IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA I

1^o SEMESTRE 2019/2020
Exame - Época Normal

5 de Fevereiro de 2020 Duração: **2h30**

Instruções:

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- Não pode responder a diferentes questões numa mesma folha de resposta.
- O abandono da sala só poderá efectuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É permitida a consulta de uma folha A4 manuscrita pelo aluno.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de equipamentos electrónicos durante a prova.
- **Justifique convenientemente todas as respostas**.

No exercício 2 não poderá ser utilizada a Regra de Cauchy no cálculo de limites.

[2.0] 1. Caracterize a função inversa da a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\arccos(3x+2).$$

2. Seja f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{2x+2} & , \ x < -1 \\ \dfrac{6}{x+3} & , \ -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x^2+x} & , \ x > 0 \end{cases}$$

[1.5] (a) Determine o domínio de f e estude a sua continuidade.

[1.5] (b) Verifique que f é prolongável por continuidade ao ponto de abcissa $x = 0$ e indique o seu prolongamento.

[2.5] (c) Verifique se a função f é diferenciável no ponto de abcissa $x = -1$ e indique, justificando, a expressão da derivada de f.

[1.0] 3. Considere a função real de variável real definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \sqrt[3]{1+3x}$.
Verifique em qual dos intervalos $I = [-3, 0]$ e $J = [0, 3]$ é possível aplicar o Teorema de Lagrange à função f e, quando possível, aplique-o.

4. Seja $f(x) = x^{-2}$.

[2.0] (a) Determine o polinómio de Taylor de ordem 2 de f no ponto 1 e utilize-o para calcular um valor aproximado de $\dfrac{1}{(1.01)^2}$.

[1.5] (b) Considere a função $g(x) = 3x^2 + f(x)$. Indique o domínio, estude o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão da função g.

5. Calcule:

[2.0] (a) $P\left[\dfrac{1}{(x+1)(x-2)^2}\right]$.

[1.5] (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$.

[1.5] (c) $\displaystyle\int_{-3}^0 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$.

[1.5] 6. Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, considere a função H definida por

$$H(x) = \int_2^{x+x^2} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Determine, justificando, a expressão de $H'(x)$ e mostre que $H'(1) - H(1) = 3f(2)$.

[1.5] 7. Considere a região do plano limitada pelas linhas

$$y = 1 + x^2,\ y = x,\ x = 0 \text{ e } y = 2.$$

Faça um esboço da região e calcule a sua área.

Fim do exame