IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA I

1º Semestre 2019/20
1º Teste

23 de Novembro de 2019 — Duração: 2h

Instruções:

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- Não pode responder a diferentes questões numa mesma folha de resposta.
- O abandono da sala só poderá efetuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É permitida a consulta de uma folha A4 manuscrita pelo aluno.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de equipamentos eletrónicos durante a prova.
- **Justifique convenientemente todas as respostas.**

Nos exercícios 1, 2, 3 e 5 não poderá ser utilizada a Regra de Cauchy no cálculo de limites.

1. Calcule os seguintes limites:

[1.0] (a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}$;

[1.0] (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\operatorname{sen}(x)}{2x+1}$.

[1.5] 2. Sendo $f(x)=\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}$, diga qual o significado da proposição seguinte e indique, justificando, se é verdadeira ou falsa:

$$\forall\delta>0\exists\varepsilon>0\forall x\in D_f\setminus\{1\}:|x-1|<\varepsilon\Rightarrow|f(x)-1|<\delta.$$

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a\operatorname{sen}(2x)}{x^2+x} & , \quad x<0\\[2ex] 1+xe^{-\frac{1}{1-x}} & , \quad 0<x<1\\[2ex] 5x-1 & , \quad x\geq 1\end{cases}\qquad (\text{com } a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}).$$

[2.5] (a) Determine o domínio da função f e estude a continuidade da mesma.

[0.5] (b) Indique, justificando, se a função f é diferenciável em $x = 1$.

[1.5] (c) Determine o valor de a para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto de abcissa $x = 0$ e indique esse prolongamento.

4. Considere a função g definida por

$$g(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

[2.0] (a) Caracterize a função inversa de g.

[1.0] (b) Determine, caso exista, o valor de x tal que, $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

5. Considere a função real de variável real definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln(1 - 2x) & , \quad x < 0 \\ \sqrt{3x+1} - 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

[2.0] (a) Mostre que a função f não é diferenciável no ponto de abcissa $x = 0$.

[2.0] (b) Indique o domínio da função f e determine, justificando, a sua derivada.

[1.0] (c) Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$.

[1.0] (d) Mostre que existe pelo menos um $c \in \,]-2, -1[$ tal que $f'(c) = 1 + \ln\left(\frac{3}{5}\right)$.

6. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = 2x + e^x$.

[1.5] (a) Mostre que a função g tem um único zero.

[1.5] (b) Calcule, justificando, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2 + x)}{g(x)}$.

Fim do teste