Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

(Primitivação e Integração)

Miguel Moreira e Miguel Cruz

Conteúdo

1 Primitivação

1.1 Noção de primitiva

Definição 1 *Se f e F são funções definidas no intervalo $[a,b]$, F é diferenciável em todos os pontos de $[a,b]$ e se para todo o $x \in [a,b]$,*

$$F'(x) = f(x),$$

diz-se que F é uma primitiva *de f em $[a,b]$.*

Observação 1 Nestas circunstâncias diz-se que f é **primitivável** em $[a,b]$.

Exemplo 1 As funções $F(x) = \sin x$ e $\mathrm{G}(x) = \sin x + 3$ são primitivas de $\cos x$ em $\mathbb{R}$ pois $(\sin x)' = (\sin x + 3)' = \cos x$. ■

Como se pode verificar, se F for uma primitiva de f, também $F + C$ (em que C é uma constante) é uma primitiva de f. Mas será que todas as primitivas de uma dada função diferem entre si de uma constante? O seguinte teorema responde afirmativamente a esta questão (mas só se F for uma primitiva de f **num intervalo**).

Proposição 1 *Sejam F e G duas primitivas de f no* ***intervalo*** *$[a,b]$. Então, $F(x) - G(x) = C$ (em que C é uma constante), isto é, F e G diferem entre si de uma constante.*

Dem. *Reparando que,*

$$\begin{aligned}(F(x) - G(x))' &= F'(x) - G'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0,\end{aligned}$$

deduz-se que $F - G$ é constante no intervalo $[a,b]$, em resultado de um corolário do teorema de Lagrange. ■.

Definição 2 Seja F a primitiva de uma função f no intervalo I, se nada for dito em contrário, denotamos por $Pf(x)$, $P_x f(x)$ ou $\int f(x)\,dx$ o conjunto das primitivas de f no intervalo I. Nestas circustâncias (e tendo em conta o resultado anterior)

$$Pf(x) = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\},$$

ou simplificadamente

$$Pf(x) = F(x) + C.$$

Função	Primitiva
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$x^\alpha, (\alpha \neq -1, x > 0)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Tabela 1: Tabela de primitivas elementares

Função	Primitiva
$\varphi'(x) \sin \varphi(x)$	$-\cos \varphi(x) + C$
$\varphi'(x) \cos \varphi(x)$	$\sin \varphi(x) + C$
$\varphi'(x)\, \varphi(x)^\alpha, (\alpha \neq -1, \varphi(x) > 0)$	$\frac{[\varphi(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$	$\ln\|\varphi(x)\| + C$
$\frac{\varphi'(x)}{1+[\varphi(x)]^2}$	$\arctan \varphi(x) + C$
$\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}}$	$\arcsin \varphi(x) + C$

Tabela 2: Tabela de primitivas imediatas

1.2 Algumas primitivas imediatas

Na tabela 1 apresentamos algumas primitivas imediatas.

Reparando que

$$(F(\varphi(x)))' = \varphi'(x)\, F'(\varphi(x))$$

atendendo à regra de derivação da função composta concluí-se facilmente que $F(\varphi(x))$ é uma primitiva de $\varphi'(x)\, F'(\varphi(x))$.

Na tabela 2 apresentamos a versão mais geral da tabela 1.

1.3 Propriedades das primitivas

Proposição 2 *Sejam f e g funções primitiváveis no intervalo $[a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, no intervalo $[a,b]$:*

1. $P(f(x) + g(x)) = Pf(x) + Pg(x)$;
2. $P(\alpha f(x)) = \alpha P f(x)$;

Proposição 3 *Seja f uma função diferenciável no intervalo $[a,b]$. Então, no intervalo $[a,b]$,*

$$P_x f'(x) = f(x) + C.$$

Dem. *$(f(x)+C)' = f'(x)$.* ■

Proposição 4 *Toda a função contínua num intervalo é primitivável nesse intervalo.*

Dem. *Ver a parte 1 do teorema fundamental do cálculo integral (proposição 21).* ■

1.4 Técnicas de Primitivação

1.4.1 Primitivação por partes

Proposição 5 *Sejam f e g são funções com derivada contínua no intervalo $[a,b]$. Então, neste mesmo intervalo*

$$P\left(f'(x)\,g(x)\right) = f(x)\,g(x) - P\left(f(x)\,g'(x)\right).$$

Dem. *Da fórmula de derivação do produto,*

$$\left(f(x)\,g(x)\right)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x),$$

resulta

$$f'(x)\,g(x) = \left(f(x)\,g(x)\right)' - f(x)\,g'(x).$$

Notando que estas funções são todas primitiváveis pois são contínuas (proposição 4), deduz-se

$$\begin{aligned} P\left(f'(x)\,g(x)\right) &= P\left(\left(f(x)\,g(x)\right)'\right) - P\left(f(x)\,g'(x)\right) \\ &= f(x)\,g(x) - P\left(f(x)\,g'(x)\right), \end{aligned}$$

tendo em conta algumas das propriedades, já assinaladas, da primitivação. ■

Exemplo 2 Calcule $P\sin^2 x$.

Fazendo $f'(x) = \sin x$ e $g(x) = \sin x$, resulta $f(x) = -\cos x$ e $g'(x) = \cos x$. Aplicando a fórmula de primitivação por partes,

$$\begin{aligned} P(\sin x \sin x) &= -\cos x \sin x - P\left(-\cos^2 x\right) \\ &= -\cos x \sin x + P\left(1-\sin^2 x\right) \\ &= -\cos x \sin x + x - P\sin^2 x. \end{aligned}$$

Então,

$$P\sin^2 x = \frac{-\cos x \sin x + x}{2} + C.$$ ■

Exemplo 3 Calcule $P \ln x$.

Fazendo $f'(x) = 1$ e $g(x) = \ln x$ resulta $f(x) = x$ e $g'(x) = \frac{1}{x}$. Assim,

$$P \ln x = x \ln x - Px\frac{1}{x} = x(\ln x - 1) + C. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 4 Calcule Pxe^x.

Fazendo $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x$ resulta $f(x) = e^x$ e $g'(x) = 1$. Assim,

$$Pxe^x = xe^x - P1e^x = e^x(x-1) + C. \qquad \blacksquare$$

1.4.2 Primitivação por mudança de variável (ou substituição)

Comecemos por apresentar a seguinte notação para representar $f(g(t))$:

$$f(g(t)) = f(x)|_{x=g(t)}.$$

Proposição 6 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e $x = \varphi(t)$ uma aplicação com derivada contínua e que não se anula. Então,*

$$P_x f(x) = P_t f(\varphi(t))\varphi'(t)|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Dem. *Claramente $y = f(x)$ e $z = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ são funções primitiváveis no intervalo $[a,b]$ relativamente às variáveis x e t, respectivamente. Seja, $H(t)$ uma primitiva de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ e*

$$H\left(\varphi^{-1}(x)\right) = P_t f(\varphi(t))\varphi'(t)|_{t=\varphi^{-1}(x)},$$

mostremos que $\frac{d\left(H\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)}{dx} = f(x)$. Da regra de derivação da função composta e da função inversa deduz-se sucessivamente,

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(H\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)}{dx} &= \left.\frac{d(H(t))}{dt}\right|_{t=\varphi^{-1}(x)} \frac{d\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{dx} \\
&= f(\varphi(t))\varphi'(t)|_{t=\varphi^{-1}(x)} \left.\frac{1}{\varphi'(t)}\right|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\
&= f(x)\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)} \\
&= f(x). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Observação 2 Seguidamente apresentamos uma demonstração alternativa da proposição anterior.

Dem. Seja F uma primitiva de f e $H(t) = F(\varphi(t))$. Então

$$\begin{aligned} H'(t) &= F'_x(\varphi(t))\,\varphi'(t) \\ &= f(\varphi(t))\,\varphi'(t), \end{aligned}$$

o que mostra que $H(t) = F(\varphi(t))$ é uma primitiva de $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. Assim, se em H substituirmos $\varphi(t)$ por x (ou seja fizermos $t = \varphi^{-1}(x)$) obteremos $F(x)$. ■

Observação 3 Utilizando outra notação para representar o conceito de primitiva a fórmula de primitivação por substituição pode ser apresentada da forma seguinte:

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \left.\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= \left.\int f(\varphi(t))\,\frac{d\varphi}{dt}dt\right|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \end{aligned}$$

Exemplo 5 Calcule $P\frac{1}{(2x+1)^2}$.

Seja $t = 2x + 1$, isto é, façamos $x = \varphi(t) = \frac{t-1}{2}$. Da fórmula de primitivação por substituição,

$$\begin{aligned} P_x\frac{1}{(2x+1)^2} &= \left.P_t\frac{\varphi'(t)}{(2\varphi(t)+1)^2}\right|_{t=2x+1} \\ &= \left.P_t\frac{\frac{1}{2}}{t^2}\right|_{t=2x+1} \\ &= -\frac{1}{2}\left.t^{-1}\right|_{2x+1} \\ &= -\frac{1}{2\left(2x+1\right)} + C. \end{aligned}$$ ■

Exemplo 6 Calcule $Pe^{\sqrt{2-x}}$.

Façamos $\sqrt{2-x} = t$, isto é, $x = \varphi(t) = 2 - t^2$. Assim, $\varphi'(t) = -2t$ e

$$\begin{aligned} P_x e^{\sqrt{2-x}} &= \left.P_t\varphi'(t)\,e^{\sqrt{2-\varphi(t)}}\right|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= \left.P_t(-2t)\,e^t\right|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= \left.-2Pte^t\right|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= \left.-2\left(e^t(t-1)\right)\right|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= -2\left(e^{\sqrt{2-x}}\left(\sqrt{2-x}-1\right)\right) + C. \end{aligned}$$ ■

Exemplo 7 Calcule $P\sqrt{4-x^2}$.

Seja $x=\varphi(t)=2\sin t$. Então, $\varphi'(t)=2\cos t$ e

$$\begin{aligned}
P_x\sqrt{4-x^2} &= P_t\varphi'(t)\sqrt{4-\varphi(t)^2}\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\
&= P_t 2\cos t\sqrt{4-(2\sin t)^2}\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\
&= 4P_t\cos^2 t\Big|_{t=\arcsin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
P_t\cos^2 t &= P_t\left(1-\sin^2 t\right)= \\
&= t-\frac{-\cos t\sin t+t}{2} \\
&= \frac{t+\cos t\sin t}{2}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
P_x\sqrt{4-x^2} &= 4\frac{t+\cos t\sin t}{2}\Big|_{t=\arcsin\frac{x}{2}} \\
&= 2\left(\arcsin\frac{x}{2}+\cos\arcsin\frac{x}{2}\sin\arcsin\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\left(\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)+C \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Uma das principais dificuldades na primitivação por substituição reside na escolha da mudança de variável adequada. Em numerosas situações encontram-se estudadas substituições aconselhadas, tais como as que se apresentam na tabela 3, na qual f é uma função racional dos argumentos indicados. A utilização destas substituições permite transformar a função a primitivar numa função racional que pode ser primitivada por decomposição.

Exemplo 8 Calcule $P\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}$.

Notemos que $a>0$ em x^2+c. Utilizemos por isso a primeira das substituições recomendada na tabela 3,

$$\sqrt{x^2+c}=t+x.$$

Primitiva	**Substituição**
$Pf\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), a>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$
$Pf\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), c>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$
$Pf\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right),$ $b^2-4ac>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\, t,$ α raíz de ax^2+bx+c
$Pf\left(e^x\right)$	$x = \ln t$

Tabela 3: Primitivação por substituição

Assim, $x = \varphi(t) = \frac{c-t^2}{2t}$ e $\varphi'(t) = -\frac{t^2+c}{2t^2}$ e

$$\begin{aligned} P_x \frac{1}{\sqrt{x^2+c}} &= -P_t \frac{1}{t+\frac{c-t^2}{2t}} \frac{t^2+c}{2t^2}\Bigg|_{t=\sqrt{x^2+c}-x} \\ &= -P_t \frac{1}{t}\Bigg|_{t=\sqrt{x^2+c}-x} \\ &= -\ln\left|\sqrt{x^2+c}-x\right| + C. \end{aligned}$$

Exemplo 9 Calcule $P\frac{e^x+2e^{-x}}{e^{2x}}$.

Notemos que

$$\frac{e^x+2e^{-x}}{e^{2x}} = \frac{e^{2x}+2}{e^{3x}}$$

e façamos $x = \varphi(t) = \ln t$. Assim, $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$ e

$$P_x \frac{e^x+2e^{-x}}{e^{2x}} = P_t \frac{t^2+2}{t^3}\frac{1}{t}\Bigg|_{t=e^x} \qquad \blacksquare$$

Exemplo 10 Calcule $P\frac{1+\sqrt{x^2-3x-2}}{x-1}$.

Notemos que $a>0$ e que x^2-3x-2 tem duas raízes reais distintas pois $b^2-4ac>0$. Podemos recorrer à primeira ou última das substituições assinaladas na tabela 3. Utilizando a primeira das substituições, façamos

$$\sqrt{x^2-3x-2} = t + x.$$

Assim,

$$x = \varphi(t) = -\frac{2+t^2}{3+2t}$$

e

$$\varphi'(t) = -\frac{2t^2+6t-4}{(3+2t)^2}.$$

Resultando,

$$P_x \frac{1+\sqrt{x^2-3x-2}}{x-1} = P_t \frac{1+t-\frac{2+t^2}{3+2t}}{-\frac{2+t^2}{3+2t}-1}\left(-\frac{2t^2+6t-4}{(3+2t)^2}\right)\Bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} \qquad \blacksquare$$

No próximo ponto iremos ver como primitivar funções racionais.

1.4.3 Primitivação por decomposição

A decomposição é uma técnica de primitivação de funções racionais que consiste em decompor em fracções elementares de primitivação imediata ou quase imediata a função racional que se pretende primitivar.

Proposição 7 *Seja $F(x)$ uma função racional. É possível escrever F na forma*

$$F(x) = H(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

em que H, P e Q representam polinómios tais que o grau de P é inferior ao grau do polinómio mónico[1] Q.

Dem. *Omitida.* $\blacksquare$

Exemplo 11 Escreva na forma anteriormente indicada a função racional $F(x) = \frac{x^4-3x^2+x}{3x^3+x}$.

Apliquemos o algoritmo da divisão ao quociente F. Facilmente se verifica que

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x}{3} + \frac{-\frac{10}{3}x+1}{3x^2+1} \\ &= \frac{x}{3} + \frac{-\frac{10}{9}x+\frac{1}{3}}{x^2+\frac{1}{3}}. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Assim, o cálculo da primitiva de F fica reduzido ao cálculo da primitiva elementar do polinómio H e da primitiva da fracção racional P/Q com as características atrás indicadas:

$$\int F(x)\,dx = \int H(x)\,dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Proposição 8 *Sejam P e Q polinómios tais que o grau de P é inferior ao grau do polinómio mónico Q. Então P/Q pode decompor-se numa soma de termos elementares dos tipos seguintes:*

[1] um polinómio é mónico se o coeficiente do termo de maior grau é 1.

função	Primitiva
$\frac{a}{(x-r)^k}, k \geq 1,\ k \in \mathbb{N}$	$\begin{cases} a\ln\lvert(x-k)\rvert + C, \text{ se } k=1 \\ \frac{a(x-r)^{-k+1}}{-k+1}, \text{ se } k>1 \end{cases}$
$\frac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]}$	$\frac{b\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)}{2} + \frac{(b\alpha+d)}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$
$\frac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k}, k > 1,\ k \in \mathbb{N}$	$\frac{b\left(1+t^2\right)^{-k+1}}{2\beta^{2k-2}(1-k)} + \frac{b\alpha+d}{\beta^{2k-1}}\int \frac{1}{(1+t^2)^k}dt,\ t=\frac{x-\alpha}{\beta}$
$\frac{1}{(1+t^2)^k}, k > 1,\ k \in \mathbb{N}$	por partes fazendo, $\frac{1}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{t}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^k}$

Tabela 4: Primitivação por decomposição

1. $\frac{a}{(x-r)^k}$, $a,\ r \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ *e* $k \geq 1$

2. $\frac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k}$, $\alpha,\ \beta,\ b,\ d \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ *e* $k \geq 1$.

Dem. *Omitida.* ∎

Desta forma conhecendo as primitivas dos termos elementares $\frac{a}{(x-r)^k}$ e $\frac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k}$ o problema do cálculo de $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ fica resolvido. Na tabela 4 apresentamos as primitivas indicadas.

Seguidamente vamos verificar como podemos decompor P/Q.

Proposição 9 *Consideremos o polinómio mónico Q e todas as suas raízes reais r_k $(1 \leq k \leq s)$ e complexas $c_l = \alpha_l + \beta_l i$ $(1 \leq l \leq t)$ assim como as respectivas multiplicidades μ_k $(1 \leq k \leq s)$ das raízes reais e da raízes complexas ν_l $(1 \leq l \leq t)$.*

Raízes:	*Multiplicidade:*
r_1	μ_1
$\vdots$	$\vdots$
r_s	μ_s
$c_1 = \alpha_1 \pm \beta_1 i$	ν_1
$\vdots$	$\vdots$
$c_t = \alpha_t \pm \beta_t i$	ν_t

Então o polinómio Q pode ser escrito da seguinte forma,

$$Q(x) = (x-r_1)^{\mu_1} \ldots (x-r_s)^{\mu_s} \left((x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2\right)^{\nu_1} \ldots \left((x-\alpha_t)^2 + \beta_t^2\right)^{\nu_t}$$

Dem. *Omitida.* ∎

Exemplo 12 Decomponha na forma indicada o polinómio $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

Comecemos por observar que as raízes de Q são $r = 1$ e $c = \pm i$, qualquer delas de multiplicidade um. Então,

$$Q(x) = (x-1)\left(x^2+1\right). \qquad \blacksquare$$

Proposição 10 *Consideremos a função racional P/Q tal que o grau de P é menor do que o grau do polinómio mónico Q e todas as raízes reais r_k $(1 \leq k \leq s)$ e complexas $c_l = \alpha_l + \beta_l i$ $(1 \leq l \leq t)$,* ***deste último polinómio****, assim como as respectivas multiplicidades μ_k $(1 \leq k \leq s)$ das raízes reais e da raízes complexas ν_l $(1 \leq l \leq t)$. Então,*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{n=1}^{\mu_k} \frac{a_k^{(n)}}{(x-r_k)^n} + \sum_{l=1}^{t}\sum_{m=1}^{\nu_l} \frac{b_l^{(m)}x + d_l^{(m)}}{\left((x-\alpha_l)^2+\beta_l^2\right)^m}$$

Dem. *Omitida.* $\blacksquare$

De referir que os coeficientes desconhecidos na decomposição anterior podem ser calculados pelo método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 13 Decomponha da maneira indicada as funções racionais

1. $F_1(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^3(x-1)}$

$$\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^3(x-1)} = \frac{a_1}{(x+1)} + \frac{a_2}{(x+1)^2} + \frac{a_3}{(x+1)^3} + \frac{a_4}{(x-1)}.$$

2. $F_2(x) = \frac{x^3-1}{x(x^2+1)^2}$

$$\frac{x^3-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{a_1}{x} + \frac{b_1x+d_1}{(x^2+1)} + \frac{b_2x+d_2}{(x^2+1)^2}.$$

3. $F_3(x) = \frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2} &= \frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)^2} \\ &= \frac{a_1}{(x-1)} + \frac{a_2}{(x+1)} + \frac{b_1x+d_1}{(x^2+1)} + \frac{b_2x+d_2}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

4. $F_4(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1} &= \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{a_1}{(x-1)} + \frac{b_1 x + d_1}{(x^2+1)}.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Exemplo 14 Decomponha em fracções elementares a função racional

$$F(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$$

e calcule os coeficientes indeterminados.

Do exemplo anterior,

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1} &= \frac{a_1}{(x-1)} + \frac{b_1 x + d_1}{(x^2+1)} \\ &= \frac{a_1(x^2+1)+(x-1)(b_1x+d_1)}{(x-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{(a_1+b_1)x^2+(d_1-b_1)x+(a_1-d_1)}{(x-1)(x^2+1)}.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}&\begin{cases} a_1+b_1=1 \\ d_1-b_1=2 \\ a_1-d_1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ b_1=0 \\ d_1=2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{(x^2+1)}\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

2 O Integral de Riemann

2.1 Partições de intervalos e somas de Riemann

Definição 3 *Seja $[a,b]$ um intervalo com $b>a$.*

1. *Uma* ***partição***[2] *de $[a,b]$ é um conjunto de pontos $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ tal que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

[2]ou *decomposição* de vértices P.

2. *A* ***norma*** *da partição* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *é o número (que é sempre maior ou igual a zero),*

$$\|P\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_{j-1}|.$$

3. *Um* ***refinamento*** *da partição* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *é uma partição* Q *de* $[a, b]$ *tal que* $P \subseteq Q$. *Nesta situação diz-se que* Q *é* ***mais fina*** *do que* P.

Exemplo 15 Sejam $I = [0, 1]$, $P = \{0, 0.1, 0.3, 0.5, 1\}$ e $Q = P \cup \{0.7\}$. P e Q são duas partições de I tais que $\|P\| = 0.5$ e $\|Q\| = 0.3$. Q é um refinamento da partição P pois $P \subseteq Q$. Naturalmente Q é mais fina do que P. ■

Definição 4 *Seja* $[a, b]$ *um intervalo fechado limitado,* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *uma partição de* $[a, b]$ *e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada. Chama-se* ***soma de Riemann*** *de* f *relativamente à partição* P *ao número*

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

com

$$t_j \in [x_{j-1}, x_j] \ \text{com } 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo 16 Represente e interprete geometricamente uma soma de Riemann de $f(x) = x^2$ em $[0, 1]$ e $P = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$.

Proposição 11 *Sejam* P *e* Q *partições de* $[a, b]$ *tal que* $P \subseteq Q$ *então* $\|P\| \geq \|Q\|$.

Dem. *Omitida.* ■

Definição 5 *(Convergência de uma soma de Riemann) Seja* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *uma partição de* $[a, b]$ *e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada.* ***Diz-se*** *que a soma de Riemann de* f *converge para o número* $I(f)$ *quando* $\|P\| \to 0$ *se para todo* $\delta > 0$ *existe uma partição* P_δ *de* $[a, b]$ *tal que*

$$P_\delta \subseteq P \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - I(f) \right| < \delta$$

para todas as escolhas de $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq n$. *Nestas circunstâncias*

$$I(f) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

2.2 Integrabilidade à Riemann

Definição 6 *Seja $[a,b]$ um intervalo com $b > a$. Diz-se que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é* ***integrável à Riemann*** *em $[a,b]$ se f é limitada em $[a,b]$ e se o limite*

$$I(f) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}),$$

existe. Nestas circunstâncias escreve-se

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

e diz-se que $\int_a^b f(x)\,dx$ é o ***integral definido*** *de f entre a e b.*

Na definição anterior f representa a chamada **função integranda**, x a **variável de integração**, dx o **acréscimo infinitésimal** associado a

$$\lim_{\|P\| \to 0} (x_j - x_{j-1})$$

e a e b os **limites de integração**.

Observação 4 No presente contexto e se nada for dito em contrário a expressão "função integrável" deverá entender-se "função integrável à **Riemann**".

Exemplo 17 As funções constantes $f(x) = k$, são integráveis à Riemann pois são limitadas, e $f(t_j) = k$ para todas as escolhas de $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$ para toda a partição P de $[a,b]$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} k(x_j - x_{j-1}) &= k \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \\ &= k(b-a). \end{aligned}$$

■

O seguinte resultado mostra que todas as funções contínuas são integráveis à Riemann.

Proposição 12 *As funções contínuas em intervalos fechados e limitados $[a,b]$, são integráveis à Riemann.*

Dem. Omitida. ■

O integral de Riemann de uma função positiva entre a e b pode interpretar-se geometricamente como a área da região do plano limitada superiormente pelo gráfico de f, inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

Exemplo 18 Consideremos a função $f(x) = x$ e o intervalo $[0, 1]$. Calculemos $\int_0^1 f(x)\, dx$.

Consideremos a partição diádica do intervalo indicado,

$$P_n = \{j/2^n : j = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$$

e a soma de Riemann,

$$\begin{aligned}
S(f, P) &= \sum_{j=1}^{j=2^n} f\left(\frac{j}{2^n}\right)\left(\frac{j}{2^n} - \frac{j-1}{2^n}\right) = \sum_{j=1}^{j=2^n} \frac{j}{2^n}\frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{j=1}^{j=2^n} \frac{j}{4^n} \\
&= \frac{1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n}{4^n} \\
&= \frac{(1 + 2^n)\, 2^n}{2 \times 4^n} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2^n} + 1\right)}{2}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2^n} + 1\right)}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

■

3 Propriedades do Integral de Riemman

3.1 Propriedades elementares

Vamos ver agora algumas propriedades importantes do integral de Riemann.

Proposição 13 (Linearidade do Integral) *Sejam f e g integráveis em $[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $f + g$ e αf são integráveis em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

e

$$\int_a^b (\alpha f(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dem. *Deixemos a demonstração da segunda igualdade como exercício e demonstremos a primeira. Comecemos por observar que $f+g$ é limitada em $[a,b]$. Seja $\delta>0$ e $\delta_1\leq\frac{\delta}{2}$. Existem partições P_{δ_1} e R_{δ_1} tais que*

$$P_{\delta_1}\subseteq P\Rightarrow\left|\sum_{j=1}^{n}f\left(t_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)-I\left(f\right)\right|<\delta_1=\frac{\delta}{2}$$

e

$$R_{\delta_1}\subseteq P\Rightarrow\left|\sum_{j=1}^{n}g\left(t_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)-I\left(g\right)\right|<\delta_1=\frac{\delta}{2}$$

para todas as escolhas de $t_j\in\left[x_{j-1},x_j\right],j=1,2,\ldots,n$ (porquê?). Consideremos a partição de $[a,b]$, $Q_\delta=P_{\delta_1}\cup R_{\delta_1}$. Então,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(f\left(t_j\right)+g\left(t_j\right)\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)-\left(I\left(f\right)+I\left(g\right)\right)\right| &=\\ \left|\sum_{j=1}^{n}f\left(t_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)-I\left(f\right)+\sum_{j=1}^{n}g\left(t_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)-I\left(g\right)\right| &\leq\\ \left|\sum_{j=1}^{n}f\left(t_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)-I\left(f\right)\right|+\left|\sum_{j=1}^{n}g\left(t_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)-I\left(g\right)\right| &< \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta\end{aligned}$$

se $Q_\delta\subseteq P$, para todas as escolhas de $t_j\in\left[x_{j-1},x_j\right],j=1,2,\ldots,n$ (porquê?). O que mostra que,

$$\int_a^b\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)dx=\int_a^b f\left(x\right)dx+\int_a^b g\left(x\right)dx \qquad \blacksquare$$

Proposição 14 *Se f é integrável em $[a,b]$ então f é integrável em todo o subintervalo $[c,d]$ de $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^c f\left(x\right)dx+\int_c^b f\left(x\right)dx,$$

para todo o $c\in\left]a,b\right[$.

Dem. *Omitida.* $\blacksquare$

Proposição 15 (Comparação de Integrais) *Sejam f e g integráveis em $[a,b]$ e $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ para todo $x\in\left[a,b\right]$, então*

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\leq\int_a^b g\left(x\right)dx. \tag{1}$$

Em particular se $m \leq f(x) \leq M$*,*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a). \tag{2}$$

Dem. *Seja* $h(x) = f(x) - g(x)$*. Então,* $h(x) \leq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$*, com* h *e a função constante* 0 *integráveis à Riemann (porquê?). Por outro lado,*

$$S(h,P) \leq S(0,P) = 0$$

para toda a partição de P *de* $[a,b]$*. Então,*

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} h(t_j)(x_j - x_{j-1}) \leq 0.$$

Da linearidade do integral (proposição 15), conclui-se

$$\begin{aligned}\int_a^b h(x)\,dx &= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \leq 0,\end{aligned}$$

o que mostra que

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

como se pretendia. ■

Proposição 16 *Seja* f *integrável em* $[a,b]$*, então* $|f|$ *é integrável em* $[a,b]$*,e*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dem. *Omitida.* ■

Proposição 17 *Seja* f *e* g *integráveis em* $[a,b]$*, então* fg *é integrável em* $[a,b]$*.*

Dem. *Omitida.* ■

Proposição 18 *Se* f *é integrável em* $[a,b]$ *então*

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0$$

para todo o $c \in [a, b]$.

Dem. *Seja* $c \in [a, b[$, $h > 0$ *tal que* $c + h \in [a, b[$ *e* M *o máximo de* f *em* $[a, b]$. *Então, das proposições 16 e 15,*

$$\begin{aligned}\left|\int_c^{c+h} f(x)\,dx\right| &\leq \int_c^{c+h} |f(x)|\,dx \\ &\leq M(c + h - c) \\ &\leq Mh.\end{aligned}$$

Fazendo $h \to 0$ *resulta* $\left|\int_c^{c+h} f(x)\,dx\right| \to 0$. *Deste facto resulta a tese. Análogamente se demonstra a situação* $c = b$. ■

Definição 7 *Seja* f *integrável em* $[a, b]$, *então*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Esta definição pode justificar-se recorrendo à noção de Integral de Riemann e permite generalizar algumas das propriedades já estudadas.

Proposição 19 (Teorema da média) *Seja* f *contínua em* $[a, b]$, *então existe* $c \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a). \tag{3}$$

Dem. *Naturalmente* f *é integrável (porquê?). Seja* m *e* M *o mínimo e o máximo de* f *em* $[a, b]$, *respectivamente. Do* ***teorema de Bolzano*** *(porque* f *é contínua) para todo* μ *entre* m *e* M *existe* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = \mu$. *Da equação (2) como,*

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \leq M,$$

fazendo $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ *resulta a tese.* ■

3.2 Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Comecemos por definir o que se entende por integral indefinido.

Definição 8 *Seja* f *integrável em* $[a, b]$. *Então a função*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

com $x \in [a, b]$ *diz-se* ***integral indefinido*** *de* f.

Proposição 20 *Seja f integrável em $[a,b]$, então*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

existe e é contínua em $[a,b]$.

Dem. *Seja $\delta > 0$, $x_0 \in [a,b]$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ e $\varepsilon = \frac{\delta}{M}$. Então, recorrendo às propriedades atrás indicadas,*

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0)| &= \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right| \\
&= \begin{cases} \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right|, \text{ se } x_0 \leq x \\ \left|\int_x^{x_0} f(t)\,dt\right|, \text{ se } x_0 > x \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt, \text{ se } x_0 \leq x \\ \int_x^{x_0} |f(t)|\,dt, \text{ se } x_0 > x \end{cases} \\
&\leq M|x - x_0|.
\end{aligned}$$

Este facto mostra, como se pretendia, que

$$|x - x_0| < \varepsilon \underset{x}{\Rightarrow} |F(x) - F(x_0)| < \delta. \qquad \blacksquare$$

Proposição 21 (Teorema fundamental do Cálculo Integral) *Seja $[a,b]$ um intervalo com $b > a$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

1. *Se f é contínua em $[a,b]$ então $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ tem derivada contínua em $[a,b]$ e*

$$\frac{d\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)}{dx} = F'(x) = f(x). \tag{4}$$

2. *(Fórmula de Barrow) Se f é contínua em $[a,b]$ e G uma primitiva de f em $[a,b]$. Então*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt &= G(x)|_a^b \\
&= G(b) - G(a).
\end{aligned} \tag{5}$$

Dem.

1. *Seja* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. *Calculemos a razão incremental de* F *em* $x_0 \in]a,b[$*:*

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} &= \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{h} \\ &= \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h}, \end{aligned}$$

das propriedades elementares do integral. Por outro lado, como f *é contínua em* $[a,b]$*, da proposição 19 (teorema da média) existe* ξ_h *entre* x_0 *e* x_0+h *tal que*

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt &= f(\xi_h)(x_0+h-x_0) \\ &= f(\xi_h)\,h. \end{aligned}$$

Assim, notando que $\xi \to x_0$ *quando* $h \to 0$*, (porquê?),*

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi_h)\,h}{h} \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

Este facto demonstra que $F'(x) = f(x)$ *e que* F' *é contínua em* $]a,b[$*. A demonstração de que* $F'(a) = f(a)$ *(derivada de* F *à direita de* a*) e* $F'(b) = f(b)$ *(derivada de* F *à esquerda de* b*) poderia ser realizada de forma idêntica recorrendo à noção de derivada lateral direita e esquerda respectivamente.*

2. *Seja* $G(x)$ *uma primitiva de* f *em* $[a,b]$*. Então, da proposição 1, já que* $\int_a^x f(t)\,dt$ *também é uma primitiva de* f *em* $[a,b]$*,*

$$G(x) - \int_a^x f(t)\,dt = k.$$

Fazendo $x = a$ *resulta* $G(a) = k$*. Assim,*

$$G(b) - \int_a^b f(t)\,dt = G(a),$$

o que demonstra a validade da equação (5). ■

Observação 5 É possível enfraquecer ligeiramente as hipóteses do número 2 da proposição 21:

(Fórmula de Barrow) Se F' é integrável em $[a, b]$ então

$$\begin{aligned}\int_a^b F'(t)\,dt &= F(x)|_a^b \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

A demonstração deste caso pode encontrar-se em [6].

Observação 6 A equação (5) fornece-nos um método de cálculo do integral definido e é conhecida por f**órmula de Barrow** ou **fórmula de Newton-Leibniz**.

Exemplo 19 Seja f é contínua em $[a, b]$, $F(y) = \int_a^y f(t)\,dt$ e $y = g(x)$ uma função diferenciável em $]a, b[$. Calcule, a derivada de

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt,$$

em $]a, b[$.

1. Comecemos por observar que $(H(x))' = (F(g(x)))'$. Pela regra de derivação da função composta

$$(H(x))' = F'_y(g(x))\,g'(x).$$

2. Mas, do número 1 da proposição 21, $F'_y(y) = f(y)$, então

$$(H(x))' = f(g(x))\,g'(x). \qquad \blacksquare$$

Exemplo 20 Calcule $\int_0^\pi \sin x dx$. Seja $-\cos x$ uma primitiva de $\sin x$. Então, do número 2 da proposição 21,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x dx &= -\cos x|_0^\pi \\ &= -\cos\pi - (-\cos 0) \\ &= -(-1) - (-1) = 2. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

3.3 Integração por partes

Proposição 22 (Fórmula de integração por partes) *Sejam f e g diferenciáveis em $[a,b]$ com f' e g' integráveis em $[a,b]$. Então,*

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Dem. *Da regra de derivação do produto,*

$$f'(x)\,g(x) = (f(x)\,g(x))' - f(x)\,g'(x)\,. \tag{6}$$

Tendo presente a fórmula de Barrow, notando que $f(x)\,g(x)$ é uma primitiva de $(f(x)\,g(x))'$ e que os restantes termos da equação anterior são integráveis em $[a,b]$, deduz-se o resultado pretendido, integrando membro a membro a equação (6). ■

Exemplo 21 Calcule $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$.

Seja $g(x) = x$ e $f'(x) = \sin x$. Nestas circunstâncias $g'(x) = 1$ e $f(x) = -\cos x$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \sin x dx &= -x \cos x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\,(-\cos x)\,dx \\ &= 0 + \int_0^{\pi/2} \cos x dx \\ &= \sin x|_0^{\pi/2} = 1. \end{aligned}$$

■

3.4 Integração por mudança de variável

Proposição 23 (Mudança de variável) *Seja $x = \varphi(t)$ uma função com derivada contínua em $[a,b]$, intervalo fechado e limitado, tal que $\varphi(a) \leq \varphi(b)$. Se,*

1. *f for contínua em $\varphi([a,b])$, ou se,*
2. *φ for estritamente crescente em $[a,b]$ e f for integrável em $[\varphi(a), \varphi(b)]$, então,*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Dem. *Demonstremos apenas o primeiro resultado (a demonstração do número 2 pode encontrar-se em [6]). Suponha-se f contínua em $\varphi([a,b]) =$*

$[\varphi(a), \varphi(b)]$. *Seja,* $F(x) = \int_{\varphi(a)}^{x} f(\xi)\, d\xi$ *uma primitiva de* f. *Note-se que* F *é uma primitiva de* f *em resultado do número 1 da proposição 21. Por outro lado* $H(t) = F(\varphi(t))$ *é uma primitiva da função contínua* $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. *Assim pela fórmula de Barrow resulta sucessivamente,*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt &= H(b) - H(a) \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Exemplo 22 Calcule $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Seja $x = \varphi(t) = \sin t$ e $\varphi'(t) = \cos t$. Assim, quando $x = 1$ e $x = 0$, $t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ e $t = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-(\sin t)^2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

4 Algumas aplicações do integral definido

4.1 Cálculo de áreas

A área A, limitada pelas curvas (correspondentes a funções integráveis) $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ ($a \leq b$), pode calcular-se recorrendo à seguinte expressão:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Note-se que

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - g(t_j)| (x_j - x_{j-1})$$

facto que interpretado geometricamente justifica a afirmação.

Exemplo 23 Cálcule a área limitada pelas curvas $y = \sin x$ e o eixo dos xx entre $x = 0$ e $x = \pi$.

Seja então

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi |\sin x - 0|\, dx = \int_0^\pi \sin x dx \\ &= -\cos \pi + \cos 0 = 2. \end{aligned}$$

■

Exemplo 24 Cálcule a área limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ entre $x = 0$ e $x = 1$.Seja então

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left|x - x^2\right| dx = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx \\ &= \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■

4.2 Cálculo de volumes de sólidos de revolução

O volume V de um sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da área limitada pelas curvas (correspondentes a funções integráveis não negativas) $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as rectas $x = a$ e $x = b$ $(a \leq b)$, pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$V = \int_a^b \pi \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx$$

Note-se que

$$\int_a^b \pi \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^n \pi \left|f^2(t_j) - g^2(t_j)\right| (x_j - x_{j-1})$$

facto que interpretado geometricamente justifica a afirmação.

Exemplo 25 Cálcule o volume de uma esfera de raio igual a um.

Seja então $y = \sqrt{1 - x^2}$,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \pi \left|\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 - 0^2\right| dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 \left(1 - x^2\right) dx \\ &= \pi \left.\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^1 \\ &= \pi \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 26 Cálcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da superfície limitada pelas curvas $y = kx$ e o eixo dos xx entre $x = 0$ e $x = h$ ($k > 0$ e $h > 0$).

Seja então

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi \left|(kx)^2 - 0^2\right| dx \\ &= \pi k^2 \int_0^h x^2 dx \\ &= \frac{\pi k^2 h^3}{3}. \end{aligned}$$

■

4.3 Cálculo do comprimento de linha

O comprimento l da linha associada ao gráfico da função $y = f(x)$ (com derivada contínua) entre $x = a$ e $x = b$ (isto é entre os pontos $(a, f(a))$ e $b, f(b))$, pode calcular-se recorrendo ao seguinte integral definido por

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2} dx$$

Note-se que

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2} dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(t_j)\right)^2} (x_j - x_{j-1})$$

facto que interpretado geometricamente justifica a afirmação.

Exemplo 27 Calcule o perímetro de uma circunferência de raio igual a um.

Seja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Então,

$$\begin{aligned} l &= 8 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx \\ &= 8 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{1-\sin^2 t}} \cos t dt \\ &= 8 \frac{\pi}{4} \\ &= 2\pi, \end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $x = \sin t$. ■

5 Integrais Impróprios

A operação de integração pode ser extendida a intervalos não limitados e/ou funções não limitadas recorrendo à noção de **integral impróprio** que podem, assim, ocorrer em duas situações diferentes:

1. quando os limites de integração são infinitos, isto é, quando o intervalo de integração não é limitado (**Integrais impróprios de 1^a espécie**);

2. quando a função integranda é não limitada no intervalo de integração.(**Integrais impróprios de 2^a espécie)**

5.1 Limites de integração infinitos

Definição 9 *Seja f uma função integrável para todo o α sempre que $[a,\alpha] \subset [a,+\infty[$. O* integral impróprio, *da função f em $[a,+\infty]$, é o limite*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^{\alpha} f(x)\,dx$$

caso exista e seja finito. Nesta situação diz-se que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe ou converge.

Se $\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^{\alpha} f(x)\,dx$ não existir nem for finito diz-se que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ não existe ou diverge.

Define-se de maneira análoga,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx &= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx,\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{a}^{\beta} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Exemplo 28 Calculemos $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \lim_{\alpha\to+\infty}\arctan x\big|_0^{\alpha}\\ &= \lim_{\alpha\to+\infty}\arctan\alpha\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

■

Exemplo 29 Calculemos $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$.

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{\alpha\to+\infty} \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^2}dx \\
&= \lim_{\alpha\to+\infty} -x^{-1}\Big|_1^{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha\to+\infty} \left(-\alpha^{-1} - (-1)\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 30 Calculemos $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^{\beta} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{\alpha\to-\infty} \arctan x\Big|_{\alpha}^{0} + \frac{\pi}{2} \\
&= -\lim_{\alpha\to-\infty} \arctan\alpha + \frac{\pi}{2} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 31 Mostre que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge.

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx &= \lim_{\alpha\to+\infty} \int_1^{\alpha} \frac{1}{x}dx \\
&= \lim_{\alpha\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha\to+\infty} \ln(\alpha) \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 32 Estude quanto à convergência o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}dx$. Seja $k = 1$, do exemplo anterior verifica-se que o integral impróprio referido não converge. Suponha-se $k \neq 1$. Então

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}dx &= \lim_{\alpha\to+\infty} \left(\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right)\Bigg|_1^{\alpha} \\
&= \frac{1}{(1-k)} \lim_{\alpha\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}}\right) - \frac{1}{(1-k)}.
\end{aligned}$$

O que mostra que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}dx$ converge, quando $k > 1$, pois $\lim_{\alpha\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}}\right) = 0$ e diverge quando $0 \leq k < 1$ pois $\lim_{\alpha\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}}\right) = +\infty$. Em resumo,

$$\begin{aligned}
k &\leq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}dx \text{ diverge e} \\
k &> 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}dx \text{ converge.}
\end{aligned} \tag{7}$$

5.2 Funções integrandas não limitadas

Definição 10 *Seja f uma função integrável para todo o α sempre que $[a, \alpha] \subset [a, c[$ e não limitada em $\alpha = c$. O* integral impróprio, *da função f em $[a, c]$, é o limite*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to c^-} \int_a^\alpha f(x)\,dx$$

caso exista e seja finito. Nesta situação diz-se que $\int_a^c f(x)\,dx$ existe ou converge.

Se $\lim_{\alpha \to c^-} \int_a^\alpha f(x)\,dx$ não existir nem for finito diz-se que $\int_a^c f(x)\,dx$ não existe ou diverge.

Define-se de maneira análoga, $\int_a^b f(x)\,dx$ quando a não limitação de f se verifica em $x = a$, limite inferior de integração, ou $x = c$, pertencente ao interior do intervalo $[a, b]$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx, \\
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\alpha \to c^-} \int_a^\alpha f(x)\,dx + \lim_{\beta \to c^+} \int_\beta^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Exemplo 33 Calculemos $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx &= \lim_{\alpha \to 1^-} \int_\alpha \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx \\
&= \lim_{\alpha \to 1^-} \left. \frac{-(1-x)^{1/2}}{1/2} \right|_0^\alpha \\
&= -2 \lim_{\alpha \to 1^-} \left. (1-x)^{1/2} \right|_0^\alpha \\
&= -2 \left(\lim_{\alpha \to 1^-} (1-x)^{1/2} - 1 \right) \\
&= 2. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 34 Calcule o perímetro de uma circunferência de raio igual a um.

Seja $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ e $f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Então,

$$\begin{aligned}
l &= 4\int_0^1 \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx \\
&= 4\lim_{\alpha\to 1^-}\int_0^\alpha \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}dx \\
&= 4\lim_{\beta\to \frac{\pi}{2}^-}\int_0^\beta \sqrt{\frac{1}{1-\sin^2 t}}\cos t dt \\
&= 4\lim_{\beta\to \frac{\pi}{2}^-}\beta \\
&= 4\frac{\pi}{2} \\
&= 2\pi,
\end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $x=\sin t$. ■

Exemplo 35 Calculemos $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx \\
&= \lim_{\alpha\to 0^+} -x^{-1}\Big|_\alpha^1 \\
&= +\infty
\end{aligned}$$ ■

Exemplo 36 Estude quanto à convergência o integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{x^k}dx$. Seja $k=1$, então

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\alpha\to 0^+} \ln|x|\big|_\alpha^1 = +\infty$$

O que mostra que $\int_0^1 \frac{1}{x^k}dx$ não converge, quando $k=1$. Suponha-se que $k\neq 1$. Então

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^k}dx &= \lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right)\Bigg|_\alpha^1 \\
&= \frac{1}{(1-k)} - \frac{1}{(1-k)}\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{1}{\alpha^{k-1}}\right).
\end{aligned}$$

o que mostra que $\int_0^1 \frac{1}{x^k}dx$ diverge se $k>1$ (pois $\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{1}{\alpha^{k-1}}\right)=+\infty$) e converge se $0\leq k<1$. Em resumo,

$$\begin{aligned}
k &< 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^k}dx \text{ converge e} \\
k &\geq 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^k}dx \text{ diverge.} \qquad (8)
\end{aligned}$$

Exemplo 37 Seja $f(x) = x^{-3/4}$. Mostre que $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge e que $\int_0^1 \pi (f(x))^2\,dx$ não converge. Interprete o resultado geometricamente.

Antendendo ao resultado (8) concluí-se imediatamente que $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/4}}dx$ é convergente e

$$\int_0^1 \pi \left(x^{-3/4}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}dx$$

é divergente. Este facto mostra que a área limitada superiormente pela curva f e inferiormente pelo eixo dos xx, entre $x = 0$ e $x = 1$, é finita enquanto que o volume do sólido de revolução, gerado pela mesma, é infinito. ■

5.3 Critérios de convergência

Antes de apresentarmos alguns importantes critérios de convergência iremos referir a definição de convergência absoluta de um integral impróprio.

Definição 11 *Seja*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

um integral impróprio de 1ª ou de 2ª espécie. Este integral diz-se absolutamente convergente se o integral impróprio

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

convergir.

O seguinte resultado relaciona a convergência absoluta de um integral impróprio com a sua convergência, dita, simples.

Proposição 24 *Seja $\int_a^b f(x)\,dx$ um integral impróprio de 1ª ou de 2ª espécie. Se $\int_a^b |f(x)|\,dx$ é um integral impróprio convergente então $\int_a^b f(x)\,dx$ também é convergente.*

Dem. *Omitida.* ■

Proposição 25 (Primeiro critério de comparação) *Sejam $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ dois integrais impróprios, ambos da mesma espécie e relativamente ao mesmo limite de integração, tais que $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in \,]a,b[$. Então*

1. *$\int_a^b f(x)\,dx$ divergente $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ divergente.*

2. *$\int_a^b g(x)\,dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ convergente.*

Dem. *Omitida.* ■

Proposição 26 (Segundo critério de comparação) *Sejam* $\int_a^b f(x)\,dx$ *e* $\int_a^b g(x)\,dx$ *dois integrais impróprios de 1ª ou de 2ª espécie relativamente ao limite superior* $x = b$ *(respectivamente, limite inferior* $x = a$*) tais que* $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbb{R}^+$ *(respectivamente,* $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbb{R}^+$*. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ e } \int_a^b g(x)\,dx$$

são da mesma natureza, isto é, são ambos convergentes ou ambos divergentes.

Dem. *Omitida.* ■

Na utilização dos critérios de convergência atrás enunciados os resultados de convergência (7) e (8) são frequentemente utilizados.

Exemplo 38 Estude quanto à convergência o seguinte integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)}dx.$$

Comecemos por observar que $0 \leq \frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2}, \forall x \in [1,+\infty[.$ e que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge como vimos anteriormente. Então do primeiro critério de comparação resulta a convergência de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)}dx.$ ■

Exemplo 39 Estude quanto à convergência o seguinte integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx.$$

Comecemos por observar que $0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in]0,1]$. Tendo em conta que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge, concluí-se que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx$ também converge, pelo primeiro critério de comparação. ■

Exemplo 40 Estude quanto à convergência o seguinte integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx.$$

Comecemos por observar que $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{x^3}, \forall x \in [1,+\infty[$. Tendo em conta que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ converge, concluí-se que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$ também converge pelo primeiro critério de comparação. Da proposição 24 concluí-se a convergência de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx.$ ■

Exemplo 41 Mostre que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ converge.

Seja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, reparando que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} \\ &= 1 \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

deduz-se pelo segundo critério de comparação a convergência de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$, já que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ também converge. ■

Exemplo 42 Mostre que $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ converge.

Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ e $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, reparando que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1^+} \frac{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} &= \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

deduz-se pelo segundo critério de comparação a convergência de $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$, já que $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ também converge. Note que (8) permite concluír que $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ converge já que

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)^{1/2}}.$$ ■

Referências

[1] Apostol, T. M., Calculus, Reverté, 1977;

[2] Azenha, Acilina e Jerónimo, M. A., Cálculo Diferencial Integral em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, McGraw-Hill, 1995;

[3] Lima, Elon Lages, Curso de Análise (Vol 1 e 2), IMPA, Projecto Euclides, 1995;

[4] Piskounov, N., Calcul Différentiel et Intégral, MIR, 1976;

[5] Taylor, A. E., Advanced Calculus, Xerox College Publishing, Massachusetts, 1972;

[6] Wade, W. R., An Introduction to Analysis, Prentice Hall, 1995;

Exercícios Propostos

Exercício 1 Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de primitivação por partes:

1. $x^2 \ln x$.
2. $x^2 \sin x$.
3. $e^x \cos x$.
4. $\frac{x^2}{x^2+1} \arctan x$.
5. $3^x \sin 2x$.
6. $x \arctan x$.

Exercício 2 Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de primitivação por decomposição:

1. $\sin^3 x$.
2. $\tan^4 x$.
3. $\frac{2x-1}{(x-2)(x+3)}$.
4. $\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$.
5. $\frac{x^2}{1-x^4}$.
6. $\cos 2x \cos 3x$.
7. $\frac{x^4}{x^3+1}$.

Exercício 3 Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de primitivação por substituição:

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$.
2. $\frac{e^x - e^{3x}}{1+e^{2x}}$.
3. $\frac{x+\sqrt{x}}{x\left(1+\sqrt{x}\right)}$.
4. $\frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}$.

5. $\frac{3x+4}{(x-5)^2+3}$.

6. $\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$.

7. $\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$.

Exercício 4 Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método que achar mais conveniente:

1. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$.

2. $\frac{\sqrt{x-1}-\ln x}{(x-1)^2}$.

3. $e^x \ln\left(e^{2x} - 4e^x + 3\right)$.

4. $\frac{\ln x}{(1-x)^2}$.

5. $\sin^3 x \cos^5 x$.

6. $x \arcsin \frac{1}{x}$.

7. $\frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}$.

8. $x\left(\arctan x\right)^2$.

9. $\frac{3}{(2x+3)\sqrt{2-2\ln^2(2x+3)}}$.

Exercício 5 Determine a expressão geral das primitivas das seguintes funções:

1. $\frac{e^x}{9+25e^{2x}}$.

2. $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)$.

3. $\frac{1}{x+5\sqrt{x}+4}$.

4. $\frac{2x}{(x^2+1)^2} + \arcsin x$.

5. $\frac{\arctan^2 x+3x}{x^2}$.

6. $\frac{1}{2+tgx}$.

7. $x \sin x \cos x$.

8. $\frac{2}{e^x-e^{-x}}$.

9. $P\frac{21}{2x^2+7}$.

10. $P\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$.

11. $\frac{1}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$.

12. $\frac{1}{e^x+1}$.

13. $\frac{x^3}{\sqrt[5]{1+x^2}}$.

14. $\frac{1}{x+x\ln^2 x}$.

15. $\sin(\ln x)$.

16. $\frac{\ln x}{(x+1)^2}$.

17. $x\arcsin x^2$.

18. $\frac{e^x}{2e^x+1}$.

19. $\frac{x-3}{x^2+25}$.

20. $\frac{3\arctan\frac{x}{3}}{9+x^2}$.

21. $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$.

22. $\frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

23. $\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}$.

24. $\frac{x^2+1}{(x+1)^3}$.

Exercício 6 Determine a expressão geral das primitivas das seguintes funções:

1. $x\arcsin\frac{1}{x}$.
2. $\tan^3 x$.
3. $\frac{e^x}{e^{2x}+1}$.
4. $\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}$.
5. $\frac{x}{x^2+3x+2}$.

6. $\frac{1}{x\left(16+4\ln^2 x\right)}$.

7. $\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

Exercício 7 Considere a função $f(x) = \frac{3x^2+7}{(x^2+4)(x^2-1)}$ definida em $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Obtenha a primitiva de f que satisfaz as condições seguintes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

3. $F(0) = 1$.

Exercício 8 Considere a função $f''(x)$ definida por $f''(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$:

1. Determine a expressão geral das funções $f(x)$ que admitem $f^{''}(x)$ como 2^a derivada.

2. De entre as funções da alinea anterior determine aquela que verifica $f'(1) = f(1) = 0$.

Exercício 9 Determine $f(x)$ de modo que $f'(x) = \ln(4x^2-1)$ e $f(1) = \frac{3}{2}\ln 3$.

Exercício 10 Determine a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f^{'}(x) = \ln^2 x$ e $f(1) = 4$.

Exercício 11 Determine a primitiva da função definida por $f(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, que toma o valor zero para $x = \pi^2$.

Exercício 12 Determine uma função $f(x)$ tal que, com $f'(1) = -1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ se tem $f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$ (R: $f(x) = \frac{4}{x+1} + 1$).

Exercício 13 Determine a primitiva da função $f(x) = x^2e^x$, que toma o valor 1 para $x = 0$.

Exercício 14 Determine um intervalo I e uma função $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}$ e $f(1) = 4$.

Exercício 15 Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ e $g(x)$ uma função derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que:

$$P[f(x)\,g(x)] = F(x)\,g(x) - P[F(x)\,g'(x)]$$

Exercício 16 Calcule os integrais:

1. $\int_1^2 \left(x^2 - 2x + 3\right) dx.$
2. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx.$
3. $\int_2^6 \sqrt{x-2}dx.$
4. $\int_1^3 |2-x|\, dx.$
5. $\int_0^2 f(x)\, dx$ com $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x+3}{2} & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$
6. $\int_{-2}^0 \frac{x-1}{3x^2-6x+5}dx.$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx.$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin x)\, dx.$
9. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx.$
10. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-5x+6}dx.$
11. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx.$

Exercício 17 Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(2-x^2)^3}}dx.$
2. $\int_1^2 \frac{1}{x+5\sqrt{x+4}}dx.$
3. $\int_0^1 \frac{1}{(4+2x)(1+x^2)}dx.$
4. $\int_9^{25} \frac{\sqrt{x}-3}{x\left(\sqrt{x}-2\right)}dx.$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}dx.$
6. $\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}dx.$
7. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx.$
8. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx.$

9. $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} dx.$

10. $\int_{2}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx.$

11. $\int_{3}^{5} \frac{x-3}{x^2-2x} dx.$

12. $\int_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{1}{3+x^2} dx.$

13. $\int_{0}^{1} \tan^2\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx.$

14. $\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^3} dx.$

15. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} [\sin(2x)]^3 \, dx.$

16. $\int_{-1}^{5} |2x-3| \, dx.$

17. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{3x-5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

18. $\int_{0}^{1} \left(\ln(x+1) - \sqrt{1-x^2}\right) dx.$

19. $\int_{-1}^{3} \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx.$

20. $\int_{0}^{\frac{3}{2}} (9-x^2)^{-\frac{3}{2}} \, dx.$

21. $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2} dx.$

Exercício 18 Sabendo que uma função f diz-se uma função par se $f(-x) = f(x)$, e diz-se uma função ímpar se $f(-x) = -f(x)$:

1. Utilize a fórmula de integração por substituição para mostrar que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, \text{ se } f \text{é par e } \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \text{ se } f \text{é impar.}$$

2. Aplique a alínea anterior para calcular:

   (a) $\int_{-1}^{1} |x| \, dx.$

   (b) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx.$

   (c) $\int_{-2}^{2} \frac{\sin x}{1+x^8} dx.$

Exercício 19 Prove que são iguais os integrais

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos(x)\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx.$$

Exercício 20 Seja f uma função ímpar. Demonstre que a função h definida por $h(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ é par.

Exercício 21 O integral $\int_a^b f(x)\, dx$ é transformado, pela mudança de variável $x = \sin t$ no integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{1+\cos t} dt$. Determine a, b e $f(x)$.

Exercício 22 Demonstre que $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx$.

Exercício 23 Sem calcular os integrais, justifique que as seguintes desigualdades são válidas.

1. $\int_0^1 \sqrt{x} dx \geq \int_0^1 x^3 dx$.

2. $e \leq \int_1^e e^{x^2} \ln x \ dx \leq e^{e^2}$.

Exercício 24 Determine a expressão analítica da função $F(x) = \int_0^t f(t)\, dt$, em que $f(x) = \begin{cases} 1-x & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \ 1 \leq x \leq 2 \\ (2-x)^2 & , \ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$.

Exercício 25 Calcule a derivada, em ordem a x, das funções:

1. $\phi(x) = \int_1^{x^3} \ln t \ dt$, $x > 0$.

2. $\phi(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \cos t^2 \ dt$, $x \neq 0$.

Exercício 26 Sendo $f(x) = \int_0^{k \ln x} e^{-t^2} dt$, determine o valor da constante k, de modo que $f'(1) = 0$.

Exercício 27 Seja f uma função positiva, definida e contínua em $\mathbb{R}$, e g a função definida por: $g(x) = \int_0^{\ln x} f(t)\, dt$. Determine:

1. Domínio de g.

2. Derivada de g.

3. Monotonia de g.

Exercício 28 Determine, sem calcular o integral,

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{x^2}} \int_0^x e^{t^2} dt$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 \ dt}{x^4}$.

Exercício 29 Determine os extremos das funções:

1. $\int_0^x t\left(1-t^2\right) dt \ , \ x \in \mathbb{R}$.

2. $\int_{\frac{1}{2}}^x t^2 \ln t \ dt \ , \ x \geq \frac{1}{2}$.

Exercício 30 Seja $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \int_2^{x^2+x} \frac{\ln t}{\sqrt{t+2}} dt$. Prove que $\frac{2}{3} g'(1) = \ln 2$.

Exercício 31 Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$, com derivada contínua, tal que $\forall x \geq 0 \ \int_0^{3x} f'(t)\, dt = x^4 + 3x^2$ e $f(0) = 2$. Determine a expressão analítica de f .

Exercício 32 Seja $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \int_2^{x^3+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+1}} dt$. Prove que $\frac{1}{\sqrt{3}} g'(1) = \sin 2$.

Exercício 33 Determine os extremos da função definida por

$$f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \left(t^2 \ln t\right) dt, \ t \in \left[\frac{1}{2}, e\right].$$

Exercício 34 Compare, justificando, os seguintes integrais: $\int_0^1 e^{-x} dx$ e $\int_0^1 e^x dx$.

Exercício 35 Determine, sem o calcular, mas justificando convenientemente a resposta, o sinal do integral $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (x \sin x)\, dx$.

Exercício 36 Determine uma função f contínua, tal que: $\arctan[f(x)] = \int_1^x \frac{1+t}{1+f^2(t)} dt$.

Exercício 37 Determine $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, continua, tal que $\ln[f(x)] = \int_1^x \frac{1}{(1+t^2) f(t)} dt$ e $f(0) = 1$.

Exercício 38 Mostre que $\int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$.

Exercício 39 Determine, justificando os cálculos efectuados, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^5 dt}{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}$.

Exercício 40 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $\int_c^x f(t)\,dt = \cos x - \frac{1}{2}$. Determine f e c, justificando os cálculos efectuados.

Exercício 41 Determine o valor da constante a, sendo $f(x) = \int_x^{a\ln x} e^{t^2} dt$ e $f'(1) = 0$.

Exercício 42 Calcule, se existir, o seguinte limite: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t} dt}{x^3}$.

Exercício 43 Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ com derivada de 2^a ordem contínua tal que, $\int_0^x f''(t)\,dt = x^3 + x \wedge f'(0) = f(0) = 1$. Determine f, justificando cuidadosamente os cálculos efectuados.

Exercício 44 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ que verifica a condição: $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^2(1+x)$. Determine f, justificando cuidadosamente os cálculos efectuados.

Exercício 45 Calcule o seguinte limite: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}$.

Exercício 46 Sejam $g(x) = x^2 e^{2x}$ e $f(x) = \int_0^x e^{2t}(3t^2+1)\,dt$. Calcule (sem calcular o integral) o seguinte limite: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)}$.

Exercício 47

1. Enuncie o teorema da Média para o Cálculo Integral.
2. Determine, utilizando o teorema da Média, um ponto do intervalo $[0,4]$ onde a função f definida por $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ tem o seu valor médio.

Exercício 48 Seja $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^3} f(t)\,dt$ um integral indefinido em que a função integranda f está definida em $\mathbb{R}^+$. Mostre que: $x^2 F'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + 3x^4 f(x^3)$.

Exercício 49 Utilizando a definição de integral segundo Riemann, mostre que: $\int_a^b dx = b - a$.

Exercício 50 Determine:

1. a área da região plana limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x^2 = -8y$.
2. o volume do sólido obtido pela rotação da região referida em a) em torno:

(a) do eixo dos xx.
(b) do eixo dos yy.

Exercício 51 Calcule a área limitada pelas curvas:

1. $y = x^2$, $y = x + 6$, $y = 0$.
2. $y^2 + x^2 = 2x$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y = 0$.
3. $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.
4. $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ $(p \in \mathbb{R})$.
5. $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo dos xx.
6. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Exercício 52 Calcule o valor positivo de m, para que a área da região do primeiro quadrante limitada por $y = 2x^3$ e a recta $y = mx$ seja 32.

Exercício 53 Considere o segmento de curva $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

1. Determine a área limitada por este segmento de curva e o eixo dos xx.
2. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela região definida em a) numa rotação em tono do eixo dos xx.

Exercício 54 Calcule o comprimento do arco de curva $y = \ln(2\cos x)$desde $x = -\frac{\pi}{3}$ até $x = \frac{\pi}{3}$.

Exercício 55 Determine o comprimento do arco da curva de equação $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ entre os pontos $A\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ e $B\left(1 - \ln\sqrt{2}, 2\right)$.

Exercício 56 Determine o volume do toro, gerado pela rotação da região limitada pela circunferência de equação $(x-2)^2 + y^2 = 1$ em torno do eixo dos yy.

Exercício 57 Calcule o volume do sólido, gerado pela rotação em torno do eixo dos xx, da região limitada pelas curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e $x = \ln 2$.

Exercício 58 Seja A a região do plano definida por:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{1}{4} \wedge y \geq (x-1)^2 \wedge y \leq \ln x\right\}$$

1. Calcule a área de A.

2. Calcule o comprimento da linha dada pela equação $y = \ln\left(e^{x+\alpha}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $-2 \leq x \leq 2$.

Exercício 59 Seja A a região do plano definida por:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x \wedge y \leq 0 \wedge y \geq (x+1)^2 - 4\right\}$$

1. Calcule a área de A.

2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da parte de A que se encontra no 3^o quadrante.

Exercício 60 Seja A a região do plano definida por:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq (x+1)^2 \wedge |x+y| \leq 1\right\}$$

1. Determine a área de A.

2. Seja A' a parte de A que se encontra nos 1^o e 4^o quadrantes. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A' em torno do eixo dos yy.

Exercício 61 Calcule a área da região do plano definida por:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x \wedge y \leq 2x \wedge x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Exercício 62 Calcule o comprimento da linha dada pela equação $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, com $0 \leq x \leq 1$.

Exercício 63 Determine a área da região do plano definida por:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-3)^2 \leq 1 \wedge y \geq x + 4\right\}.$$

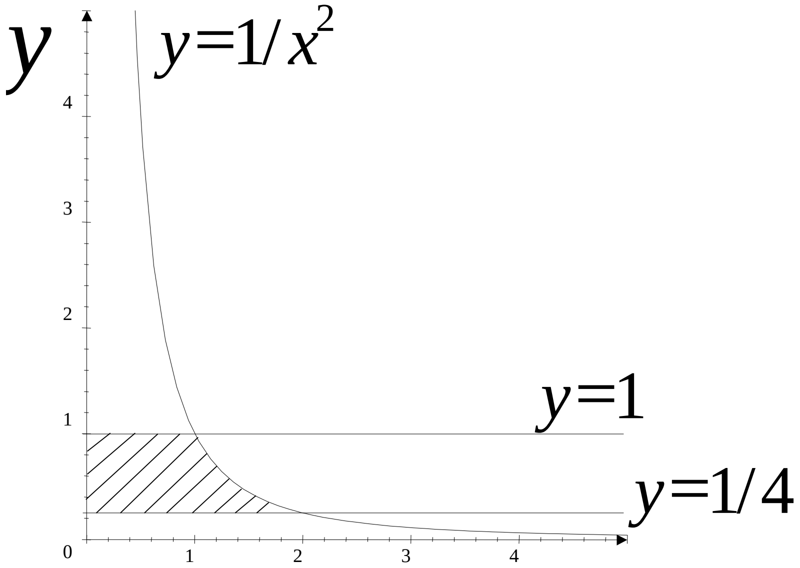
Exercício 64 Calcule o comprimento da linha dada pela equação $y = \sqrt{(x+3)^3}$, com $0 \leq x \leq 2$.

Exercício 65 Considere a região D do plano definida por:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq e^x \wedge y \geq -x^2 \wedge -1 \leq x \leq 1\right\}$$

1. Determine a área de D.

2. Seja D_1 a parte da região D que se encontra no 1^o quadrante. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de D_1 em torno do eixo dos yy.



Exercício 66 Considere a figura seguinte:

1. Calcule a área da região sombreada.
2. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região acima referida, em torno do eixo dos yy.

Exercício 67 Determine a área do interior da elipse definida pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, com $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Exercício 68 Considere a região do plano definida por:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 4 \wedge y \geq x^2 \wedge xy \geq \frac{1}{x} \right\}$$

e calcule a sua área.

Exercício 69 Determine o valor de a, de modo que o sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo dos xx da região:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{x^2}{a} \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq a \right\},$$

tenha volume igual a $\frac{1}{5}$.

Exercício 70 Determine o valor de b, de modo que o comprimento de arco de curva, de equação $y = \ln\left(e^{x+b}\right)$, com $0 \leq x \leq 4$, seja $\sqrt{2}b$.

Exercício 71 Calcule a área do conjunto limitado pelos arcos das curvas de equações $y = x^2$ e $y = x^2 \cos x$, compreendido entre a origem e o ponto de menor abcissa positiva, em que as duas curvas se intersectam.

Exercício 72 Considere a região do plano:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq \sqrt{3}x^2\right\}.$$

1. Calcule a área de A.
2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação de A em torno do eixo dos xx.

Exercício 73 Considere a região do plano limitada pelas curvas de equação $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = 0$.

1. Calcule a área da região considerada.
2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região acima referida, em torno do eixo dos xx.

Exercício 74 Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região A, definida por:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 \wedge x \leq 1 \wedge y \geq 0\right\},$$

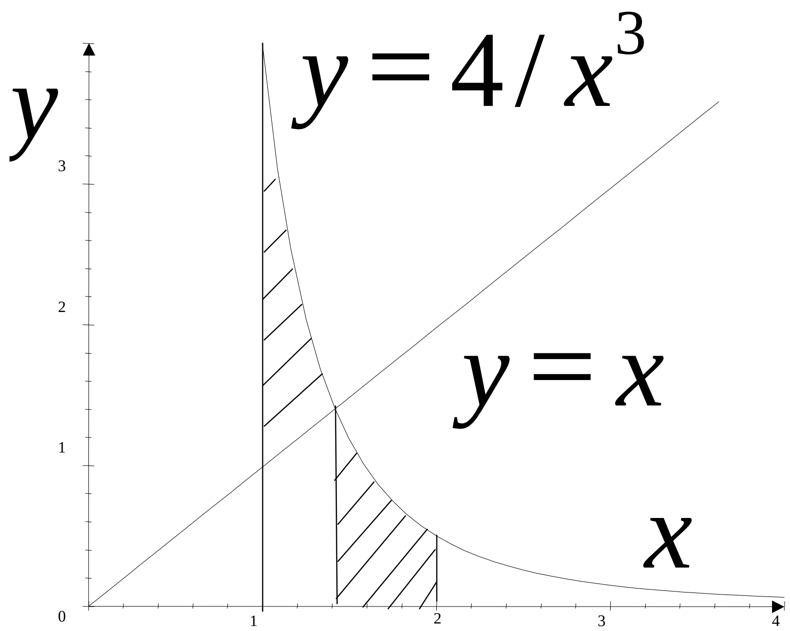
em torno do eixo dos yy.

Exercício 75 Seja A a região do plano limitada pelas curvas $y^2 = x$ e $y = x - 2$.

1. Calcule a área de A.
2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação da parte de A que se encontra no 1^o quadrante, em torno do eixo dos yy.

Exercício 76 Seja A a região do plano limitada pelas curvas de equações $y = (x-1)^2$ e $x^2 + y^2 = 1$.

1. Calcule a área de A.



2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região A em torno do eixo dos yy.

Exercício 77 Seja A a região do plano limitada pela curva $y = (x+3)^2 - 4$ e pelas rectas $x = -3$, $x = 2$ e $y = 0$.

1. Calcule a área de A.

2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação da parte de A que se encontra no 1^o quadrante, em torno do eixo dos xx.

Exercício 78 Determine a área do subconjunto de $\mathbb{R}^2$ constituído pelos pontos que verificam as condições: $y \leq \frac{3}{x} \wedge y \leq x+2 \wedge y \geq 1$.

Exercício 79 Considere a figura abaixo:

1. Determine a área da região sombreada.

2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação da referida região em torno do eixo dos xx.

Exercício 80 Seja D a região do plano limitada pelas curvas de equações $y = x^2$, $y = -x+2$ e $y = 2$.

1. Calcule a área de D.

2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos xx, da parte da região D pertencente ao 1^o quadrante (R: $\frac{32}{15}\pi$).

Exercício 81 Seja A a região do plano limitada pelas curvas de equações $y = \ln x$, $y = 0$ e $x = 2$.

1. Calcule a área de A.

2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região A em torno do eixo dos yy.

Exercício 82 Calcule os seguintes integrais impróprios:

1. $\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} dx$.

3. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

Exercício 83 Calcule os seguintes integrais:

1. $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2-6x+8} dx$.

2. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$.

3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2) \arctan x} dx$.

4. $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{(x^2-4)^{\frac{6}{5}}} dx$.

5. $\int_{-2}^{0} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

6. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx$.

7. $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{(4-x)^3}} dx$.

8. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$.

9. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

10. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$.

11. $\int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx$.

Exercício 84 calcule o seguinte integral impróprio

$$\int_0^2 \frac{a}{\sqrt{16-4x^2}} dx, a \in \mathbb{R},$$

e indique a sua natureza.

Exercício 85 Estude a natureza dos seguintes integrais:

1. $\int_1^{\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} dx$.
2. $\int_1^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$.
3. $\int_0^1 \frac{1+\sin^2 x}{x} dx$.
4. $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+2x^2+3x^4} dx$.
5. $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$.
6. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}}$.
7. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}} dx$.

Exercício 86 Estude a natureza dos seguintes integrais:

1. $\int_0^{+\infty} \frac{2x+6}{x^2+x+6} dx$.
2. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx$.
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{x^3}+1} dx$.
4. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.
5. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$.
6. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$.
7. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$.
8. $\int_0^{+\infty} \frac{x+18}{x^2+x+12} dx$.

9. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2+4} dx$.

10. $\int_2^4 \frac{\sin x}{\sqrt{(4-x)^3}} dx$.

11. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx$.

12. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^3}{x^2} dx$.

13. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$.

14. $\int_1^{+\infty} \frac{x^5}{2+x^6+4x^8} dx$.

15. $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1-x}} dx$.

Exercício 87 Determine a área da região infinita limitada pela curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, pela parábola $y = \frac{x^2}{2}$ e pelo eixo dos xx.

Exercício 88 Prove que $\int_0^{\infty} \frac{2t+3}{4t^3+3} \sin t \; dt$ é absolutamente convergente.

Exercícios Complementares

Exercício 89 Calcule

1. $P\frac{\arctan x+x}{1+x^2}$.
2. $P\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}$.
3. $Pe^{\arcsin x}$.
4. $P\frac{4}{36+x^2}$.
5. $P\left(\sin x-\cos x\right)^2$

Exercício 90 *Calcule os seguintes integrais*

1. $\int_1^e \ln^2 x dx$.
2. $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} x dx$.
3. **??**$\int_1^e \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2 dx.}$
4. $\int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{3}}}dx$.

Exercício 91 *Seja f uma função contínua em* $\mathbb{R}$ *tal que f(0)=1,* ϕ *uma diferenciável em* $\mathbb{R}$ *que se anula no ponto a, e h a função definida por*

$$h(x)=\int_0^{\phi(x)} f\left(t\right)dt.$$

1. *Calcule* $h'\left(x\right)$.
2. *Calcule* $\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{\phi(x)}$.
3. *Supondo que f e* ϕ *são funções ímpares, mostre que h é uma função par.*

Exercício 92 *Calcule a área da região do plano limitada pelas linhas de equação* $y=e^x$, $y=\ln x$, $x^2+y^2=1$ *e* $x=e$, *no 1º quadrante.*

Exercício 93 *Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do domínio plano ilimitado definido pelo gráfico da função* $y=\frac{1}{x},(x\geq 1)$, *em torno do eixo dos xx.*

Exercício 94 *Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:*

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$

2. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$

Exercício 95 *Considere a região plana limitada pelas parábolas* $y = 2x^2 + 3$ *e* $y = -x^2 + 1$ *e pelas rectas* $x = 0$ *e* $x = 1$.

1. *Represente graficamente a referida região.*

2. *Calcule o volume do sólido gerado pela rotação daquela região, em torno do eixo dos* yy.

Exercício 96 *Calcule a área limitada pelas curvas* $y = \sin x$ *e* $y = -\cos x$, *no intervalo* $0 \leq x \leq \pi$.

Exercício 97 *Seja f uma função definida por*

$$F(x) = \int_{-2}^{x} tf(t) = \begin{cases} 0 & se\ t \leq 0 \\ t & se\ \ 0 \leq t \leq 1 \\ \ln t & se\ \ t \geq 1 \end{cases}.$$

1. *Calcule* $F(3)$.

2. *Resolva a equação* $F'(x) = \frac{x}{2}$.

Exercício 98 *Calcule por definição os seguintes integrais impróprios*

1. $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2} dx.$

2. $\int_0^{+\infty} xe^{ax} dx$, *com* $a \neq 0$.

Exercício 99 *Indique a natureza dos seguintes integrais impróprios*

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx.$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{3x^4-x+2} dx.$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4-1}}{x^3} dx.$

4. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{x^3+1}} dx.$

Exercício 100 *Determine o valor de* k $(k \in \mathbb{R})$ *e a função* f $(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$, *tais que* $\forall_{x \in \mathbb{R}}$:

$$\int_1^x f(t)\, dt = 3x^2 - kx + 1.$$

Exercício 101 *Seja* f *uma função contínua tal que* $\int_0^x f(t)dt = x\cos(\pi x)$. *Calcule* $f(4)$.

Soluções

1.1:$\frac{x^3}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+C$**;** **1.2:**$-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$**;** **1.3:**$\frac{1}{2}e^x\left(\cos x+\sin x\right)+C$; **1 4:**$x\arctan x-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$; **1.5:**$\frac{\ln 3}{4+\ln^2 3}3^x\sin 2x-\frac{2}{4+\ln^2 3}3^x\cos 2x+C$; **1.6:**$\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\left(x-\arctan x\right)+C$ **2.1:**$-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$;**2.2:**$x-\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$;**2.3:**$\frac{3}{5}\ln|x-2|+\frac{7}{5}\ln|x+3|+C$;**2 4:**$x+\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$;**2 5:**$-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\arctan x+C$;**2 6:**$\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C$;
2 7:$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+C$;
3.1:$\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C$;**3.2:**$-e^x+2\arctan e^x+C$;
3.3:$6\left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-\frac{1}{2}\ln|1+\sqrt[3]{x}|-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+C$;**3 4:**$\frac{4}{x-\sqrt{x^2+2x}}-\ln\left|1-\sqrt{x^2+2x}+x\right|+C$;**3 5:**$\frac{3}{2}\ln\frac{(x-5)^2+3}{3}+\frac{19}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x-5}{\sqrt{3}}\right)+C$;**3 6:**$\tan x+\frac{1}{2}\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}-\frac{3}{2}x+C$;**3 7:**$\frac{3}{4}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{2}{3}}+C$;
4 1:$\sqrt{x^2-9}-3\operatorname{arcsec}\frac{x}{3}+C$;**4 2:**$-2\left(x-1\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{\ln|x|}{x-1}+\ln|x|-\ln|x-1|+C$;**4 3:**$e^x\ln\left(e^{2x}-4e^x+3\right)-2e^x-3\ln|e^x-3|-\ln|e^x-1|+C$;**4 4:**$\frac{\ln x}{1-x}-\ln|x|+\ln|1-x|+C$;**4 5:**$\frac{-\cos^6 x}{6}+\frac{\cos^8 x}{8}+C$;**4 6:**$\frac{x^2}{2}\arcsin\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$;**4 7:**$-\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2}-\frac{1}{9}\arccos^3\left(3x\right)+C$;**4 8:**$\frac{x^2+1}{2}\arctan^2 x+-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$;**4 9:**$\frac{3\sqrt{2}}{4}\arcsin\left[\ln\left(2x+3\right)\right]+C$;
5 1:$\frac{1}{15}\arctan\left(\frac{5}{3}e^x\right)+C$;**5 2:**$\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+x+C$;**5 3:**$-\frac{2}{3}\ln|\sqrt{x}+1|+\frac{8}{3}\ln|\sqrt{x}+4|+C$;**5 4:**$-\frac{1}{x^2+1}+x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$;
55:$\frac{\arctan^3 x}{3}+\frac{3}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$;**5 6:**$\frac{1}{5}\ln|2+tgx|-\frac{1}{10}\ln\left(1+\tan^2 x\right)+\frac{2}{5}x+C$;**5 7:**$\frac{1}{2}\left(x\sin^2 x-\frac{x-\sin x\cos x}{2}\right)+C$;**5 8:**$\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$;**5 9:**$\frac{3\sqrt{14}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{14}}{7}x\right)+C$;**5 10:**$-\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}}\right|-\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}}-\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}}\right]+C$;**5 11:**$-2\sqrt{5-x}+4\sqrt[4]{5-x}-4\ln\left|1+\sqrt[4]{5-x}\right|+C$;**5 12:**$\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|+C$;**5 13:**$\frac{5}{8}x^2\sqrt[5]{\left(1+x^2\right)^4}-\frac{25}{72}\sqrt[5]{\left(1+x^2\right)^9}+C$;**5 14:**$\arctan\left(\ln x\right)+C$;**5 15:**$\frac{x}{2}\left[\sin\left(\ln x\right)-\cos\left(\ln x\right)\right]+C$;**5 16:**$-\frac{\ln x}{x+1}+\ln|x|-\ln|x+1|+C$;**5 17:**$\frac{x^2}{2}\arcsin x^2+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}+C$;**5 18:**$\frac{1}{2}\ln|2e^x+1|+C$;**5 19:**$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+25\right)-\frac{3}{5}\arctan\frac{x}{5}+C$;**5 20:**$\frac{\arctan^2\left(\frac{x}{3}\right)}{2}+C$;**5 21:**$2\sqrt{x}\left(\frac{x}{3}+1\right)+C$;**5 22:**$\arctan\left(\ln x\right)+C$;**5 23:**$\frac{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+2\right)}{3}+C$;**5 24:**$\ln\left(|x+1|\right)+\frac{2x+1}{(x+1)^2}+C$;
6 1:;6 2:$\ln\left(|\cos x|\right)+\frac{\tan^2 x}{2}+C$**;6 3:**$\arctan\left(e^x\right)+C$**;6 4:**$\frac{\ln\left(\sin^2 x+1\right)}{2}+C$**;6 5:**$\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{(x+3)^2\left(x^2+3x+2\right)}{(x+1)^3}\right|\right)+C$**;6 6:**$\frac{1}{8}\arctan\left(\frac{\ln x}{2}\right)+C$**;6 7:**$-2\ln|\cos\sqrt{x}|+C$**;**
7 1:$F\left(x\right)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$**;7 2:**$F\left(x\right)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$**;7**

3:$F(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+1$**;**
8 1:$f(x)=-\frac{x}{2}\left[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right]+C_1x+C_2$**;8 2:**$f(x)=-\frac{x}{2}\left[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right]+x-\frac{1}{2}$**;**
9:$x\ln(4x^2-1)-2x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|$;
10:$f(x)=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+2$;
11:$2\sin\sqrt{x}$**;**
12:$f(x)=\frac{4}{x+1}+1$**;**
13:$x^2e^x-2xe^x+2e^x-1$**;**
14:;
15:-;
16 1:$\frac{7}{3}$**;16 2:**$\frac{100}{3}$**;16 3:**$\frac{16}{3}$**;16 4:**1**;16 5:**$\frac{43}{12}$**;16 6:**$\frac{1}{6}\ln\frac{5}{29}$**;16 7:**$0$**;16 8:**$1$**;16 9:**$\ln\left|\frac{\sqrt{e^2+1}+e}{\sqrt{2}+1}\right|$**;16 10:**$\ln\frac{3}{2}$**;16 11:**$\frac{1}{2}(1-\ln 2)$**;**
17 1:$\frac{1}{2}$**;17 2:**$-\frac{2}{3}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{2}+\frac{8}{3}\ln\frac{\sqrt{2}+4}{5}$**;17 3:**$\frac{1}{10}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{20}\ln 2+\frac{\pi}{20}$**;17 4:**$3\ln\frac{5}{3}-\ln 3$**;17 5:**$-\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$**;17 6:**$-\frac{1}{2}\left[\ln\frac{3\sqrt{2}}{4}-\arctan 3+\arctan 2\right]$**;17 7:**$\frac{4-\pi}{2}$**;17 8:**$\frac{3}{4}$**;17 9:**$\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[\arctan(-2)-\arctan(-3)\right]$**;17 10:**$\frac{\pi}{6}$**;17 11:**$\frac{3}{2}\ln 5-2\ln 3$**;17 12:**$\frac{-7\sqrt{3}}{36}\pi$**;17 13:**$\frac{4-\pi}{\pi}$**;17 14:**$\frac{5}{36}$**;17 15:**$\frac{1}{3}$**;17 16:**$\frac{37}{2}$**;17 17:**$\frac{6-3\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{6}$**;17 18:**$2\ln 2-1-\frac{\pi}{4}$**;17 19:**$4-2\ln 3$**;17 20:**$3^{-\frac{5}{2}}$**;17 21:**$\ln\left(\frac{3(e+1)}{2(e+2)}\right)$**;**
18 1:-;18 2a:1**;18 2b:**0**;18 2c:**1**;**
19:-;
20:-;
21:$a=0$; $b=1$; $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$**;**
22:-;
23 1:-;23 1:-;
24:$F(x)=\begin{cases} x-\frac{x^2}{2} & , \quad 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad 1\le x\le 2 \\ \frac{1}{2}-\frac{(2-x)^3}{3} & , \quad 2\le x\le 3 \end{cases}$ **;**
25 1:$3x^2\ln x^3$;**25 2**:$\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}+\cos x^2$;
26:$k=2e^{-1}$**;**
27 1:$]0,+\infty[$;**27 2**:$f(\ln x)\,\frac{1}{x}$;**27 3**:Crescente em $]0,+\infty[$;
28 1:-1;**28 2**:$\frac{1}{4}$;
29 1:$f(0)$ é mínimo; $f(-1)$ e $f(1)$ são máximos**;29 2:**$f(1)$ é mínimo**;**
30:-;
31: $f(x)=\frac{x^4}{81}+\frac{x^2}{3}+2$**;**
32:-;
33:mínimo$=-\frac{1}{24}\left[\ln\frac{1}{2}+\frac{7}{3}\right]$; máximo$=\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{24}\left[1-\ln\frac{1}{2}\right]$**;**
34:-;
35: Positivo**;**
36:$f(x)=x+\frac{x^2}{2}+C$**;**

37:$f\left(x\right)=\arctan x+1$**;**
38:-;
39:$\frac{1}{2}$**;**
40:$f\left(x\right)=-\sin x\ ;\ c=\frac{\pi}{3}$**;**
41:$a=e$**;**
42:$\frac{2}{3}$**;**
43:;
44:$f\left(x\right)=1+\frac{3}{2}\sqrt{x}$**;**
45:;
46:;
47 1:-;47 2:;
48:-;
49:-;
50 1:$\frac{8}{3}$;**50 2 2a:**$\frac{24}{5}\pi$**;50 2 2b:**$\frac{48}{5}\pi$**;**
51 1:$\frac{32}{3}$**;51 2:**$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$**;51 3:**$3-e$**;51 4:**$\frac{4}{3}p^2$**;51 5:**$8$**;51 6:**$\frac{1}{3}$**;**
52: $m=16$**;**
53 1:2**;53 2:**$\frac{\pi^2}{2}$**;**
54:$\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)$**;**
55:$\frac{3}{4}+\ln\sqrt{2}$**;**
56:$4\pi^2$;
57:$\frac{9}{8}\pi$**;**
58 1:$\frac{4}{3}-e^{\frac{1}{4}}$**;58 2:**$4\sqrt{2}$**;**
59 1: $2\sqrt{3}+\frac{5}{3}$**;59 2:**$\frac{24\sqrt{3}+45}{5}\pi$**;**
60 1:2**;60 2:**$\frac{5\pi}{6}$**;**
61:$\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$**;**
62:$\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$**;**
63:$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$**;**
64:$\frac{343}{27}-\frac{31}{27}\sqrt{31}$**;**
65 1:$\frac{e^2-1}{e}+\frac{2}{3}$**;65 2:**$2\pi$**;**
66 1:1**;66 2:**$\pi\ln 4$**;**
67:$2ab+ab\sin 2$**;**
68:$\frac{14-3\ln 4}{3}$**;**
69:$a=\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$**;**
70:$b=4$**;**
71:$\frac{8\pi^3}{3}-4\pi$**;**
72 1:$\frac{2\pi+\sqrt{3}}{3}$**;72 2:**$\frac{92}{15}\pi$**;**
73 1:$2-\sqrt{2}$**;73 2:**$\frac{\pi^2-2\pi}{4}$**;**
74:$\frac{\pi}{2}$**;**
75 1:$\frac{27}{6}$**;75 2:**$\frac{184}{15}\pi$**;**

76 ??:$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$**;76 2:**$\frac{\pi}{2}$;
77 1:$\frac{97}{3}$**;77 2:**$\frac{5206}{15}\pi$**;**
78:$3\ln 3$**;**
79 1:1**;79 2:**$\frac{103}{30}\pi-\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$**;**
80 1:$\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{7}{6}$**;80 2:**$\frac{32}{15}\pi$**;**
81 1:$2\ln 2-1$**;81 2:**$4\pi\ln 2-\frac{3\pi}{2}$**;**
82 1:$\frac{1}{2}$**;82 2:**$+\infty$**;82 3:**$6\sqrt[3]{2}$**;**
83 1:$\ln\sqrt{3}$;**83 2**:$+\infty$;**83 3**:$\ln 2$;**83 4**:$-\frac{5}{2\sqrt[5]{5}}$;**83 5**:-2;**83 6**:$\frac{\pi}{4}$;**83 7**:$-\frac{2}{\sqrt{2}}$;**83 8**:2;**83 9**:π;**83 10**:2;**83 11**:$\frac{1}{2}$;
84:$\frac{\pi}{4}a$ /conv.**;**
85 1:div.;**85 2**: conv.;**85 3**:div.;**85 4**: conv.;**85 5**: conv.;**85 6**: div.;**85 7:**conv.;
86 1:div.**;86 2:**conv.**;86 3:**absoluta/conv.**;86 4:**absoluta/conv.**;86 5:**conv.**;86 6:**conv.**;86 7:**conv.**;86 8:**div.**;86 9:**conv.**;86 10:**conv.**;86 11:**conv.**;86 12:**conv.**;86 13:**conv.**;86 14:**conv.**;86 15:**conv.**;**
87:$\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}$**;**
88:-;
89 1:;89 2:;89 3:;89 4:;89 5:;
90 1:;90 2:;90 ??:;90 4:;
91 1:;91 2:;91 3:;
92:;
93:;
94 1:;94 2:;
95 1:;95 2:;
96:;
97 1:;97 2:;
98 1:;98 2:;
99 1:;99 2:;99 3:;99 4:;
100:;
101:;