IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Regressão Linear Simples

Licenciatura em Engenharia Informática

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal
Instituto Politécnico de Setúbal
2020-2021

Dados Bivariados

- Por vezes a população que se pretende estudar, aparece sob a forma de pares de valores, isto é, cada indivíduo ou resultado experimental, contribui com um conjunto de dois valores.
- É o que acontece quando se pretende estudar dois atributos da mesma população visando investigar em que medida eles se relacionam, isto é, de que modo a variação de um deles exerce influência na variação do outro.
- Os atributos podem ser ambos quantitativos, ambos qualitativos ou um de cada tipo. Apenas vamos considerar atributos quantitativos.

Objetivo

Estudar a relação entre duas

Variáveis Quantitativas.

Objetivo

Estudar a relação entre duas **variáveis quantitativas**.

Exemplos

- a relação entre a hora do dia e a temperatura atmosférica;
- a relação entre a idade e a altura das crianças;
- a relação entre o tempo de prática de atividade física e o ritmo cardíaco;
- a relação entre o tempo de estudo e a nota no teste;
- a relação entre a taxa de desemprego e a taxa de criminalidade;
- a relação entre a esperança de vida e a taxa de analfabetismo;
- ...

Regressão Linear Simples

Objetivo

Estudar a relação entre duas **variáveis quantitativas**.

Para atingir este objetivo vamos investigar a presença ou ausência de **relação linear** entre as duas variáveis. Essa investigação será feita de modo a:

- quantificar a força dessa relação: **correlação**;
- explicar a forma dessa relação: **regressão**.

Para quantificar a força dessa relação, **correlação**, vamos recorrer a:

- métodos gráficos: **diagrama de dispersão**;
- indicadores numéricos: **coeficiente de correlação linear**.

Para explicar a forma dessa relação, **regressão**, vamos recorrer a um

- modelo matemático: **equação da reta** $\rightarrow$ $\mathbf{y = a + bx}$.

Regressão Linear Simples

Objetivo

Construção de um modelo matemático que expresse a relação tipo linear existente entre duas variáveis quantitativas, tendo por base os correspondentes valores amostrais, isto é, resumir os valores amostrais através de uma reta

$$Y = a + bX$$

que dê a informação de como se refletem em Y as mudanças processadas em X.

Neste caso tem-se:

- **Variável independente**, explicativa ou explanatória representada por X;
- **Variável dependente**, explicada ou resposta representada por Y.

Metodologia

1. *Verificar a existência ou não de uma relação linear*

Diagrama de Dispersão ou Nuvem de Pontos

- **Diagrama de dispersão** ou **Nuvem de pontos** é uma representação gráfica para os dados bivariados, em que cada par de dados (x_i, y_i) é representado por um ponto de coordenadas (x_i, y_i), num sistema de eixos coordenados.
- Este tipo de representação é muito útil, pois permite realçar algumas propriedades entre os dados, nomeadamente no que diz respeito ao tipo de correlação entre os valores de x e os valores de y.
- Existe correlação linear quando é possível "imaginar" uma reta (com declive diferente de zero) que passa pela "nuvem" de pontos.

Exemplo 1

Um psicólogo efetuou uma pesquisa com o objetivo de analisar a forma como as crianças aprendem um determinado jogo. Das diversas variáveis observadas foram registados o número de jogos efetuados (X) e o número de erros realizados no jogo (Y):

Número de jogos	Número de erros
x	y
1	8
2	5
3	8
4	7
6	6
7	3
8	5
9	2
10	4
11	2

1. Acha que os dados apresentam uma tendência linear?

Número de jogos	Número de erros
x	y
1	8
2	5
3	8
4	7
6	6
7	3
8	5
9	2
10	4
11	2

tabela de dados

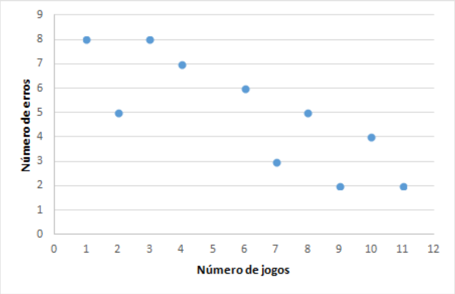


diagrama de dispersão

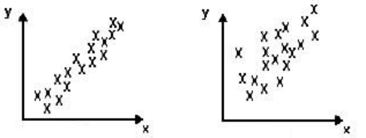
O diagrama de dispersão sugere a existência de uma relação linear entre as duas variáveis em estudo, isto é, uma relação que se traduz geometricamente através de uma reta. É possível "imaginar" uma reta que passa pela "nuvem" de pontos.

Interpretação do Diagrama de Dispersão

Sinal

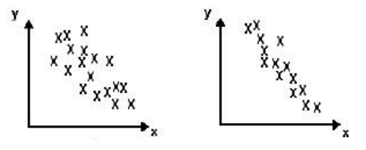
- **Correlação linear positiva**

→ A maiores valores de uma variável tendem a corresponder maiores valores da outra variável.

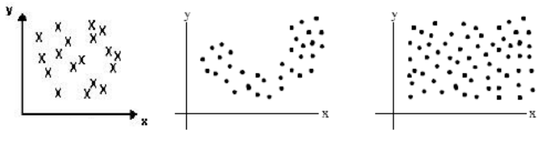


- **Correlação linear negativa**

→ A maiores valores de uma variável tendem a corresponder menores valores da outra.



- **Correlação linear nula** → Não existe associação linear entre as variáveis.



Observação

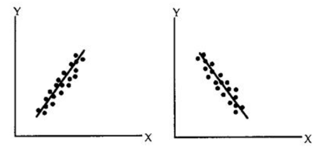
- Quando se diz que as duas variáveis **não estão linearmente correlacionadas**, não significa que as variáveis não estejam correlacionadas, apenas significa que a correlação não é linear. Neste caso poderá existir outro tipo de correlação.

- Em alguns casos, pode não existir uma relação linear entre as variáveis, mas sim quadrática, cúbica, exponencial, logarítmica,...

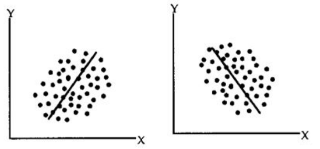
Interpretação do Diagrama de Dispersão

Intensidade

- A correlação é tanto mais forte quanto menor for a dispersão dos pontos em torno da linha reta, isto é, quanto mais concentrados os pontos estiverem em torno dessa reta.

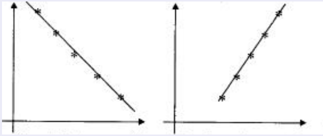


correlação linear forte



correlação linear fraca

- A correlação diz-se **perfeita** se todos os pontos coincidirem com a reta.



correlação linear perfeita

Exemplo 1

Um psicólogo efetuou uma pesquisa com o objetivo de analisar a forma como as crianças aprendem um determinado jogo. Das diversas variáveis observadas foram registados o número de jogos efetuados (X) e o número de erros realizados no jogo (Y):

Número de jogos	Número de erros
x	y
1	8
2	5
3	8
4	7
6	6
7	3
8	5
9	2
10	4
11	2

tabela de dados

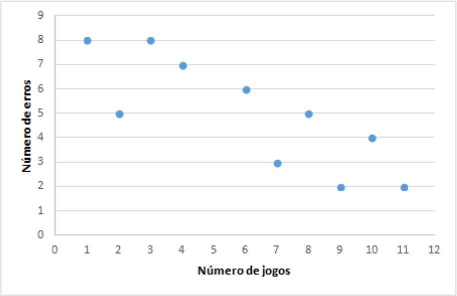


diagrama de dispersão

2. O que pode dizer sobre a tendência linear que se observa no diagrama de dispersão?

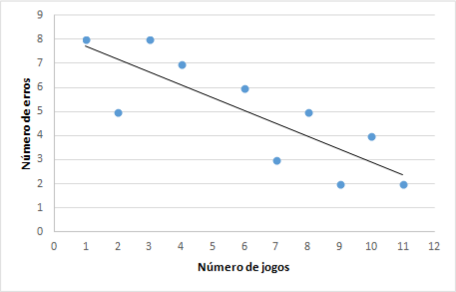


diagrama de dispersão

- O gráfico mostra associação (ou correlação), de sentido contrário, entre o número de jogos e o número de erros. Quando o número de jogos aumenta, o número de erros diminui. Diz-se que as duas variáveis estão **negativamente correlacionadas**.
- Como os pontos não se afastam muito da reta, a **correlação negativa parece ser forte** mas não é perfeita.

Metodologia

1. *Verificar a existência ou não de uma relação linear*

Coeficiente de Correlação Linear

- A análise gráfica da relação entre variáveis é importante, mas os olhos nem sempre são um bom juiz da intensidade de uma relação linear. Deve-se, então, utilizar uma medida numérica para complementar a análise gráfica.
- A medida que se utiliza com mais frequência para medir o grau da relação linear entre as variáveis X e Y é o coeficiente de correlação linear, também chamado de **coeficiente de correlação linear de Pearson**.
- O coeficiente de correlação linear mede a maior ou menor intensidade com que as variáveis se associam, quer positiva, quer negativamente. Isto é, é uma medida que avalia o quanto a "nuvem de pontos" no diagrama de dispersão aproxima-se de uma reta.
- Representa-se por r_{xy}, é um estimador do coeficiente de correlação linear populacional, ρ_{XY}.

Coeficiente de Correlação Linear

O **coeficiente de correlação linear** (também chamado de **coeficiente de correlação linear empírico** ou **amostral**) calcula-se da seguinte forma:

$$r_{xy} = \frac{\text{covariância}_{xy}}{\sqrt{\text{variância}_x \times \text{variância}_y}} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2\right)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2\right)}}$$

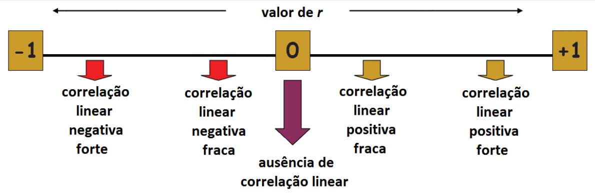
- $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$ (variância amostral da variável X);
- $s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2\right)$ (variância amostral da variável Y);
- $s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}\right)$ (covariância amostral entre X e Y).

Coeficiente de Correlação Linear

$$-1 \leq r_{XY} \leq 1$$

- $r_{XY} > 0 \rightarrow$ significa que a relação entre os valores de x e os de y é do mesmo sentido, isto é, a valores grandes de x correspondem, de um modo geral, valores grandes de y e vice-versa $\rightarrow$ **correlação linear positiva**.
- $r_{XY} < 0 \rightarrow$ a relação entre os valores de x e os de y é de sentido contrário, o que significa que a valores grandes de x, correspondem, de um modo geral, valores pequenos de y e vice-versa $\rightarrow$ **correlação linear negativa**.
- $r_{XY} = 0 \rightarrow$ significa que não existe relação linear entre os valores de x e os de y (mas pode existir outro tipo de relação) $\rightarrow$ **não há correlação linear**.

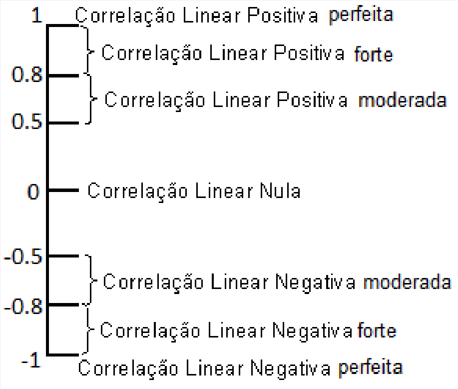
Quanto maior for $|r_{XY}|$, mais forte é a relação linear entre X e Y.



Coeficiente de Correlação Linear

- É possível classificar a intensidade da correlação, analisando a proximidade do coeficiente de correlação linear em relação aos valores 1 e -1.

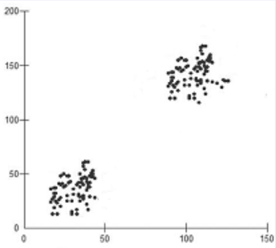
  Tabela indicativa:



Coeficiente de Correlação Linear

Observação

- A "confirmação" da existência de um "bom" coeficiente de correlação linear empírico entre X e Y deve ser sempre acompanhado pelo diagrama de dispersão.
- Por exemplo, no seguinte diagrama de dispersão pode-se observar que o modelo linear não é adequado, mas se calcular o coeficiente de correlação linear irá obter um valor próximo de 1.



Exemplo 1

Um psicólogo efetuou uma pesquisa com o objetivo de analisar a forma como as crianças aprendem um determinado jogo. Das diversas variáveis observadas foram registados o número de jogos efetuados (X) e o número de erros realizados no jogo (Y):

Número de jogos	Número de erros
x	y
1	8
2	5
3	8
4	7
6	6
7	3
8	5
9	2
10	4
11	2

tabela de dados

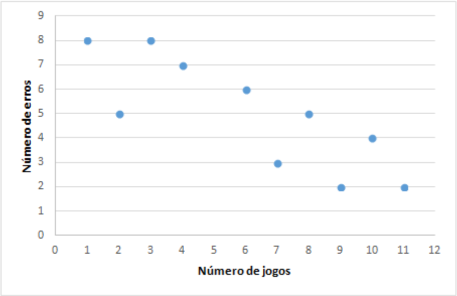


diagrama de dispersão

3. Determine o coeficiente de correlação linear.

coeficiente de correlação linear:

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2\right)}}$$

(uma possibilidade)

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{61}{10} = 6.1$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - 6.1)(y_i - 5)}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{10} (x_i - 6.1)^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{10} (y_i - 5)^2\right)}} = \frac{-58}{\sqrt{108.9 \times 46}} = -0.819$$

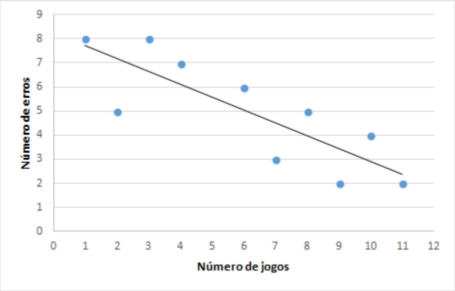


diagrama de dispersão

$$r_{XY} = -0.819$$

O coeficiente de correlação linear permite confirmar o que vimos no diagrama de dispersão, a **correlação linear** é **negativa** ($r_{XY} < 0$) e **forte** ($-1 < r_{XY} < -0.8$).

Correlação

Observação

- Correlação não significa Causalidade.
- A associação não deve ser interpretada como causa - efeito. Pode, eventualmente, haver outras variáveis, com que não estamos a contar, que contribuam para a associação linear observada.

Metodologia

2. *Determinar a reta de regressão*

- Quando a correlação entre duas variáveis é elevada, se conhecermos o valor de uma das variáveis podemos ter uma ideia do valor que a outra irá tomar. Diz-se que podemos inferir o valor da outra variável.
- Intuitivamente, é a reta que passa através da nuvem de pontos e a divide em dois grupos semelhantes.
- A reta de regressão passa pelo ponto cujas coordenadas são, respetivamente, as médias da primeira e da segunda variáveis, isto é, o centro de gravidade da nuvem de pontos (ponto de coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$).

Reta de Regressão

- A reta de regressão é o modelo matemático que resume os valores das amostras da seguinte forma

$$\widehat{y} = a + bx$$

  - a X chama-se **variável independente**, explicativa ou explanatória;
  - a Y chama-se **variável dependente**, explicada ou resposta.

Atenção: As conclusões que se tiram do diagrama de dispersão e do coeficiente de correlação linear não é alterado se trocamos as variáveis X e Y, isto é, a existência ou não da relação linear não depende de qual variável é considerada independente. No entanto, o modelo matemático será alterado pois depende da variável que é definida como independente.

Reta de Regressão

$$\widehat{y} = a + bx$$

- a representa a ordenada na origem, isto é, indica o valor de y que se espera observar quando $x = 0$ (o "local" onde a reta corta o eixo dos yy);
- b representa o declive, isto é, a inclinação da reta. O seu valor indica em que medida y muda em função de x, refletindo a correlação existente entre as variáveis:
    - se b for positivo, a relação entre X e Y é positiva $\rightarrow$ **correlação linear positiva**;
    - se b for negativo, a relação entre X e Y é negativa $\rightarrow$ **correlação linear negativa**;
- **Interpretação** de b: para cada aumento de uma unidade em x, temos um aumento médio de b unidades em y.

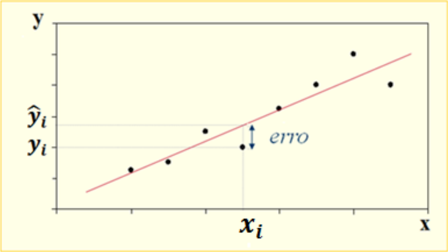
Determinar a reta de regressão: $\widehat{y} = a + bx$

Método dos Mínimos Quadrados - É um dos métodos mais conhecidos que permite ajustar uma reta a uma conjunto de dados. Consiste em determinar a reta

$$\widehat{y}_i = a + bx_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

que minimiza a soma dos quadrados dos desvios ou erros (e_i) entre os verdadeiros valores observados das ordenadas (y_i) e os obtidos a partir da reta a ajustar $(\widehat{y}_i)$:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \right\} = \min \left\{ \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y}_i)^2 \right\}$$



Determinar a reta de regressão: $\widehat{y} = a + bx$

e assim obtém-se a ordenada na origem (a) e o declive da reta (b):

$$\begin{cases} a = \overline{y} - b\overline{x} \\ b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2} = r_{xy} \times \frac{s_y}{s_x} \end{cases}$$

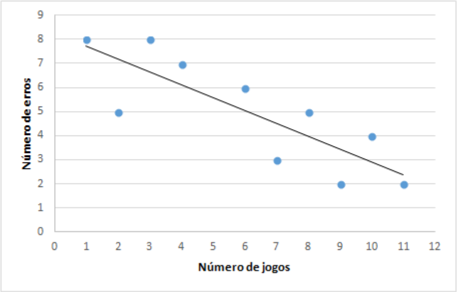
- $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ e $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ (média amostral);
- $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ e $s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$ (variância amostral);
- $s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}\right)$ (covariância amostral).
- $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$ (coeficiente de correlação linear empírico).

Exemplo 1

Um psicólogo efetuou uma pesquisa com o objetivo de analisar a forma como as crianças aprendem um determinado jogo. Das diversas variáveis observadas foram registados o número de jogos efetuados (X) e o número de erros realizados no jogo (Y):

Número de jogos	Número de erros
x	y
1	8
2	5
3	8
4	7
6	6
7	3
8	5
9	2
10	4
11	2

tabela de dados



Coeficiente de correlação linear: $r_{XY} = -0.819$

4. Determine a reta de regressão.

Reta de regressão: $\widehat{y} = a + bx$ com $b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$ e $a = \overline{y} - b\overline{x}$ (uma possibilidade)

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{61}{10} = 6.1 \qquad \overline{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10} y_i}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i - 6.1)(y_i - 5)}{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i - 6.1)^2} = \frac{-58}{108.9} = -0.5326$$

$$a = 5 - (-0.5326) \times 6.1 = 8.2489$$

Reta de regressão:

$$\widehat{y} = 8.2489 - 0.5326x$$

Metodologia

3. *Análise dos Resíduos*

- Uma outra forma de verificar a qualidade do modelo de regressão linear é através dos erros, e_i, isto é, das diferenças entre os valores observados (y_i) e os valores ajustados $(\widehat{y}_i)$, aos quais se chama de **resíduos**:

$$\text{resíduos} = e_i = y_i - \widehat{y}_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

- Uma propriedade importante dos resíduos é o facto da sua soma ser nula,

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0.$$

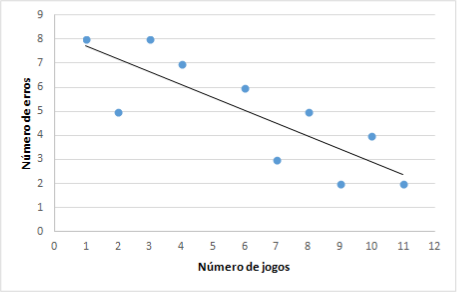
- Uma forma de analisar os resíduos é através de um diagrama de dispersão onde se representam os pontos (x_i, e_i), visualizando-se os desvios positivos e negativos acima e abaixo do eixo dos xx.
- Se os resíduos não forem grandes e não tiverem um padrão bem definido, é sintoma de que o modelo ajustado é bom.

Exemplo 1

Um psicólogo efetuou uma pesquisa com o objetivo de analisar a forma como as crianças aprendem um determinado jogo. Das diversas variáveis observadas foram registados o número de jogos efetuados (X) e o número de erros realizados no jogo (Y):

Número de jogos	Número de erros
x	**y**
1	8
2	5
3	8
4	7
6	6
7	3
8	5
9	2
10	4
11	2

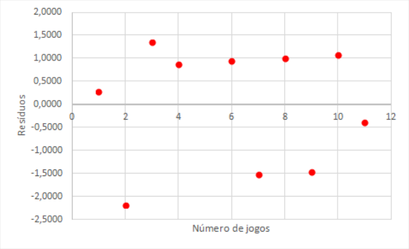
tabela de dados



Coeficiente de correlação linear: $r_{XY} = -0.819$
reta de regressão: $\widehat{y} = 8.2489 - 0.5326x$

5. Analise os resíduos.

x_i	y_i	$\widehat{y} = 8.2489 - 0.5326x$	$e_i = y_i - \widehat{y}$
1	8	7.7163	0.2837
2	5	7.1837	−2.1837
3	8	6.6511	1.3489
4	7	6.1185	0.8818
6	6	5.0533	0.9467
7	3	4.5207	−1.5207
8	5	3.9881	1.0119
9	2	3.4555	−1.4555
10	4	2.9229	1.0771
11	2	2.3903	−0.3903
			$\sum_{i=1}^{10} e_i \approx 0$



Como os resíduos não são grandes e não apresentam um padrão bem definido, o modelo ajustado parece ser adequado.

Metodologia

4. *Previsão*

- Depois de encontrado o modelo de regressão linear que se adapta aos dados,

$$\widehat{y} = a + bx,$$

é possível efetuar **previsões** para $\mathbf{y}$ com base em valores de x.

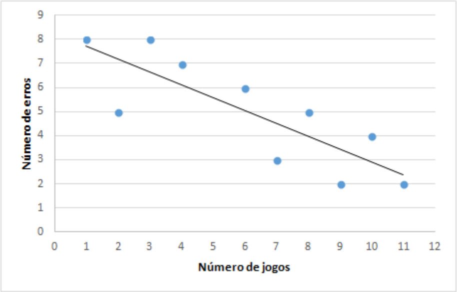
- Só deve ser feita previsão para y com base em valores de x dentro do intervalo analisado ou para valores muito próximos do intervalo analisado. Quando nos afastamos muito, não sabemos se a relação linear ainda se mantém, logo a previsão pode ser absurda.

Exemplo 1

Um psicólogo efetuou uma pesquisa com o objetivo de analisar a forma como as crianças aprendem um determinado jogo. Das diversas variáveis observadas foram registados o número de jogos efetuados (X) e o número de erros realizados no jogo (Y):

Número de jogos	Número de erros
x	y
1	8
2	5
3	8
4	7
6	6
7	3
8	5
9	2
10	4
11	2

tabela de dados



Coeficiente de correlação linear: $r_{XY} = -0.819$
reta de regressão: $\widehat{y} = 8.2489 - 0.5326x$

6. Obtenha estimativas para o número de erros que uma criança comete quando joga 5 vezes o jogo e quando joga 50 vezes o jogo.

Uma estimativa para o número de erros que uma criança comete quando

1. joga 5 vezes o jogo:

$$\widehat{y}(5) = 8.2489 - 0.5326 \times 5 = 5.586 \approx 6 \text{ erros}$$

2. joga 50 vezes o jogo:

$$\widehat{y}(50) = 8.2489 - 0.5326 \times 50 = -18.381$$ ABSURDO!

Mesmo que a estimativa para 50 jogos tivesse dado um valor válido, continuaríamos a não ter qualquer confiança nessa previsão, pois o valor 50 encontra-se muito afastado dos valores observados, $[1, 11]$. Embora o modelo tenha sido considerado adequado (diagrama de de dispersão, coeficiente de correlação linear e resíduos, todos levaram a considerar o modelo adequado), nada nos garante que a reta obtida se mantém para valores afastado dos observados.

Uma estimativa para o número de erros que uma criança comete quando

1. joga 5 vezes o jogo:

$$\widehat{y}(5) = 8.2489 - 0.5326 \times 5 = 5.586 \approx 6 \text{ erros}$$

2. joga 50 vezes o jogo:

$$\widehat{y}(50) = 8.2489 - 0.5326 \times 50 = -18.381$$

$$\widehat{y}(50) = 8.2489 - 0.5326 \times 50 = -18.381$$

ABSURDO!

Mesmo que a estimativa para 50 jogos tivesse dado um valor válido, continuaríamos a não ter qualquer confiança nessa previsão, pois o valor 50 encontra-se muito afastado dos valores observados, $[1, 11]$. Embora o modelo tenha sido considerado adequado (diagrama de de dispersão, coeficiente de correlação linear e resíduos, todos levaram a considerar o modelo adequado), nada nos garante que a reta obtida se mantém para valores afastado dos observados.

Uma estimativa para o número de erros que uma criança comete quando

1. joga 5 vezes o jogo:

$$\widehat{y}(5) = 8.2489 - 0.5326 \times 5 = 5.586 \approx 6 \text{ erros}$$

2. joga 50 vezes o jogo: valor muito afastado dos valores observados

$$\widehat{y}(50) = 8.2489 - 0.5326 \times 50 = -18.381 \qquad \text{ABSURDO!}$$

Mesmo que a estimativa para 50 jogos tivesse dado um valor válido, continuaríamos a não ter qualquer confiança nessa previsão, pois o valor 50 encontra-se muito afastado dos valores observados, $[1, 11]$. Embora o modelo tenha sido considerado adequado (diagrama de de dispersão, coeficiente de correlação linear e resíduos, todos levaram a considerar o modelo adequado), nada nos garante que a reta obtida se mantém para valores afastado dos observados.

Observação

Suponha que calculou o seguinte modelo de regressão

$$\widehat{y} = a + bx,$$

e pretende efetuar **previsões** para $\mathbf{x}$ com base em valores de y.

Com a reta de regressão anterior apenas faz sentido estimar valores de y. Como agora pretende estimar valores de x, então significa que $\mathbf{X}$ passa a ser a **variável dependente** e $\mathbf{Y}$ a **variável independente**, sendo necessário calcular a reta de regressão correspondente. Ou seja, ir a todas as fórmulas apresentadas anteriormente e onde está x colocar y e onde está y colocar x e assim obtém

$$\widehat{x} = a^* + b^* y$$

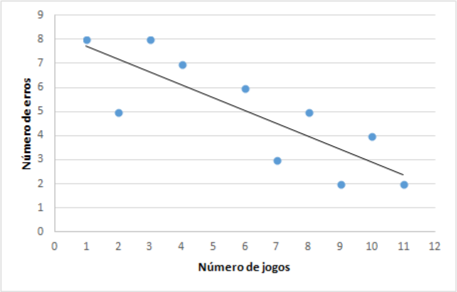
com $a^* = \overline{x} - b^*\overline{y}$ e $b^* = r_{XY} \times \frac{s_x}{s_y}$

Exemplo 1

Um psicólogo efetuou uma pesquisa com o objetivo de analisar a forma como as crianças aprendem um determinado jogo. Das diversas variáveis observadas foram registados o número de jogos efetuados (X) e o número de erros realizados no jogo (Y):

Número de jogos	Número de erros
x	y
1	8
2	5
3	8
4	7
6	6
7	3
8	5
9	2
10	4
11	2

tabela de dados



Coeficiente de correlação linear: $r_{XY} = -0.819$
reta de regressão: $\widehat{y} = 8.2489 - 0.5326x$

7. Suponha que a criança errou apenas 1 vez e pretende obter uma estimativa do número de jogos que a criança fez. Como deve fazer?

Como agora pretende-se estimar valores de x, então significa que X (número de jogos) passa a ser a variável dependente e Y (número de erros) a variável independente, sendo necessário calcular a reta de regressão correspondente: $\widehat{x} = a^* + b^* y$.

Ou seja, ir a todas as fórmulas apresentadas anteriormente e onde está x colocar y e onde está y colocar x:

$$b^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2} \quad \text{e} \quad a^* = \overline{x} - b^* \overline{y} \quad \text{(uma possibilidade)}$$

$$b^* = \frac{\sum_{i=1}^{10} (y_i - 5)(x_i - 6.1)}{\sum_{i=1}^{10} (y_i - 5)^2} = \frac{-58}{46} = -1.2609$$

$$a^* = 6.1 - (-1.2609) \times 5 = 12.4045$$

Assim obtém-se a reta de regressão

$$\widehat{x} = 12.4045 - 1.2609y.$$

Voltando à questão:

$$\widehat{x}(1) = 12.4045 - 1.2609 \times 1 = 11.144 \approx 11 \text{ jogos}$$

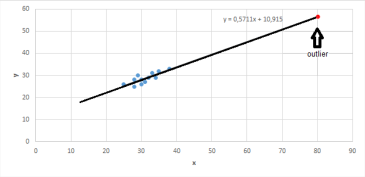
"Outliers" ou observações discordantes

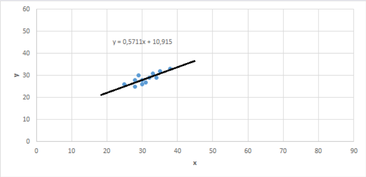
- Através das análise do Diagrama de Dispersão por vezes surgem observações que se destacam das restantes, essas observações são chamadas de "Outliers" ou observações discordantes.

- A identificação e a interpretação de "outliers" são tarefas complexas e altamente subjetivas A explicação para a existência de valores com um comportamento que se afasta nitidamente do da grande maioria dos restantes valores pode ser devido:
  - a erros humanos - essas observações devem ser corrigidas ou eliminadas do estudo;
  - à natureza do fenómeno - essas observações devem ser analisadas com cuidado.

"Outliers" ou observações discordantes

- Observações deste tipo podem dividir-se em duas classes:
  - **"outliers" não influentes** - a sua existência não altera o modelo linear ajustado





  - **"outliers" influentes** - a sua existência altera o modelo linear ajustado