Exercícios Resolvidos Semana 3 30/III/2020 até 4/IV/2020

Exercício 1.27

`Determine o vetor gradiente das seguintes funções, em cada ponto` (x, y):

1. $f(x, y) = 2x^3y - 3xy^2$
2. $g(x, y) = \frac{e^{x^2} - y}{xy}$
3. $h(x, y) = e^x \sin y + e^y \sin x$
4. $s(x, y) = \ln(x - 3y)$

`Use os gradientes obtidos para determinar a linearização de cada uma destas funções no ponto` $(0, -1)$

• Devemos calcular as derivadas parciais. Para isto, consideramos a função como dependente duma única variável, sendo as restantes consideradas como parâmetros constantes. Podemos assim aplicar as regras de derivação de funções com uma única variável real:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x^3y - 3xy^2)_{y=cte} = 2y \cdot 3x^2 - 3y^2 \cdot 1 = 6x^2y - 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(2x^3y - 3xy^2)_{x=cte} = 2x^3 \cdot 1 - 3x \cdot 2y = 2x^3 - 6xy$$

O vetor gradiente associado a $f(x, y)$ num ponto (x, y) é

$$\nabla_{(x,y)} f = (6x^2y - 3y^2, 2x^3 - 6xy)$$

• Calculamos agora as derivadas parciais de g com as mesmas técnicas:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^{x^2} - y}{xy}\right)_{y=cte} = \frac{xy \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{x^2} - y)_{y=cte} - (e^{x^2} - y) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy)_{y=cte}}{(xy)^2} =$$

$$= \frac{xy \cdot (e^{x^2} \cdot 2x - 0) - (e^{x^2} - y) \cdot y}{(xy)^2} = e^{x^2} \cdot \left(\frac{2}{y} - \frac{1}{x^2y}\right) + \frac{1}{x^2}$$

A partir deste ponto, não indicaremos explicitamente $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ldots)_{y=cte}$ e simplificaremos a notação através da expressão $\partial/\partial x$, que resulta equivalente. A seguinte derivada parcial portanto é:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^{x^2}-y}{xy}\right) = \frac{xy\cdot\frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2}-y) - (e^{x^2}-y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy)}{(xy)^2} =$$
$$= \frac{xy\cdot(0-1)-(e^{x^2}-y)\cdot(x\cdot 1)}{x^2y^2} = \frac{-e^{x^2}}{xy^2}$$

Concluímos:

$$\nabla_{(x,y)}g = \left(e^{x^2}\cdot\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{x^2y}\right)+\frac{1}{x^2}, \frac{-e^{x^2}}{xy^2}\right)$$

- Calculamos agora as derivadas parciais de h:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\sin y + e^y\sin x\right) =$$
$$= e^x\sin y + e^y\cos x$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\sin y + e^y\sin x\right) =$$
$$= e^x\cos y + e^y\sin x$$

Sendo portanto o vetor gradiente:

$$\nabla_{(x,y)}h = (e^x\sin y + e^y\cos x, e^x\cos y + e^y\sin x)$$

- Calculemos as derivadas parciais de s:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x-3y)\right) = \frac{1}{x-3y}\cdot(1-0) = \frac{1}{x-3y}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x-3y)\right) = \frac{1}{x-3y}\cdot(0-3) = \frac{-3}{x-3y}$$

Finalmente obtemos o vetor gradiente:

$$\nabla_{(x,y)}s = \left(\frac{1}{x-3y}, \frac{-3}{x-3y}\right) = \frac{1}{x-3y}\cdot(1,-3)$$

- Finalmente pede-se a linearização destas funções em $(0,-1)$. Para a função f a linearização está dada por

$$p(x,y) = f(0,-1) + (\nabla_{(0,-1)}f)\cdot(x-0, y-(-1))$$

Calculamos o valor de f e o seu gradiente em $(0,-1)$:

$$f(0,-1) = 0, \quad \nabla_{(0,-1)} f = (-3,0)$$

e temos como linearização a função afim:

$$p(x,y) = 0 + (-3,0) \cdot (x-0, y+1) = -3x$$

Repetimos para g:

$$g(0,-1) = \frac{e^0 - (-1)}{0 \cdot -1} \text{ não existe}$$

A função $g(x,y)$ não está definida em $(0,-1)$, e não tem linearização neste ponto.

Repetimos para h:

$$h(0,-1) = e^0 \sin(-1) + e^{-1} \sin 0 = \sin(-1)$$

$$\nabla_{(0,-1)} h = (e^0 \sin(-1) + e^{-1} \cos 0, e^0 \cos(-1) + e^{-1} \sin 0) = (\sin(-1) + \frac{1}{e}, \cos(-1))$$

e temos como linearização a função afim:

$$p(x,y) = \sin(-1) + (\sin(-1) + \frac{1}{e}, \cos(-1)) \cdot (x-0, y+1) =$$

$$= (\sin(-1) + \frac{1}{e})x + (\cos(-1))y + \sin(-1) + \cos(-1)$$

Repetimos para s:

$$s(0,-1) = \ln(0 - 3 \cdot (-1)) = \ln 3$$

$$\nabla_{(0,-1)} s = \frac{1}{0 - 3 \cdot (-1)} \cdot (1,-3) = (\frac{1}{3}, -1)$$

Temos então como linearização a função afim:

$$p(x,y) = \ln 3 + (\frac{1}{3}, -1) \cdot (x-0, y+1) = \frac{1}{3}x - y - 1 + \ln 3$$

Exercício 1.31

`Admitindo que, no cálculo de` $a = \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}$`, os valores` $\sqrt{2}$`,` $\sqrt{3}$ `estão afetados de iguais erros absolutos` Δ`, obtenha, em função de` Δ`, uma estimativa do erro relativo que existe para` a

Estamos a considerar uma função com duas variáveis $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}$. Os dados $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3}$ são introduzidos de forma aproximada como x^*, y^* sendo $|x^* - x| \leq \Delta$, $|y^* - y| \leq \Delta$, para um valor $\Delta > 0$ conhecido. Sabemos então $\Delta_\infty((x^*, y^*), (x, y)) = \max(|x^* - x|, |y^* - y|) \leq \Delta$,

Segundo sabemos $f(x^*, y^*)$ pode ser usado como valor aproximado de $f(x, y)$, mas contém um erro absoluto que, aproximadamente (para erros pequenos), pode ser limitado pela fórmula:

$$\Delta(f(x^*, y^*), f(x, y)) \leq \|\nabla_{(x,y)} f\|_q \cdot \Delta_p((x^*, y^*), (x, y))$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Podemos deduzir (usamos $q = 1$, $p = \infty$):

$$\Delta(f(x^*, y^*), f(x, y)) \leq \|\nabla_{(x,y)} f\|_1 \cdot \Delta_\infty((x^*, y^*), (x, y))$$

e portanto temos:

$$\Delta(f(x^*, y^*), f(x, y)) \leq \|\nabla_{(x,y)} f\|_1 \cdot \Delta$$

Calculamos o gradiente de $f(x, y) = (x + y)^{-2}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (-2) \cdot (x + y)^{-3} \cdot (1 + 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (-2) \cdot (x + y)^{-3} \cdot (0 + 1)$$

Assim no ponto $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ temos como gradiente:

$$\nabla_{(\sqrt{2},\sqrt{3})} f = \left(\frac{-2}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3}, \frac{-2}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3} \right)$$

cuja norma-1 é: $\|\nabla_{(\sqrt{2},\sqrt{3})} f\|_1 = \frac{2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3} + \frac{2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3} = \frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3}$

Temos então $\Delta(f(x^*, y^*), f(x, y)) \leq \frac{4\Delta}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3}$

Finalmente, para o erro relativo:

$$\delta(f(x^*, y^*), f(x, y)) = \frac{\Delta(f(x^*, y^*), f(x, y))}{|f(x, y)|} \leq \frac{4\Delta/(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3}{1/(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \frac{4\Delta}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \simeq 1.2714 \cdot \Delta$$

Exercício 1.33

`Calcule um majorante do erro absoluto e um majorante para o erro relativo cometidos no cálculo do valor da função` $f(x,y,z) = -x + y^2 + \sin z$`, se usamos os valores aproximados:`

$$x^* = 1.1 \pm 0.05, \quad y^* = 2.04 \pm 0.005, \quad z^* = 0.5 \pm 0.05$$

Temos valores aproximados $x^* = 1.1$; $y^* = 2.04$, $z^* = 0.5$ de x, y, z. Estes valores aproximados têm majorantes de erro diferente em cada componente:

$$|x^* - x| \leq 0.05, \quad |y^* - y| \leq 0.005, \quad |z^* - z| \leq 0.05$$

Se usamos a linearização de f no ponto (x, y, z) temos:

$$\Delta(f(x^*, y^*, z^*) - f(x,y,z)) = \left|(\nabla_{(x,y,z)} f) \cdot (x^* - x, y^* - y, z^* - z)\right|$$

Calculamos o gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cos z$$

Portanto para o ponto dado temos $\nabla_{(x,y,z)} f = (-1, 4.08, \cos 0.5) \simeq (-1, 4.08, 0.878)$ e o erro absoluto cometido é

$$|f(x^*, y^*, z^*) - f(x,y,z)| \leq |-1| \cdot 0.05 + 4.08 \cdot 0.005 + 0.878 \cdot 0.05 = 0.1143$$

Um majorante de erro absoluto é portanto 0.1143

E tendo em conta que $f(x,y,z) = -1.1 + 2.04^2 + \sin 0.5 = 3.541$, um majorante para o erro relativo cometido é:

$$\delta(f(x^*, y^*, z^*), f(x,y,z)) = \frac{\Delta(f(x^*, y^*, z^*), f(x,y,z))}{|f(x,y,z)|} \leq \frac{0.1143}{3.541} = 0.003228$$

A percentagem de erro não é superior a 0.3%. Um majorante do erro relativo é 0.003228.

Exercício 1.36

`Tem-se uma ferramenta formada por dois lados de comprimento` $a =$ 100`mm e` $b = 101$`mm, unidos pelos seus extremos. Situam-se os lados com um ângulo medido como` $\alpha = 1^o \pm 0.01^o$`. A distância entre os extremos deve ser, pelo teorema do cosseno :`

$$d = (a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)^{1/2}$$

1. `Com que precisão será possível determinar` d `a partir dos dados?.`

2. `Qual a precisão se utilizamos em lugar do ângulo` α `o valor` $\cos\alpha =$ 0.9998 `com 4 algarismos significativos?.`

• Temos parâmetros fixos conhecidos a, b, e existe um ângulo α, para o qual conhecemos o valor aproximado em graus $\alpha^* = 1^o$, com erro absoluto $|\alpha^* - \alpha| \leq 0.01$. Podemos trabalhar em graus sexagesimais ou trabalhar em radianos, mas a lei formulada é para a função cosseno em radianos. Podemos alterar α, α^* e o erro para ser dados com unidades de radianos, ou podemos alterar a fórmula para trabalhar com ângulos sexagesimais.

Ao trabalharmos com a função cosseno em graus sexagesimais dada na fórmula (o valor α de entrada é em graus sexagesimais) temos uma relação com a função cosseno natural (em radianos), sendo a expressão $\cos\alpha$ na fórmula na realidade $\cos\frac{2\pi\alpha}{360} = \cos\frac{\pi\alpha}{180}$ se usamos o cosseno natural. Temos uma função:

$$f(\alpha) = (a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi\alpha}{180})^{1/2}$$

Ao introduzir um ângulo α em radianos, esta fórmula produz $f(\alpha)$, valor de distância entre os extremos, em milímetros.

A pergunta é qual a precisão de $d^* = f(\alpha^*)$ como aproximação de $f(\alpha)$. A precisão é medida como percentagem de erro ou como erro relativo.

Temos $\delta(\alpha^*, \alpha) = \frac{|\alpha^* - \alpha|}{\alpha} = 0.01$ e sabemos $\delta(f(\alpha^*), f(\alpha)) \leq \kappa(\alpha) \cdot \delta(\alpha^*, \alpha)$ sendo κ o número de condição da função f no ponto $\alpha = 1$.

$$\kappa(\alpha) = \frac{\alpha \cdot f'(\alpha)}{|f(\alpha)|}$$

Calculamos a derivada:

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi\alpha}{180}\right)^{-1/2} \cdot \left(-2ab \cdot (-\sin\frac{\pi\alpha}{180}) \cdot \frac{\pi}{180}\right) =$$
$$= \frac{ab\pi\sin\frac{\pi\alpha}{180}}{180\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi\alpha}{180}}}$$

No ponto $\alpha = 1$ e com os parâmetros $a = 100$, $b = 101$ isto produz: $f(\alpha) = 2.01905$ para o valor de f, e $f'(\alpha) = 1.5274$ para o valor da derivada, portanto:

$$\kappa(\alpha) = \frac{1 \cdot 1.5274}{2.01905} = 0.751$$

A percentagem de erro inicial não superior a 1% nos valores de entrada, irá produzir uma percentagem de erro não superior a 0.75% na distância calculada:

$$\delta(f(\alpha^*), f(\alpha)) \leq k_\alpha \cdot \delta(\alpha^*, \alpha) \leq 0.751$$

• Se usamos $c = \cos\alpha$ na fórmula $d = (a^2 + b^2 - 2abc)^{1/2}$, e aproximamos c como $c^* = 0.9998$ com 4 algarismos decimais significativos, como temos números de expoente -1 em base 10, estamos a indicar que

$$\frac{|c^* - c|}{10^{-1}} \leq 5 \cdot 10^{-4}$$

logo $|c^* - c| \leq 0.00005$

A distância d é uma função $g(c) = (a^2 + b^2 - 2abc)^{1/2}$ que depende do valor c introduzido. O valor aproximado que obtemos para $a = 100$, $b = 101$, $c^* = 0.9998$ é $g(c^*) = 2.245$

Sabemos para o erro absoluto:

$$\Delta(g(c^*), g(c)) \leq g'(c) \cdot \Delta(c^*, c)$$

Calculamos a derivada indicada (tendo em conta que a, b são valores reais fixos)

$$g'(c) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2abc)^{-1/2} \cdot (-2ab) = \frac{-ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2abc}}$$

Neste caso concreto, com $a = 100$, $b = 101$, $c = 0.9998$ temos $g'(c) = 4498.89$ e portanto

$$\Delta(g(c^*), g(c)) \leq 4498.89 \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 0.225$$

Temos assim $g(c) \in [2.245 - 0.225, 2.245 + 0.225] = [2.02, 2.47]$. O valor $g(c)$ tem expoente 0 em base decimal, e erro $0.225 < 0.5$, portanto a valor aproximado $g(c^*)$ tem um único algarismo significativo de precisão.

O erro relativo será

$$\delta(g(c^*), g(c)) = \frac{\Delta(g(c^*), g(c))}{|g(c)|} \leq \frac{0.225}{2.02} = 0.1113$$

Sendo os dados de entrada com 4 algarismos significativos (percentagem de erro do valor dado de cosseno não superior a 0.05%), a distância d medida tem só um algarismo significativo de precisão e poderia conter uma percentagem de erro de até 11.13%.