Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Medida do Erro

Aula Prática 3

Análise Numérica - 2^o Semestre

6 Abril 2020

Plano da Aula

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Resolução dos exercícios

- 1.13
- 1.15 a) (extra)
- 1.17
- 1.19 a), g) (extra)
- 1.24

Medida do Erro

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Erro

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}$ o valor exacto de uma grandeza real e $\widetilde{x}$ um valor aproximado de x.

- **Erro absoluto** de $\widetilde{x}$ em relação a x

$$\Delta_{\widetilde{x}} = |E_{\widetilde{x}}| = |\widetilde{x} - x|$$

- **Erro relativo** de $\widetilde{x}$ em relação a x

$$\delta_{\widetilde{x}} = \left| \frac{\widetilde{x} - x}{x} \right|$$

- **Percentagem de erro**

$$100\delta_{\widetilde{x}}\ (\%)$$

Algarismos significativos

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Definição

Seja $x \neq 0$ um número cuja notação científica é dada por

$$x = \pm \left(d_0.d_{-1}d_{-2}\dots d_{1-n}\dots\right)_\beta \times \beta^t, \;\; d_0 \neq 0$$

e seja $\widetilde{x}$

$$\widetilde{x} = \pm \left(d_0.d_{-1}d_{-2}\dots d_{1-n}\right)_\beta \times \beta^t, \;\; d_0 \neq 0$$

uma aproximação de x pertencente a $FP\left(\beta, n\right)$. Diz-se que o algarismo d_{-i} é significativo de $\widetilde{x}$ se

$$\Delta_{\widetilde{x}} \leq \frac{1}{2}\beta^{t-i}$$

Algarismos significativos

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Nota

- Se d_{-i}, $i \geq 2$, é significativo então d_{-j}, $0 \leq j < i$, são significativos.
- Se d_{1-n} é significativo então os n algarismos de $\widetilde{x}$ são significativos.

Exercício 1.13

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Determine o número de algarismos significativos de precisão de $x^* = 4.501 \times 10^5$ como aproximação de $x = 4.537 \times 10^5$, em base 10 e em base binária.

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{x}} &= \left|4.537 \times 10^5 - 4.501 \times 10^5\right| = 0.036 \times 10^5 = 3600 \\ x^* &= 4.501 \times 10^5 \end{aligned}$$

- O algarismo $d_{-2} = 0$ é significativo de $\widetilde{x}$?

  $\frac{1}{2} \times 10^{5-2} = 500 < \Delta_{\tilde{x}} \rightarrow d_{-2}$ não é algarismo significativo

- O algarismo $d_{-1} = 5$ é significativo de $\widetilde{x}$?

  $\frac{1}{2} \times 10^{5-1} = 5000 > \Delta_{\tilde{x}} \rightarrow d_{-1}$ é algarismo significativo

- 2 algarismos significativos

Exercício 1.13

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

- Escrever $x^* = 4.501 \times 10^5$ em binário

$$x^* = 4.501 \times 10^5 = 4.501 \times 5^5 \times 2^5 = 14065.625 \times 2^5$$

- $14065 = (11011011110001)_2$
- $0.625 = (0.101)_2$

$$\begin{aligned} x^* &= (11011011110001.101)_2 \times 2^5 \\ &= (1.1011011110001101)_2 \times 2^{18} \end{aligned}$$

- O algarismo $d_{-6} = 1$ é significativo de $\widetilde{x}$?

$$\frac{1}{2} \times 2^{18-6} = 2^{11} < \Delta_{\widetilde{x}} \rightarrow d_{-6} \text{ não é algarismo significativo}$$

- O algarismo $d_{-5} = 0$ é significativo de $\widetilde{x}$?

$$\frac{1}{2} \times 2^{18-5} = 2^{12} > \Delta_{\widetilde{x}} \rightarrow d_{-5} \text{ é algarismo significativo}$$

- 6 algarismos significativos

Exercício 1.15

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Dado um número aproximado com um erro absoluto Δ, indique o número de algarismos significativos em cada caso:

- $x^* = 397.74$, $\Delta \leq 0.05$

$$x^* = 397.74 = 3.9774 \times 10^2$$

- O algarismo d_{-i} é significativo de x^* se

$$\frac{1}{2} \times 10^{2-i} \quad \geq \quad \Delta \Leftrightarrow 10^{2-i} \geq 2\Delta \Leftrightarrow 2 - i \geq \log_{10}(2\Delta)$$

$$\Leftrightarrow \quad i \leq 2 - \log_{10}(2\Delta)$$

- Considerando o caso $\Delta = 0.05$ (erro absoluto máximo) obtemos

$$i \leq 3$$

- Concluímos que temos pelo menos 4 algarismos significativos.

Exercício 1.17 a)

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

- Em 1837, Bessel determinou para o comprimento do semi-eixo maior do elipsóide terrestre o valor de $a = 6377397m$ e, em 1910, Hayford determinou para a mesma grandeza o valor de $a_1 = 6378388m$. Supondo exacto o valor a_1, calcule o erro absoluto e a percentagem de erro do valor aproximado de a.

$$x = 6378388 \text{ e } \widetilde{x} = 6377397$$

- Erro absoluto

$$\Delta_{\widetilde{x}} = |\widetilde{x} - x| = 991$$

- Erro relativo

$$\delta_{\widetilde{x}} = \left|\frac{\widetilde{x} - x}{x}\right| = \frac{991}{6378388} \approx 1.5537 \times 10^{-4}$$

- Percentagem de erro

$$100\delta_{\widetilde{x}}\,(\%) \approx 1.5537 \times 10^{-2} \approx 0.0155\%$$

Exercício 1.17 b)

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

- O valor adoptado em 1948 para a constante de Planck foi $h_1 = 6.62 \times 10^{-34} J$, ao passo que o valor definido por Planck em 1899 foi $h = 6.41 \times 10^{-34} J$. Considerando exacto o valor h_1, calcule o erro absoluto e a percentagem de erro de h.

$$x = 6.62 \times 10^{-34} \text{ e } \widetilde{x} = 6.41 \times 10^{-34}$$

- Erro absoluto

$$\Delta_{\widetilde{x}} = |\widetilde{x} - x| = 2.1 \times 10^{-35}$$

- Erro relativo

$$\delta_{\widetilde{x}} = \left| \frac{\widetilde{x} - x}{x} \right| = \frac{2.1 \times 10^{-35}}{6.62 \times 10^{-34}} \approx 3.172\,2 \times 10^{-2}$$

- Percentagem de erro

$$100\delta_{\widetilde{x}}\,(\%) \approx 3.17\%$$

Exercício 1.17 c)

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

- Compare os resultados obtidos nos dois casos anteriores e indique qual a determinação que foi mais precisa relativamente ao valor que foi considerado exacto.
- A alínea a) porque apesar de ter um erro absoluto superior, a percentagem do erro relativo é mais pequena.
- O erro absoluto é insuficiente para caracterizar a exactidão de uma determinação. O erro relativo é invariante numa mudança de escala.

Exercício 1.19 a)

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Transforme para forma decimal, octal e/ou binária os seguintes números:
Decidir como são arredondados estes números no sistema $FP\,(8, 3, -200, 200)$ e indique o erro relativo cometido por esta aproximação, com respeito do valor dado.

- $(216)_{10} = (330)_8 = (011011000)_2$
- $x = (330)_8 = (3.30)_8 \times 8^2 \in FP$

$$\widetilde{x} = x \text{ e } \delta_{\widetilde{x}} = 0$$

Exercício 1.19 g)

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

- $2.812 \times 10^3 = 2812 = (5374)_8 = (101011111100)_2$
- $x = (5374)_8 = (5.374)_8 \times 8^3 \notin FP$

$$\begin{aligned}
\widetilde{x} &= (5.37)_8 \times 8^3 = (5370)_8 = 2808 \\
\delta_{\widetilde{x}} &= \frac{|2812 - 2808|}{2812} = \frac{4}{2812} \approx 1.422 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Normas

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Definição

Seja $p \geq 1$ um número real e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Norma$-p$

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Norma $-\infty$

$$\|x\|_\infty = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right\}$$

Convergência

Medida do Erro

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Definição

A sucessão x_k converge para $a \in \mathbb{R}^n$ quando a sucessão de erros absolutos $\Delta_{x_k} = \|x_k - a\|$ tiver limite zero.

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \Delta_{x_k} = 0$$

Ordem de Convergência

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Definição

Seja x_k uma sucessão tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a.$$

Se existir um número q e uma constante C positiva tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - a\|}{\|x_k - a\|^q} = C, \; C > 0$$

então dizemos que a **ordem de convergência** é q.

Quando $q = 2$ tem-se **convergência quadrática**.

Exercício 1.24

Medida do Erro

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Determine o limite e a ordem de convergência da seguinte sucessão de pontos de $\mathbb{R}^2$.

$$(x_k, y_k) = \left((0.1)^{2^k}, 3 - (0.1)^{3^k}\right)$$

- Cálculo do limite

$$\lim_{k\to+\infty}(x_k, y_k) = \lim_{k\to+\infty}\left(\underbrace{(0.1)^{2^k}}_{\to 0}, 3 - \underbrace{(0.1)^{3^k}}_{\to 0}\right) = (0, 3)$$

Medida do Erro

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

- Ordem de convergência (consideramos a norma - infinito para simplificação)

Cálculos Auxiliares:

$$
\begin{aligned}
\Delta_k &= \left\| (x_k, y_k) - (0,3) \right\|_\infty \\
&= \left\| \left((0.1)^{2^k}, 3 - (0.1)^{3^k} \right) - (0,3) \right\|_\infty \\
&= \left\| \left((0.1)^{2^k}, -(0.1)^{3^k} \right) \right\|_\infty \\
&= \max \left\{ \left| (0.1)^{2^k} \right|, \left| -(0.1)^{3^k} \right| \right\} = (0.1)^{2^k} \\
\Delta_{k+1} &= \left\| \left((0.1)^{2^{k+1}}, -(0.1)^{3^{k+1}} \right) \right\|_\infty = (0.1)^{2^{k+1}}
\end{aligned}
$$

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

Exercício 1.24
Continuação

- A ordem de convergência é q se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1}-a\|_\infty}{\|x_k-a\|_\infty^q} = \lim_{k\to\infty} \frac{(0.1)^{2^{k+1}}}{\left[(0.1)^{2^k}\right]^q} = C > 0$$

Considerando $q = 2$ temos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(0.1)^{2^{k+1}}}{\left[(0.1)^{2^k}\right]^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(0.1)^{2^{k+1}}}{(0.1)^{2\times 2^k}} = 1$$

- A ordem de convergência é 2.

Exercício 1.24
Continuação

Medida do Erro

Medida do Erro
Erro
Alg. Signif.
Alg. Signif.
Exercício 1.13
Exercício 1.13
Exercício 1.15
Exercício 1.17 a)
Exercício 1.17 b)
Exercício 1.17 c)
Exercício 1.19 a)
Exercício 1.19 g)
Normas
Conv.
Ordem de Conv.
Exercício 1.24
Exercício 1.24 cont.
Ex.1.24 cont
Ex.1.24 cont

- Se $q = 1$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(0.1)^{2^{k+1}}}{(0.1)^{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{2^{k+1}}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{2^k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{10^{2^k}}{10^{2^{k+1}}} = 0$$

A ordem de convergência não pode ser 1.

- Se $q = 3$ (mesma situação para $q \geq 3$)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(0.1)^{2^{k+1}}}{\left[(0.1)^{2^k}\right]^3} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{2^{k+1}}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{3\times 2^k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{10^{3\times 2^k}}{10^{2^{k+1}}} = +\infty$$

A ordem de convergência não pode ser maior que 2.