [1\,0\,0] \\ x_1 + x_2 + 12x_3 = [0\,1\,0] \\ 2x_2 + x_3 = [0\,0\,1] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 = [1\,0\,0] \\ 12x_3 = [-1\,1\,0] \\ 2x_2 + x_3 = [0\,0\,1] \end{array}\right.$$

E neste sistema triangular aplicamos o algoritmo de substituição inversa:

$$\begin{cases} 12x_3 = [-1\,1\,0] \Rightarrow x_3 = [\frac{-1}{12}\,\frac{1}{12}\,0] \\ 2x_2 + x_3 = [0\,0\,1] \Rightarrow 2x_2 = [0\,0\,1] - [\frac{-1}{12}\,\frac{1}{12}\,0] = [\frac{1}{12}\,\frac{-1}{12}\,1] \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow x_2 = [\frac{1}{24}\,\frac{-1}{24}\,\frac{1}{2}] \\ x_1 + x_2 = [1\,0\,0] \Rightarrow x_1 = [1\,0\,0] - [\frac{1}{24}\,\frac{-1}{24}\,\frac{1}{2}] \Rightarrow x_1 = [\frac{23}{24}\,\frac{1}{24}\,\frac{-1}{2}] \end{cases}$$

Obtemos a solução:

$$X = \begin{bmatrix} 23/24 & 1/24 & -1/2 \\ 1/24 & -1/24 & 1/2 \\ -1/12 & 1/12 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprovamos se a inversa é realmente correta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 23/24 & 1/24 & -1/2 \\ 1/24 & -1/24 & 1/2 \\ -1/12 & 1/12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23/24 & 1/24 & -1/2 \\ 1/24 & -1/24 & 1/2 \\ -1/12 & 1/12 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Questão adicional:

`Queremos encontrar matrizes` $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ `que verificam`

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = X^t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. `Identifique o sistema de equações lineares que satisfazem` (a, b, c, d, e, f). `Qual é a matriz de coeficientes e de termos independentes neste sistema?`

2. `Determine todas as possíveis matrizes` X `com as propriedades indicadas.`

Comecemos por determinar o resultado das operações matriciais indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c+e & d+f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c+d \\ c+d+e+f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c+e+2 & b+2d+f+1 \\ 3a+5e+1 & 3b+5f+2 \end{bmatrix}$$

$$X^t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c+e+2 & 3a+5e+3 \\ b+2d+f-1 & 3b+5f+2 \end{bmatrix}$$

Assim as condições exigidas para X podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} & a+b+c+d = 1, \quad c+d+e+f = 1 \\ & a+2c+e+2 = a+2c+e+2, \quad b+2d+f+1 = 3a+5e+3 \\ & 3a+5e+1 = b+2d+f-1, \quad 3b+5f+2 = 3b+5f+2 \end{aligned}$$

Se deixamos as expressões lineares na parte da esquerda, e as constantes na direita, temos o sistema de equações lineares pedido:

$$\left.\begin{aligned} a+b+c+d &= 1 \\ c+d+e+f &= 1 \\ 0 &= 0 \\ -3a+b+2d-5e+f &= 2 \\ 3a-b-2d+5e-f &= -2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Podem ser escritas em forma matricial $A \cdot \bar{X} = B$, se consideramos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

. A matriz A é chamada matriz de coeficientes e a matriz B matriz dos termos independentes do sistema. Estamos a denotar $\bar{X}$ a matriz coluna de incógnitas, para não confundir com a matriz X que aparece no enunciado.

Como a matriz dos termos independentes não é uma coluna de zeros, o sistema não é homogêneo.

Para discutir o sistema (saber se tem soluções e quantas), vamos transformá-lo num sistema equivalente, com forma triangular, através de transformações elementares, aplicadas na matriz $[A\,B]$ associada ao sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}_{+} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^{\cdot 3}_{+} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 3 & 5 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz já tem forma triangular geral, e determina um sistema de equações equivalente ao original. Como não temos pivô na nova coluna de termos independentes (última coluna), o sistema é possível, e como o número de pivôs é 3, inferior ao número de incógnitas, o sistema não é determinado. Temos um sistema possível indeterminado (com um conjunto infinito de soluções). Podemos resolver o sistema pelo método de substituição inversa, primeiro resolver de baixo para cima, em ordem às variáveis que acompanham os pivôs

$$\left.\begin{aligned} a+b+c+d &= 1 \\ 4b+3c+5d-5e+f &= 5 \\ c+d+e+f &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= 1-b-c-d \\ b &= \frac{1}{4}(5-3c-5d+5e-f) \\ c &= 1-d-e-f \\ & d,e,f \in \mathbb{R} \text{ arbitrários} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 1-\frac{1}{2}(1-d+4e+f)-(1-d-e-f)-d = \frac{1}{2}(-1+d-2e+f) \\ b &= \frac{1}{4}(5-3(1-d-e-f)-5d+5e-f) = \frac{1}{4}(2-2d+8e+2f) = \frac{1}{2}(1-d+4e+f) \\ c &= 1-d-e-f \\ & d,e,f \in \mathbb{R} \text{ arbitrários} \end{aligned}\right\}$$

As matrizes X procuradas são aquelas com a forma:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+d-2e+f) & \frac{1}{2}(1-d+4e+f) \\ (1-d-e-f) & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

onde d, e, f são parâmetros reais que podem ser escolhidos arbitrariamente.