Propagação do Erro

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Propagação do Erro

Aula Prática 4

Análise Numérica - 2^o Semestre

6 Abril 2020

Plano da Aula

Propagação do Erro

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Resolução dos exercícios

- 1.27 c) e d)
- 1.29 a)
- 1.32

Vector gradiente

Definição

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Chama-se **gradiente de f** no ponto $a \in D_f$ e representa-se por $\operatorname{grad} f(a)$ ou $\nabla f(a)$ ao vector

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)\Bigg|_a,$$

onde

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h}$$

é denominada de derivada parcial de f em ordem à variável x_i no ponto a.

Linearização

Propagação do Erro

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Definição

Se $p(x)$ **é a linearização de** f: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no ponto $a \in D_f$, então

$$\begin{aligned} p(x) &= f(a) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_a (x_1 - a_1) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_a (x_2 - a_2) + \cdots + \\ &\quad + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_a (x_n - a_n) \\ &= f(a) + \nabla f(a) \bullet (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n) \end{aligned}$$

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Exercício 1.27 c)

Determine o vector gradiente das seguintes funções, em cada ponto (x, y). Use os gradientes obtidos para determinar a linearização de cada uma destas funções no ponto $(0, -1)$.

- $h(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x$
- **Cálculos Auxiliares:** $\frac{\partial h}{\partial x}$
-

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \operatorname{sen} y\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(e^y \operatorname{sen} x\right) \\
&= \operatorname{sen} y \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\right) + e^y \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{sen} x\right) \\
&= e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x
\end{aligned}$$

Exercício 1.27 c)
Continuação

- **Cálculos Auxiliares:** $\frac{\partial h}{\partial y}$
- $$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \operatorname{sen} y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y \operatorname{sen} x\right) \\
&= e^x \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{sen} y\right) + \operatorname{sen} x \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y\right) \\
&= e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$
- **Vector gradiente**

$$\nabla h\left(x, y\right) = \left(e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x, e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x\right)$$

Exercício 1.27 c)
Continuação

- **Linearização** de h no ponto $(0,-1)$

$$p(x,y) = h(0,-1) + \nabla h(0,-1) \bullet (x-0, y-(-1))$$

- **Cálculos Auxiliares**

$$\begin{aligned} h(0,-1) &= e^0 \operatorname{sen}(-1) + e^{-1} \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}(-1) \\ \nabla h|_{(0,-1)} &= \left(e^0 \operatorname{sen}(-1) + e^{-1}\cos 0, e^0 \cos(-1)\right) \\ &= \left(\operatorname{sen}(-1) + e^{-1}, \cos(-1)\right) \end{aligned}$$

- A linearização é dada por

$$\begin{aligned} p(x,y) &= -\operatorname{sen} 1 + \left(-\operatorname{sen} 1 + e^{-1}, \cos 1\right) \bullet (x, y+1) \\ &= -\operatorname{sen} 1 + x\left(-\operatorname{sen} 1 + e^{-1}\right) + y\cos 1 + \cos 1 \end{aligned}$$

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Exercício 1.27 d)

- $s\left(x, y\right) = \log\left(x - 3y\right)$
- **Cálculos Auxiliares:** $\frac{\partial s}{\partial x}$ e $\frac{\partial s}{\partial y}$
-

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\log\left(x-3y\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(x-3y\right)}{x-3y} = \frac{1}{x-3y}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\log\left(x-3y\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(x-3y\right)}{x-3y} = -\frac{3}{x-3y}$$

- **Vector gradiente**

$$\nabla s\left(x, y\right) = \left(\frac{1}{x-3y}, -\frac{3}{x-3y}\right)$$

Exercício 1.27 d)
Continuação

- **Linearização** de s no ponto $(0, -1)$

$$p(x, y) = s(0, -1) + \nabla s(0, -1) \bullet (x - 0, y - (-1))$$

- **Cálculos Auxiliares**

$$\begin{aligned} s(0, -1) &= \log 3 \\ \nabla s|_{(0,-1)} &= \left(\frac{1}{3}, -1\right) \end{aligned}$$

- A linearização é dada por

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \log 3 + \left(\frac{1}{3}, -1\right) \bullet (x, y + 1) \\ &= \log 3 + \frac{1}{3}x - y - 1 \end{aligned}$$

Propagação do Erro

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Definição

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$\Delta_f \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_M \Delta_{x_1} + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_M \Delta_{x_2} + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_M \Delta_{x_n},$$

representa a **fórmula fundamental para a estimativa de majorantes dos erros absolutos**, onde

$$\Delta_f = \left|f\left(\widetilde{x}\right) - f\left(x\right)\right|$$

e

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_M \text{ representa o supremo de } \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Propagação do Erro

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Definição

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$\delta_f \leq \left|p_{x_1}\right|_M \delta_{x_1} + \left|p_{x_2}\right|_M \delta_{x_2} + \cdots + \left|p_{x_n}\right|_M \delta_{x_n},$$

representa a **fórmula fundamental para a estimativa de majorantes dos erros relativos**, onde

$$\delta_f = \left|\frac{\Delta_f}{f(x)}\right|,$$

δ_{x_i} representa o erro relativo de x_i e $\left|p_{x_i}\right|_M$ representa o supremo do **número de condição** de f relativamente às variáveis x_i

$$p_{x_i} = \frac{x_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}}{f(x)}$$

Exercício 1.29 a)

Propagação do Erro

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Considere o sistema numérico $FP\left(10, 4, -99, 99, A\right)$. São dadas as aproximações $x^* = 0.7237 \times 10^4$ e $y^* = 0.2145 \times 10^{-1}$ das quantidades exactas de x e y. Efectue as seguintes operações, representando o resultado do referido sistema e determine com a ajuda das fórmulas de propagação do erro, uma estimativa para os erros relativos de cada resultado:

- $f\left(x, y\right) = x + y$
- Comecemos por efectuar em $FP\left(10, 4, -99, 99, A\right)$ a operação indicada:

$$\begin{aligned}
x^* + y^* &= 7.237 \times 10^3 + 2.145 \times 10^{-2} \\
&= \left(7.237 + 2.145 \times 10^{-5}\right) \times 10^3 \\
&= \left(7.237 + 0.00002145\right) \times 10^3 \\
&= 7.23702145 \times 10^3 \approx 7.237 \times 10^3
\end{aligned}$$

Exercício 1.29 a)
Continuação

Propagação do Erro
- Vector Gradiente
- Linearização
- Exercício 1.27 c)
- Ex.1.27 c) cont.
- Ex.1.27 c) cont.
- Exercício 1.27 d)
- Exercício 1.27 d)
- For. Fund. Erros Abs.
- For. Fund. Erros Rel.
- Exercício 1.29 a)
- Exercício 1.29
- Exercício 1.29
- Exercício 1.29
- Exercício 1.29 FFPE
- Exercício 1.32 a)
- Exercício 1.32
- Exercício 1.32
- Exercício 1.32 b)
- Exercício 1.32 b)
- Exercício 1.32 b)
- Exercício 1.32 c)

- Os majorantes dos erros de arredondamento (simétrico) são

$$\Delta_{x_i} \leq \frac{1}{2} \times \beta^{t+(1-n)}$$

$$x^* = 7.237 \times 10^3 \rightarrow \Delta_x \leq \frac{1}{2} \times 10^{3-3} = 0.5$$

$$y^* = 2.145 \times 10^{-2} \rightarrow \Delta_y \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2-3} = 5 \times 10^{-6}$$

- O maior valor que a função pode tomar é

$$\begin{aligned} M &= \left(x^* + 5 \times 10^{-1}\right) + \left(y^* + 5 \times 10^{-6}\right) \\ &= \left(7.237 \times 10^3 + 0.5\right) + \left(2.145 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-6}\right) \\ &\approx 7237.5214 \end{aligned}$$

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Exercício 1.29 a)
Continuação

- O menor valor que a função pode tomar é

$$
\begin{aligned}
m &= \left(x^* - 5\times 10^{-1}\right) + \left(y^* - 5\times 10^{-6}\right) \\
&= \left(7.237\times 10^{3} - 0.5\right) + \left(2.145\times 10^{-2} - 5\times 10^{-6}\right) \\
&\approx 7236.5214
\end{aligned}
$$

- Supremo do erro relativo

$$
\delta_f \leq \frac{M-m}{m} = \frac{7237.5214 - 7236.5214}{7236.5214} \approx 1.382\times 10^{-4}
$$

Exercício 1.29 a)
FFPE

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

- Apliquemos a fórmula fundamental de propagação dos erros relativos tendo em vista obter uma melhor estimativa deste supremo do erro relativo cometido.

$$\delta_f \leq |p_x|_M \, \delta_x + |p_y|_M \, \delta_y$$

- **Cálculos auxiliares** (números de condição)

$$\begin{aligned} p_x &= x \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = x \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x+y)}{x+y} = \frac{x}{x+y} \\ p_y &= y \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = y \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x+y)}{x+y} = \frac{y}{x+y} \end{aligned}$$

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Exercício 1.29 a)
FFPE

- **Cálculos auxiliares** (majorantes para os valores absolutos dos números de condição)

$$
\begin{aligned}
|p_x| &\leq \frac{7.237\times 10^3 + 0.5}{7.237\times 10^3 - 0.5 + 2.145\times 10^{-2} - 5\times 10^{-6}} \\
&\approx 1.00014
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|p_y| &\leq \frac{2.145\times 10^{-2} + 5\times 10^{-6}}{7.237\times 10^3 - 0.5 + 2.145\times 10^{-2} - 5\times 10^{-6}} \\
&\approx 2.9648\times 10^{-6}
\end{aligned}
$$

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Exercício 1.29 a)
FFPE

- **Cálculos auxiliares** (majorantes dos erros relativos associados a cada grandeza)

$$\delta_x \leq \frac{0.5}{7.237 \times 10^3 - 0.5} \approx 6.9094 \times 10^{-5}$$

$$\delta_y \leq \frac{5 \times 10^{-6}}{2.145 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-6}} \approx 2.3315 \times 10^{-4}$$

- **Fórmula fundamental de propagação dos erros relativos**

$$\delta_f \leq |p_x|_M \, \delta_x + |p_y|_M \, \delta_y$$

$$\begin{aligned} \delta_f &\leq 1.00014 \times 6.9094 \times 10^{-5} + \\ & +2.9648 \times 10^{-6} \times 2.3315 \times 10^{-4} \\ &\approx 6.9104 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Propagação do Erro

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Exercício 1.32 a)

Considere a função

$$f(x, y, z) = \frac{2xy}{z}$$

- Considere as aproximações $x^* = 3.1$, $y^* = 1.7$ e $z^* = 1.4$, arredondamentos por corte com 2 algarismos decimais. Calcule $f(x^*, y^*, z^*)$ e um majorante do erro absoluto cometido.
- $f(x^*, y^*, z^*) = \dfrac{2 \times 3.1 \times 1.7}{1.4} \approx 7.52.$
- **Erros de arredondamento** (corte) são

$$\Delta_x \le \beta^{t+(1-n)} = 10^{0-1} = 0.1$$

$$\Delta_y \le 10^{0-1} = 0.1$$

$$\Delta_z \le 10^{0-1} = 0.1$$

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Exercício 1.32 a)
Continuação

- **Fórmula fundamental de propagação dos erros absolutos**

$$\Delta_f \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M \Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M \Delta_y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_M \Delta_z,$$

- **Derivadas parciais de f**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{z} \rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = \frac{2 \times 1.8}{1.3} \approx 2.7692$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{z} \rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = \frac{2 \times 3.2}{1.3} \approx 4.9231$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{2xy}{z^2} \rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_M = \frac{2 \times 3.2 \times 1.8}{(1.3)^2} \approx 6.8166$$

Exercício 1.32 a)
Continuação

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

- **Um majorante para o erro absoluto é**

$$\begin{aligned}\Delta_f &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M \Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M \Delta_y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_M \Delta_z \\ &\leq 2.7692 \times 0.1 + 4.9231 \times 0.1 + 6.8166 \times 0.1 \\ &\approx 1.4509\end{aligned}$$

Exercício 1.32 b)

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Determine um majorante do erro relativo cometido.

- **Fórmula fundamental de propagação dos erros relativos**

$$\delta_f \leq \left|p_x\right|_M \delta_x + \left|p_y\right|_M \delta_y + \left|p_z\right|_M \delta_z$$

- **Cálculos auxiliares** (majorantes dos erros relativos associados a cada grandeza)

$$\begin{aligned}
\delta_x &\leq \frac{0.1}{3.1-0.1} \approx 3.33 \times 10^{-2} \\
\delta_y &\leq \frac{0.1}{1.7-0.1} \approx 0.0625 \\
\delta_z &\leq \frac{0.1}{1.4-0.1} \approx 7.69 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

Exercício 1.32 b)
Continuação

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

- **Cálculos auxiliares** (majorantes para os valores absolutos dos números de condição)

$$
\begin{aligned}
p_x &= x\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = x\frac{\frac{2y}{z}}{\frac{2xy}{z}} = 1 \rightarrow |p_x| \leq 1 \\
p_y &= y\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = y\frac{\frac{2x}{z}}{\frac{2xy}{z}} = 1 \rightarrow |p_y| \leq 1 \\
p_z &= z\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f} = z\frac{-\frac{2xy}{z^2}}{\frac{2xy}{z}} = -1 \rightarrow |p_z| \leq 1
\end{aligned}
$$

Exercício 1.32 b)
Continuação

Propagação do Erro

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

- **Fórmula fundamental de propagação dos erros relativos**

$$\begin{aligned}
\delta_f &\leq |p_x|_M \, \delta_x + |p_y|_M \, \delta_y + |p_z|_M \, \delta_z \\
&\leq 3.33 \times 10^{-2} + 0.0625 + 7.69 \times 10^{-2} \\
&\approx 0.1727
\end{aligned}$$

Propagação do Erro
Vector Gradiente
Linearização
Exercício 1.27 c)
Ex.1.27 c) cont.
Ex.1.27 c) cont.
Exercício 1.27 d)
Exercício 1.27 d)
For. Fund. Erros Abs.
For. Fund. Erros Rel.
Exercício 1.29 a)
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29
Exercício 1.29 FFPE
Exercício 1.32 a)
Exercício 1.32
Exercício 1.32
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 b)
Exercício 1.32 c)

Exercício 1.32 c)

Se sabemos que $x = \pi$, $y = \sqrt{3}$ e $z = \sqrt{2}$, calcule qual foi exactamente o erro relativo e o erro absoluto de $f\left(x^*, y^*, z^*\right)$ e compare com os majorantes obtidos anteriormente.

- **Erro Absoluto**

$$
\begin{aligned}
\Delta_f &= \left| f\left(x^*, y^*, z^*\right) - f\left(x, y, z\right) \right| \\
&= \left| \frac{2 \times 3.1 \times 1.7}{1.4} - \frac{2 \times \pi \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right| \approx 0.166 < 1.4509
\end{aligned}
$$

- **Erro Relativo**

$$
\delta_f = \left| \frac{\Delta_f}{f} \right| = \left| \frac{0.166}{\frac{2 \times \pi \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \right| \approx 0.0215 < 0.1727
$$