

Instruções:

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- Não pode responder a diferentes grupos de questões numa mesma folha de resposta.
- A saída da sala só poderá efetuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É autorizado o uso de máquinas de calcular que respeitem as condições estabelecidas no Ofício-circular/S-DGE/2016/1798.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de telemóveis, ou quaisquer outros meios de comunicação remota, durante a prova, sendo motivo suficiente para a anulação da prova de avaliação, independente de ter havido ou não utilização dos mesmos.

Justifique convenientemente todas as respostas.

Grupo I

Justifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- [1.0] 1. Se m e n são inteiros tais que $m^2 \equiv n^2 \pmod{8}$, então $m \equiv n \pmod{8}$ ou $m \equiv -n \pmod{8}$;
- [1.5] 2. $17^{144} \equiv 1 \pmod{26}$;
- [1.0] 3. Se o grafo simples G tem 25 vértices e 200 arestas, então \overline{G} tem 100 arestas;
- [1.5] 4. Se G é um grafo de ordem n e dimensão m , tal que $m = n - 1$ então G é necessariamente um árvore.

Grupo II

- [1.0] 1. Determine os algarismos x e y de modo que o(s) número(s) natural(is) $x30x5y$ seja(m) divisível(eis) por 3, por 11 e não seja(m) divisível(eis) por 9. Explícite os critérios de divisibilidade usados.
- [2.0] 2. Mostre que $288^{199} + 16$ é múltiplo de 19.
- [2.0] 3. Determine, caso exista, a menor solução inteira positiva do sistema
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \\ 12x \equiv 4 \pmod{20} \end{cases}.$$

Grupo III

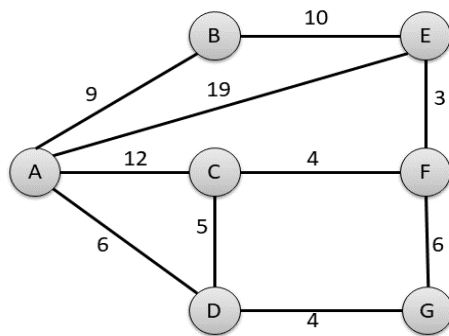
Considere o grafo orientado simples G de vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ definido pela seguinte matriz de adjacência:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- [1.0] 1. Faça um esboço do grafo G .
- [1.0] 2. Determine o grau interior e o grau exterior de cada vértice do grafo G . Verifique o teorema do aperto de mãos.
- [1.5] 3. Utilize a matriz A para determinar número de passeios de comprimento 3 do vértice v_1 para o vértice v_7 . Explícite esses passeios.

Grupo IV

Considere o seguinte grafo ponderado G :



- [0.5] 1. Indique o subgrafo induzido $G[X]$ por $X = \{A, B, E\}$.
- [2.5] 2. Aplique o algoritmo de Dijkstra para determinar o(s) caminho(s) mais curto de A para E.
(Nota: descreva cuidadosamente os passos realizados por aquele algoritmo).
- [2.0] 3. Aplique o algoritmo de Kruskal para determinar uma árvore de suporte de custo mínimo de G e indique o custo mínimo.
- [1.5] 4. Determine, justificando, o número cromático de G .

Fim do teste