Funções Reais de Variável Real: Limites, Continuidade e Cálculo Diferencial

José António Caldeira Duarte
Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

Setembro de 2007

Conteúdo

1 Limite

Podemos afirmar que o conceito fundamental no qual toda a análise matemática se estrutura é o conceito de limite!

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sendo a um ponto de acumulação de D, diz-se que a função f tende para um limite $l \in \mathbb{R}$, quando x tende para a, e escreve-se simbolicamente

$$\lim_{x \to a} f(x) = l,$$

se $f(x)$ estiver "tão perto quanto se queira de l", para todos os pontos x onde a função esteja definida, e "suficientemente próximos" de a.

1.1 Definição de limite segundo Cauchy

A primeira definição formal de limite que iremos apresentar deve-se a Cauchy.

Diz-se que a função f tende para um limite $l \in \mathbb{R}$, quando x tende para a (ponto de acumulação de D), se e só se, qualquer que seja o número real positivo δ existir um número real ε, também positivo, tal que, sempre que x seja um ponto pertencente a $D \backslash \{a\}$ e verificar a condição $|x - a| < \varepsilon$, se tenha $|f(x) - l| < \delta$.

Simbolicamente a proposição

$$\text{"}\lim_{x \to a} f(x) = l\text{"},$$

pode ser escrita

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0, \forall x \left(x \in D \backslash \{a\} \wedge |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \delta \right).$$

Analisemos agora com algum detalhe esta definição.

Qualquer que seja o valor δ fixado, ele vai definir uma vizinhança de l, $V_\delta(l)$.

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \, \forall x \left(x \in D \backslash \{a\} \wedge |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \delta \right).$$

E para esse δ, terá que *existir* sempre uma vizinhança de a $V_\varepsilon(a)$,

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \, \forall x \left(x \in D \backslash \{a\} \wedge |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \delta \right)$$

tal que, sempre que x *pertença ao domínio* de f e a essa *vizinhança* ε de a

$$\forall \delta > 0 \, \exists \varepsilon > 0 \, \forall x \left(x \in D \setminus \{a\} \wedge |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l < \delta| \right)$$

a sua imagem $f(x)$ pertence à vizinhança de l.

$$\forall \delta > 0 \, \exists \varepsilon > 0 \, \forall x \left(x \in D \setminus \{a\} \wedge |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \delta \right).$$

O conceito de limite pode facilmente ser interpretado geometricamente.

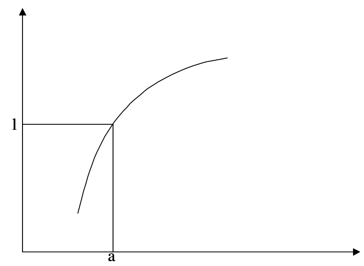


Figura 1: O gráfico de uma função real de variável real numa vizinhança do ponto (a, l).

Considere-se uma vizinhança arbitrária de l, $V_\delta(l)$, (figura 2).

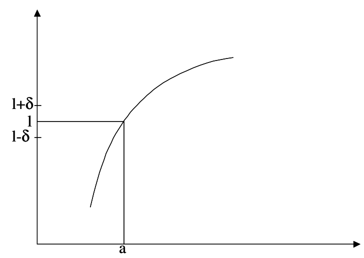


Figura 2: Uma vizinhança arbitrária de l, $V_\delta(l)$.

A definição de limite é:

> "todos os pontos x 'suficientemente perto' de a
> terão as suas imagens em $V_\delta(l)$".

Neste caso, comecemos por ver quais os pontos que têm por imagem $l+\delta$ e $l-\delta$,(figura 3).

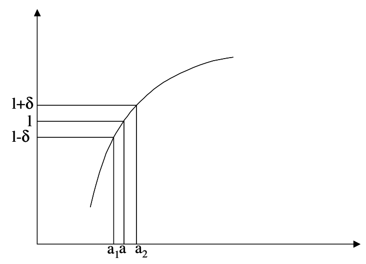


Figura 3: Os objectos das imagens $l-\delta$ e $l-\delta$.

Façamos agora

$$\varepsilon = \min\{d(a_1,a), d(a_2,a)\} = d(a_1,a)$$

e construamos a vizinhança ε de a, $V_\varepsilon(a)$.

Todos os pontos que pertencem a $V_\varepsilon(a)$ têm imagem em $V_\delta(l)$, (figura 4).

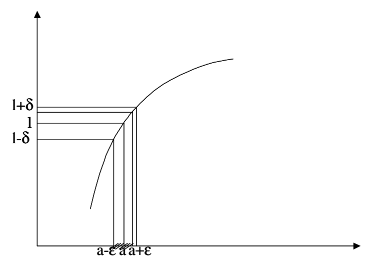


Figura 4: Todos os pontos que pertencem a $V_\varepsilon(a)$ têm imagem em $V_\delta(l)$.

O significado intuitivo desta definição é o de que, se considerarmos apenas valores de x "suficientemente próximos" de a, os valores correspondentes de $f(x)$ estarão tão próximos quanto se queira de l.

Exemplo 1 A figura 5 representa o gráfico da função $f(x) = 2x$; vejamos o que significa $\lim\limits_{x\to 1} 2x = 2$.

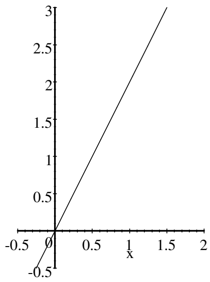


Figura 5: O gráfico da função $f(x) = 2x$.

De acordo com a definição apresentada anteriormente afirmar-se que

$$\lim_{x \to 1} 2x = 2$$

é equivalente a

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0, \forall x \left(x \in D \backslash \{1\} \wedge |x-1| < \varepsilon \Longrightarrow |2x-2| < \delta\right).$$

Façamos, por exemplo,

$$\delta = 0.5;$$

existirá um número $\varepsilon > 0$ de tal forma que a implicação anterior seja verdadeira?

Comecemos por ver qual o intervalo definido pela condição

$$|2x-2| < 0.5.$$

Trata-se do intervalo

$$]1.5, 2.5[.$$

Vejamos agora quais os pontos do domínio da função cujas imagens são os extremos desse intervalo.

$$\begin{cases} 2.5 = 2x \Rightarrow x = 1.25 \\ 1.5 = 2x \Rightarrow x = 0.75 \end{cases}.$$

Fazendo $\varepsilon = 0.25$ torna-se evidente (ver figura 6) que para todos os valores de x que satisfaçam a condição

$$|x-1| < 0.25$$

se tem

$$|2x-2| < 0.5.$$

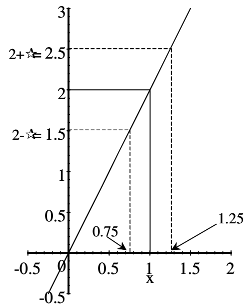


Figura 6: As vizinhanças $V_{0.25}(1)$ e $V_{0.5}(2)$.

Para demonstrar que

$$\lim_{x \to 1} 2x = 2,$$

isto é,

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0, \forall x \left(x \in D \backslash \{1\} \wedge |x - 1| < \varepsilon \Longrightarrow |2x - 2| < \delta \right),$$

comecemos por majorar $|2x - 2|$ por uma função de $|x - 1|$.

Neste caso,

$$|2x - 2| = 2\,|x - 1|\,.$$

Ora, se

$$|x - 1| < \varepsilon = \frac{\delta}{2},$$

concluímos que

$$|2x - 2| = 2\,|x - 1| < 2\varepsilon = 2\frac{\delta}{2} = \delta.$$

Temos então demonstrado que para qualquer δ fixado, é sempre possível definir um número real positivo ε, igual a $\delta/2$, tal que, sempre que um número x pertença ao domínio da função e à vizinhança ε de 1, a sua imagem pertencerá à vizinhança δ de 2. ■

1.2 Definição de limite segundo Heine

Iremos agora apresentar uma outra definição de limite, a definição de **limite segundo Heine**, que se demonstra ser equivalente à definição de limite segundo Cauchy.

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sendo a um ponto de acumulação de D, diz-se que a função f tende para um limite l, quando x tende para a, se e só se **para qualquer** sucessão real de termos de D convergente para a (por valores distintos de a, isto é, a partir de certa ordem, $x_n \neq a$),

$$x_n \to a,$$

se tenha

$$f(x_n) \to l.$$

Esta definição é especialmente útil para provar a não existência de limite; de facto, se conseguirmos definir duas sucessões convergentes para o mesmo valor a de tal forma que as sucessões transformadas convergem para valores distintos, fica provado que a função não tem limite.

Exemplo 2 Considere-se a função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

As sucessões

$$x_n = \frac{1}{n\pi}$$

e

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

convergem ambas para zero.

No entanto, as sucessões transformadas

$$f(x_n) = \sin \frac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \sin n\pi = 0 \to 0$$

e

$$f(y_n) = \sin \frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1$$

covergem para valores distintos, pelo que não existe limite da função f quando x tende para zero.

A figura 7 ilustra este exemplo.

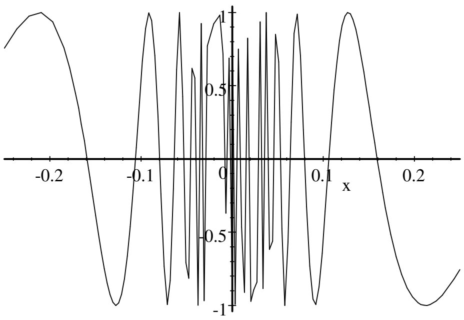


Figura 7: O gráfico da função $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

■

1.3 Limites laterais

Vamos agora considerar o caso do limite de uma função no ponto a relativo a um conjunto que resulte da intersecção do domínio da função com um dos intervalos $]a, +\infty[$ e $]-\infty, a[$[1].

Ao limite de $f(x)$ quando x tende para a relativo ao conjunto $D\cap]a, +\infty[$ (quando existe) chama-se **limite de f no ponto a à direita** ou **limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores** e simbolicamente escreve-se

$$\lim_{x\to a^+} f(x).$$

A proposição

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

poderá portanto ser representada simbolicamente por

$$\forall\delta > 0 \exists\varepsilon > 0, \forall x \left((x \in D \land a < x < a + \varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - l| < \delta\right).$$

De forma idêntica, ao limite de $f(x)$ quando x tende para a relativo ao conjunto $D\cap]-\infty, a[$ (quando existe) chama-se **limite de f no ponto a à esquerda** ou **limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores** e simbolicamente escreve-se

$$\lim_{x\to a^-} f(x).$$

[1] É claro que só poderemos falar deste limite se o ponto a for ponto de acumulação da intersecção considerada.

Tendo em atenção a definição de limite segundo Heine, torna-se claro que só existirá $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ se os limites laterais à esquerda e à direita existirem e forem iguais.

Exemplo 3 Considere-se a função definida do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & se \quad x \geq 0 \\ -x^2, & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Neste caso, e como a figura 8 ilustra,

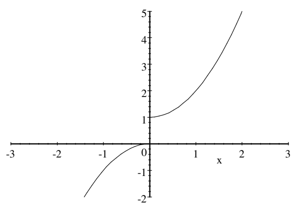


Figura 8: Os limites laterais no ponto zero são diferentes.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1;$$

podemos pois concluir que não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Para provar que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

teremos que provar que

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0, \forall x (x \in D \wedge 0 < x < 0 + \varepsilon) \Longrightarrow \left| \left(x^2+1 \right) - 1 \right| < \delta.$$

Ora

$$\left| \left(x^2+1 \right) - 1 \right| = x^2 = |x| \, |x| < \varepsilon\varepsilon = \varepsilon^2.$$

Fazendo

$$\varepsilon = \sqrt{\delta}$$

fica demonstrado que, sempre que

$$0 < x < \varepsilon,$$

se tem

$$\left|\left(x^2+1\right)-1\right| = x^2 = |x|\,|x| < \varepsilon\varepsilon = \varepsilon^2 = \delta.$$

Analogamente, para provar que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

teremos que provar que

$$\forall\delta > 0 \exists\varepsilon > 0, \forall x (x \in D \wedge 0-\varepsilon < x < 0) \Longrightarrow \left|-x^2-0\right| < \delta.$$

Ora

$$\left|-x^2-0\right| = x^2 = |x|\,|x| < \varepsilon\varepsilon = \varepsilon^2.$$

Fazendo

$$\varepsilon = \sqrt{\delta}$$

fica demonstrado que, sempre que

$$-\varepsilon < x < 0,$$

se tem

$$\left|-x^2-0\right| = x^2 = |x|\,|x| < \varepsilon\varepsilon = \varepsilon^2 = \delta.$$

■

1.4 Extensão da definição de limite aos casos de $a = \pm\infty$ e $l = \pm\infty$

As definições de limite até agora apresentadas restringiram-se ao caso de a e l serem ambos reais. Vamos então extender essas definições aos casos de $a = \pm\infty$ ou $l = \pm\infty$.

A primeira situação que iremos tratar é a de $a = +\infty$ e l ser um número real.

A proposição

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \text{ e } l \in \mathbb{R}$$

é equivalente a

$$\forall\delta > 0 \exists M > 0, \forall x \left(x \in D \wedge x > M \Longrightarrow |f(x)-l| < \delta\right).$$

Podemos interpretar geometricamente esta definição do seguinte modo: qualquer que seja a vizinhança δ de l considerada, é sempre possível determinar um número real M tal que, para todos os números reais maiores que M

e pertencentes ao domínio da função, as suas imagens estarão na vizinhança δ de l.

A função $f\left(x\right)=\frac{3x^2}{x^2+1}$, cujo gráfico está representado na figura 9 tende para 3 quando x tende para infinito.

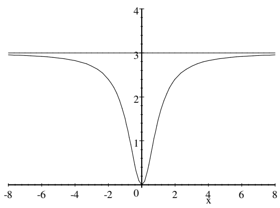


Figura 9: O gráfico da função $f\left(x\right)=\frac{3x^2}{x^2+1}$.

No caso de $a=+\infty$ e $l=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Longleftrightarrow \forall L>0 \exists M>0, \forall x\left(x\in D\wedge x>M\Longrightarrow f(x)>L\right).$$

A figura 10 ilustra esta situação. A função $f(x)=e^x-1$ tende para mais infinito quando x tende para mais infinito.

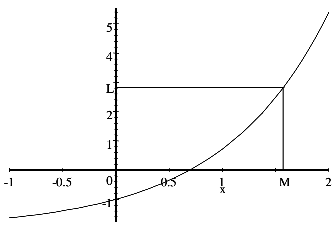


Figura 10: O gráfico da função $f(x)=e^x-1$.

Se a for um número real e $l=+\infty$, a proposição

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \text{ e } a\in\mathbb{R}$$

é equivalente a

$$\forall L>0 \exists \varepsilon>0, \forall x\left(x\in D\backslash\{a\}\wedge|x-a|<\varepsilon\Longrightarrow f(x)>L\right).$$

Na figura 11 está representado o gráfico da função $f(x)=\left|\frac{1}{x-1}\right|$ e é claro que, qualquer que seja o número real L fixado, é possível determinar uma vizinhança ε de 1, de tal modo que, para todos os pontos dessa vizinhança, as suas imagens são maiores que L.

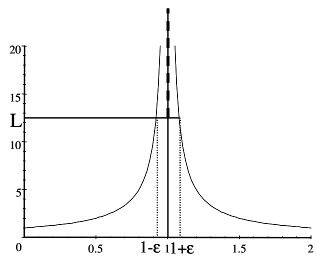


Figura 11: O gráfico da função $f(x) = \left|\frac{1}{x-1}\right|$.

1.5 Álgebra dos limites

Proposição 1 (Unicidade do limite) *O limite de uma função quando e-xiste é único.*

Dem. Para demonstrar este resultado admitamos que existem dois números reais, b e b', tais que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

e

$$\lim_{x \to a} f(x) = b'.$$

De acordo com a definição de limite segundo Heine teremos

$$\forall x_n, x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b$$

e

$$\forall x_n, x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b'.$$

Então.

$$f(x_n) - f(x_n) = 0$$

e

$$f(x_n) - f(x_n) \to b - b'$$

concluindo-se que

$$b - b' = 0 \Leftrightarrow b = b'.$$

■

Proposição 2 *Sejam f, g e h funções reais de variável real definidas num mesmo intervalo I e tais que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in I.$$

Sendo a um ponto interior de I, se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b,$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = b.$$

Dem. Como exercício. ■

Exemplo 4 Esta proposição pode ser utilizada para demonstrar um resultado muito conhecido,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Tendo em consideração a figura 12

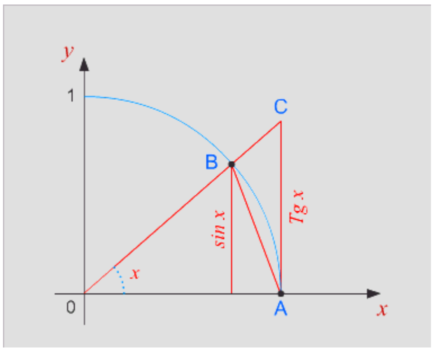


Figura 12: O círculo trigonométrico.

e comparando as áreas dos triângulos OAB, OAC e do sector circular OAB, podemos concluir que, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x.$$

Então, se $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

tendo-se

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Como $\cos x$ tende para 1 quando x tende para zero conclui-se que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

∎

Proposição 3 *Se f e g têm limite no ponto a, também as funções $f + g$, $f - g$, $f \times g$, e no caso de $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, f/g, têm limite no mesmo ponto e*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x), \\
\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x), \\
\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] &= \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}.$$

2 Continuidade

Intuitivamente, continuidade significa que uma pequena alteração na variável independente x, implica apenas uma pequena alteração na variável dependente $y = f(x)$ e exclui um salto no valor de y; o gráfico da função é, neste caso, composto por uma única linha.

Exemplo 5 A temperatura ambiente num determinado local como função do tempo é uma função contínua.

■

Exemplo 6 A função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x > 0 \\ 0, & se \quad x = 0 \\ -1, & se \quad x < 0 \end{cases}$$

apresenta um salto de descontinuidade em $x = 0$.

Uma variação de apenas $0,001$ no valor da variável independente x pode implicar uma variação de 2 unidades na variável dependente y :

$$f(-0,0005) = -1 \text{ e } f(0,0005) = 1.$$

■

2.1 Definição de continuidade segundo Cauchy

Seja f uma função real definida num subconjunto D contido em $\mathbb{R}$ e seja a um ponto pertencente a D.

Diz-se que a função f é contínua em a se e só se, qualquer que seja o número positivo δ existir um número ε, também positivo, tal que, sempre que x seja um ponto pertencente a D e verificar a condição $|x - a| < \varepsilon$, se tenha $|f(x) - f(a)| < \delta$.

Simbolicamente a proposição

"f é contínua no ponto a"

pode ser escrita

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0, \forall x \left(x \in D \wedge |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta \right),$$

ou mais simplesmente

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Analisemos agora com algum detalhe esta definição.

Qualquer que seja o valor δ fixado, ele vai definir uma vizinhança de $f(a)$, $V_\delta(f(a))$.

$$\forall \delta > 0 \, \exists \varepsilon > 0 \, \forall x \left(x \in D \wedge |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta \right)$$

E para esse δ, terá que *existir* sempre uma vizinhança de a, $V_\varepsilon(a)$,

$$\forall \delta > 0 \, \exists \varepsilon > 0 \, \forall x \left(x \in D \wedge |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta \right)$$

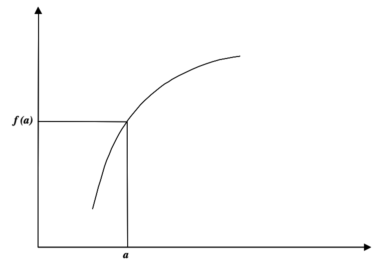
tal que, sempre que x *pertença ao domínio* de f e a essa *vizinhança* ε de a

$$\forall \delta > 0 \, \exists \varepsilon > 0 \, \forall x \left(x \in D \wedge |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta \right)$$

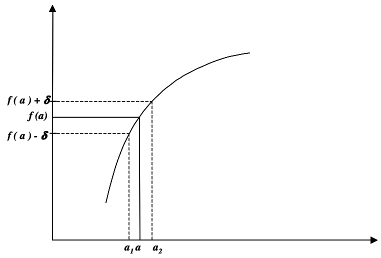
a sua imagem $f(x)$ pertence à vizinhança de $f(a)$.

$$\forall \delta > 0 \, \exists \varepsilon > 0 \, \forall x \left(x \in D \wedge |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta \right)$$

O conceito de continuidade pode também ser facilmente interpretado geometricamente tal como aconteceu com o conceito de limite.



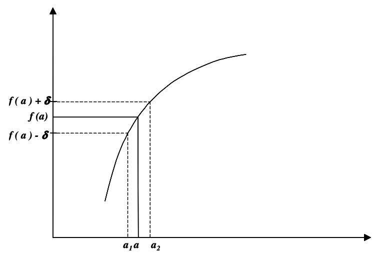
Considere-se uma vizinhança arbitrária de $f(a)$, $V_\delta(f(a))$.



A condição de continuidade de f em a é:

"todos os pontos x 'suficientemente perto' de a
terão as suas imagens em $V_\delta\left(f\left(a\right)\right)$".

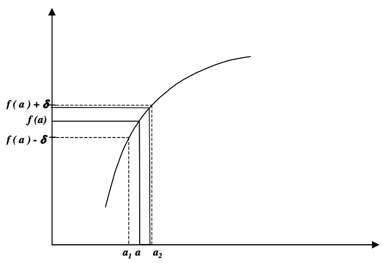
Neste caso, comecemos por ver quais os pontos que têm por imagem $f(a)+\delta=f(a_1)$ e $f(a)-\delta=f(a_2)$.



Façamos agora

$$\varepsilon=\min\left\{d(a_1,a),d(a_2,a)\right\}=d(a_1,a)$$

e construamos a vizinhança ε de a, $V_\varepsilon\left(a\right)$.



Todos os pontos que pertencem a $V_\varepsilon\left(a\right)$ têm imagem em $V_\delta\left(f\left(a\right)\right)$.

Exemplo 7 Considere-se a função f definida por $f(x)=5x+1$.
Esta função é contínua em qualquer ponto x_0 pertencente a $\mathbb{R}$.
Os pontos (x,y) que verificam a condição

$$f(x_0)-\delta<y<f(x_0)+\delta$$

formam uma faixa horizontal J de largura 2δ que contém $(x_0, f(x_0))$.

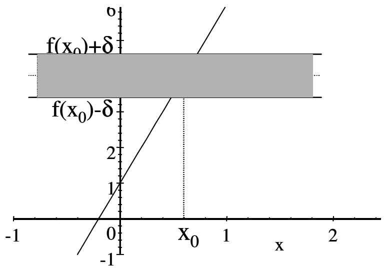


Figura 13: A faixa J.

A continuidade de f em x_0 significa que será possível construir uma outra faixa vertical I, definida por

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$

de tal forma que qualquer ponto do gráfico de f que esteja em I também estará em J.

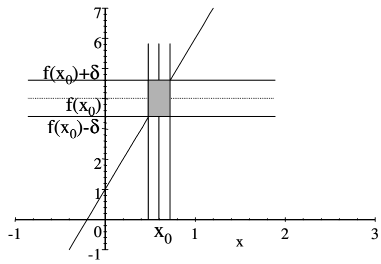


Figura 14: A faixa I.

Na prática, provar que esta função é contínua, por exemplo em $x = 5$, significa que qualquer que seja o valor de δ que se tome, terá que ser possível definir um outro valor $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer ponto x pertencente ao domínio de f e verificando a condição $|x - 5| < \varepsilon$, se tenha $|f(x) - f(5)| < \delta$.

Como calcular esse valor ε?

$$|f(x) - f(5)| = |5x + 3 - 28| = |5x - 25| = 5\,|x - 5|\,.$$

Quando $|x - 5| < \varepsilon$, tem-se

$$|f(x) - f(5)| < 5\varepsilon.$$

Tomando para ε um valor inferior a $\frac{\delta}{5}$, resulta que

$$|f(x) - f(5)| < 5\frac{\delta}{5},$$

isto é,

$$|f(x) - f(5)| < \delta.$$

Podemos pois concluir que a função f é contínua em $x = 5$. ∎

Exemplo 8 Prove que a função $f(x) = x^2$ é contínua no ponto $x = 2$.

O gráfico da função é a parábola da figura 15 .

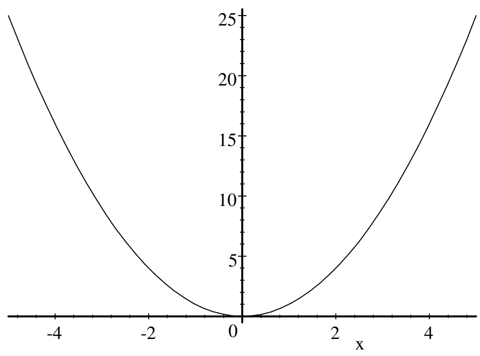


Figura 15: O gráfico da função $f(x) = x^2$.

Exercício 1 ***Solução 1*** *O que se pretende provar é que*

$$\forall\delta > 0 \exists\varepsilon > 0, \forall x \left(x \in D \wedge |x - 2| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - 4| < \delta\right).$$

Tendo em conta que

$$\begin{aligned} |f(x) - 4| &= \left|x^2 - 4\right| = |x + 2|\,|x - 2| = \\ &= |4 + (x - 2)|\,|x - 2| \leq \\ &\leq (4 + |x - 2|)\,|x - 2| \leq \\ &\leq (4 + \varepsilon)\varepsilon, \end{aligned}$$

e escolhendo $\varepsilon = -2 + \sqrt{\delta + 4}$, *a raiz positiva de* $(4 + \varepsilon)\varepsilon = \delta$, *podemos concluir que*

$$\begin{aligned} |f(x) - 4| &< \left(4 - 2 + \sqrt{\delta + 4}\right)\left(-2 + \sqrt{\delta + 4}\right) = \\ &= \delta + 4 - 4 = \delta. \end{aligned}$$

∎

Vamos agora apresentar alguns exemplos gráficos sobre o conceito de continuidade de uma função.

Exemplo 9 A função cujo gráfico se apresenta na figura 16 é descontínua no ponto 0 pois

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

e

$$f(0) = 12$$

tendo-se portanto

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0).$$

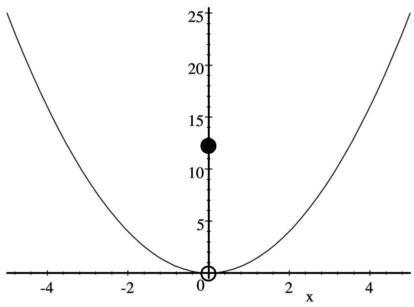


Figura 16: Uma função descontínua na origem.

Exemplo 10 A função cujo gráfico se apresenta na figura 17 é descontínua no ponto 2 pois

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

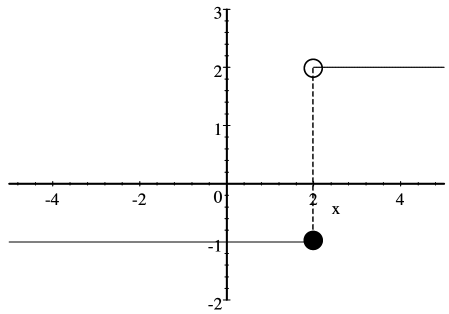


Figura 17: Uma função onde não existe limite no ponto 2, logo, descontínua nesse ponto.

2.2 Prolongamentos por continuidade

Comecemos por recordar que sendo f e g duas funções com domínios D_f e D_g respectivamente, diz-se que f é um prolongamento de g (ou que g é uma restrição de f) se e só se

$$D_g \subset D_f$$

e

$$\forall x \in D_g, f(x) = g(x).$$

A figura 18 ilustra a definição apresentada.

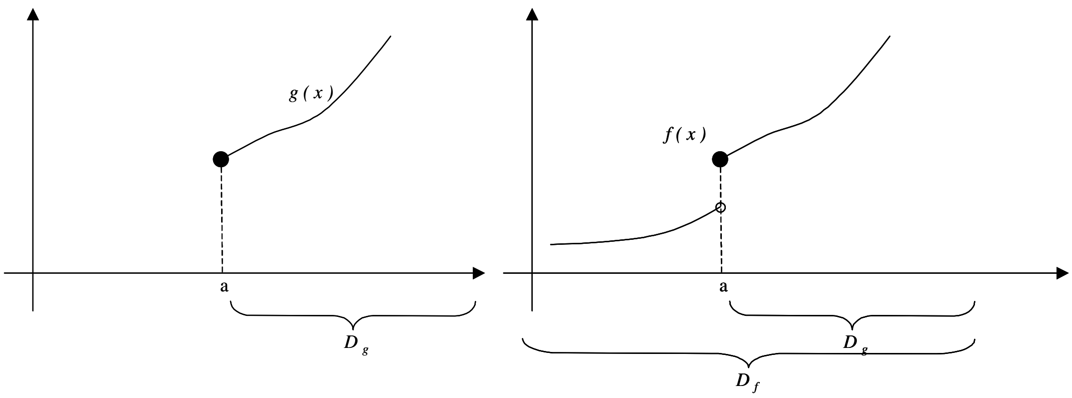


Figura 18: Um prolongamento por continuidade.

Repare-se que o ponto a é um ponto de acumulação de D_g e que a função f, um prolongamento da função g não é uma função contínua em a!

Sendo a um ponto de acumulação de D_g, diz-se que g **é prolongável por continuidade ao ponto** a se e só se existir um prolongamento f de g com domínio $D_g \cup \{a\}$, que seja contínuo em a.

Para que uma função g seja prolongável por continuidade a um ponto a será necessário e suficiente que tenha limite finito nesse ponto e um prolongamento por continuidade poderá ser a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & se \quad x \in D_g \\ \lim\limits_{x \to a} g(x), & se \quad x = a \end{cases}$$

Exemplo 11 A função

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}$$

tem como domínio o conjunto

$$D_g = \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Sendo 0 um ponto de acumulação de D_g e como

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & se \quad x \neq 0 \\ 1, & se \quad x = 0 \end{cases}$$

é um prolongamento por continuidade da função g ao ponto 0.

Definida continuidade de uma função num ponto importa agora definir continuidade num intervalo.

Uma função diz-se contínua num intervalo aberto $]a, b[$ se e só se for contínua em todos os pontos desse intervalo.

A função f é contínua em $[a, b]$ se e só se for contínua em $]a, b[$ e for contínua à direita em a e for contínua à esquerda em b, isto é,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Vamos agora apresentar três teoremas fundamentais relativos às funções contínuas.

Teorema 4 (de Bolzano) *Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ com $a < b$. Então, para qualquer k estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.*

A ideia fundamental deste teorema pode exprimir-se dizendo que uma função contínua num intervalo não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

A figura 19 ilustra o teorema de Bolzano; neste caso, para o valor k fixado existem três pontos pertencentes ao intervalo $]a, b[$ cujas imagens são iguais a k!

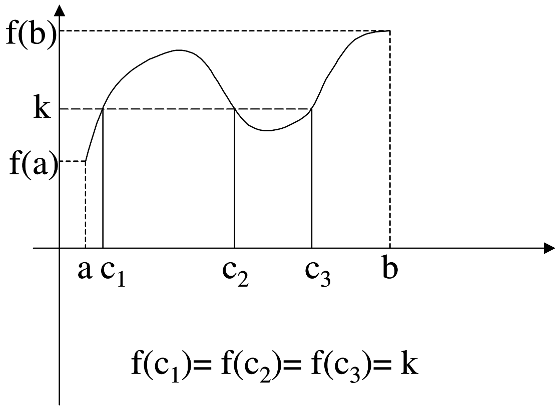


Figura 19: O teorema de Bolzano.

Repare-se que é indispensável exigir que a função seja contínua no intervalo $[a, b]$; na figura 20 onde se apresenta o gráfico de uma função que não é contínua em $[a, b]$ está indicado um ponto estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ mas que não é imagem de algum ponto do intervalo $[a, b]$.

Como consequência deste teorema têm-se os seguintes corolários.

Corolário 5 *Se f é contínua no intervalo $[a, b]$ e não se anula em algum ponto de $[a, b]$, então em todos os pontos $x \in [a, b]$, $f(x)$ tem o mesmo sinal.*

Corolário 6 *Se f é contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$ então f anula-se pelo menos uma vez em $[a, b]$.*

Exemplo 12 Mostre que a equação

$$3x^5 + 15x + 8 = 0$$

tem uma solução real.

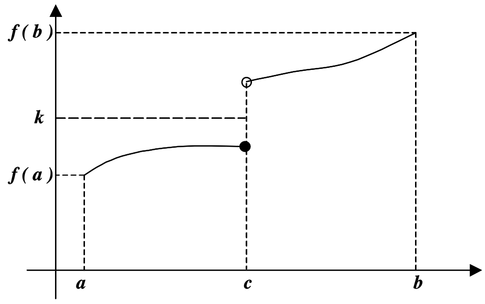


Figura 20: O teorema de Bolzano não é aplicável a esta função no intervalo $[a, b]$.

Se designarmos por $f(x)$ o primeiro membro da equação,

$$f(x) = 3x^5 + 15x + 8,$$

facilmente verificamos que

$$f(0) = 8 > 0$$

e

$$f(-1) = -8 < 0.$$

Então

$$f(-1) \times f(0) < 0;$$

aplicando o teorema de Bolzano (a função f é contínua no intervalo $[-1, 0]$), podemos garantir a existência de um ponto pertencente ao intervalo $[-1, 0]$ onde a função se anula, isto é, a equação dada tem uma solução real.

Teorema 7 (de Weirstrass) *Qualquer função contínua num conjunto fechado e limitado tem máximo e mínimo nesse conjunto.*

De notar que não sendo satisfeita alguma das condições do teorema

- a função ser contínua
- o conjunto ser fechado
- o conjunto ser limitado

não se pode garantir a existência de máximo e de mínimo
As figuras seguintes ilustram o que acabou de ser referido.

- Se não se exigisse a continuidade a função poderia não ter máximo.

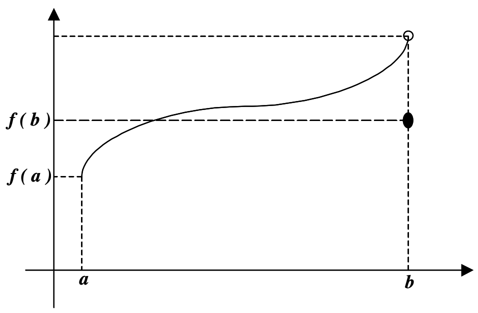


Figura 21: Função descontínua no intervalo $[a, b]$ e sem máximo nesse intervalo.

- Se não se exigisse que o intervalo fosse fechado a função poderia não ter máximo.

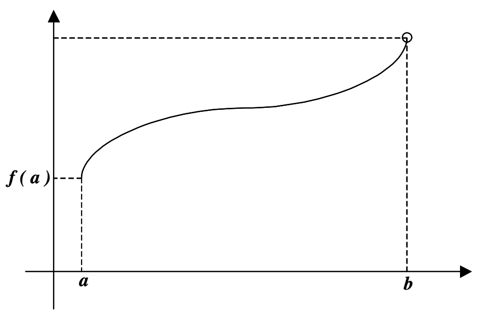


Figura 22: Função sem máximo no intervalo $[a, b[$.

- Se não se exigisse que o intervalo fosse limitado a função poderia não ter máximo.

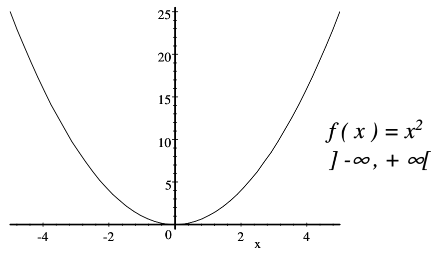


Figura 23: Função sem máximo no intervalo $]-\infty, +\infty[$.

Observação 1 No entanto estas condições são apenas condições suficientes; não são necessárias. Isto significa que existem funções que, embora não verificando algumas das condições do teorema, atingem máximo e mínimo num determinado intervalo.

Teorema 8 (continuidade da função inversa) *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e estritamente monótona em I. Então*

1. *f é invertível em I,*
2. *f^{-1} é estritamente monótona,*
3. *f^{-1} é contínua.*

2.3 Propriedades das funções contínuas

Proposição 9 *Sendo f e g funções contínuas em a, também as funções $f+g$, $f-g$, $f \times g$, e no caso de $g(a) \neq 0$, f/g, são contínuas em a.*

Proposição 10 *Se f é uma função contínua em a e g é contínua em $f(a)$ então $g \circ f$ é contínua em a.*

3 Cálculo diferencial

3.1 Derivada

Definição 1 *Seja $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $c \in]a, b[$. A* ***derivada*** *da função f no ponto c, que se representa por $f\,'(c)$ é definida por*

$$f\,'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

caso este limite exista. Deste modo f diz-se ***derivável*** *em c; ao processo de passagem ao limite que conduz à obtenção de $f\,'(c)$ denomina-se* ***derivação****.*

Repare-se que nesta definição a derivada pode ser finita ou infinita.

Definição 2 *Se uma função f admite* ***derivada finita*** *num ponto $c \in D_f$, diz-se* ***diferenciável*** *em c.*

Observação 2 A função f diz-se **diferenciável num intervalo aberto** $]a, b[$ se for diferenciável em cada ponto deste intervalo.

Para além da notação $f\,'$ para a derivada de uma função f existem outras notações para a derivada de $y = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx};\ y\,';\ \frac{d}{dx}\left[f(x)\right];\ D_x\left[f(x)\right]$$

A notação $f\,'$, introduzida por Lagrange (1736-1813) no final do século XVIII, põe em evidência que $f\,'$ é uma nova função obtida a partir de f por derivação, indicando-se o seu valor num ponto genérico x por $f\,'(x)$.

A definição de derivada de uma função num ponto c também pode ser apresentada da seguinte forma

$$f\,'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x};.$$

basta que na definição anterior se efectue a mudança de variável

$$\Delta x = x - c.$$

Seguidamente iremos apresentar algumas interpretações do conceito de derivada.

3.1.1 Interpretação geométrica

A equação da recta tangente a um gráfico de uma função num ponto obtém-se através do cálculo do seu declive, por um processo de aproximações sucessivas de rectas secantes que passem por esse ponto. Se na figura 24, $(c, f(c))$ é o ponto de tangência e $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ é outro ponto do gráfico de f, o declive da recta secante que passa por esses dois pontos é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{c + \Delta x - c} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

A fracção anterior designa-se por **razão incremental**. O denominador Δx diz-se o **incremento de** x, a variável independente, e o numerador $f(c+\Delta x) - f(c) = \Delta y = \Delta f$ o **incremento de** y, a variável dependente..

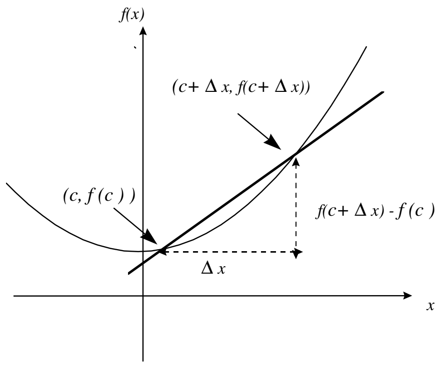


Figura 24: A recta que passa pelos pontos $(c, f(c))$ e $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$.

Quando $\Delta x \to 0$ a recta secante aproxima-se da tangente, como podemos ver na figura 25:

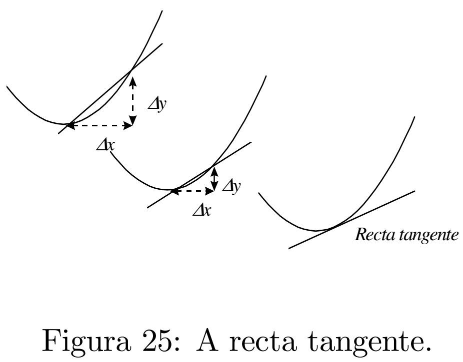


Figura 25: A recta tangente.

Definição 3 *Se f está definida num intervalo que contém c e existe o limite*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m = f'(c)$$

então a recta que passa por $(c, f(c))$ com declive m diz-se a ***recta tangente*** *ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$.*

A equação da recta tangente ao gráfico de uma função num ponto $(c, f(c))$ é portanto

$$y - f(c) = f'(c)(x - c),$$

e a equação da recta normal[2] é

$$y - f(c) = -\frac{1}{f'(c)}(x - c), \text{ se } f'(c) \neq 0,$$

ou

$$x = c, \text{ se } f'(c) = 0.$$

Exemplo 13 Determine o declive das rectas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ nos pontos $(0, 1)$ e $(-1, 2)$.

Vamos considerar um ponto genérico $(x, f(x))$ do gráfico de f.

O declive da recta tangente neste ponto vem dado por

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x
\end{aligned}$$

Portanto, o declive da recta tangente ao gráfico de f, em qualquer ponto $(x, f(x))$, é dado por $m = 2x$ (Note-se que x se mantém constante, no cálculo do limite). Assim, no ponto $(0, 1)$ o declive é $m = 2(0) = 0$ e no ponto $(-1, 2)$ é $m = 2(-1) = -2$. ∎

3.1.2 Aplicações à física

Velocidade Considere-se um ponto P, móvel sobre um eixo, sendo a sua posição em cada instante t determinada pela sua abcissa $x = s(t)$. A função $s(t)$ representa pois, o espaço percorrido pelo ponto até ao instante t.

[2]No plano, duas rectas são perpendiculares se o declive de uma é igual ao simétrico do inverso do declive da outra, isto é, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Sendo t_0 e t dois instantes distintos (com $t_0 < t$), uma medida da "rapidez" do movimento de P no intervalo de tempo $[t_0, t]$ será dada pelo quociente

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{espaço percorrido}}{\text{tempo gasto}},$$

que é designada por **velocidade média.**

A velocidade instantânea de P no instante t_0 será

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0).$$

A velocidade instantânea de P no instante t_0 é portanto a derivada da função $s(t)$ calculada em t_0.

Aceleração De modo análogo se pode definir aceleração média no intervalo de tempo $[t_0, t]$

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}.$$

A aceleração instantânea de P no instante t_0 será

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0).$$

A aceleração instantânea de P no instante t_0 é a derivada da função velocidade, $v(t)$ calculada em t_0.

Observação 3 Em geral, a razão incremental

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

pode ser interpretada como a taxa de variação média da função f no intervalo $[a, x]$. Quando x tende para a, o limite da razão incremental representa a taxa de variação instantânea da função no ponto a.

Exemplo 14 $f(x) = x^3$.

A derivada da função f no ponto 0 é

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = 0.$$

Geometricamente, $f'(0)$ representa o declive da recta tangente o gráfico de f no ponto $(0, f(0))$ como a figura 26 ilustra.

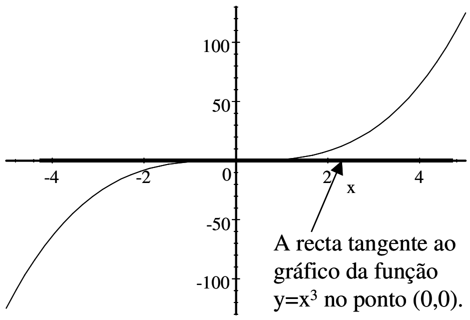


Figura 26: O gráfico da função $y = x^3$ e a recta tangente no ponto $(0,0)$.

Exemplo 15 $g(x) = \sqrt[3]{x}$.
A derivada da função g no ponto 0 é

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty.$$

Neste caso, $g'(0) = +\infty$ significa que a recta tangente ao gráfico de g no ponto $(0, g(0))$ é uma recta vertical.

3.1.3 Derivadas laterais

Tendo em atenção que a derivada de uma função é definida à custa de um limite e que esse limite existe se e só se existirem e forem iguais os limites laterais, tem-se que

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \end{aligned}$$

Os limites à esquerda e à direita da razão incremental são o que se define como derivadas laterais da função f, e representam-se por

$$f'_e(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Em termos geométricos as derivadas laterais correspondem aos declives das semitangentes à direita e à esquerda ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x = a$.

Exemplo 16 A função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ não tem derivada na origem pois

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = +\infty$$

e

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = -\infty.$$

A figura 27 mostra que as semitangentes ao gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ no ponto zero, à esquerda e à direita, são a parte positiva do eixo dos yy.

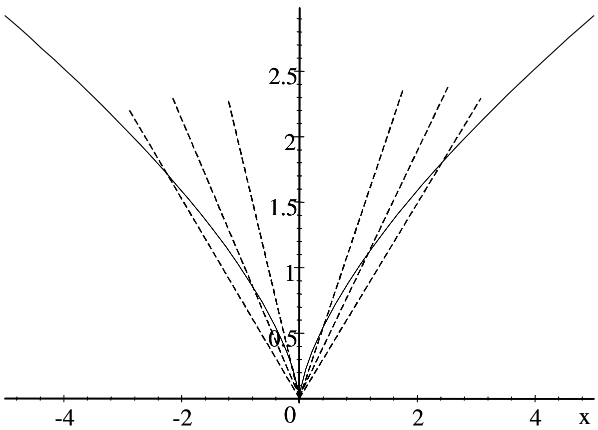


Figura 27: As semitangentes ao gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ no ponto zero, à esquerda e à direita, são a parte positiva do eixo dos yy.

Observação 4 Só existe derivada de uma função num ponto quando as semitangentes estão no prolongamento uma da outra.

A definição de função derivável num intervalo $I = [a, b]$ baseia-se no conceito de derivada lateral.

Definição 4 *Uma função diz-se derivável em* $I = [a, b]$ *se e só se for derivável em todos os pontos do intervalo* $]a, b[$ *e existirem* $f'_d(a)$ *e* $f'_e(b)$.

3.1.4 Diferenciabilidade e continuidade

Existe uma relação estreita entre os conceitos de continuidade e de diferenciabilidade de uma função, que vamos agora passar a analisar com o auxílio de alguns exemplos.

Exemplo 17 A função $f(x) = |x-2|$ é contínua em $x = 2$, como se pode observar na figura 28

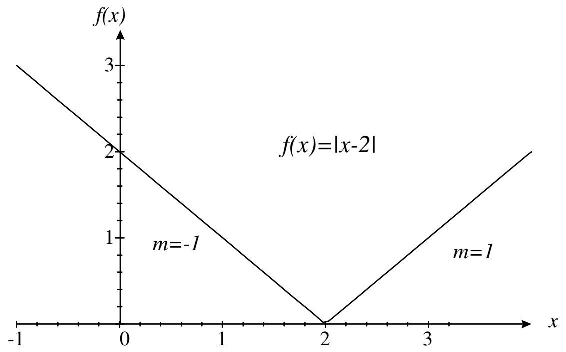


Figura 28: Uma função contínua mas não diferenciável.

Contudo as duas derivadas laterais nesse ponto fornecem os seguintes resultados

$$f'_e(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2-x}{x-2} = -1$$

e

$$f'_d(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

Não sendo os dois limites laterais iguais, podemos concluir que f não é derivável em $x = 2$, e o gráfico de f não tem recta tangente no ponto $(2,0)$. ■

Exemplo 18 A função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua em $x = 0$, mas como o limite é infinito

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

f não é diferenciável em $x = 0$. ■

Embora sendo contínua num ponto, a função do exemplo (17) não admite derivada nesse ponto. Por outro lado a continuidade em $x = 0$ da função do exemplo (18) não impede a existência de derivada nesse ponto, que sendo infinita exclui contudo, a possibilidade de a função ser diferenciável em $x = 0$. A concluir vejamos um caso em que, embora sendo descontínua num ponto, uma função pode ser derivável nesse ponto:

Exemplo 19 Seja f uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases} .$$

$f(x)$ é descontínua em $x = 0$, pois

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0) = 0$$

No entanto

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ f'_e(0) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

logo existe derivada em $x = 0$, pois

$$f'_d(0) = f'_e(0) = +\infty.$$

A função é derivável mas não é diferenciável em $x = 0$. ■

Como acabámos de ver a continuidade de uma função num ponto não implica a sua diferenciabilidade nesse ponto; no entanto o recíproco é verdadeiro.

Teorema 11 *Se f é diferenciável em $x = c$, então f é contínua em $x = c$.*

Dem. Para mostrar que f é contínua em $x = c$, vamos verificar que $f(x)$ tende para $f(c)$ quando $x \to c$. Sabendo que f é diferenciável em $x = c$ temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] &= \lim_{x \to c} \left[(x - c) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right] \\ &= \left[\lim_{x \to c} (x - c) \right] \left[\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right] \\ &= (0) [f'(c)] = 0 \end{aligned}$$

Como a diferença $[f(x) - f(c)]$ tende para zero, quando $x \to c$, concluímos que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, logo f é contínua em $x = c$. ■

Observação 5 Sabendo que uma implicação e a sua contra recíproca têm o mesmo valor lógico podemos garantir que se uma função não é contínua num ponto então também não é diferenciável nesse ponto.

3.2 Regras de derivação

Vamos iniciar esta subsecção relembrando algumas das regras de derivação mais usuais.

Considerando: $u = f(x)$, $v = g(x)$, funções diferenciáveis e k e a constantes reais, tem-se

$k' = 0$
$x' = 1$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$
$(\tan x)' = \sec^2 x$
$(\cot x)' = -\text{cosec}^2 x$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$
$(\text{cosec } x)' = -\text{cosec } x \cot x$

Teorema 12 *Se f e g são funções diferenciáveis no ponto a então as funções $f+g, f-g$ e fg também são diferenciáveis em a e*

$$\begin{aligned} (f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a), \\ (f-g)'(a) &= f'(a) - g'(a) \\ &\quad e \\ (fg)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \end{aligned}$$

Se $g(a) \neq 0$ tem-se que f/g é diferenciável em a e

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Dem. *Iremos apenas demonstrar o primeiro resultado apresentado já que* *os outros são idênticos.*

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= f'(a)+g'(a).
\end{aligned}
$$

■

O teorema da derivação da função composta justifica a tabela de derivadas que apresentamos a seguir.

Teorema 13 (Derivada da F. Composta) *Seja $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em a e $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $g(a)$. Então $f \circ g$ é diferenciável em a e*

$$(fog)'(a) = f'(g(a))\, g'(a).$$

Dem. *Designando $f(g(x))$ por $F(x)$ queremos provar que $F'(a) = f'(g(a))\, g'(a)$.*

Então, recorrendo à definição de derivada,

$$
\begin{aligned}
F'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} =\\
&= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right], \text{ com } g(x)\neq g(a) \quad (1)\\
&= \left[\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\right]\left[\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right] = \quad (2)\\
&= f'(g(a))\, g'(a)
\end{aligned}
$$

Se $g(x)-g(a)=0$ para uma infinidade de valores de x, quando $x \to a$, é necessária uma pequena alteração à demonstração,pois a passagem de (1) para (2) não é válida. (Os alunos podem consultar [1] para a demonstração completa deste teorema.) ■

Exemplo 20 Vamos determinar a derivada da função $(f \circ g)(x) = \sqrt{3x^2 - x + 1}$. Considerando

$$u = g(x) = 3x^2 - x + 1$$

e

$$f(u) = \sqrt{u},$$

podemos escrever

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\underbrace{3x^2 - x + 1}_{u}} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(3x^2 - x + 1\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\frac{df}{du}}\underbrace{(6x-1)}_{\frac{du}{dx}} = \frac{1}{2}\frac{(6x-1)}{\sqrt{3x^2 - x + 1}}.$$

■

$(ku)' = ku'$
$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u', \alpha \in \mathbb{R}$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$(e^u)' = e^u u'$
$(a^u)' = a^u u' \ln a$
$(u^v)' = u^v v' \ln u + vu^{v-1}u'$
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \log a}$
$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan u)' = u' \sec^2 u$
$(\cot u)' = -u' \operatorname{cosec} u' \cot u$

O teorema da derivação da função inversa que iremos apresentar a seguir permite-nos deduzir as expressões das funções derivadas das funções trigonométricas inversas.

Teorema 14 (Derivação da função inversa) *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua em I. Se f é diferenciável em $a \in I$ e $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $f(a)$ e*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Em linguagem corrente e de uma forma simplificada podemos afirmar que a derivada da função inversa é igual ao inverso aritmético da derivada da função!

Exemplo 21 Seja f a função definida por

$$f(x) = \arcsin x,\ x \in]-1, 1[.$$

A função inversa de f, f^{-1}, é a função

$$x = \sin y,\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Como

$$(\sin y)' = \cos y,\ \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Podemos deduzir de uma forma idêntica as expressões que se apresentam na tabela seguinte.

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

3.3 Diferencial

Seja $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em qualquer ponto $x \in]a, b[$ e $\Delta x \in \mathbb{R}$ tal que $x + \Delta x \in]a, b[$.

Chama-se **acréscimo** ou **incremento da função** f, correspondente ao acréscimo Δx da variável independente, à diferença

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Como f é diferenciável em x sabemos que existe e é finita a derivada nesse ponto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \end{aligned}$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= f'(x) + \alpha \text{ com } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0 \Rightarrow \\ \Delta f &= f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x \text{ com } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0 \end{aligned}$$

Vejamos em termos geométricos (figura 29) o que isto significa.

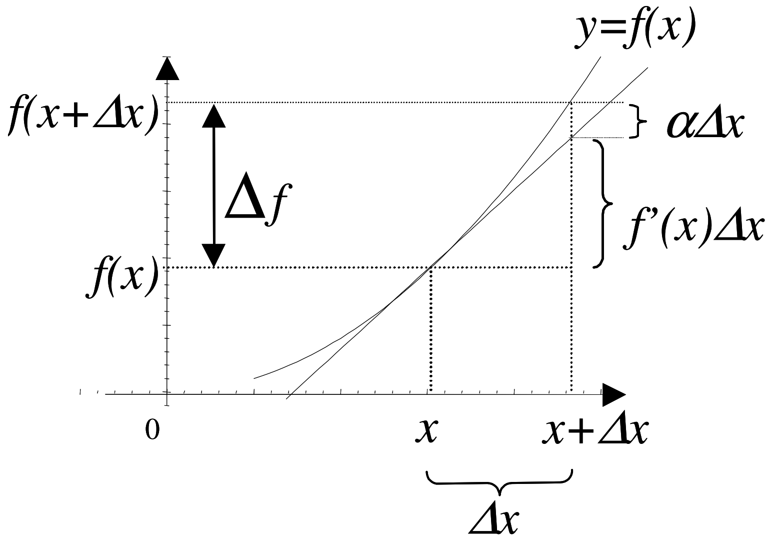


Figura 29: Interpretação geométrica do conceito de diferencial.

Repare-se que $\alpha\Delta x$ é "desprezável" para valores "pequenos" de Δx, pois

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Intuitivamente podemos afirmar que para valores "pequenos" de Δx o produto

$$f'(x)\Delta x$$

e o acréscimo da função

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

têm valores muito próximos.

Então é razoável escrever

$$\Delta f \approx f'(x)\Delta x,$$

ou seja,

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x,$$

o que significa que o valor da função no ponto $x + \Delta x$ é aproximadamente igual ao valor da ordenada do ponto da recta tangente ao gráfico de f em $(x, f(x))$, e que tem abcissa $x + \Delta x$.

Tem-se então a seguinte definição.

Definição 5 *Supondo f diferenciável em x, chama-se* ***diferencial*** *de f em x relativamente ao acréscimo Δx, ao produto $f'(x)\Delta x$,*

$$d_x f(\Delta x) = f'(x)\Delta x,$$

ou, mais simplesmente, e sempre que não der origem a confusões,

$$df = f'(x)\Delta x.$$

Exemplo 22 Calcular um valor aproximado de $\sin 46°$.

Tendo em atenção que

$$\sin 46° = \sin(45° + 1°) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right),$$

poderemos considerar que se pretende calcular um valor aproximado da função

$$f(x) = \sin x$$

"perto" do ponto $\pi/4$. Fazendo

$$\Delta x = \frac{\pi}{180}$$

e

$$f'(x) = \cos x$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) &\approx \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \frac{\pi}{180} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{180} \approx 0.7194. \end{aligned}$$

Exemplo 23 (Estimação do erro) A medida do raio de uma esfera é 0,7 centímetros. Se esta medida tiver uma margem de erro de 0,01 centímetros, estime o erro propagado ao volume V da esfera.

A fórmula do volume é $\boxed{V = \frac{4}{3}.\pi.r^3}$, sendo r o raio da esfera.

Assim, $r = 0,7$ e

$-0,01 \leq \Delta r \leq 0,01$

Para aproximar o erro propagado ao volume, derivamos V, obtendo

$$\frac{dV}{dr} = 4.\pi.r^2$$

e escrevemos

$$\Delta v \approx dV = 4\pi r^2 dr = 4\pi\,(0,7)^2\,(\pm 0,01) \simeq \pm 0,06158 \text{ cm}^3$$

Poderá perguntar-se agora se o erro propagado é grande ou pequeno. A resposta deverá ser dada em termos relativos, isto é, por comparação de dV com V. Ao quociente

$$\frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3dr}{r} \simeq \frac{3}{0,7}\,(\pm 0,01) \simeq \pm 0,0429$$

chama-se erro relativo.

A percentagem de erro correspondente é

$$\frac{dV}{V}\,(100) \simeq 4,29\ \%. \qquad \blacksquare$$

3.4 Teoremas fundamentais

O primeiro resultado que iremos apresentar é uma condição necessária para uma função diferenciável num ponto atingir um extremo nesse ponto.

Teorema 15 *Seja $f : I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $]a,b[$ e $c \in]a,b[$. Se $f(c)$ é extremo relativo de f então*

$$f'(c) = 0.$$

Dem. *Faremos a demonstração apenas para o caso de $f(c)$ ser máximo relativo.*

Neste caso existe uma vizinhança ε de c, $V_\varepsilon(c) =]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ tal que

$$f(x) \leq f(c), \forall x \in V_\varepsilon(c).$$

Então

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0, \ \ se \ x \in]c, c+\varepsilon[$$

e

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0, \ \ se \ x \in]c-\varepsilon, c[.$$

Passando ao limite ambos os membros das desigualdades anteriores, quando x tende para zero, obtemos

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_d(c) \leq 0, \ \ se \ x \in]c, c+\varepsilon[$$

e

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_e(c) \geq 0, \ \ se \ x \in]c-\varepsilon, c[,$$

o que permite concluir que

$$f'(c) = 0.$$

■

De notar que este teorema só se aplica a pontos interiores do intervalo $[a, b]$. Por exemplo, a função $f(x) = x$ definida no intervalo $[0, 1]$ tem máximo e mínimo nesse intervalo (teorema de Weierstrass) e no entanto $f'(x) = 1$ em qualquer ponto desse intervalo!

O recíproco deste teorema não é verdadeiro! A derivada de uma função pode ser nula num ponto e no entanto a função pode não atingir um extremo nesse ponto. É o que acontece com a função $f(x) = x^3$ na origem (ver figura 26).

Teorema 16 (de Rolle) *Seja $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

A figura 30 ilustra geometricamente o Teorema de Rolle. Nas condições enunciadas, existe um ponto c pertencente ao intervalo $[a, b]$ tal que a recta tangente ao gráfico da função f no ponto $(c, f(c))$ é uma recta horizontal (isto é, com declive zero, o que é equivalente a ter-se $f'(c) = 0$).

Dem. Pelo teorema de Weierstrass podemos garantir que a função atinge um máximo, M, e um mínimo, m, no intervalo $[a, b]$. Se $m = M$ a função é constante e portanto,

$$f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[.$$

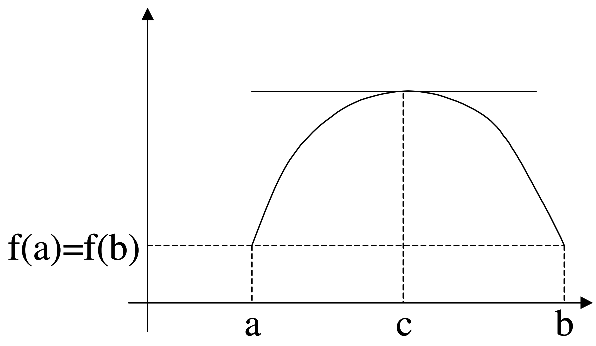


Figura 30: O teorema de Rolle.

Se $M \neq m$, como $f(a) = f(b)$, pelo menos o máximo ou o mínimo só pode ser atingido num ponto c do interior do intervalo $[a, b]$. Sendo f diferenciável em $]a, b[$ tem-se que nesse ponto c,

$$f'(c) = 0.$$

■

Corolário 17 *Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo há pelo menos um zero da sua derivada.*

As figuras 31 e 32 ilustram este corolário do teorema de Rolle.

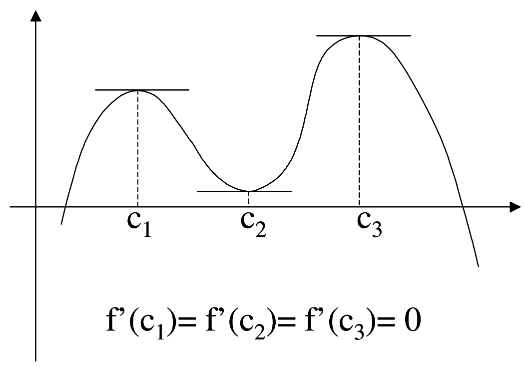


Figura 31: Entre dois zeros consecutivos desta função existem três zeros da derivada.

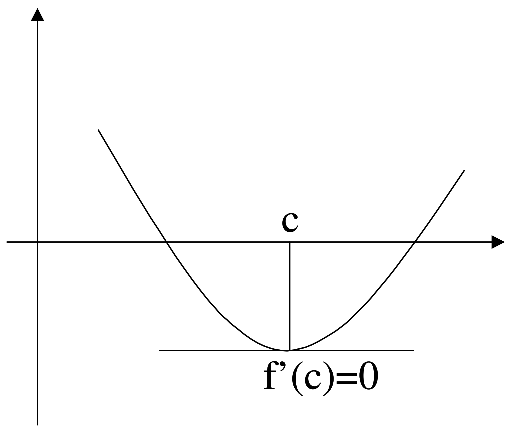


Figura 32: Entre dois zeros consecutivos desta função existe um único zero da derivada.

Corolário 18 *Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função não pode haver mais do que um zero da função.*

Teorema 19 (de Lagrange) *Se $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em I e diferenciável em $]a, b[$ então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dem. *Em termos geométricos podemos observar que no gráfico de uma função nas condições do teorema de Lagrange, entre dois pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ há sempre um ponto $(c, f(c))$ onde a tangente é paralela à corda que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.*

A demonstração do resultado pode ser feita recorrendo à função auxiliar

$$\Phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Esta função verifica as condições do teorema de Rolle no intervalo I pois, para além de ser contínua em I e diferenciável em $]a, b[$, tem-se

$$\Phi(a) = \Phi(b) = f(a).$$

Podemos então garantir a existência de um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$\Phi'(c) = 0.$$

Como

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},\\ \Phi'(c) &= f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.\end{aligned}$$

Então,

$$\Phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

o que permite concluir que existe um ponto $c \in]a,b[$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

■

Vejamos agora uma outra interpretação (mecânica) do teorema de Lagrange.

Seja $s = s(t)$ a lei do movimento de um ponto móvel, isto é, a função que dá para cada valor de t o espaço percorrido.

A velocidade média entre os instantes t e t_0 será (com $t > t_0$)

$$\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

Se o teorema de Lagrange for aplicável existirá um instante $t_1 \in]t, t_0[$ no qual a velocidade instantânea é igual à velocidade média no intervalo considerado.

$$s'(t_1) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

Iremos apresentar de seguida algumas consequências do teorema de Lagrange.

Corolário 20 *Nas condições do teorema de Lagrange, se* $f'(x) = 0, \forall x \in]a,b[$ *então a função* f *é uma função constante no intervalo* $I = [a,b]$.

Dem. *Sejam* x_1 *e* x_2 *dois quaisquer pontos distintos pertencentes a* I.

Aplicando o teorema de Lagrange à função f *no intervalo* $[x_1, x_2]$ *podemos garantir a existência de um ponto* $c \in]x_1, x_2[$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Como $f'(c) = 0$ *concluímos que*

$$f(x_2) = f(x_1),$$

o que demonstra que a função é constante no intervalo I. ■

Corolário 21 *Nas condições do teorema de Lagrange, se* $f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[$ *então a função* f *é uma função estritamente crescente no intervalo* $I = [a, b]$.

Dem. *Pretendemos demonstrar que*

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Sejam x_1 *e* x_2 *dois pontos quaisquer pertencentes a* I *e tais que* $x_1 < x_2$.

Aplicando o teorema de Lagrange à função f *no intervalo* $[x_1, x_2]$ *podemos garantir a existência de um ponto* $c \in]x_1, x_2[$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como, por hipótese,

$$x_2 - x_1 > 0$$

e

$$f'(c) > 0,$$

concluímos que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

■

Corolário 22 *Nas condições do teorema de Lagrange,*

$$\begin{aligned} f \text{ crescente em } I &= [a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in I, \\ f \text{ decrescente em } I &= [a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in I. \end{aligned}$$

Teorema 23 (de Cauchy) *Se* $f, g : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções contínuas em* I *e diferenciáveis em* $]a, b[$ *e se para todo o* $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$, *então existe pelo menos um ponto* $c \in]a, b[$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dem. *A demonstração do resultado pode ser feita recorrendo à função auxiliar*

$$H(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] [g(x) - g(a)].$$

Esta função verifica as condições do teorema de Rolle no intervalo I *pois, para além de ser contínua em* I *e diferenciável em* $]a, b[$, *tem-se*

$$H(a) = H(b) = 0.$$

Podemos então garantir a existência de um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$H'(c) = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} H'(x) &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x), \\ H'(c) &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c). \end{aligned}$$

Então,

$$H'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

o que permite concluir que existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

■

Uma aplicação importante deste teorema é relativa ao levantamento de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ como veremos a seguir.

Corolário 24 (Regra de Cauchy) *Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $]a, b[$ (a, b finitos ou não) e verificando as seguintes condições:*

1. $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$.
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ *ou* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.

Nestas condições, se existir

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então também existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e estes dois limites são iguais.

Exemplo 24 Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{2x+1}.$$

Calculando directamente, obtemos uma indeterminação do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
Aplicando a regra de Cauchy podemos escrever:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0 \qquad \blacksquare$$

Exemplo 25 Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^3}.$$

Tal como no exemplo anterior, vamos obter uma indeterminação. Esta é do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Aplicando a regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x.\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin(2x)}{3x^2}$$

Como a indeterminação permanece $\left(\frac{0}{0}\right)$, vamos aplicar novamente a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin(2x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2-2(\cos(2x))}{6x}=$$

e ainda outra vez,

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\sin(2x)}{6}=0 \qquad \blacksquare$$

3.5 Derivadas de ordem superior à primeira

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se a função derivada, f', for por sua vez diferenciável no ponto a, f diz-se duas vezes diferenciável em a e chama-se **segunda derivada de f no ponto** a à derivada

$$(f')'(a).$$

A segunda derivada de uma função representa-se por

$$f''(a), \frac{d^2f}{dx^2} \text{ ou } D^2f(a).$$

A derivada de ordem n da função f define-se por indução,

$$\begin{aligned} f^{(0)}(a) &= f(a), \\ f^{(n+1)}(a) &= \left(f^{(n)}\right)'(a). \end{aligned}$$

A função f diz-se n vezes diferenciável no ponto a se e só se existir e for finita a derivada $f^{(n)}(a)$.

Exemplo 26 Algumas das sucessivas derivadas da função $f(x) = \sin x$ são

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\
f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \\
f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \\
f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Facilmente se demontra por indução que

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

De facto,

$$f^{(0)}(x) = \sin\left(x + 0\frac{\pi}{2}\right) = \sin x.$$

Admitindo, por hipótese, que

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

a derivada de ordem $n + 1$

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \\
&= \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)' = \\
&= \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

■

3.6 Fórmula de Taylor

Dada uma função $y = f(x)$, pretende-se agora aproximá-la por uma outra que seja "mais manejável" (em termos de derivação, cálculo de valores, etc). Nesta perspectiva, é claro que as funções polinomiais são funções muito simples: as suas derivadas são ainda funções polinomiais e para calcular o valor de um polinómio basta apenas utilizar as operações adição e multiplicação!

Suponhamos então que as derivadas da função $y = f(x)$ existem e são finitas no ponto a pertencente ao domínio até à ordem $n + 1$.

O que pretendemos fazer é determinar um polinómio

$$y = P_n(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + \cdots + C_n(x - a)^n$$

de grau não superior a n tal que

$$\begin{array}{rcl}
P_n(a) & = & f(a) \\
P_n'(a) & = & f'(a) \\
P_n''(a) & = & f''(a) \\
 & & \cdots \\
P_n^{(n)}(a) & = & f^{(n)}(a)
\end{array}$$

É de esperar que este polinómio seja num certo sentido uma boa aproximação da função f numa vizinhança do ponto a.

Tem-se então

$$P_n(a) = C_0 = f(a).$$

Calculando as sucessivas derivadas do polinómio $P_n(x)$ até à ordem n,

$$\begin{array}{rcl}
P_n^{'}(x) & = & C_1 + 2C_2(x-a) + \cdots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\
P_n^{''}(x) & = & 2C_2 + 3 \times 2C_3(x-a) + \cdots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\
 & & \vdots \\
P_n^{(n)}(x) & = & n(n-1)\ldots 3 \times 2C_n,
\end{array}$$

concluimos que

$$\begin{array}{rcl}
P_n^{'}(a) & = & C_1 = f(a), \\
P_n^{''}(a) & = & 2C_2 = f'(a) \Rightarrow C_2 = \dfrac{f'(a)}{2}, \\
 & & \vdots \\
P_n^{'}(a) & = & n(n-1)\ldots 3 \times 2C_n = f^{(n)}(a) \Rightarrow C_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}.
\end{array}$$

O polinómio que obtemos é portanto

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Este é o chamado **polinómio de Taylor de ordem** n da função f.

No caso de $a = 0$ o polinómio chama-se **polinómio de Mac-Laurin de ordem** n.

Designando por $R_n(x)$ a diferença entre a função $f(x)$ e o seu polinómio de Taylor de ordem n

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

vem que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Para todos os valores de x, tais que $R_n(x)$ seja "pequeno", o polinómio $P_n(x)$ será uma "boa aproximação" da função $f(x)$.

O grau de precisão dessa aproximação, isto é, o erro cometido quando se aproxima a função $f(x)$ pelo seu polinómio de Taylor, é precisamente dado por $R_n(x)$.

De entre as várias expressões que se podem deduzir para calcular $R_n(x)$ apresentamos uma devida a Lagrange,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \xi \in \left]a, x\right[,$$

com

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Formalmente têm-se os seguintes resultados.

Teorema 25 *Seja f uma função definida num intervalo aberto I, contínua e n vezes diferenciável no ponto $a \in I$; então, para qualquer x pertencente ao intervalo I, é válida a fórmula (de Taylor):*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

onde $R_n(x)$ é uma função que verifica a condição:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Definição 6 *Chama-se **Resto de Ordem** n da fórmula de Taylor à função $R_n(x)$.*

Definição 7 *Chama-se erro (ε) associado à aproximação de $f(x)$ por $P_n(x)$, ao valor absoluto de $R_n(x)$:*

$$\varepsilon = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

Exemplo 27 No exemplo 26 demonstrou-se que a derivada de ordem n da função seno é

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

pelo que

$$\begin{array}{rcl} f^{(2n+1)}(0) & = & (-1)^n \\ & & \text{e} \\ f^{(2n)}(0) & = & 0. \end{array}$$

O polinómio de Mac-Laurin da fiunção $f(x) = \sin x$ é portanto,

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exemplo 28 O polinómio de Mac-Laurin da fiunção $f(x) = e^x$ é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

pois as sucessivas derivadas da função exponencial na origem assumem o valor 1.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & (e^x)' = e^x \Rightarrow f'(0) = 1, \\ f''(x) & = & (e^x)' = e^x \Rightarrow f''(0) = 1, \\ & & \ldots \\ f^{(n)}(x) & = & (e^x)' = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1. \end{array}$$

Exemplo 29 Para calcular um valor aproximado de $e^{0.1}$ podemos recorrer à teoria que acabou de ser exposta. O polinómio de Mac-Laurin da função $f(x) = e^x$ é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Repare-se que este polinómio pode ser visto como uma “boa aproximação” da função numa vizinhança do ponto 0, pois os valores que o polinómio e as respectivas derivadas assumem no ponto zero são exactamente iguais aos valores que a função e as suas derivadas tomam.

Se atendermos à figura 33, esta ideia torna-se mais clara.

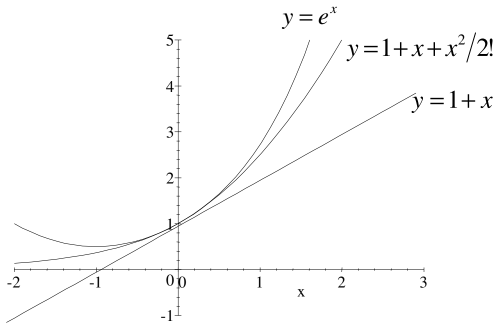


Figura 33: Aproximação linear e quadrática da função $f(x) = e^x$.

Fazendo a aproximação pelo polinómio do 1^o grau (aproximação linear),

$$P_1(x) = 1 + x \tag{3}$$

obtem-se $e^{0.1} \approx 1.1$.

Fazendo a aproximação pelo polinómio do segundo grau (aproximação quadrática),

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \tag{4}$$

obtem-se $e^{0.1} \approx 1.105$.

O grau de precisão da aproximação, isto é, o erro cometido é dado a partir do resto $R_n(x)$, daí a particular importância que este assume. ■

3.7 Monotonia, extremos de funções, concavidades e pontos de inflexão

3.7.1 Monotonia e extremos

Já vimos anteriormente que uma condição necessária (mas não suficiente) para que uma função f, diferenciável no ponto a, atinja um extremo nesse ponto, é a sua derivada anular-se em a.

Chamam-se **pontos de estacionaridade** de uma função f, aos pontos que anulam a sua derivada, isto é, às soluções da equação

$$f'(x) = 0.$$

Para esclarecer se um ponto de estacionaridade é ou não um ponto de máximo ou de mínimo, podemos recorrer ao estudo do sinal da primeira derivada da função numa vizinhança desse ponto.

Assim, se a é tal que $f'(a) = 0$,

- se $f'(x) > 0, \forall x \in]\alpha, a[$, com $\alpha < a$ (o que significa que a função f é crescente no intervalo) e se $f'(x) < 0, \forall x \in]a, \beta[$, com $a < \beta$ (o que significa que a função f é decrescente no intervalo), então $f(a)$ é um máximo relativo;

- se $f'(x) < 0, \forall x \in]\alpha, a[$, com $\alpha < a$ (o que significa que a função f é decrescente no intervalo) e se $f'(x) > 0, \forall x \in]a, \beta[$, com $a < \beta$ (o que significa que a função f é crescente no intervalo), então $f(a)$ é um mínimo relativo.

Repare-se que estas condições para a existência de extremo são válidas mesmo que a função f não admita derivada no ponto $x = a$.

O estudo dos máximos e mínimos de uma função pode ainda fazer-se recorrendo à segunda derivada de acordo com o teorema seguinte.

Teorema 26 *Seja f uma função que admite 2^a derivada contínua numa vizinhança de um ponto de estacionaridade a. Se $f''(a) < 0$ então $f(a)$ é um máximo; se $f''(a) > 0$ então $f(a)$ é um mínimo.*

Iremos apresentar um esboço da demonstração do primeiro resultado.

Como a 2^a derivada é contínua numa vizinhança de a e $f''(a) < 0$, temos a garantia que $f''(x) < 0$ nalguma vizinhança V do ponto a. Tem-se portanto que

$$(f'(x))' < 0, \forall x \in V(a).$$

Isto significa que a função $f'(x)$ é decrescente em $V(a)$ (a sua derivada é negativa); mas como $f'(a) = 0$ ter-se-á para os pontos $x \in V(a)$,

$$\begin{array}{rcl} \text{se } x & < & a \Rightarrow f'(x) > 0 \\ & \text{e} & \\ \text{se } x & > & a \Rightarrow f'(x) < 0, \end{array}$$

o que implica que $f(a)$ seja um máximo.

Este teorema pode ser generalizado da seguinte forma.

Teorema 27 *Seja f uma função n vezes diferenciável no ponto a, com $n \geq 2$, e suponha-se que, sendo nulas em a todas as derivadas de f de ordem igual ou superior à primeira e inferior a n, se tem $f^{(n)}(a) \neq 0$, isto é,*

$$\begin{array}{rcl} f'(a) & = & f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0 \\ f^{(n)}(a) & \neq & 0 \end{array}$$

1. *Se n é ímpar, $f(a)$ não é extremo de f.*

2. *Se n é par, $f(a)$ é um* $\begin{cases} \textit{máximo relativo se } f^{(n)}(a) < 0, \textit{ e} \\ \textit{mínimo relativo se } f^{(n)}(a) > 0. \end{cases}$

3.7.2 Concavidades e pontos de inflexão

Definição 8 *Diz-se que uma função f, diferenciável no intervalo $I =]a, b[$, tem a* ***concavidade voltada para cima em*** *I, se e só se o gráfico de f está acima da recta tangente em todos os pontos de I.*

De forma análoga se define concavidade voltada para baixo.

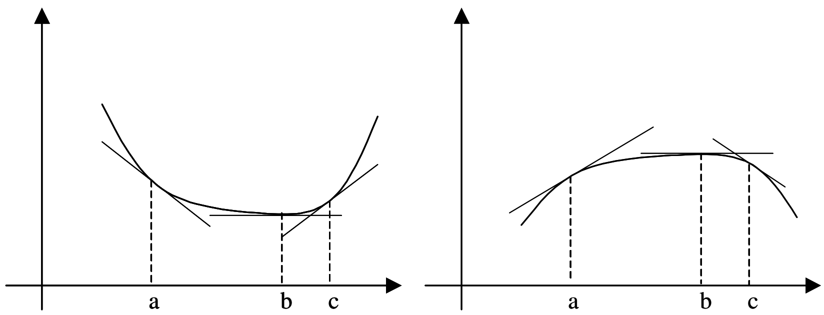


Figura 34: Concavidade voltada para cima e concavidade voltada para baixo.

Intuitivamente aceita-se que se $f'(x)$ é uma função crescente em I, a concavidade está voltada para cima, e se $f'(x)$ é uma função decrescente em I, a concavidade está voltada para baixo.Repare-se na figura 34: quando a concavidade está voltada para cima $f'(a) < f'(b) < f'(c)$; quando a concavidade está voltada para baixo $f'(a) > f'(b) > f'(c)$.

Tem-se então a seguinte condição suficiente para determinar os pontos de inflexão de uma função..

Teorema 28 *Seja f uma função n vezes diferenciável no ponto a, com $n \geq 2$, e suponha-se que, sendo nulas em a todas as derivadas de f de ordem superior à primeira e inferior a n, se tem $f^{(n)}(a) \neq 0$, isto é,*

$$\begin{aligned} f''(a) &= f'''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0 \\ f^{(n)}(a) &\neq 0 \end{aligned}$$

1. *Se n é ímpar, a é um ponto de inflexão de f.*

2. *Se n é par, f tem a* $\begin{cases} \textit{concavidade voltada para cima, se } f^{(n)}(a) > 0, \textit{ e} \\ \textit{concavidade voltada para baixo, se } f^{(n)}(a) < 0. \end{cases}$

Observação 6 Resulta deste teorema, que se f admite 2^a derivada no intervalo aberto I, então:

- se $f''(a) > 0, \forall x \in I \Rightarrow f$ tem concavidade voltada para cima

- se $f''(a) < 0, \forall x \in I \Rightarrow f$ tem concavidade voltada para baixo.

Exemplo 30 Considere-se a função $f(x) = x^4$. Tem-se

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 4x^3 & \Rightarrow & f'(0) = 0 \\ f''(x) = 12x^2 & \Rightarrow & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = 24x & \Rightarrow & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = 24 & \Rightarrow & f^{(4)}(0) > 0 \end{array}$$

Pela aplicação imediata dos teoremas 27 e 28 pode concluir-se que $f(0)$ é um mínimo relativo e que a função tem concavidade voltada para cima. ■

Definição 9 *Um ponto onde ocorra uma mudança de concavidade do gráfico de uma função diz-se um* ***ponto de inflexão.***

3.8 Assimptotas

Definição 10 *Considere-se uma função* $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. *Uma recta vertical* $x = a$ *é uma assimptota vertical de* f *se*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \text{ ou } \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty.$$

Definição 11 *Considere-se uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Uma recta horizontal* $y = b$ *é uma assimptota horizontal de* f *se*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Exemplo 31 Dada a função $f(x) = \frac{2x-6}{x+3}$, vamos estudar alguns aspectos do seu comportamento, com a finalidade de detectar a existência ou não de assimptotas.

O domínio da função é o conjunto $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Calculando os limites,

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{2x-6}{x+3} = +\infty$$

e,

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{2x-6}{x+3} = -\infty,$$

conclui-se que a recta $x = -3$ é uma assimptota vertical de f.

Calculando os limites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-6}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{6}{x}}{1+\frac{3}{x}} = 2$$

e,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-6}{x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{6}{x}}{1+\frac{3}{x}} = 2,$$

conclui-se que a recta $y = 2$ é assimptota horizontal de f.

Graficamente tem-se

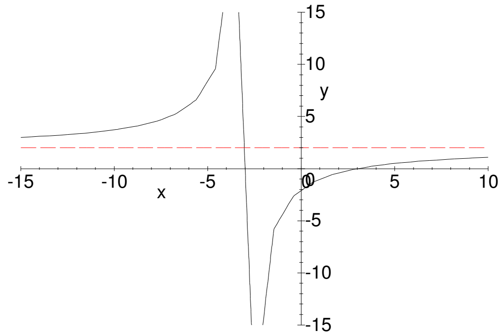


Figura 35: Assimptotas horizontal e vertical..

■

Uma recta de equação $y = mx + b$ é também uma assimptota de uma função f se

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx+b)] = 0.$$

Analisando o que sucede quando $x \to +\infty$ (aplicando-se o mesmo ao comportamento de f quando $x \to -\infty$) é claro que se

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx+b)] = 0$$

então

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x}\right) &= 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0 \Leftrightarrow \\ (\text{pois } \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{x} &= 0) \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= m \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se também que,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right] &= 0 \Leftrightarrow \\
\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx-b\right] &= 0 \Leftrightarrow \\
\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right] &= b.
\end{aligned}$$

Daqui advém a seguinte definição,

Definição 12 *Considere-se uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Se os limites*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} &= m \\
\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right] &= b
\end{aligned}$$

existirem e forem finitos, então os seus valores são respectivamente o declive m e a ordenada na origem b da assimptota oblíqua ($y=mx+b$) de f.

Observação 7 Repare-se que as assímptotas horizontais podem ser obtidas a partir da definição anterior.

Exemplo 32 Dada a função $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+1}$, definida no intervalo $]-1,+\infty[$, vamos averiguar a existência de assimptotas.

Vamos primeiro analisar a existência de uma assimptota vertical em $x=-1$ (apenas por valores à direita, dada a definição da função):

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-2x+1}{x+1}=\frac{1+2+1}{0^+}=+\infty.$$

Conclui-se que existe uma assimptota vertical de equação $x=-1$.

Quanto às assimptotas não verticais:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=+\infty,$$

logo não existem assimptotas horizontais;

Calculando os limites

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{(x+1)\,x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2+x} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1 \ (m=1) \\
& \text{e} \\
\lim_{x\to+\infty} [f(x)-mx] &= \lim_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x+1} - x\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-2x+1-x^2-x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-3x+1}{x+1}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = -3 \ (b=-3),
\end{aligned}$$

conclui-se que existe uma assimptota oblíqua de equação $y = x - 3$.

Graficamente tem-se

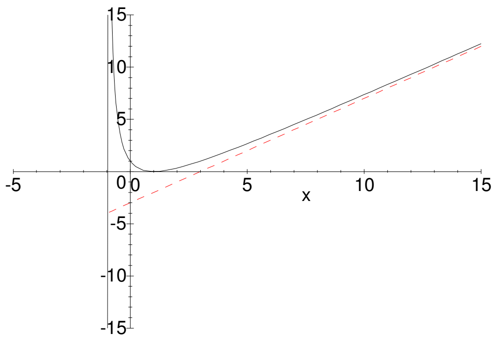


Figura 36: Assimptota oblíqua.

■

3.9 Estudo de uma função e esboço do gráfico

O estudo de uma função compreende habitualmente os seguintes estudos parciais:

1. Domínio

2. Pontos de descontinuidade e assímptotas verticais

3. Intersecção com os eixos e simetrias
4. Intervalos de monotonia e extremos
5. Concavidades e pontos de inflexão
6. Assimptotas não verticais.

Com base neles é possível esboçar o gráfico da função.

Exemplo 33 Vamos estudar e esboçar o gráfico da função $f(x) = \frac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2}$

1. Domínio: $D_f = \mathbb{R} \diagdown \{-1\}$.
2. Pontos de descontinuidade e assimptotas verticais:

   como
   $$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$
   conclui-se que a recta $x = -1$ é uma assimptota vertical.
3. Intervalos de monotonia e extremos:

   calculando a primeira derivada da função f,
   $$f'(x) = \frac{6x-4}{(x+1)^3}$$
   podemos analisar estas características no quadro seguinte,

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$6x-4$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x+1)^3$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
f'		$+$	nd	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	nd	$\searrow$	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	

   (por nd entenda-se não definida). Conclui-se que a função tem um mínimo relativo em $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5}$, sendo crescente em $]-\infty, -1[$, decrescente em $\left]-1, \frac{2}{3}\right[$ e crescente em $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.
4. Concavidades e pontos de inflexão:

   calculando a segunda derivda da função f,
   $$f''(x) = \frac{-12x+18}{(x+1)^4},$$

podemos analisar estas características com o auxílio do quadro seguinte:

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-12x+18$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$(x+1)^4$		$+$	0	$+$	$+$	$+$	
f''		$+$	nd	$+$	0	$-$	
f		$\cup$	nd	$\cup$	$\frac{2}{5}$	$\cap$	

.

Conclui-se que a função tem um ponto de inflexão em $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{5}\right)$, tendo a concavidade voltada para cima de $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, \frac{3}{2}\right[$ e voltada para baixo de $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

5. Assimptotas não verticais:

como

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = 2 + \frac{-6x - 1}{(x+1)^2},$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

então existe uma assimptota horizontal de equação $y = 2$.

Reunindo toda a informação anterior podemos esboçar o gráfico da função:

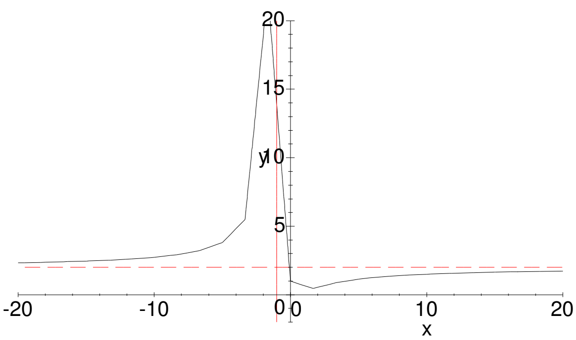


Figura 37: Gráfico da função $f(x) = \frac{2x^2-2x+1}{(x+1)^2}$.

■

Referências

[1] Apostol, Tom M.,(1967) Calculus, Volume I, Second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.