Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios sobre Teoria de Erros

1. Determine a representação decimal dos seguintes números: $(11001)_2$, $(427)_8$, $(27D)_{16}$ e $(2713)_{16}$.

2. Obtenha a representação do número $(1985)_{10}$ nas seguintes bases: 2, 3, 8 e 16.

3. Converta as seguintes fracções binárias em decimais: $(0.110001)_2$ e $(0.11111111)_2$.

4. Determine a representação binária dos números $(45.375)_{10}$, $(22.625)_{10}$ e $(2.3)_{10}$.

5. Liste todos os números positivos do sistema $FP(2, 3, -1, 1)$ e converta-os para base decimal.

6. Represente os seguintes números em $FP(10, 4, -99, 99, A)$ e em $FP(10, 4, -99, 99, T)$:

   (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\sqrt{201}$ (d) -83785
   (e) 83798 (f) 0.00113296 (g) $\text{tg}\,(5)$ (h) $\log_{10} 50$

7. Determine as representações de π em $FP(10, 5, -99, 99, T)$ e em $FP(10, 5, -99, 99, A)$.

8. Considere os números $x = \frac{1}{3}$ e $y = \frac{1}{3000}$ e as aproximações $\bar{x} = 0.3333$ e $\bar{y} = 0.0003$. Determine os respectivos erros absolutos e relativos. Comente.

9. Os resultados das medições de uma ponte e de uma viga foram, respectivamente, 9999 cm e 9 cm. Sabendo que as medidas exactas são, respectivamente, 10000 cm e 10 cm, calcule

   (a) os erros absolutos de cada medição efectuada;

   (b) as respectivas percentagens de erro relativo.

10. Considere o sistema $FP(10, 4, -99, 99, T)$.

    (a) Calcule o valor de $y = \left(\dfrac{4-\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}\right)^3$.

    (b) Calcule o valor das seguintes expressões, analiticamente equivalentes:

    $$y = (31 - 8\sqrt{15})^3 \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{(31 + 8\sqrt{15})^3}.$$

11. Sejam $A = 0.7422 \times 10^{-1}$, $B = 0.1246 \times 10^3$ e $C = 0.7421 \times 10^{-1}$. Efectue os seguintes cálculos no sistema $FP(10, 4, -99, 99, T)$:

    $$\text{(a) } (A + B) + C \quad \text{(b) } \frac{A}{C} \quad \text{(c) } A - C \quad \text{(d) } A \times \left(\frac{B}{C}\right).$$

12. Num sistema de ponto flutuante com mantissa até 4 dígitos, sejam

$$x = 0.4537 \times 10^4 \quad \text{e} \quad \bar{x} = 0.4501 \times 10^4.$$

Determine o número de algarismos significativos de $\bar{x}$.

13. Determine os algarismos significativos do valor aproximado $\bar{x}$ de x :

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } x = \pi \quad \text{e} \quad \bar{x} = 3.1 & \text{(b) } x = e^{-4} \quad \text{e} \quad \bar{x} = 0.0185 \\ \text{(c) } x = \pi \times 10^2 \quad \text{e} \quad \bar{x} = 314.16 & \text{(d) } x = \pi \times 10^2 \quad \text{e} \quad \bar{x} = 314.15 \end{array}$$

14. Dado um número aproximado com um erro absoluto $\Delta_{\bar{x}}$, indique o número de algarismos significativos e o número de casas decimais correctas em cada caso:

$$\text{(a) } \bar{x} = 397.74 \quad \text{e} \quad \Delta_{\bar{x}} \leqslant 0.05 \quad \text{(b) } \bar{x} = 0.01078 \quad \text{e} \quad \Delta_{\bar{x}} \leqslant 0.0008$$

15. Considere um sistema de ponto flutuante normalizado, de base decimal, com 4 dígitos na mantissa, expoente a variar entre -99 e 99 e que opera por arredondamento. São dadas as aproximações $\bar{x} = 0.7237 \times 10^4$ e $\bar{y} = 0.2145 \times 10^{-1}$ das quantidades exactas x e y. Efectue as seguintes operações, representando o resultado do referido sistema e determine uma estimativa para os erros relativos de cada resultado:

$$\text{(a) } S = x + y \qquad \text{(b) } P = x \times y \qquad \text{(c) } Q = \frac{x}{y}.$$

16. Determine o número de algarismos significativos que se pode garantir quando se calcula $x + y$ sabendo que as aproximações de x e y têm 3 algarismos significativos. Considere $\bar{x} = 0.425 \times 10^3$ e $\bar{y} = 0.326 \times 10^3$.

17. Admitindo que, no cálculo de $A = \dfrac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}$, os valores de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ estão afectados de iguais erros absolutos, isto é, $\Delta\sqrt{2} = \Delta\sqrt{3} = \Delta\varepsilon$ e tendo em consideração que $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) > 3$, obtenha, em função de $\Delta\varepsilon$, uma estimativa do erro relativo que vem para A.

18. (a) Em 1837, Bessel determinou para o comprimento do semi-eixo maior do elipsóide terrestre o valor de $a = 6377397$m e, em 1910, Hayford determinou para a mesma grandeza o valor $a_1 = 6378388$m. Supondo exacto o valor a_1, calcule o erro absoluto e a percentagem de erro do valor aproximado a.

    (b) O valor adoptado em 1948 para a constante de Planck foi $h_1 = 6.62 \times 10^{-34}J$, ao passo que o valor definido por Planck em 1899 foi $h = 6.41 \times 10^{-34}J$. Considerando exacto o valor h_1, calcule o erro absoluto e a percentagem de erro de h.

    (c) Compare os resultados obtidos nos dois casos anteriores e indique qual a determinação que foi mais precisa relativamente ao valor que foi considerado exacto.

19. Considere a função $f(x, y, z) = \dfrac{2xy}{z}$.

    (a) Considere as aproximações $\bar{x} = 3.1$, $\bar{y} = 1.7$ e $\bar{z} = 1.4$. Calcule $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e um majorante do erro absoluto cometido (despreze os erros de arredondamento);

    (b) Determine uma estimativa do erro relativo cometido usando os resultados de a);

    (c) Sabendo que $x = \pi$, $y = \sqrt{3}$ e $z = \sqrt{2}$, calcule o erro absoluto e relativo de $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e compare com as estimativas obtidas nas alíneas anteriores.

20. Calcule um majorante do erro absoluto e uma estimativa para o erro relativo cometidos no cálculo do valor da função $f(x,y,z) = -x + y^2 + \operatorname{sen} z$, sabendo que são usados os seguintes valores aproximados:

$$\bar{x} = 1.1 \ \text{ tal que } \ \Delta_{\bar{x}} \leqslant 0.05;$$
$$\bar{y} = 2.04 \ \text{ tal que } \ \Delta_{\bar{y}} \leqslant 0.005;$$
$$\bar{z} = 0.5 \ rad \ \text{ tal que } \ \Delta_{\bar{z}} \leqslant 0.05.$$

21. Determine as derivadas parciais das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = 2x^3y - 3xy^2$;

   (b) $g(x,y) = \dfrac{e^{x^2} - y}{xy}$;

   (c) $h(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x$;

   (d) $i(x,y) = \ln(x - 3y)$.