IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

ANÁLISE NUMÉRICA

Aula n^o 6

Matriz Inversa e Resolução de Sistemas

Operações Elementares

As **operações elementares** sobre as linhas de uma matriz são:

$\rightarrow$ Permuta (troca) das linhas i e j, representa-se por $L_i \leftrightarrow L_j$ ou simplesmente L_{ij}.

$\rightarrow$ Multiplicação da linha i por um número real $k \neq 0$, representa-se por $L_i \rightarrow kL_i$ ou simplesmente kL_i.

$\rightarrow$ Adicionar a uma linha outra linha multiplicada por um número real k, representa-se por $L_i \rightarrow L_i + kL_j$ ou simplesmente $L_i + kL_j$.

Matriz em Escada de Linhas

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ diz-se estar em escada de linhas ou que é uma **matriz em escada de linhas** se satisfizer as duas condições seguintes:

$\rightarrow$ Não existem linhas nulas acima de linhas não nulas.

$\rightarrow$ Sendo L_i e L_{i+1} duas quaisquer linhas não nulas consecutivas de A, a primeira entrada não nula da linha L_{i+1} encontra-se (numa coluna) à direita (da coluna) da primeira entrada não nula da linha L_i.

A primeira entrada não nula de cada linha duma matriz em escada de linhas designa-se por **pivô**.

Matriz em Escada de Linhas Reduzida

Uma matriz diz-se estar em **forma canónica de escada de linhas** ou em **forma reduzida de escada de linhas** se satisfizer as três condições seguintes:

$\rightarrow$ A matriz está em escada de linhas.

$\rightarrow$ Os pivôs são todos iguais a 1.

$\rightarrow$ Em cada coluna com pivô, todas as entradas são iguais a 0 à excepção do pivô.

Sistemas de Equações Lineares

Um **sistema de equações lineares** é uma conjunção de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

O sistema diz-se **homogéneo** se $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, e caso contrário, diz-se **não-homogéneo**. Um sistema homogéneo é sempre possível.

Matrizes associadas a um sistema de equações lineares

As matrizes associadas a um sistema de equações lineares são:

$\rightarrow$ **Matriz dos coeficientes**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ **Matriz (coluna) dos termos independentes**

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ **Matriz ampliada**

$$[A|\, B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Método de eliminação de Gauss

Objectivo: Reduzir a matriz ampliada a uma matriz em escada de linhas à custa de operações elementares.

O método de eliminação de Gauss (MEG) consiste em:

$\rightarrow$ Colocar todas as linhas nulas da matriz abaixo das linhas não nulas, fazendo as trocas de linhas necessárias.

$\rightarrow$ Escolher uma das entradas não nulas situada numa coluna o mais à esquerda possível e colocá-la na primeira linha da matriz, trocando eventualmente linhas.

$\rightarrow$ Usar operações elementares para reduzir a zero as entradas situadas na mesma coluna e nas linhas abaixo.

$\rightarrow$ Repetir os passos anteriores "descendo" uma linha, i.e., considerando a submatriz formada apenas pelas linhas abaixo da linha 1.

$\rightarrow$ Esta "descida" na matriz repete-se até se obter uma matriz em escada de linhas.

Natureza de um Sistema

Considere-se a matriz ampliada $[A^* | B^*]$, em forma de escada de linhas, associada ao sistema matricial $AX = B$.

$\rightarrow$ Número de pivôs de A^* = número de pivôs da matriz ampliada = número de colunas de A $\rightarrow$ sistema **possível determinado**

$\rightarrow$ Número de pivôs de A^* = número de pivôs da matriz ampliada $<$ número de colunas de A $\rightarrow$ sistema **possível indeterminado**

$\rightarrow$ Número de pivôs de $A^* \neq$ número de pivôs da matriz ampliada $\rightarrow$ sistema **impossível**

Método de eliminação de Gauss - Jordan

Objectivo: O método de eliminação de Gauss - Jordan é usado para, dada uma matriz, reduzi-la a uma matriz em forma canónica de escada de linhas à custa de operações elementares. Este método desenvolve-se em várias fases:

$\rightarrow$ Reduzir a matriz a uma matriz em escada de linhas usando o método de eliminação de Gauss.

$\rightarrow$ Usar o pivô situado numa coluna o mais à direita possível (ou seja na linha mais abaixo possível) e as operações elementares necessárias para reduzir a zero as entradas situadas na mesma coluna e nas linhas acima da linha do pivô (obter uma matriz em que, nas colunas dos pivôs, estes são as únicas entradas não nulas).

$\rightarrow$ Usar as operações elementares convenientes para obter uma matriz em que todos os pivôs são iguais a 1.

2.17 a) Determine a forma de escada e calcule, pelo método de substituição inversa, a solução única do sistema matricial $AX = B$ com matriz ampliada $M = [A|\,B]$. X matriz de ordem 3×3

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \; L_{31}$$

Resolução:

Colocar a matriz M na forma de escada de linhas

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] L_{31} \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{2} & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \tfrac{1}{2}L_1$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \underline{3} & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 - 3L_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{5}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \underline{1} & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 - L_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{5}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{2} & \frac{7}{2} & 2 & \frac{7}{2} \end{array}\right] \tfrac{1}{2}L_3 \rightarrow \left[\underbrace{\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}}_{I_3} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} & 1 & \frac{7}{4} \end{array}}_{X} \right]$$

A matriz X é

$$X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} & 1 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

Nota: Podem confirmar o valor de X resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} & 1 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

2.17 b) Determine a forma de escada e calcule, pelo método de substituição inversa, a solução única do sistema matricial $AX = B$ com matriz ampliada $M = [A|\, B]$. X matriz de ordem 3×3.

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Resolução:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_{31} \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] L_{32}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}L_2 \\ \frac{1}{3}L_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & \underline{3} & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] L_1 - 3L_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 0 & \underline{-1} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \underline{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 + L_3 \\ L_2 - 2L_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

A matriz X é

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: Neste exercício reduzimos a matriz M, à matriz em escada reduzida.

2.17 c) Determine a forma de escada e calcule, pelo método de substituição inversa, a solução única do sistema matricial $AX = B$ com matriz ampliada $M = [A|\, B]$. X é uma matriz de ordem 4×2

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cc} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Resolução:

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cc} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 - L_1 \\ L_3 - 4L_1 \\ L_4 - 3L_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & \underline{-4} & 0 & -6 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & -5 & -11 \\ 0 & \underline{-3} & 0 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{4}L_3 \\ L_4 + 3L_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -\frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & \underline{3} & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \end{array}\right] L_4 - 3L_3$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -\frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & \frac{21}{4} \end{array}\right] -\frac{2}{3}L_4 \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & \underline{1} & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & \underline{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -\frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 0 & \underline{-1} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -\frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right] L_1 + L_3 \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \underline{-2} & -\frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 - \frac{1}{2}L_4 \\ L_2 - \frac{3}{2}L_4 \\ L_3 + 2L_4 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{39}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right]$$

A matriz X é

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ -\frac{17}{4} & -\frac{39}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

> Cálculo da Matriz Inversa - Método de Gauss-Jordan
>
> Seja A uma **matriz quadrada** de ordem n. Para determinar a matriz inversa de A procede-se da seguinte forma:
>
> $\rightarrow$ Colocar a matriz A e a matriz I_n lado a lado, de modo a formar a matriz ampliada $[A|\, I_n]$.
>
> $\rightarrow$ Transformar, através de operações elementares por linhas, a matriz A na matriz identidade. Se nesta fase aparecer uma linha só com elementos nulos paramos, pois significa que A não admite inversa.
>
> $\rightarrow$ Concluído o passo anterior obtemos $[I_n|\, A^{-1}]$

2.16 Calcule a matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução: Objectivo $[A|\, I_3] \rightarrow [I_3|\, A^{-1}]$

$$[A|\, I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \underline{1} & 1 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \; \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; L_{23}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{12} & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \; \frac{1}{12}L_3 \; \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & \underline{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 \end{array}\right] \; L_2 - L_3$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 \end{array}\right] \; \frac{1}{2}L_2 \; \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 \end{array}\right] \; L_1 - L_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{matrix}}_{I_3} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{23}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right] = [I_3|\, A^{-1}]$$

A matriz inversa de A é dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{23}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 \end{bmatrix}$$

2.22 a) Calcule a inversa e determine a norma $\|\ldots\|_p$ e o número de condição nos casos $p = 1, \infty$ para as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 5 & -9 \\ -2 & 7 & 5 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

<u>Resolução:</u> Objectivo $[A|\, I_3] \rightarrow [I_3|\, A^{-1}]$

$$[A|\, I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-9} & 5 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{9}L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -\frac{5}{9} & 1 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \underline{-2} & 7 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ \underline{5} & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 + 2L_1 \\ L_3 - 5L_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -\frac{5}{9} & 1 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{53}{9}} & 7 & -\frac{2}{9} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{34}{9} & 3 & \frac{5}{9} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{9}{53}L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -\frac{5}{9} & 1 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{63}{53} & -\frac{2}{53} & \frac{9}{53} & 0 \\ 0 & \frac{34}{9} & 3 & \frac{5}{9} & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 - \frac{34}{9}L_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -\frac{5}{9} & 1 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{63}{53} & -\frac{2}{53} & \frac{9}{53} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{79}{53}} & \frac{37}{53} & -\frac{34}{53} & 1 \end{array}\right] -\frac{53}{79}L_3$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -\frac{5}{9} & 1 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{63}{53} & -\frac{2}{53} & \frac{9}{53} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{37}{79} & \frac{34}{79} & -\frac{53}{79} \end{array}\right] L_2 - \frac{63}{53}L_3$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -\frac{5}{9} & 1 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{41}{79} & -\frac{27}{79} & \frac{63}{79} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{37}{79} & \frac{34}{79} & -\frac{53}{79} \end{array}\right] L_1 + \frac{5}{9}L_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{14}{79} & -\frac{15}{79} & \frac{35}{79} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{41}{79} & -\frac{27}{79} & \frac{63}{79} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{37}{79} & \frac{34}{79} & -\frac{53}{79} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{51}{79} & -\frac{49}{79} & \frac{88}{79} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{41}{79} & -\frac{27}{79} & \frac{63}{79} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{37}{79} & \frac{34}{79} & -\frac{53}{79} \end{array}\right]$$

A matriz inversa de A é

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{51}{79} & -\frac{49}{79} & \frac{88}{79} \\ \frac{41}{79} & -\frac{27}{79} & \frac{63}{79} \\ -\frac{37}{79} & \frac{34}{79} & -\frac{53}{79} \end{bmatrix}$$

- $\|A\|_1=\max\{|-9|+|-2|+|5|,|5|+|7|+|1|,|-9|+|5|+|8|\}=\max\{16,13,22\}=22$

- $\|A^{-1}\|_1=\max\left\{\frac{51}{79}+\frac{41}{79}+\frac{37}{79},\frac{49}{79}+\frac{27}{79}+\frac{34}{79},\frac{88}{79}+\frac{63}{79}+\frac{53}{79}\right\}=\max\left\{\frac{129}{79},\frac{110}{79},\frac{204}{79}\right\}=\frac{204}{79}$

- $\kappa_1(A)=\|A\|_1\times\|A^{-1}\|_1=22\times\frac{204}{79}=\frac{4488}{79}$

- $\|A\|_\infty=\max\{|-9|+|5|+|-9|,|-2|+|7|+|5|,|5|+|1|+|8|\}=\max\{23,14,14\}=23$

- $\|A^{-1}\|_\infty=\max\left\{\frac{51}{79}+\frac{49}{79}+\frac{88}{79},\frac{41}{79}+\frac{27}{79}+\frac{63}{79},\frac{37}{79}+\frac{34}{79}+\frac{53}{79}\right\}=\max\left\{\frac{188}{79},\frac{131}{79},\frac{124}{79}\right\}=\frac{188}{79}$

- $\kappa_\infty(A)=\|A\|_\infty\times\|A^{-1}\|_\infty=23\times\frac{188}{79}=\frac{4324}{79}$

2.22 b) Calcule a inversa e determine a norma $\|\ldots\|_p$ e o número de condição nos casos $p=1,\infty$ para as seguintes matrizes

$$B=\begin{bmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Resolução: Objectivo $[B|\,I_3]\rightarrow[I_3|\,B^{-1}]$

$$[B|\,I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} L_1+4L_2 \\ \\ L_3-L_2 \end{array}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 6 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ \boxed{-2} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]L_{21}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-2} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]L_2-3L_3\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-2} & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 1 & 7 & -3 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} -\frac{1}{2}L_1 \\ \frac{1}{3}L_2 \\ \frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]L_{23}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -1 \end{array}\right]\begin{array}{c} L_1+L_2 \\ L_2+L_3 \end{array}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -1 \end{array}\right]L_1+\frac{1}{2}L_3\rightarrow\left[\underbrace{\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}}_{I_3}\middle|\underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -1 \end{array}}_{B^{-1}}\right]$$

A matriz inversa de B é

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

- $\|B\|_1 = \max\{|8| + |-2| + |-2|, |-2| + |2| + |4|, |1| + |-1| + |3|\} = \max\{12, 8, 5\} = 12$

- $\|B^{-1}\|_1 = \max\left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \frac{1}{6} + \frac{11}{6} + \frac{7}{3}, 0 + \frac{1}{2} + 1\right\} = \max\left\{\frac{5}{6}, \frac{13}{3}, \frac{3}{2}\right\} = \frac{13}{3}$

- $\kappa_1(B) = \|B\|_1 \times \|B^{-1}\|_1 = 12 \times \frac{13}{3} = 52$

- $\|B\|_\infty = \max\{|8| + |-2| + |1|, |-2| + |2| + |-1|, |-2| + |4| + |-3|\} = \max\{11, 5, 9\} = 11$

- $\|B^{-1}\|_\infty = \max\left\{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0, \frac{1}{3} + \frac{11}{6} + \frac{1}{2}, \frac{1}{3} + \frac{7}{3} + 1\right\} = \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right\} = \frac{11}{3}$

- $\kappa_\infty(B) = \|B\|_\infty \times \|B^{-1}\|_\infty = 11 \times \frac{11}{3} = \frac{121}{3}$

2.29 a) Resolver o sistema pelo método de eliminação de gauss.

$$[A|\,B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 1 & -3 & 7 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ \\ L_3 - 3L_2 \\ L_4 + 2L_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & 6 & 2 & -1 & 8 \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \tfrac{1}{3}L_1$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & \boxed{1} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \underline{2} & 4 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] L_4 - 2L_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & \boxed{1} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] L_4 + \tfrac{1}{3}L$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & \boxed{1} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{3}} & 0 \end{array}\right] -3L_4 \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & \boxed{1} & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right] L_{12}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & \underline{1} & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & \underline{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ L_2 - \frac{2}{3}L_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & \underline{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & \underline{-\frac{1}{3}} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 + \\ L_2 + \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right] L_1 + \tfrac{2}{3}L_4 \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right] L_1 + \tfrac{2}{3}$$

Passando para sistema obtemos

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 2 \\ w = 1 \\ u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -2z + 2 \\ w = 1 \\ u = 0 \end{cases}$$

Sistema possível indeterminado. A solução é dada por

$$\{(-z, -2z+2, z, 1, 0)\,, z \in \mathbb{R}\} = \{(0,2,0,1,0) + z\,(-1,-2,1,0,0)\,, z \in \mathbb{R}\}$$

2.29 b) Resolver o sistema pelo método de eliminação de gauss

$$[A|\,B] \;=\; \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 3 & 7 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \underline{-1} & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] L_4 + L_2 \;\rightarrow\; \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & \underline{3} & 7 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right] L_1 - 3L$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & \underline{3} & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right] L_1 - 3L_3 \;\rightarrow\; \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \underline{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right] L_1 - 3$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right]$$

Passando para sistema

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 2 \\ w = 1 \\ u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -2z + 2 \\ w = 1 \\ u = 0 \end{cases}$$

Sistema possível indeterminado. A solução é

$$\{(-z, -2z+2, z, 1, 0)\,, z \in \mathbb{R}\} = \{(0,2,0,1,0) + z\,(-1,-2,1,0,0)\,, z \in \mathbb{R}\}$$