Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA I

1^o SEMESTRE 2016/2017

Exame de Época Normal

10 Fevereiro de 2017 Duração: **2h30m**

Instruções:

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- O abandono da sala só poderá efetuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É permitida a consulta de uma folha A4 manuscrita pelo aluno.
- Não é permitida a utilização de máquinas de calcular.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de equipamentos electrónicos durante a prova.
- **Justifique convenientemente todas as respostas**.

[2.0] 1. Caracterize a função inversa da função real de variável real definida por

$$g(x) = 3\pi + 2\arccos(x+1).$$

[1.5] 2. Sendo $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, determine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e diga, justificando, se é verdadeiro ou falso que

$$\forall_{\delta>0}\exists_{M>0}\forall x \in D_f : x > M \Rightarrow |f(x)| < \delta.$$

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} + k, & x < 0 \\[2ex] 1 - \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & 0 < x < 1 \\[2ex] x+5, & x \geqslant 1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

[1.5] (a) Determine o domínio e estude a continuidade de f no seu domínio.

[1.5] (b) Determine o valor da constante k, de modo que f seja prolongável por continuidade em $x = 0$ e, para esse valor de k, indique o respectivo prolongamento.

[0.5] (c) Justifique que a função f não é diferenciável em $x = 1$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x^2\right)$.

[2.0] (a) Determine o polinómio de Mac-Laurin de ordem 2 de f e use-o para calcular um valor aproximado de $\operatorname{arctg}(0.04)$.

[1.0] (b) Estude a monotonia e os extremos de f.

[1.5] (c) Calcule $P\left[x \operatorname{arctg}\left(x^2\right)\right]$.

5. Calcule:

[1.5] (a) $P\left[\dfrac{x+1}{x^3+2x^2}\right]$.

[1.5] (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} dx$.

6. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x & , \text{ se } \quad x \leq 0 \\ x \operatorname{sen}\left(2x^2\right) & , \text{ se } \quad x > 0 \end{cases}.$$

[0.5] (a) Calcule $P\left[x \operatorname{sen}\left(2x^2\right)\right]$.

[1.5] (b) Determine a expressão de $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\, dt$.

[1.0] (c) Determine o valor médio de f no intervalo $\left[-1, \sqrt{\pi}\right]$.

[1.0] 7. Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$H(x) = \int_1^{x^5} \cos(\sqrt[5]{t}) dt.$$

Determine, justificando, a expressão de $H'(x)$.

[1.5] 8. Seja A a região do plano limitada pelas curvas $y = -x^2 + 2$ e $y = -|x|$. Faça um esboço da região A e calcule a sua área.

Fim do Exame