IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

ANÁLISE NUMÉRICA

Aula n^o 8

Factorização LU - Factorização Cholesky
Método de Jacobi - Método de Gauss - Seidel

Decomposição LU

Suponha-se que ao longo do processo de eliminação de Gauss que transformou o sistema

$$AX = B$$

no sistema equivalente

$$A^*X = B^*$$

não houve troca de linhas.

Então, a matriz A admite a factorização $A = LU$ em que L é a matriz **triangular inferior de diagonal unitária**

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & -m_{n2} & -m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

e U é a **matriz triangular superior** A^* obtida no final daquele processo de eliminação de Gauss.

Nota: Chamamos m_{ij} ao multiplicador m usado na operação elementar $L_i + mL_j$, em que $i > j$.

Exercício 2.48

Considere o sistema de equações lineares $AX = B$ sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Encontre uma decomposição LU para a matriz A. Use a decomposição LU para determinar a solução S do sistema, e use-a para calcular a inversa da matriz A.

2. Calcule a norma de A com norma-1, com a norma-∞ e com a norma Euclidiana. Calcule o número de condição de A se usarmos a norma-∞ de $\mathbb{R}^3$. Para esta norma, determine qual das seguintes matrizes A^* tem um erro relativo menor com respeito a A :

$$A_1^* = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } A_2^* = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução:

- **Decomposição** $LU \rightarrow$ Colocar a matriz A em escada de linhas

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} L_2 + \frac{1}{4}L_1 & \rightarrow m_{21} = \frac{1}{4} \\ & \rightarrow m_{31} = 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{11}{12}} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \boxed{\frac{10}{11}} \end{bmatrix} L_3 - \frac{4}{11}L_2 \quad \rightarrow m_{32} = -\frac{4}{11}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{11}{12}} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{10}{11}} \end{bmatrix}$$

A matriz A é equivalente à matriz

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{11}{12}} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{10}{11}} \end{bmatrix} = U$$

A matriz L é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{11} & 1 \end{bmatrix}$$

U é a matriz triangular superior obtida

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{11}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{10}{11} \end{bmatrix}$$

- Solução do sistema $AX = B$

Descobrir a matriz X de ordem 3×1 que verifica

$$AX = B \Leftrightarrow LUX = B \Leftrightarrow L\left(\underbrace{UX}_{Y}\right) = B \Leftrightarrow LY = B$$

Para determinar a matriz X teremos de resolver o sistema

$$\begin{cases} LY = B \\ \\ UX = Y \end{cases}$$

Seja Y matriz de ordem 3×1. Cálculo da matriz coluna Y $(LY = B)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} - \frac{1}{4}y_{11} \\ \frac{4}{11}y_{21} + y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{11} = 1 \\ \\ y_{21} - \frac{1}{4}y_{11} = 1 \\ \\ \frac{4}{11}y_{21} + y_{31} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{11} = 1 \\ \\ y_{21} = \frac{5}{4} \\ \\ y_{31} = \frac{6}{11} \end{cases}$$

Cálculo da matriz coluna de $X, (UX = Y)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{11}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{10}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{6}{11} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{11} - \frac{1}{3}x_{21} \\ \frac{11}{12}x_{21} + \frac{1}{4}x_{31} \\ \frac{10}{11}x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{6}{11} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} - \frac{1}{3}x_{21} = 1 \\ \\ \frac{11}{12}x_{21} + \frac{1}{4}x_{31} = \frac{5}{4} \\ \\ \frac{10}{11}x_{31} = \frac{6}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = \frac{7}{5} \\ \\ x_{21} = \frac{6}{5} \\ \\ x_{31} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

- A solução do sistema

$$\left\{ \left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3}{5} \right) \right\}$$

- Cálculo de A^{-1}

Descobrir a matriz X de ordem 3×3 que verifica

$$AX = I_3 \Leftrightarrow LUX = I_3 \Leftrightarrow L\left(\underbrace{UX}_{Y}\right) = I_3 \Leftrightarrow LY = I_3$$

Para determinar a matriz X teremos de resolver o sistema

$$\begin{cases} LY = I_3 \\ \\ UX = Y \end{cases}$$

Seja Y matriz de ordem 3×3. Cálculo da 1^a coluna de Y $(LY = I_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} - \frac{1}{4}y_{11} \\ \frac{4}{11}y_{21} + y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{11} = 1 \\ \\ y_{21} - \frac{1}{4}y_{11} = 0 \\ \\ \frac{4}{11}y_{21} + y_{31} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{11} = 1 \\ \\ y_{21} = \frac{1}{4} \\ \\ y_{31} = -\frac{1}{11} \end{cases}$$

- Cálculo da 1^a coluna de $X, (UX = Y)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{11}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{10}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{11} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{11} - \frac{1}{3}x_{21} \\ \frac{11}{12}x_{21} + \frac{1}{4}x_{31} \\ \frac{10}{11}x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} - \frac{1}{3}x_{21} = 1 \\ \frac{11}{12}x_{21} + \frac{1}{4}x_{31} = \frac{1}{4} \\ \frac{10}{11}x_{31} = -\frac{1}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = \frac{11}{10} \\ x_{21} = \frac{3}{10} \\ x_{31} = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

- Cálculo da 2^a coluna de Y $(LY = I_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} - \frac{1}{4}y_{11} \\ \frac{4}{11}y_{21} + y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{11} = 0 \\ y_{21} - \frac{1}{4}y_{11} = 1 \\ \frac{4}{11}y_{21} + y_{31} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{11} = 0 \\ y_{21} = 1 \\ y_{31} = -\frac{4}{11} \end{cases}$$

- Cálculo da 2^a coluna de $X, (UX = Y)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{11}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{10}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{4}{11} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{12} - \frac{1}{3}x_{22} \\ \frac{11}{12}x_{22} + \frac{1}{4}x_{32} \\ \frac{10}{11}x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{12} - \frac{1}{3}x_{22} = 0 \\ \frac{11}{12}x_{22} + \frac{1}{4}x_{32} = 1 \\ \frac{10}{11}x_{32} = -\frac{4}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{12} = \frac{2}{5} \\ x_{22} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \\ x_{32} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

- Cálculo da 3^a coluna de Y $(LY = I_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{11} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} - \frac{1}{4}y_{13} \\ \frac{4}{11}y_{23} + y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{13} = 0 \\ y_{23} - \frac{1}{4}y_{13} = 0 \\ \frac{4}{11}y_{23} + y_{33} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{13} = 0 \\ y_{23} = 0 \\ y_{33} = 1 \end{cases}$$

- Cálculo da 3^a coluna de $X, (UX = Y)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{11}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{10}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{13} - \frac{1}{3}x_{23} \\ \frac{11}{12}x_{23} + \frac{1}{4}x_{33} \\ \frac{10}{11}x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{13} - \frac{1}{3}x_{23} = 0 \\ \frac{11}{12}x_{23} + \frac{1}{4}x_{33} = 0 \\ \frac{10}{11}x_{33} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{13} = -\frac{1}{10} \\ x_{23} = -\frac{3}{10} \\ x_{33} = \frac{11}{10} \end{cases}$$

- A matriz inversa de A é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{11}{10} \end{bmatrix}$$

Norma-1

Norma do máximo das somas por colunas (soma os valores absolutos das entradas em cada coluna e escolhe a maior)

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- $\|A\|_1 = \max\left\{1+\frac{1}{4}+0, \frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}, 0+\frac{1}{4}+1\right\} = \max\left\{\frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{3}$

- $\|A^{-1}\|_1 = \max\left\{\frac{11}{10}+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}, \frac{2}{5}+\frac{6}{5}+\frac{2}{5}, \frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{11}{10}\right\} = \max\left\{\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}\right\} = 2$

- $\kappa_1(A) = \|A\|_1 \times \|A^{-1}\|_1 = \frac{10}{3}$

Norma-∞

Norma do máximo das somas por linhas (soma os valores absolutos das entradas em cada linha e escolhe a maior)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- $\|A\|_\infty = \max\left\{1+\frac{1}{3}+0, \frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}, 0+\frac{1}{3}+1\right\} = \max\left\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right\} = \frac{3}{2}$

- $\|A^{-1}\|_\infty = \max\left\{\frac{11}{10}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}, \frac{3}{10}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}, \frac{1}{10}+\frac{2}{5}+\frac{11}{10}\right\} = \max\left\{\frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right\} = \frac{9}{5}$

- $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \times \|A^{-1}\|_\infty = \frac{3}{2} \times \frac{9}{5} = \frac{27}{10}$

- **Erro relativo** de A_1^* em relação a A

$$\delta_{A_1^*} = \frac{\|A - A_1^*\|_\infty}{\|A\|_\infty}$$

$\rightarrow A - A_1^*$

$$A - A_1^* = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \|A - A_1^*\|_\infty = \max\left\{0, \frac{1}{12}+\frac{1}{12}, 0\right\} = \frac{1}{6}$

$\rightarrow \delta_{A_1^*}$

$$\delta_{A_1^*} = \frac{\|A - A_1^*\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

- **Erro relativo** de A_2^* em relação a A

$$\delta_{A_2^*} = \frac{\|A - A_2^*\|_\infty}{\|A\|_\infty}$$

$\rightarrow A - A_2^*$

$$A - A_2^* = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \|A - A_2^*\|_\infty = \max\left\{\frac{1}{12}, 0, \frac{1}{12}\right\} = \frac{1}{12}$

$\rightarrow \delta_{A_2^*}$

$$\delta_{A_2^*} = \frac{\|A - A_2^*\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{12} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$$

Matriz simétrica

Seja A uma **matriz** de ordem n. A matriz A diz-se **simétrica** se e só se

$$A^T = A.$$

Matriz definida positiva

Seja A uma **matriz** de ordem n. A matriz A diz-se **definida positiva** se e só se

$$x^T A x > 0, \text{ para } \forall_{x \in \mathbb{R}^n}, \; x \neq 0.$$

Nota: Seja A uma de ordem n **simétrica**. A matriz A diz-se **definida positiva** se e só se for possível levar A à forma escalonada A^*, triangular superior, apenas com operações elementares de soma de linhas, ficando positivos todos os elementos diagonais de A^*.

Método de Cholesky

$\rightarrow$ O **método de Choleski** é aplicável a sistemas cuja matriz dos coeficientes é **simétrica** e **definida positiva**.

$\rightarrow$ A é factorizada em duas matrizes L e L^T, tais que $A = LL^T$.

$\rightarrow$ A matriz L é **triangular inferior** (não necessariamente de diagonal unitária) sendo L^T a sua matriz transposta, logo triangular superior.

Exercício 2.51

Determine uma decomposição de Cholesky da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

Resolução:

- A é simétrica

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix} = A$$

- A é definida positiva

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{bmatrix} L_3 - L_2$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{9} \end{bmatrix}$$

Coma A é simétrica e todos os elementos da diagonal principal de A^* são positivos $\Rightarrow$ A é definida positiva.

- Determinar a matriz L de ordem 3×3 triangular inferior que verifica

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}$$

- Determinar as entradas da matriz L

Nota: vamos exigir que todas as entradas l_{ii} sejam positivas.

$$\begin{cases} l_{11}^2 = 1 \\ l_{11}l_{21} = 1 \\ l_{11}l_{31} = 1 \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 = 5 \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 5 \\ l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{11} = 1 \\ l_{21} = 1 \\ l_{31} = 1 \\ l_{22} = 2 \\ l_{32} = \frac{4}{2} = 2 \\ l_{33} = 3 \end{cases}$$

- A matriz L é

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- A Factorização de Cholesky é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{L^T}$$

Exercício 2.53

Uma viga elástica está curvada. A teoria de vigas garante que o eixo central é uma curva $(x, p(x))$, onde $p(x) = 10ax + 2bx^3$. Sabemos que este eixo central parte de $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ e chega até $\left(10, \frac{1}{10}\right)$. Queremos determinar os parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$. Escolha uma norma em $\mathbb{R}^2$.

1. Prove que os parâmetros a, b determinam um vector coluna $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ que é:

   (a) Solução de $Ax = b$,

   $$A = \begin{bmatrix} 20 & 16 \\ 100 & 2000 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

   (b) Ponto fixo de $G(x) = Mx + c$,

   $$M = \begin{bmatrix} \frac{5}{25} & -\frac{16}{25} \\ -\frac{1}{25} & \frac{5}{25} \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} \\ \frac{1}{25000} \end{bmatrix}$$

2. Com a norma escolhida, determine a norma matricial de M e o número de condição da matriz A.

3. A solução é $v = \begin{bmatrix} \frac{13}{500} \\ -\frac{1}{800} \end{bmatrix}$. Considere a sua aproximação $v^* = \begin{bmatrix} 0.0260 \\ -0.0012 \end{bmatrix}$. Determine o erro relativo de v^* como aproximação de v. Determine o erro relativo de Av^* como aproximação de Av.

4. Determine se $G(x)$ é uma contracção no espaço de vectores coluna. sabendo que G é uma contracção, indique um procedimento que permita obter, em forma aproximada, a solução v do sistema.

Resolução:

1. Os parâmetros a e b são solução do sistema

$$\begin{cases} p(2) = \frac{1}{2} \\ \\ p(10) = \frac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20a + 16b = \frac{1}{2} \\ \\ 100a + 2000b = \frac{1}{10} \end{cases}$$

   que nos leva ao sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 20 & 16 \\ 100 & 2000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

- Resolução do sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 20 & 16 & \frac{1}{2} \\ 100 & 2000 & \frac{1}{10} \end{array}\right] \underset{L_2-5L1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 20 & 16 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1920 & -\frac{12}{5} \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20a+16b=\frac{1}{2} \\ \\ 1920b=-\frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{5}\left(-4b+\frac{1}{8}\right)=\frac{13}{500} \\ \\ b=-\frac{1}{800} \end{cases}$$

A solução do sistema é o vector v

$$v=\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} \frac{13}{500} \\ -\frac{1}{800} \end{array}\right]$$

- $v=\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right]$ é ponto fixo de $G(x)=Mx+c$,

$$M=\left[\begin{array}{cc} \frac{5}{25} & -\frac{16}{25} \\ -\frac{1}{25} & \frac{5}{25} \end{array}\right] \text{ e } c=\left[\begin{array}{c} \frac{1}{50} \\ \frac{1}{25000} \end{array}\right]$$

<u>Resolução:</u>

v é ponto fixo de G se e só se $G(v)=v$

$$\begin{aligned} G\left(\frac{13}{500},-\frac{1}{800}\right) &= \left[\begin{array}{cc} \frac{5}{25} & -\frac{16}{25} \\ -\frac{1}{25} & \frac{5}{25} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \frac{13}{500} \\ -\frac{1}{800} \end{array}\right]+\left[\begin{array}{c} \frac{1}{50} \\ \frac{1}{25000} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \frac{3}{500} \\ -\frac{129}{100\,000} \end{array}\right]+\left[\begin{array}{c} \frac{1}{50} \\ \frac{1}{25000} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \frac{13}{500} \\ -\frac{1}{800} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right] \rightarrow v \text{ é ponto fixo de } G. \end{aligned}$$

2. Com a norma escolhida, determine a norma matricial de M e o número de condição da matriz A.

$\rightarrow \|M\|_\infty=\max\left\{\frac{5}{25}+\frac{16}{25},\frac{1}{25}+\frac{5}{25}\right\}=\max\left\{\frac{21}{25},\frac{6}{25}\right\}=\frac{21}{25}$

$\rightarrow \|A\|_\infty=\max\{20+16,100+2000\}=2100$

<u>Cálculo auxiliar</u>: A^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 20 & 16 & 1 & 0 \\ 100 & 2000 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2-5L_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 20 & 16 & 1 & 0 \\ 0 & 1920 & -5 & 1 \end{array}\right] \tfrac{1}{1920}L_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 20 & 16 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{1920} & \frac{1}{1920} \end{array}\right] L_1-16L_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 20 & 0 & \frac{25}{24} & -\frac{16}{1920} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{384} & \frac{1}{1920} \end{array}\right] \tfrac{1}{20}L_1$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \underbrace{\begin{array}{cc} \frac{5}{96} & -\frac{1}{2400} \\ -\frac{1}{384} & \frac{1}{1920} \end{array}}_{A-1} \end{array}\right]$$

$\rightarrow \|A^{-1}\|_\infty=\max\left\{\frac{5}{96}+\frac{1}{2400},\frac{1}{384}+\frac{1}{1920}\right\}=\max\left\{\frac{21}{400},\frac{1}{320}\right\}=\frac{21}{400}$

$\rightarrow \kappa_\infty(A)=\|A\|_\infty\times\|A^{-1}\|_\infty=2100\times\frac{21}{400}=\frac{441}{4}=110.25$

3. A solução é $v = \begin{bmatrix} \frac{13}{500} \\ -\frac{1}{800} \end{bmatrix}$. Considere a sua aproximação $v^* = \begin{bmatrix} 0.0260 \\ -0.0012 \end{bmatrix}$. Determine o erro relativo de v^* como aproximação de v. Determine o erro relativo de Av^* como aproximação de Av.

Resolução:

- Erro relativo de v^* como aproximação de v

$$\rightarrow \quad v - v^* = \begin{bmatrix} \frac{13}{500} \\ -\frac{1}{800} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0260 \\ -0.0012 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.00005 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \delta_{v^*} = \frac{\|v - v^*\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \frac{0.00005}{\frac{13}{500}} = 1.923\,1 \times 10^{-3}$$

- Erro relativo de Av^* como aproximação de Av

$$\rightarrow \quad Av^* = \begin{bmatrix} 20 & 16 \\ 100 & 2000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0260 \\ -0.0012 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500\,8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad Av = \begin{bmatrix} 20 & 16 \\ 100 & 2000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13}{500} \\ -\frac{1}{800} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad Av - Av^* = \begin{bmatrix} 0.500\,8 \\ 0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000\,8 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \delta_{Av^*} = \frac{\|Av - Av^*\|_\infty}{\|Av\|_\infty} = \frac{0.1}{\frac{1}{2}} = 0.2$$

4. Determine se $G(x)$ é uma contracção no espaço de vectores coluna. sabendo que G é uma contracção, indique um procedimento que permita obter, em forma aproximada, a solução v do sistema.

Resolução:

A função $G(x) = Mx + c$ é uma contracção quando $\|M\| < 1$. Vimos na alínea c) que $\|M\|_\infty = \frac{21}{25} < 1$ logo G é uma contracção.

Métodos Iterativos

Os métodos iterativos, a partir de uma aproximação inicial, vão calculando sucessivamente **novas aproximações** da solução exacta do sistema. Assumem genericamente a forma típica

$$X^{(k+1)} = GX^{(k)} + C, \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

em que $X^{(k)}$ representa uma **aproximação** da solução procurada, G a **matriz de iteração** do processo e C representa um vector apropriado.

Construção de um método iterativo:

$\rightarrow AX = B$

$\rightarrow A = M + N$

$\rightarrow (M + N)\, X = B$

$\rightarrow MX = B - NX$

$\rightarrow$ Se M não for invertível:

$$MX^{(k+1)} = B - N\,X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

com $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$

$\rightarrow$ Se M for invertível:

$$X^{(k+1)} = M^{-1}B - M^{-1}N\,X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Método de Jacobi

O **método de Jacobi** caracteriza-se por decompor a matriz A em $A = M + N$ com $M = D$ e $N = L + U$, isto é,

$$A = \underbrace{D}_{M} + \underbrace{L + U}_{N}.$$

Substituindo $D = M$ e $L + U = N$ em $MX^{(k+1)} = B - N\,X^{(k)}$, o processo iterativo de Jacobi assume então a forma:

$$DX^{(k+1)} = B - (L + U)\; X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

ou, supondo $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$,

$$X^{(k+1)} = D^{-1}B - D^{-1}\,(L + U)\; X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Método de Gauss-Seidel

O **método de Gauss-Seidel** caracteriza-se por decompor a matriz A em $A = M + N$ com $M = L + D$ e $N = U$, isto é,

$$A = \underbrace{L + D}_{M} + \underbrace{U}_{N}.$$

Substituindo $L + D = M$ e $U = N$ em $M X^{(k+1)} = B - N\,X^{(k)}$, o processo iterativo assume então a foma:

$$(L + D)\,X^{(k+1)} = B - U\,X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

supondo $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$X^{(k+1)} = (L + D)^{-1}\,B - (L + D)^{-1}\,U\,X^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Diagonal estritamente dominante por linhas

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ que satisfaça as condições

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|\,, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

diz-se **diagonal estritamente dominante por linhas.**

Se A for de diagonal estritamente dominante por linhas, o método de Jacobi e o método de Gauss-Seidel convergem, independentemente do vector inicial $X^{(0)}$ escolhido.

Exercício 2.56

Considere o sistema de equações lineares $AX = B$ sendo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uma solução do sistema é $(x, y, z, w) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$.

1. Prove que a matriz A é simétrica, definida-positiva, e a sua diagonal não é dominante.

Resolução:

- A é simétrica porque $A^T = A$.

- A é definida positiva

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{5} & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 + \frac{2}{5}L_1 \\ \\ L_4 + \frac{3}{5}L_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{5} & -2 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{\frac{21}{5}} & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -2 & \frac{16}{5} \end{bmatrix} L_4 + \frac{6}{21}L_2$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{5} & -2 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{\frac{21}{5}} & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{5} & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{20}{7} \end{bmatrix} L_4 + \frac{2}{5}L_3 \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{5} & -2 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{\frac{21}{5}} & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{5} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{72}{35}} \end{bmatrix} = A^*$$

A é definida positiva porque é simétrica e a sua forma escalonada por linhas tem a diagonal principal toda positiva.

- A matriz A não tem a diagonal dominante porque

$$|a_{11}| = 5 \not> |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = 5$$

2. Determine qual é a função de iteração $G(x) = Mx + c$ que devemos usar para encontrar uma solução, segundo o método de Jacobi.

Resolução:

- Determinar as matrizes $M = D$ e $N = L + U$

$$M = D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$N = L + U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- A função de iteração é

$$X^{(k+1)} = D^{-1}B - D^{-1}(L+U)X^{(k)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} X^{(k)}$$

$$X^{(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}}_{c} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}}_{M} X^{(k)}$$

3 Determine se a função de iteração antes calculada é uma contracção, quando usamos a norma-1. Podemos ter a certeza que a sucessão obtida por iteração de G com qualquer valor inicial x_0 é convergente?

Resolução:

A função iteração é uma contracção se $\|M\|_1 < 1$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$\|M\|_1 = \max\left\{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right\} = \max\left\{1, \frac{2}{5}\right\} = 1 \nless 1$

A função iteração não é uma contracção. Não podemos ter a certeza que a sucessão obtida por iteração de G com qualquer valor inicial x_0 é convergente.

4. Com o valor inicial $x_0 = (1,1,1,1)$, calcule o valor $x(1)$ e o valor $x(2)$ obtido por iteração de G. Calcule qual o erro relativo cometido por $x(2)$ como aproximação da autêntica solução se usarmos a norma-∞.

Resolução:

- $X^{(1)}$

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} X^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $X^{(2)}$

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} X^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Erro relativo de $x(2)$ como aproximação de x

$$\rightarrow \quad x - x(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \delta_{x(2)} = \frac{\|x - x(2)\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Exercício 2.61

Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y - 5z = -2 \\ x - 5y - 3z = 3 \end{cases}$$

1. Resolva, se possível, através duma decomposição de Doolitle e duma decomposição de Cholesky.

Resolução:

- Colocar a matriz A na forma escalonada por linhas (sem troca de linhas)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 + \frac{1}{2}L_1 \rightarrow m_{21} = \frac{1}{2} \\ L_3 - \frac{1}{2}L_1 \rightarrow m_{31} = -\frac{1}{2} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} L_3 + 3L_2 \rightarrow m_{32} = 3$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{\frac{3}{2}} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-17} \end{bmatrix}$$

- A decomposição de Doolitle (LU) é dada por:

$$A = LU$$

com

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -17 \end{bmatrix}$$

- Solução do sistema $AX = B$

Para determinar a matriz X teremos de resolver dois sistemas

$$\begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases}$$

- Determinar a matriz coluna Y $(LY = B)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - \frac{1}{2}y_1 \\ \frac{1}{2}y_1 - 3y_2 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 - \frac{1}{2}y_1 = -2 \\ \frac{1}{2}y_1 - 3y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = -3 \end{cases}$$

- Determinar a matriz coluna X $(UX = Y)$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \frac{3}{2}x_2 - \frac{9}{2}x_3 \\ -17x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \frac{3}{2}x_2 - \frac{9}{2}x_3 = -2 \\ -17x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{25}{51} \\ x_2 = -\frac{41}{51} \\ x_3 = \frac{3}{17} \end{cases}$$

A solução do sistema é $\left\{\left(-\frac{25}{51}, -\frac{41}{51}, \frac{3}{17}\right)\right\}$.

- A matriz A é simétrica mas não é definida positiva (a sua forma escalonada por linhas tem um elemento da diagonal principal negativo). Não é possível efectuar a decomposição de Cholesky.

2. Efectue três iterações da função de iteração de Jacobi a partir da matriz nula como valor inicial.

Resolução:

- Determinar as matrizes $M = D$ e $N = L + U$

$$\begin{aligned} M &= D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ N &= L + U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Determinar a função de iteração

$$\begin{aligned} X^{(k+1)} &= D^{-1}B - D^{-1}\left(L+U\right)X^{(k)} \\ X^{(k+1)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} X^{(k)} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{C} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}}_{M} X^{(k)} \end{aligned}$$

- $X^{(1)}$

$$\begin{aligned}
X^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} X^{(0)} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- $X^{(2)}$

$$\begin{aligned}
X^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} X^{(1)} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- $X^{(3)}$

$$\begin{aligned}
X^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} X^{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{25}{12} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{35}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{25}{12} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{29}{6} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. Efectue três iterações da função de iteração de Gauss-Seidel a partir da matriz nula como valor inicial.

Resolução:

- Determinar as matrizes $M = L + D$ e $N = U$

$$\begin{aligned}
M &= L + D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \\
N &= U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Determinar a matriz da iteração

$$X^{(k+1)} = (L+D)^{-1} B - (L+D)^{-1} U \, X^{(k)}$$

Cálculo Auxiliar: $(L+D)^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{1}{2}L_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \rightarrow \\ L_2+L_1 \\ L_3-L_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{1}{2}L_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \rightarrow \\ L_3+5L_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{3}{4} & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \; -\frac{1}{3}L_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \end{array}}_{(L+D)^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

-

$$\begin{aligned} X^{(k+1)} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix}^{-1} B - (L+D)^{-1}\, U\, X^{(k)} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - (L+D)^{-1}\, U\, X^{(k)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X^{(k)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{47}{12} \end{bmatrix} X^{(k)} \end{aligned}$$

- $X^{(1)}$

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{47}{12} \end{bmatrix} X^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{47}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $X^{(2)}$

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{47}{12} \end{bmatrix} X^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{47}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{85}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{61}{36} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $X^{(3)}$

$$
\begin{aligned}
X^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{47}{12} \end{bmatrix} X^{(2)} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{47}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{61}{36} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{35}{36} \\ \frac{15}{4} \\ -\frac{355}{54} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{36} \\ -\frac{19}{4} \\ \frac{391}{54} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$