IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA I

1^o SEMESTRE 2018/2019

2^o Teste - Recuperação

4 de Fevereiro de 2019 Duração: **2 horas**

Instruções:

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- Não pode responder a diferentes questões numa mesma folha de resposta.
- O abandono da sala só poderá efectuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É permitida a consulta de uma folha A4 manuscrita pelo aluno.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de equipamentos electrónicos durante a prova.
- Justifique convenientemente todas as respostas.

---

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \ln x$.

[2.0] (a) Recorrendo à fórmula de Taylor com resto de Lagrange de ordem 1 da função f em torno de $a = 1$, prove que
$$x \ln x \geq x - 1, \quad \forall x \geq 1.$$

[2.0] (b) Estude a monotonia e os extremos da função f.

[2.5] 2. Determine a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que
$$f'(x) = \frac{x-4}{x(x^2+1)} \qquad \text{e} \qquad f(1) = \ln 4.$$

3. Calcule:

[1.5] (a) $P\left[\dfrac{\operatorname{sen}\left(\ln\left(x^2\right)\right)}{x}+\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{3+\cos(x)}\right];$

[2.0] (b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{-x}dx;$

[2.0] (c) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{2}} \frac{4x}{\sqrt[3]{2+4x}}dx.$

4. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<1 \\ \operatorname{sen}(\pi x), & x\geqslant 1 \end{cases}.$$

[2.0] (a) Determine a expressão de $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt.$

[1.0] (b) Calcule o valor médio de f no intervalo $[0,2]$.

[1.5] (c) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{f(x)}{x^4}dx.$

[1.5] 5. Seja G a função definida por $G(x)=\displaystyle\int_{2x+x^2}^{3}\sqrt{t^2+17}dt$. Justifique a diferencialidade de G e calcule $G'(2)$.

[2.0] 6. Considere a região do plano limitada pelas curvas

$$y=\ln x,\ y=1-x,\ y=1.$$

Faça o esboço da região e calcule o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno do eixo dos yy.

Fim do teste