Interpolação Polinomial

Análise Numérica

Artur M. C. Brito da Cruz

Escola Superior de Tecnologia
Instituto Politécnico de Setúbal

2015/2016 [1]

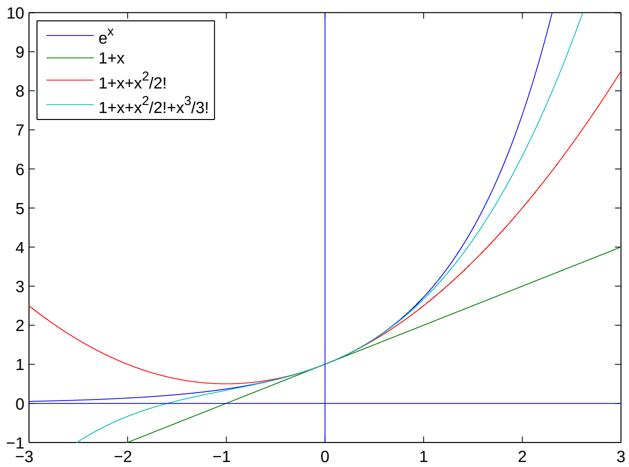
IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

[1] versão 20 de Setembro de 2017

Conteúdo

1 Introdução

Para calcular as funções seno, coseno, exponencial, etc... o computador recorre a aproximações dessas funções através de polinómios. Os modelos mais modernos dessas aproximações usam as funções racionais, que são quocientes de polinómios. Uma das primeiras ferramentas matemáticas que se usa para aproximar essas funções é a fórmula de Taylor.



Teorema. *Sejam f uma função $f \in C^{n+1}([a,b])$ e $x_0 \in [a,b]$. Se $x \in [a,b]$, então*

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x),$$

onde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^n + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

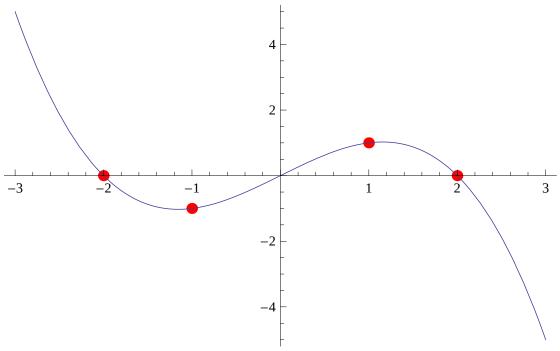
é um polinómio que pode ser ser usado para aproximar $f(x)$ e

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

é o erro da aproximação para algum valor c entre x e x_0.

O objectivo da interpolação polinomial é obter um polinómio que aproxime uma dada função f. Usualmente, são dados $n+1$ pontos no plano e pretende-se determinar o polinómio de grau n, designado por **polinómio interpolador**, que passe por esses pontos. Ou seja, dados os valores $x_0, x_1, \ldots, x_n$, **nós de interpolação**, e $y_0, y_1, \ldots, y_n$, **valores nodais**, pretende-se determinar um polinómio P_n tal que

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots n.$$



Teorema. *Dados* $n+1$ *pontos distintos* (x_i, y_i), *com* $x_i \neq x_j$ *para* $i \neq j$ *e* $i, j = 0, 1, \ldots, n$, *então existe um e um só polinómio* P *de grau* n, *tal que*

$$P(x_i) = y_i, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n.$$

Exemplo. *Determine-se o polinómio interpolador de grau menor ou igual a 2 para o seguinte suporte de interpolação:*

x_i	-1	0	1
y_i	2	3	2

Pretende-se obter o polinómio

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

que satisfaz as igualdades $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2$. *Ora,*

$$\begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ P(x_2) = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 = 3 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -1 \\ a_0 = 3 \\ a_1 = 0 \end{cases}.$$

Logo, o polinómio interpolador é

$$P(x) = 3 - x^2.$$

2 Interpolação de Lagrange

Dados dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), o polinómio de grau 1 que passa pelos dois pontos é

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Verifica-se que

$$P_1(x_0) = y_0$$

e

$$P_1(x_1) = y_1.$$

O matemático francês Joseph Louis Lagrange reparou que

$$P_1(x) = \frac{y_0(x_1 - x_0) - y_0(x - x_0)}{x_1 - x_0} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

donde

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1.$$

Assim,

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} L_k(x) y_k,$$

onde

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Teorema. *O polinómio interpolador P_n, de grau menor ou igual a n, associado aos valores nodais $y_0, y_1, \ldots, y_n$ dos nós distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é dado por*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i$$

em que

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

*O polinómio P_n denomina-se por **polinómio interpolador de Lagrange** e as funções $L_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, designam-se por **polinómios de Lagrange**.*

Demonstração. Por construção, o polinómio tem grau menor ou igual a n. Considere-se os $n+1$ polinómios de Lagrange,

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}.$$

Note-se que

$$L_i(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} = 1$$

e para $k \neq i$ e $k = 0, 1, \ldots, n$

$$L_i(x_k) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x_k - x_j)}{(x_i - x_j)} = 0.$$

Assim, para $i = 0, \ldots, n$

$$P_n(x_i) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x_i)\, y_i = y_i.$$

$\square$

Exemplo. *Dada a tabela da função* $f(x)=\sqrt{x}$,

$$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 4 \\ \hline f\left(x\right) & 1 & 1.41 & 2 \end{array},$$

obtenha-se o polinómio interpolador de Lagrange e o seu valor em $x=3$.

Procura-se $P_2\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2$ *tal que*

$$P_2\left(x\right)=\sum_{i=0}^{2}L_i\left(x\right)f_i,$$

com $f_i=f(x_i)$ *para todo o* $i=0,1,2$.

Os polinómios de Lagrange são dados por

$$\begin{aligned} L_0\left(x\right) &= \frac{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}{\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)}=\frac{\left(x-2\right)\left(x-4\right)}{\left(1-2\right)\left(1-4\right)} \\ &= \frac{1}{3}\left(x-2\right)\left(x-4\right)=\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{8}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1\left(x\right) &= \frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_2\right)}{\left(x_1-x_0\right)\left(x_1-x_2\right)}=\frac{\left(x-1\right)\left(x-4\right)}{\left(2-1\right)\left(2-4\right)} \\ &= -\frac{1}{2}\left(x-1\right)\left(x-4\right)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}-2 \end{aligned}$$

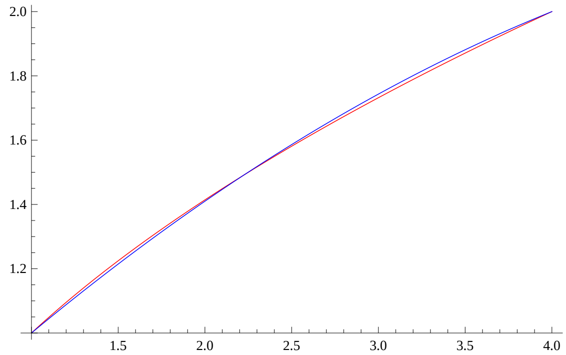
e

$$\begin{aligned} L_2\left(x\right) &= \frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)}{\left(x_2-x_0\right)\left(x_2-x_1\right)}=\frac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{\left(4-1\right)\left(4-2\right)} \\ &= \frac{1}{6}\left(x-1\right)\left(x-2\right)=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} P_2\left(x\right) &= L_0\left(x\right)f_0+L_1\left(x\right)f_1+L_2\left(x\right)f_2 \\ &= \frac{1}{3}\left(x-2\right)\left(x-4\right)\times 1-\frac{1}{2}\left(x-1\right)\left(x-4\right)\times 1.41 \\ &\quad +\frac{1}{6}\left(x-1\right)\left(x-2\right)\times 2 \\ &= -\frac{0.23}{6}x^2+\frac{1.05}{2}x+\frac{1.54}{3}\approx -0.383x^2+0525x+0.513. \end{aligned}$$

O gráfico mostra as diferenças entre a função original f, *a encarnado, e o polinómio interpolador* P_2, *a azul.*



O valor do polinómio em $x=3$, ou seja uma aproximação de $\sqrt{3}$, é

$$P_2(3) = -\frac{0.23}{6} \times 3^2 + \frac{1.05}{2} \times 3 + \frac{1.54}{3} \approx 1.743.$$

No seguinte teorema é apresentada uma fórmula para o cálculo do erro de interpolação.

Teorema. *Sejam $f \in C^{n+1}([a,b])$ e $P_n(x)$ o polinómio interpolador de grau menor ou igual a n associado aos nós distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ de f. Então, para cada $x \in [a,b]$ existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Como na prática não se conhece o valor de c, a fórmula exacta do erro de interpolação não pode ser utilizada. Seja M_{n+1} tal que para $x \in [a,b]$,

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leqslant M_{n+1}.$$

Então,

$$|E_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|.$$

Exemplo. *Considere-se a função*

$$f(x) = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

e os pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ tais que $x_1 - x_0 = 0.01$ e $x_1 \geqslant x_0 \geqslant 1$. Determine-se o polinómio interpolador de Lagrange

$$\begin{aligned} P_1(x) &= L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 \\ &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \log_{10} x_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \log_{10} x_1 \end{aligned}$$

com $f_i = f(x_i)$ para todo o $i = 0, 1$. O erro da interpolação, para cada $x \in [x_0, x_1]$, é dado por

$$E_1(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)(x - x_1), \quad \text{com } c \in [x_0, x_1].$$

Como

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 10} \quad \text{e} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln 10} \approx -\frac{0.434}{x^2},$$

tem-se

$$|f(x) - P_1(x)| = \left| \frac{0.434}{2! c^2}(x - x_0)(x - x_1) \right|, \quad \text{com } c \in [x_0, x_1].$$

Assim para $x \in [x_0, x_1]$ vem

$$\begin{aligned} |f(x) - P_1(x)| &\leqslant \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} \left| \frac{0.434}{2! c^2}(x - x_0)(x - x_1) \right| \\ &= |(x_1 - x_0)| \, |(x_1 - x_0)| \times \frac{0.217}{x_0^2} \\ &= |(x_1 - x_0)|^2 \frac{0.217}{x_0^2} \\ &= 0.01^2 \times \frac{0.217}{1^2} = 2.17 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

3 Fórmula de Newton com diferenças divididas

O polinómio interpolador de Lagrange exige demasiados cálculos quando o grau do polinómio é grande. Além disso, o polinómio interpolador de Lagrange está associado a um determinado conjunto de nós e uma mudança de posição ou do número destes altera completamente o polinómio.

Um polinómio P_n de grau n pode ser apresentado na seguinte forma, designada por **fórmula de Newton**,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

onde para $i = 0, \ldots, n-1$, os parâmetros x_i, são designados por **centros do polinómio** e os coeficientes a_i são determinados de modo a que P_n seja o polinómio interpolador associados aos nós $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ e aos valores nodais $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, isto é,

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= y_0 \\ P_n(x_1) &= y_1 \\ &\vdots \\ P_n(x_{n-1}) &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

Conclui-se, então que

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 \\ a_1 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ a_2 &= \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Considere-se $y_i = f(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$ para alguma função f. Chamam-se **diferenças divididas de ordem** i relativamente aos argumentos $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+i}$ de uma função f a

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f_{x_k} \text{ (ordem 0)} \\ f[x_k, x_{k+1}] &= \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} \text{ (ordem 1)} \\ f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] &= \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} \text{ (ordem 2)} \\ &\vdots \\ f[x_k, \ldots, x_{k+i}] &= \frac{f[x_{k+1}, \ldots, x_{k+i}] - f[x_k, \ldots, x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_k} \text{ (ordem } i\text{).} \end{aligned}$$

Em particular,

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{e} \quad f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}.$$

A tabela seguinte apresenta a forma como as diferenças divididas se distribuem.

x	f	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$	$\ldots$
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	$\ldots$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$	$\vdots$	
		$f[x_2,x_3]$	$\vdots$		
x_3	$f(x_3)$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$				

Teorema. *Sejam f uma função e $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pontos distintos de $[a,b]$. Então, o **polinómio interpolador de Newton com diferenças divididas** de grau menor ou igual a n é dado por*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots \\ &\quad \ldots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \\ &= f(x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} f[x_0,\ldots,x_{i+1}](x-x_0)\cdots(x-x_i)\,. \end{aligned}$$

Na prática o interesse desta fórmula é a possibilidade de obter o polinómio interpolador de forma recursiva. De facto, quando se acrescenta um ponto à interpolação, há somente que adicionar uma parcela ao polinómio obtido anteriormente.

O erro de interpolação obtém-se da igualdade

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = f[x,x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\,.$$

No caso de f ser $n+1$ vezes diferenciável no intervalo $[a,b]$, em que $[a,b]$ é o menor intervalo que contém $x, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, então para algum c tal que $a < c < b$ verifica-se que

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &= \left|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| \\ &\leqslant |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \underbrace{\max_{a\leqslant z\leqslant b}\left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\right|}_{M} \\ &= |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|\,M. \end{aligned}$$

Exemplo. *Considere-se a função $f(x) = \sqrt{x}$ nos pontos*

$$(1,1)\,,(3,1.732)\,,(4,2)\ \ e\ \ (5,2.236)$$

e calcule-se uma aproximação de $\sqrt{2}$.

A tabela das diferenças divididas arredondadas, a 4 casas decimais, é

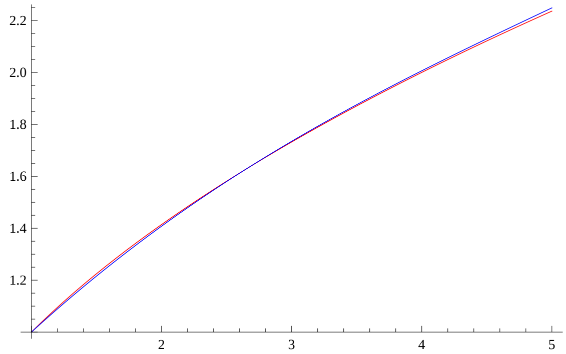
x	f	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$
1	1			
		0.366		
3	1.732		-0.0327	
		0.268		0.0042
4	2		-0.016	
		0.236		
5	2.236			

.

Assim, o polinómio interpolador é

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(1) + f[1,3](x-1) + f[1,3,4](x-1)(x-3) + f[1,3,4,5](x-1)(x-3)(x-4) \\ &= 1 + 0.366 \times (x-1) + (-0.0327) \times (x-1)(x-3) + 0.0042 \times (x-1)(x-3)(x-4) \\ &= 0.0042x^3 - 0.0663x^2 + 0.5766x + 0.4855. \end{aligned}$$

O gráfico mostra as diferenças entre a função original f, a encarnado, com o polinómio interpolador P_3, a azul.



Portanto, o valor aproximado de $\sqrt{2} = f(2) \approx P_3(2)$ é

$$P_3(2) = 0.0042 \times 2^3 - 0.0663 \times 2^2 + 0.5766 \times 2 + 0.4855 = 1.4071.$$

4 Fórmula de Gregory-Newton com diferenças finitas

Uma condição que simplifica a fórmula de Newton é a de que os nós da interpolação $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ estão igualmente espaçados, isto é, para $0 \leqslant i \leqslant n-1$

$$h = x_{i+1} - x_i = \frac{x_n - x_0}{n},$$

onde h é distância entre quaisquer dois nós consecutivos.

Definição. *Chama-se de* ***diferença finita (descendente) de primeira ordem*** *de f, para $x = x_i$, ao valor*

$$\triangle f(x_i) = \triangle f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

De um modo geral, a ***diferença finita (descendente) de ordem*** k $(k \geqslant 2)$ *de* f*, para* $x = x_i$*, define-se por*

$$\begin{aligned} \triangle^2 f_i &= \triangle\left(\triangle f_i\right) = \triangle f_{i+1} - \triangle f_i, \\ &\vdots \\ \triangle^k f_i &= \triangle\left(\triangle^{k-1} f_i\right) = \triangle^{k-1} f_{i+1} - \triangle^{k-1} f_i. \end{aligned}$$

A tabela seguinte apresenta a forma como se distribuem as diferenças finitas.

x	f	$\triangle f$	$\triangle^2 f$	$\triangle^3 f$	$\cdots$
x_0	$f(x_0)$				
		$\triangle f_0$			
x_1	$f(x_1)$		$\triangle^2 f_0$		
		$\triangle f_1$		$\triangle^3 f_0$	$\ldots$
x_2	$f(x_2)$		$\triangle^2 f_1$	$\vdots$	
		$\triangle f_2$	$\vdots$		
x_3	$f(x_3)$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$				

Exemplo. *A tabela de diferenças finitas de* $f(x) = \log_{10} x$*, para os nós* $1, 3, 5, 7, 9$ *é:*

x	f	$\triangle f$	$\triangle^2 f$	$\triangle^3 f$	$\triangle^4 f$
1	0				
		0.47712			
3	0.47712		-0.25527		
		0.22185		0.17955	
5	0.69897		-0.07572		-0.14082
		0.14613		0.03873	
7	0.84510		-0.03699		
		0.10914			
9	0.95424				

.

Exemplo. *Para* $f(x) = x^3$*, a diferença de primeira ordem de* f *para uma distância* h *fixa é dada por*

$$\begin{aligned} \triangle f(x) &= f(x+h) - f(x) \\ &= (x+h)^3 - x^3 \\ &= x^3 + h^3 + 3x^2 h + 3xh^2 - x^3 \\ &= h^3 + 3h^2 x + 3hx^2 \end{aligned}$$

que é um polinómio de grau 2.

Relacione-se agora o conceito de diferença finita com o de diferença finita. A definição de diferença dividida de primeira ordem é

$$f\left[x_0, x_1\right] = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0} = \frac{\triangle f_0}{h},$$

donde

$$\triangle f_0 = hf\left[x_0, x_1\right].$$

Do mesmo modo,

$$\triangle f_1 = hf\left[x_1, x_2\right].$$

Se se recorrer à definição de diferença finita de ordem 2, obtém-se

$$\begin{aligned}
\triangle^2 f_0 &= \triangle f_1 - \triangle f_0 \\
&= hf\left[x_1, x_2\right] - hf\left[x_0, x_1\right] \\
&= h\left(f\left[x_1, x_2\right] - f\left[x_0, x_1\right]\right) \\
&= h2h\frac{f\left[x_1, x_2\right] - f\left[x_0, x_1\right]}{2h} \\
&= 2h^2\frac{f\left[x_1, x_2\right] - f\left[x_0, x_1\right]}{x_2 - x_0} \\
&= 2h^2 f\left[x_0, x_1, x_2\right]
\end{aligned}$$

donde

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\triangle^2 f_0}{2h_2}.$$

Em geral, mostra-se que

$$\triangle^n f_i = n!h^n f\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n}\right],$$

donde

$$f\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n}\right] = \frac{\triangle^n f_i}{n!h^n}.$$

Em particular, para $i = 0$,

$$f\left[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\right] = \frac{\triangle^n f_0}{n!h^n}.$$

Aplicando estas relações à fórmula de Newton com diferenças divididas, obtém-se

$$\begin{aligned}
P_n\left(x\right) &= f(x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} f\left[x_0, \ldots, x_{i+1}\right]\left(x - x_0\right)\cdots\left(x - x_i\right) \\
&= f(x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\triangle^{i+1} f_0}{(i+1)!h^{i+1}}\left(x - x_0\right)\cdots\left(x - x_i\right) \\
&= f(x_0) + \frac{\triangle f_0}{h}\left(x - x_0\right) + \frac{\triangle^2 f_0}{2!h^2}\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) + \ldots \\
&\quad \ldots + \frac{\triangle^n f_0}{n!h^n}\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\ldots\left(x - x_{n-1}\right).
\end{aligned}$$

A esta expressão dá-se o nome de **fórmula de Gregory-Newton**.

Ao usar a substituição $x = x_0 + sh$, tem-se que

$$\begin{aligned}
x - x_0 &= sh \\
x - x_1 &= x_0 + sh - x_1 = x_0 + sh - x_0 - h = h\,(s-1) \\
x - x_2 &= x_0 + sh - x_2 = x_0 + sh - x_0 - 2h = h\,(s-2) \\
&\vdots \\
x - x_{n-1} &= x_0 + sh - x_{n-1} = x_0 + sh - x_0 - (n-1)\,h = h\,(s-n+1)\,.
\end{aligned}$$

Como tal, a **fórmula de Gregory-Newton** pode ser escrita na seguinte **forma simplificada**

$$P_n\,(s) = f(x_0) + \triangle f_0 s + \frac{\triangle^2 f_0}{2!} s\,(s-1) + \ldots + \frac{\triangle^n f_0}{n!} s\,(s-1)\,(s-2)\ldots(s-n+1)\,.$$

Exemplo. *Considere-se o suporte de interpolação*

$$\{(-2,-25)\,,(0,3)\,,(2,7)\,,(4,83)\,,(6,327)\}$$

de uma certa função f. Calcule-se o valor aproximado de $f(-1)$ e de $f(4.5)$.

A tabela de diferenças finitas é

x	f	$\triangle f$	$\triangle^2 f$	$\triangle^3 f$	$\triangle^4 f$
-2	-25				
		28			
0	3		-24		
		4		96	
2	7		72		0
		76		96	
4	83		168		
		244			
6	327				

Assim, pela fórmula de Gregory-Newton simplificada, o polinómio interpolador de grau 3 é

$$\begin{aligned}
P_3\,(s) &= f(x_0) + \triangle f_0 s + \frac{\triangle^2 f_0}{2!} s\,(s-1) + \frac{\triangle^3 f_0}{3!} s\,(s-1)\,(s-2) \\
&= -25 + 28s + \frac{-24}{2!} s\,(s-1) + \frac{96}{3!} s\,(s-1)\,(s-2) \\
&= 16s^3 - 60s^2 + 72s - 25.
\end{aligned}$$

Para obter os valores aproximados de $f(-1)$ e $f(4.5)$, basta calcular o valor de s para cada caso. Para $x = -1$,

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{-1+2}{2} = 0.5,$$

donde

$$P_3\,(0.5) = 16 \times 0.5^3 - 60 \times 0.5^2 + 72 \times 0.5 - 25 = -2.$$

Assim,

$$f(-1) \approx -2.$$

Para $x = 4.5$,

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{4.5 + 2}{2} = 3.25.$$

Logo,

$$f(4.5) \approx P_3\,(3.25) = 124.5.$$

5 Interpolação inversa

O objectivo da interpolação é encontrar um polinómio que aproxime uma certa função f tal que $f\,(x_i) = y_i$ e em que os $n+1$ nós e os valores nodais estão tabelados

x_i	x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

O objectivo da **interpolação inversa** consiste em, dado y não tabelado, encontrar um valor aproximado x tal que $f\,(x) = y$.

A maneira mais usual de resolução da interpolação inversa é por **inversão de tabela**. Para $(y_i, x_i) = (y_i, f^{-1}(y_i))$, $0 \leqslant i \leqslant n$, com $y_i \neq y_j$ $(i \neq j)$ existirá um polinómio interpolador $P_n(y)$ da função inversa $g(y) = f^{-1}(y) = x$, **caso exista a inversa de** f. Assim, é necessário que f seja injectiva no intervalo $[x_0, x_n]$. Caso f não seja injectiva em $[x_0, x_n]$, retira-se o menor número possível de nós ao suporte de forma a garantir a injectividade de f e utiliza-se a interpolação inversa nessa restrição do suporte.

Para a obtenção do polinómio interpolador pode-se escolher qualquer um dos métodos indicados anteriormente. O mais usual é usar a fórmula de Newton com diferenças divididas:

$$P_n\,(y) = x_0 + g\,[y_0, y_1]\,(y - y_0) + \ldots + g\,[y_0, \ldots, y_n]\,(y - y_0)\ldots(y - y_{n-1})\,.$$

Exemplo. *Considere a tabela seguinte de uma certa função* f.

x	0.6	0.8	1.0	1.2
$f\,(x)$	-0.2607	0.0206	0.3012	0.5697

Indique-se uma aproximação para um zero de f *no intervalo* $I =]0.6, 0.8[$.

Assume-se que f *é contínua em* I, *donde o zero se encontra nesse intervalo. As diferenças divididas são*

y	$x = g(y)$	$g\,[\ ,\ ]$	$g\,[\ ,\ ,\ ]$	$g\,[\ ,\ ,\ ,\ ]$
-0.2607	0.6			
		0.7110		
0.0206	0.8		0.0032	
		0.7128		0.0666
0.3012	1		0.0585	
		0.7449		
0.5697	1.2			

Logo,

$$\begin{aligned}
P_3(y) &= x_0 + g[y_0, y_1](y - y_0) + g[y_0, y_1, y_2](y - y_0)(y - y_1) \\
&\quad + g[y_0, y_1, y_2, y_3](y - y_0)(y - y_1)(y - y_2) \\
&= 0.6 + 0.7110(y + 0.2607) + 0.0032(y + 0.2607)(y - 0.0206) \\
&\quad + 0.0666(y + 0.2607)(y - 0.0206)(y - 0.3012) \\
&= 0.0666y^3 - 8.6926 \times 10^{-4} y^2 + 0.70659y + 0.78545.
\end{aligned}$$

Então, a aproximação do zero de f é

$$\bar{x} = P_3(0) = 0.78545.$$