DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA I

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

1º SEMESTRE 2019/2020

1º Teste - Tópicos de Resolução

23 de Novembro de 2019 Duração: **2 Horas**

Nos exercícios 1, 2, 3 e 5 não poderá ser utilizada a Regra de Cauchy no cálculo de limites.

1. Calcule os seguintes limites:

[1.0] a) **Resolução:** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(2-x)(2+x)}=$
$$=-\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(2+x)}=-\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{2+x}=-\frac{1}{4}$$

[1.0] b) **Resolução:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\operatorname{sen}x}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}+\dfrac{1}{2x+1}\operatorname{sen}x\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{2x+1}\operatorname{sen}x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}+\overbrace{\underbrace{\frac{1}{2x+1}}_{\substack{\to 0\\ \text{infinitésimo}}}\underbrace{\operatorname{sen}x}_{\text{função limitada}}}^{\to 0}\right)=\frac{1}{2}$$

[1.5] 2. Sendo $f(x)=\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}$, diga qual o significado da proposição seguinte e indique, justificando, se é verdadeira ou falsa:

$$\forall\delta>0\exists\varepsilon>0\forall x\in D_f\setminus\{1\}:|x-1|<\varepsilon\Rightarrow|f(x)-1|<\delta.$$

Resolução:

A proposição corresponde à definição do limite, segundo Cauchy, para $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

Calculando este limite pode-se verificar a veracidade desta proposição. Desta forma,

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}=2\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x-2}-1}{2(x-1)}=2\underbrace{\lim_{\substack{x\to 1\\ 2x-2\to 2}}\frac{e^{2x-2}-1}{2x-2}}_{\text{Limite notável }\to 1}=2\times 1=2$$

Logo a proposição é falsa pois $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2\neq 1$.

---

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a\sin(2x)}{x^2+x} & , \quad x < 0 \\ 1 + xe^{-\frac{1}{1-x}} & , \quad 0 < x < 1 \\ 5x - 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad (\text{com } a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}).$$

[2.5] **a)** Determine o domínio da função f e estude a continuidade da mesma.

Resolução:

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \underbrace{\left(x^2 + x \neq 0 \ \wedge \ x < 0\right)}_{1.^o\ \textbf{ramo}} \ \vee \ \underbrace{\left(1 - x \neq 0 \ \wedge \ 0 < x < 1\right)}_{2.^o\ \textbf{ramo}} \ \vee \ \underbrace{x \geq 1}_{3.^o\ \textbf{ramo}} \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x \neq 0 \ \wedge \ x \neq -1 \ \wedge \ x < 0) \ \vee \ (x \neq 1 \ \wedge \ 0 < x < 1) \ \vee \ x \geq 1\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \end{aligned}$$

Estude-se agora a continuidade da função:

- Nos pontos que não fazem parte do domínio não há continuidade. A função não é contínua em $x = 0$ nem $x = -1$.

- Em $\mathbb{R}^- \setminus \{-1\}$ tem-se $f(x) = \frac{a\sin(2x)}{x^2+x}$.

  - As funções $2x$, $\sin x$ são contínuas. Portanto a composição $\sin(2x)$ é contínua. O polinómio é uma função contínua. Portanto $\sin(2x)/(x^2 + x)$, sendo um quociente de funções contínuas, é também contínua no seu domínio (nos pontos onde $x^2 + x \neq 0$). O produto duma função contínua com a constante a é contínua. Deduz-se que $f(x)$ é contínua nos pontos do intervalo $]-\infty, 0[$ do seu domínio, e que não é contínua em $x = -1$, porque nem sequer está no seu domínio.

- Em $]0, 1[$ tem-se $f(x) = 1 + x \cdot e^{-1/(1-x)}$.

  - A função $-1/(1-x)$ é contínua, por ser quociente de funções contínuas, onde o denominador não se anula. Assim a função $e^{-1/(1-x)}$ também é contínua no intervalo $]0, 1[$, porque é a composição da função anterior com a função exponencial e^x, que é contínua em todos os pontos. Finalmente, como o produto e a soma de funções contínuas é contínua, deduzimos que $1 + x \cdot e^{-1/(1-x)}$ é contínua no intervalo $]0, 1[$. Deduzindo-se que f é contínua em todos os pontos do intervalo $]0, 1[$.

- Em $]1, +\infty[$ tem-se $f(x) = 5x - 1$.

  - Como as funções polinomiais são contínuas, deduz-se que $f(x)$ é contínua em qualquer ponto deste intervalo.
  - Este argumento não é válido no caso do ponto $x = 1$, porque o valor da função $f(x)$ coincide com o valor do polinómio $5x-1$ no ponto $x = 1$, mas não num intervalo aberto que contém este ponto.

- No caso particular $x = 1$, não existe uma expressão analítica única que determine os valores $f(x)$ num intervalo aberto que contenha 1. Há duas expressões analíticas diferentes, uma para o caso $x > 1$ e outra para o caso $x < 1$. A função será contínua neste ponto se e só se:

  $$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

  Como se tem diferente descrição de $f(x)$ à esquerda e à direita de 1, estudemos os limites laterais.

– No intervalo $]1,+\infty[$ tem-se $f(x)=5x-1$. Portanto:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(5x-1) = 5\times 1 - 1 = 4$$

– No intervalo $]0,1[$ tem-se $f(x)=1-x\cdot e^{-1/(1-x)}$. Portanto:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[1+x\cdot e^{-1/(1-x)}\right] \underset{x<1\Rightarrow 1-x>0}{\underset{\downarrow}{=}} 1+1\times e^{-\frac{1}{0^+}} = 1+e^{-\infty} = 1+0 = 1$$

– Sendo os limites laterais de $f(x)$ em $x=1$ diferentes, devemos concluir que não existe limite de $f(x)$ no ponto $x=1$, e que a função não é contínua neste ponto.

- Em conclusão, a função $f(x)$ é **contínua em todos os pontos da reta real, exceto em 0, -1 e 1**, isto é, em $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$

[0.5] **b)** Indique, justificando, se a função f é diferenciável em $x=1$.

Resolução: Como$f\,(x)$ não é contínua no ponto $x=-1$, devemos deduzir que **não é diferenciável neste ponto** (as funções diferenciáveis num ponto são contínuas nesse ponto).

[1.5] **c)** Determine o valor de a para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto de abcissa $x=0$ e indique esse prolongamento.I

Resolução: Para prolongar $f(x)$ por continuidade ao ponto de abcissa $x=0$, o limite da função neste ponto deve existir e ser um valor real.

Novamente, como temos duas definições independentes à esquerda e à direita de $x=0$, calculamos os limites laterais:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{a\sin(2x)}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2a}{x+1}\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}\right]$$

Sabemos que

$$\lim_{x\to 0} 2x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} \underset{y=2x}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$$

(este último é um limite notável, já conhecido)

Deduzimos então

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{2a}{0+1}\times 1 = 2a$$

Calculemos agora o limite à direita em $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1+x\cdot e^{-1/(1-x)} = 1+0\cdot e^{-1} = 1$$

Se fosse $2a\neq 1$, não existiria o limite de $f(x)$ em $x=0$ e não poderiamos definir $f(0)$ de maneira a ter continuidade em $x=0$.

No caso específico $a=1/2$, o limite de $f(x)$ em $x=0$ existe, e é igaul ao valor real 1.

Só no caso $a=1/2$ é possível prolongar $f(x)$ por continuidade. Neste caso bastará manter os valores dados $f(x)$ para $x\neq 0,-1,1$ e alargar o domínio ao caso $x=0$ através de $f(0)=1$, com o que temos um prolongamento de f, agora de maneira contínua em $x=0$:

$$g\,(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{2(x^2+x)} & ,\ x<0 \\ 1+xe^{-1/(1-x)} & ,\ 0\leq x<1 \\ 5x-1 & ,\ x\geq 1 \end{cases}$$

---

4. Considere a função g definida por

$$g\,(x) = \frac{\pi}{4} - \text{arcsen}\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

[2.0] **a)** Caracterize a função inversa de g.

Resolução: Pretende-se $D_{g^{-1}}$, $CD_{g^{-1}}$ e a expressão de $g^{-1}(x)$, em que $D_{g^{-1}} = CD_g$ e $CD_{g^{-1}} = D_g$.

$\underline{D_g}$: O domínio da função $\operatorname{arcsen} x$ é $[-1,1]$, pelo que $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x + \frac{1}{2} \leq 1\right\}$.

$$-1 \leq x + \frac{1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 - \frac{1}{2} \leq x \leq 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Portanto, $D_g = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] = CD_{g^{-1}}$.

$\underline{CD_g}$: O contra-domínio da função $\operatorname{arcsen} x$ é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, logo, para $x \in D_g$, $\operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (e assume todos os valores no intervalo).

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \geq -\operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq -\operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} - \operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - \operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - \operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{3\pi}{4}$$

Portanto, $CD_g = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] = D_{g^{-1}}$.

$\underline{g^{-1}(x)}$:

$$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) = y \Leftrightarrow -\operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) = y - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) = -y + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\left(-y + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - \frac{1}{2}$$

Portanto, $g^{-1}(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{1}{2}$.

Logo

$$\begin{aligned} g^{-1} : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] &\to \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ x &\mapsto \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[1.0] **b)** Determine, caso exista, o valor de x tal que $g(x) = \frac{\pi}{2}$.

Resolução:

$\underline{1^o \text{ processo}}$: Como $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] = CD_g$, existe x tal que $g(x) = \frac{\pi}{2}$ e tem-se que $x = g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$$

Portanto, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

$\underline{2^o \text{ processo}}$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \operatorname{arcsen}\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Como $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, existe solução e é dada por

$$x + \frac{1}{2} = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$$

Portanto, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

---

5. Considere a função real de variável real definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln(1-2x) & , \quad x < 0 \\ \sqrt{3x+1} - 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

[2.0] **a)** Mostre que a função f não é diferenciável no ponto de abcissa $x = 0$.

Resolução: f é diferenciável em $x = 0$ sse f tem derivada finita em 0, isto é sse $f'_e(0) = f'_d(0)$ e são finitas.

$$f'_e(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h + \ln(1-2h) - \left(\sqrt{3\times 0+1} - 1\right)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h + \ln(1-2h) - 0}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^-} \left(\frac{h}{h} + \frac{\ln(1-2h) - 0}{h}\right) = 1 - 2 \underbrace{\lim_{\substack{h\to 0^- \\ -2h\to 0^+}} \left(\frac{\ln(1-2h)}{-2h}\right)}_{\text{limite notável } \to 1} = 1 - 2\times 1 = -1$$

$$f'_d(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{3h+1} - 1 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(\sqrt{3h+1} - 1\right)\left(\sqrt{3h+1} + 1\right)}{h\left(\sqrt{3h+1} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(\sqrt{3h+1}\right)^2 - 1^2}{h\left(\sqrt{3h+1} + 1\right)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h+1-1}{h\left(\sqrt{3h+1} + 1\right)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3}{\sqrt{3h+1} + 1} = \frac{3}{2}$$

Como $f'_e(0) \neq f'_d(0)$ conclui-se que f não tem derivada e, como tal, não é diferenciável em $x = 0$.

[2.0] **b)** Indique o domínio da função f e determine, justificando, a sua derivada.

Resolução:

Domínio:

1^o Ramo: $x < 0 \wedge 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < 0$

2^o Ramo: $x \geq 0 \wedge 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x \geq 0$

Como tal, $D_f = \mathbb{R}$

Derivada:

- $x < 0 \to f$ é diferenciável pois é a soma e a composição de funções diferenciáveis em $x < 0$ (polinomiais e logaritmica), logo

$$f'(x) = (x + \ln(1-2x))' = (x)' + \frac{(1-2x)'}{(1-2x)} = 1 - \frac{2}{(1-2x)}$$

- $x > 0 \to f$ é diferenciável pois é a diferença e a raiz de funções diferenciáveis em $x > 0$ (polinomiais), logo

$$f'(x) = \left(\sqrt{3x+1} - 1\right)' = \left((3x+1)^{\frac{1}{2}}\right)' - 0 = \frac{1}{2}(3x+1)'(3x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

- $x = 0 \to$ conclui-se, da alínea a), que f não tem derivada

Então:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{(1-2x)} & , \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}} & , \quad x > 0 \end{cases} .$$

[1.0] **c)** Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$.

Resolução:

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) .$$

$f(1) = \sqrt{3 \times 1 + 1} - 1 = 1$

$f'(1) = \dfrac{3}{2\sqrt{3 \times 1 + 1}} = \dfrac{3}{4}$

Portanto, a recta tangente é definida por $y = 1 + \frac{3}{4}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.

[1.0] **d)** Mostre que existe pelo menos um $c \in \left]-2,-1\right[$ tal que $f'(c) = 1 + \ln\left(\frac{3}{5}\right)$.

esolução:

Já vimos na alínea b) que a função f é diferenciável para $x < 0$ e, como tal, é contínua para $x < 0$; conclui-se então que também é contínua no intervalo $[-2,-1]$ e diferenciável no intervalo $\left]-2,-1\right[$. Aplicando o Teorema de Lagrange, conclui-se que $\exists c \in \left]-2,-1\right[$:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(-1) - f(-2)}{-1-(-2)} = \frac{-1 + \ln(1-2(-1)) - (-2 + \ln(1-2(-2)))}{1} = \\ &= -1 + \ln(3) + 2 - \ln(5) = 1 + \ln(3) - \ln(5) = 1 + \ln\left(\frac{3}{5}\right) \end{aligned}$$

---

6. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = 2x + e^x$.

[1.5] **a)** Mostre que a função g tem um único zero.

Resolução: Aplicação do corolário do teorema de Lagrange:

- $D_g = \mathbb{R}$ e $g(x) = 2x + e^x$ é uma função contínua no seu domínio por se tratar da soma de funções contínuas (polinomial e exponencial)
- $g(x) = 2x + e^x$ é uma função diferenciável no seu domínio por se tratar da soma de funções diferenciáveis (polinomial e exponencial)
- $g'(x) = 2 + e^x > 0$ para $\forall x \in D_g$

Então, aplicando o corolário do teorema de Lagrange, conclui-se que a função g é estritamente crescente em todo o seu domínio. Sendo g uma função estritamente crescente em todo o seu domínio terá no máximo 1 zero.

Aplicação do corolário do teorema de Bolzano:

Como, por exemplo, no intervalo $[-1, 0]$, se tem que

- $g(x) = 2x + e^x$ é uma função contínua (visto anteriormente)
- $g(-1) = -2 + \frac{1}{e} < 0$ e $g(0) = 1 > 0$, então $g(-1) \times g(0) < 0$

Então, aplicando o corolário do teorema de Bolzano, conclui-se que a função g tem pelo menos um zero no intervalo $]-1,0[$.

Juntando os resultados dos 2 corolários conclui-se que a função g tem um único zero.

[1.5] **b)** Calcule, justificando, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2+x)}{g(x)}$.

Resolução: O limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2+x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2+x)}{2x+e^x}$$

é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

A função $f(x) = \ln(2+x)$ é diferenciável no seu domínio, $]-2,+\infty[$, pois é a composta de 2 funções diferenciáveis (logaritmíca e polinomial); a função g é diferenciável em $\mathbb{R}$ (ver alínea a)); $g'(x) = 2+e^x \neq 0$. Note-se que Então,

$$f'(x) = (\ln(2+x)) = \frac{2}{2+x},$$

Então,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{2+x}}{2+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{(2+x)(2+e^x)} \overset{\frac{2}{+\infty}}{=} 0$$

Como o limite das derivadas existe, então, pela Regra de Cauchy, conclui-se que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2+x)}{g(x)} = 0.$$

Fim da resolução do teste