Análise Numérica – Prática Laboratorial Avaliada 1

Respostas devem ser entregues no inquérito Moodle aberto

desde 06–04–2020 até 12–04–2020 23:59h

Procure nas páginas a seguir a sua versão de trabalho prático (2 páginas identificadas com o seu nome e número de aluno). Estude as questões consoante as orientações dadas na Prática Laboratorial de programação e as noções contidas na sebenta teórica, e discutidas nas aulas Teórico-Práticas. Depois de resolvidas as questões, entre no Moodle da disciplina para responder o inquérito/relatório da prática.
É recomendado usar ferramentas computacionais: calculadoras científicas, programas de cálculo numérico ou simbólico, e ferramentas de mudança de base disponíveis na rede ou nos códigos Matlab/Octave da disciplina `naturalalgar.m`, `algarnatural.m`, `algarfrac.m`, `fracalgar.m`
É recomendada a consulta de dúvidas com os docentes e companheiros da disciplina, através dos fóruns abertos no Moodle, ou das atividades síncronas disponíveis no Microsoft Teams
Atenção: Ao executar somas ou produtos de números em base b, se o fizermos em notação decimal o até com variáveis de ponto flutuante em base binária, corremos o risco de introduzir erros de arredondamento decimal ou binário que não existiam nos valores originais. Resulta recomendável representar os números como frações $\frac{m}{b^k}$, com m inteiro. Neste caso as operações são feitas com a aritmética exata de números racionais, e a determinação dos algarismos e expoente resulta mais simples, através das operações de divisão e produto de inteiros.

Exemplo: $x^* = (2.45)_7 \cdot 7^{-3}$ pode ser representado como

$$\frac{2 + 4 \cdot \frac{1}{7} + 5 \cdot \frac{1}{49}}{7^3} = \frac{2 \cdot 49 + 4 \cdot 7 + 5}{7^5} = \frac{131}{7^5}$$

Exemplo: $y^* = (1.3)_7 \cdot 7^{-1}$ pode ser representado como

$$\frac{2 + 3\frac{1}{7}}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3}{7^2} = \frac{17}{7^2}$$

Assim $x^* \times y^* = \frac{131}{7^5} \times \frac{17}{7^2} = \frac{131 \times 17}{7^{2+5}} = \frac{2227}{7^7}$; $x^*/y^* = \frac{131}{7^5} \div \frac{17}{7^2} = \frac{131}{17 \cdot 7^3} = \frac{131}{5831}$

O Inquérito online deve ser respondido depois de estudar todas as questões, podendo-se alterar respostas só até a data limite

Versão: [9 ,5 ,19 , 46621583]

Trabalho Análise Numérica 06–04–2020 . Entregar até 12–04–2020 23:59h

Aluno: **Docente** **Número:** **Docente**

Considere uma máquina onde cada unidade de memória admite 9 estados diferentes. Os diferentes estados são identificados com os algarismos inteiros $0 \leq a \leq 8$. Os números reais são guardados em forma arredondada, em 7 posições de memória que permitem codificar o sinal dum número, expoentes no intervalo $[-19, 19]$ e uma sequência de 5 algarismos significativos.

A aritmética usada na máquina é a aritmética arredondada com números em ponto flutuante em base 9 , com 5 algarismos significativos, no sistema $FP(9, 5, -19, 19)$ alargado com 5 elementos adicionais `NaN`, $\pm\infty$, ± 0 e representação de números e operações aritméticas feitas com **arredondamento por corte**.

Pretendemos usar esta máquina para calcular o número

$$z = 6829/6827 - 6827/6829$$

Chamemos portanto $z = f(x, y)$ sendo:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{y^2 - x^2}{xy} = \frac{(y + x) \times (y - x)}{xy}, \quad x = 6827, \quad y = 6829$$

Considere dois algoritmos diferentes que podemos programar nesta máquina para representar $f(x, y)$:

- Algoritmo 1:
  - Introduzimos x no computador, guardado arredondado como x^*
  - Introduzimos y no computador, guardado arredondado como y^*
  - Determinamos o quociente arredondado $y^* \oslash x^* = fl(y^*/x^*)$, guardado como a^*, e considerado como boa aproximação de y/x
  - Determinamos o quociente arredondado $x^* \oslash y^* = fl(x^*/y^*)$, guardado como b^*, e considerado como boa aproximação de x/y
  - Calculamos a diferença arredondada $z_1^* = a^* \ominus b^* = fl(a^* - b^*)$, que é considerado como boa aproximação de $z = (y/x) - (x/y)$
- Algoritmo 2:
  - Introduzimos x no computador, guardado arredondado como x^*
  - Introduzimos y no computador, guardado arredondado como y^*
  - Calculamos a soma, a diferença e o produto, com a aritmética arredondada do computador, obtendo: $s^* = y^* \oplus x^* = fl(y^* + x^*)$, $d^* = y^* \ominus x^* = fl(y^* - x^*)$, $p^* = x^* \otimes y^* = fl(x^* \times y^*)$, considerados como boas aproximações de $x + y$, $y - x$, $x \times y$ respetivamente.
  - Calculamos o produto na aritmética do computador $(s^* \otimes d^*) = fl(s^* \times d^*)$ e depois o quociente $z_2^* = (s^* \otimes d^*) \oslash p^* = fl((s^* \otimes d^*)/p^*)$, que é considerado como boa aproximação de $z = \frac{(y+x)\times(y-x)}{xy}$

Versão: [9,5,19, 46621583]

Aluno: Docente **Número: Docente**

1. Identifique, exatamente, quantos elementos diferentes existem neste sistema numérico alargado (portanto incluídos os 5 elementos adicionais `NaN`, $\pm\infty$, ± 0).
2. Identifique se 10^{-30}, 10^{40} podem ser representados em forma arredondada neste sistema, ou se são underflow/overflow.
   `Resposta:`
3. Identifique os algarismos em base 9 associados ao número $x = 6827$, e repetir para o número $y = 6829$
4. Identifique os primeiros 5 algarismos significativos em base 9 associados ao número $a = 6829/6827$, e repetir para o número $b = 6827/6829$
5. Identifique os primeiros 5 algarismos significativos em base 9 associados aos números $s = 6829 + 6827$, $d = 6829 - 6827$, $p = 6829 \times 6827$
6. Identifique quantos algarismos significativos de precisão (em base 9) tem z_1^* como aproximação de $z = f(6827, 6829)$.
7. Identifique quantos algarismos significativos de precisão (em base 9) tem z_2^* como aproximação de $z = f(6827, 6829)$.
8. Se usamos a norma infinito, determine para a função $f(x, y)$ o número de condição para o erro relativo, no ponto $(6827, 6829)$.
9. Medite sobre a aparição de erro propagado no cálculo de $z = f(x, y)$, para estes dados de entrada x, y, através dos dois algoritmos considerados.

Exemplo de execução da prática

Começamos a trabalhar com um olho nas tarefas pedidas e outro olho nas questões que devem ser respondidas no relatório.

Abrimos uma sessão de Matlab/Octave. Usamos como pasta de trabalho uma pasta que contém os códigos Matlab/Octave da disciplina `naturalalgar.m`, `algarnatural.m`, `algarfrac.m`, `fracalgar.m`, para representar números em bases arbitrárias.

• Segundo o enunciado a máquina considerada usa o sistema aritmético $FP(9, 5, -19, 19)$, com 5 elementos adicionais, portanto para além destes 5 elementos `NaN`, $\pm\infty$, ± 0, temos todos os números que em base 9 podem ser representados de forma exata com 5 algarismos significativos, e com expoente no intervalo entre -19 e 19:

$$s \cdot (a_0.b_1 \ldots b_4)_9 \cdot b^e$$

onde temos $s \in \{+1, -1\}$, $a_0 \in \{1, \ldots, 8\}$, $b_1, \ldots, b_4 \in \{0, 1, \ldots, 8\}$, $e \in \{-19, -18, \ldots, 19\}$

Temos então em $FP(9, 5, -19, 19)$ um total de $2 \times 8 \times 9 \times \ldots \times 9 \times (19 - (-19) + 1)$ opções diferentes. Se usamos a nossa calculadora:

```
>> 2*8*9^4*39
ans =  4094064
```

Somamos agora os 5 elementos adicionais e encontramos que o sistema tem 4094069 elementos diferentes.

• O maior valor real que conseguimos representar em forma exata nesta máquina é $(8.8888)_9 \cdot 9^{19} = 9^{20} - (0.0001)_9 \cdot 9^{19} = 9^{20} - 9^{15}$. O menor real positivo que conseguimos representar em forma exata é $(1.0000)_9 \cdot 9^{-19}$ Usamos a nossa calculadora e temos:

```
>> 9^20-9^15
ans =    1.2157e+19
>> 9^(-19)
ans =    7.4027e-19
```

Um número como 10^{-30}, indicado no relatório, não pode ser representado nesta máquina, supõe um underflow, por estar situado entre 0 e $7.4027 \cdot 10^{-19}$. Um número como 10^{40}, indicado no relatório, não pode ser representado nesta máquina, supõe um overflow, por ser maior que $1.2157 \cdot 10^{19}$.

• Os algarismos em base 9 associados a $x = 6827$ são obtidos se fazemos divisão com resto entre 9. Aproveitamos, por exemplo, o código Octave e temos:

```
>> algarnatural(6827,9);
O numero introduzido:
6827
A base escolhida:
9
Calculos intermedios geraram a tabela
NaN      5       2       3       0       1
6827    758     84       9       1       0
Algarismos:
1  0  3  2  5
```

Assim a sucessão de algarismos pedida é 10325. Em notação científica normalizada em base 9 podemos afirmar $x = (1.0325)_9 \cdot 9^4$, com expoente 4, e representável em forma exata no sistema de ponto flutuante que temos. O arredondamento seria $x^* = (1.0325)_9 \cdot 9^4$, que coincide neste caso com x

Podemos repetir para $y = 6829$, ou simplesmente somar duas unidades (porque $y = x+2$) e temos a sucessão de algarismos 10327. Novamente no sistema de ponto flutuante y pode ser representado em forma exata. O valor arredondado y^* coincide com $y = (1.0327)_9 \cdot 9^4 = 6829$

• Para identificar os algarismos significativos associados ao número a, temos uma parte inteira 1, e uma fração restante 2/6827. Para identificar a sequência de algarismos em base 9 desta fração basta com multiplicar com 9, tirar a parte inteira e novas frações. Podemos fazer as contas com ajuda de Octave, e pedir por exemplo 6 algarismos na fração:

```
>> format rat; algarfrac(6829,6827,9,6);
Introduzida uma fracao n/m:
A numerador escolhido:
6829
O denominador escolhido:
6827
A base escolhida:
9
Calculos intermedios geraram a tabela s
1           0          0          0           1          8          2
2/6827    18/6827   162/6827  1458/6827  6295/6827  2039/6827  4697/6827
Parte inteira
1
Algarismos da fracao
0  0  0  1  8  2
```

Assim $a = (1.000182\ldots)_9$. Arredondado por corte com 5 algarismos temos

$$a^* = (1.0001)_9 = \frac{(10001)_9}{9^4} = \frac{9^4+1}{9^4} = \frac{6562}{6561}$$

Repetimos para o número $b = \frac{6827}{6829}$

```
>> format rat; algarfrac(6827,6829,9,6);
Introduzida uma fracao n/m:
A numerador escolhido:
6827
O denominador escolhido:
6829
A base escolhida:
9
Calculos intermedios geraram a tabela s
0          8          8          8          7          0          6
6827/6829  6811/6829  6667/6829  5371/6829   536/6829  4824/6829  2442/6829
Parte inteira
0
Algarismos da fracao
8  8  8  7  0  6
```

Deduzimos então que $b = (0.888706\ldots)_9$. Em notação científica normalizada, o arredondamento por corte com 5 algarismos significativos é

$$b^* = (8.8870)_9 \cdot 9^{-1} = \frac{(8887)_9}{9^4} = \frac{9^4-2}{9^4} = \frac{6559}{6561}$$

• Para encontrar os algarismos significativos em base 9 destes números basta com identificar a sequência (finita) de algarismos associados a estes números inteiros.

```
>> s=6829+6827;d=6829-6827; p=6829*6827;
>> algarnatural(s,9);
O numero introduzido:
13656
A base escolhida:
9
Calculos intermedios geraram a tabela
NaN       3       5       6       0       2
13656    1517    168      18       2       0
Algarismos:
2  0  6  5  3
>> algarnatural(d,9);
O numero introduzido:
2
A base escolhida:
9
Calculos intermedios geraram a tabela
NaN     2
2     0
Algarismos:
2
>> algarnatural(p,9);
O numero introduzido:
46621583
A base escolhida:
9
Calculos intermedios geraram a tabela
Columns 1 through 8:

NaN          8          0          7          7          4          6          6
46621583    5180175    575575    63952    7105    789    87    9

Columns 9 and 10:

0          1
1          0
Algarismos:
1  0  6  6  4  7  7  0  8
```

Deduzimos que s tem expoente 4 em base 9, e que os seus primeiros 5 algarismos significativos são 20653. Na realidade $s = (2.0653)_9 \cdot 9^4$

Deduzimos que d tem expoente 0 em base 9, e que os seus primeiros 5 algarismos significativos são 20000. Na realidade $d = (2.0000)_9 \cdot 9^0$

Deduzimos finalmente que p tem expoente 9^8 em base 9, e que os seus primeiros 5 algarismos significativos são 10664. Na realidade $p = (1.06647708)_9 \cdot 9^8$

• Vamos agora estudar os resultados em cada passo destes dois algoritmos propostos.

Ao introduzirmos x, y no sistema, temos os arredondamentos $x^* = (1.0325)_9 \cdot 9^4 = x$ e $y^* = (1.0327)_9 \cdot 9^4 = y$.

Ao calcular o quociente $y^* \oslash x^*$, a máquina irá calcular o valor arredondado de $y^*/x^* = 6829/6827$. Já vimos numa resposta anterior que este valor arredondado é $a^* = (1.0001)_9 = \frac{6562}{6561}$

Ao calcular o quociente $x^* \oslash y^*$, a máquina irá calcular o valor arredondado de $x^*/y^* = 6827/6829$. Já vimos numa resposta anterior que este valor arredondado é $b^* = (8.8870)_9 \cdot 9^{-1} = \frac{6559}{6561}$

Ao calcular a diferença $a^* \ominus b^*$, a máquina irá calcular o valor arredondado de $a^* - b^* = (1.0001)_9 - (0.8887)_9 = (0.0003)_9 = \frac{3}{6561}$. Na realidade este número $3 \cdot 9^{-4}$ pode ser representado no sistema $FP(9, 5, -19, 19)$ em forma exata como $z_1^* = (3.0000)_9 \cdot 9^{-4}$

• No segundo algoritmo, pelo contrário, partimos dos mesmos valores x^*, y^* e a seguir calculamos com aritmética arredondada a soma, produto e diferença. Já vimos antes qual era esta soma, produto e diferença, e se ficamos com os valores arredondados com 5 algarismos significativos temos:

$$s^* = y^* \oplus x^* = (20653)_9 = (2.0653)_9 \cdot 9^4$$

$$d^* = y^* \ominus x^* = 2 = (2.0000)_9 \cdot 9^0$$

$$p^* = y^* \otimes x^* = (1.0664)_9 \cdot 9^8$$

Vemos que neste caso a soma arredondada e a diferença arredondada são feitas de forma exata, não se comete erro de arredondamento nestas operações.

O produto $s^* \otimes d^*$ é o produto de s^* com 2. Neste caso podemos multiplicar nós próprios com 2 diretamente na base 9 ou se queremos escrevemos s^* em base 10, para introduzir na calculadora, multiplicar com 2, e pergunar depois quais os seus algarismos em base 9. A multiplicação com 2 diretamente em base 9 é mais simples.

$$3 \times 2 = 6, \quad 5 \times 2 = (11)_9, \quad 1 + 6 \times 2 = (14)_9, \quad 1 + 0 \times 2 = 1, \quad 2 \times 2 = 4$$

obtemos

$$s^* \cdot d^* = (2.0653)_9 \cdot 9^4 \cdot 2 = (4.1416)_9 \cdot 9^4$$

$$s^* \cdot d^* = 13656 \cdot 2 = 27312 = (41416)_9 = (4.1416)_9 \cdot 9^4$$

este número não precisa de ser arredondado, já é exato com 5 algarismos significativos. Novamente a operação de produto está a ser feita de forma exata. Temos $s^* \otimes d^* = 27312 = (41416)_9 = (4.1416)_9 \cdot 9^4$

Finalmente temos que calcular o quociente arredondado $(s^* \otimes d^*) \oslash p^*$. O quociente (sem arredondar) destes números é:

$$(s^* \otimes d^*)/p^* = \frac{(4.1416)_9 \cdot 9^4}{(1.0664)_9 \cdot 9^8} = \frac{(41416)_9}{(10664)_9} \cdot 9^{-4}$$

Vamos identificar este numerador e denominador, por exemplo com ajuda de Octave:

```
>> naturalalgar([4,1,4,1,6],9);
A sequencia de algarismos introduzida:
4   1   4   1   6
A base escolhida:
9
Calculos intermedios geraram a tabela
4       1       4       1       6
4      37     337    3034   27312
Valor final:
27312
>> naturalalgar([1,0,6,6,4],9);
A sequencia de algarismos introduzida:
1   0   6   6   4
A base escolhida:
9
Calculos intermedios geraram a tabela
1      0      6      6      4
1      9     87    789   7105
Valor final:
7105
```

$$\frac{(41416)_9}{(10664)_9} \cdot 9^{-4} = \frac{27312}{7105} \cdot 9^{-4}$$

Com ajuda da multiplicação com 9, identificando parte inteira e fração, determinamos qual é a sequência de algarismos em base 9 deste número, e ficamos só com os primeiros 5 significativos (podemos usar o código Octave como ajuda)

```
>> format rat
>> algarfrac(27312,7105,9,6);
Introduzida uma fracao n/m:
A numerador escolhido:
27312
O denominador escolhido:
7105
A base escolhida:
9
Calculos intermedios geraram a tabela s
3          7          5          3          2          7          4
5997/7105  4238/7105  2617/7105  2238/7105  5932/7105  3653/7105  4457/7105
Parte inteira
3
Algarismos da fracao
  7  5  3  2  7  4
```

Concluímos assim $z_2^* = (3.7532)_9 \cdot 9^{-4}$

• O valor exato de $f(x,y)$ seria $z = f(x,y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{y^2-x^2}{xy} = \frac{27312}{46621583}$. Podemos determinar os seus primeiros 10 algarismos em base 9:

```
>> algarfrac(27312,46621583,9,10);
Introduzida uma fracao n/m:
A numerador escolhido:
27312
O denominador escolhido:
46621583
A base escolhida:
9
Calculos intermedios geraram a tabela s
Columns 1 through 9:

0.00000   0.00000   0.00000   0.00000   3.00000   7.00000   5.00000   2.00000   8.00000
0.00059   0.00527   0.04745   0.42707   0.84359   0.59227   0.33041   0.97370   0.76328

Columns 10 and 11:

6.00000   7.00000
0.86954   0.82589
Parte inteira
0
Algarismos da fracao
0  0  0  3  7  5  2  8  6  7
```

Resumo:

$$z_1^* = z_1^* = (3.0000)_9 \cdot 9^{-4}$$

$$z_2^* = z_2^* = (3.7532)_9 \cdot 9^{-4}$$

$$z = (0.0003752867\ldots)_9 = (3.752867\ldots)_9 \cdot 9^{-4}$$

Temos

$$\frac{|z_1^* - z|}{9^{-4}} = (0.752867\ldots)_9 < (9/2) \cdot 9^0$$

O valor z_1^* não tem nem sequer um algarismo significativo de precisão em base 9, como aproximação de z

Temos

$$\frac{|z_2^* - z|}{9^{-4}} = (0.000212\ldots)_9 < (9/2) \cdot 9^{-4}$$

O valor z_2^* tem 4 algarismos significativos de precisão em base 9, como aproximação de z.

•

Calculemos o número de condição de f para o erro relativo, no ponto $(x, y) = (6827, 6829)$. O número de condição, se calculamos erros com a norma infinito, está dado por

$$\kappa_\infty(x, y) = \frac{\|(x, y)\|_\infty \cdot \|\nabla_{(x,y)} f\|_1}{|f(x, y)|}$$

As derivadas parciais de $f(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = y \cdot x^{-1} - x \cdot y^{-1}$ podem ser calculadas:

$$\partial f/\partial x = y \cdot (-1) \cdot x^{-2} - \frac{1}{y} = -y \cdot (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2})$$

$$\partial f/\partial y = \frac{1}{x} - x \cdot (-1) \cdot y^{-2} = x \cdot (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2})$$

No ponto dado temos $y > x > 0$, portanto:

$$\|\nabla_{(x,y)} f\|_1 = |\partial f/\partial x| + |\partial f/\partial y| = (x+y)\cdot(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2})$$

$$\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|) = y$$

Usamos a nossa calculadora

```
>> x=6827; y=6829;f=y/x-x/y;
>> format long; y*(x+y)*(1/x^2+1/y^2)/f
ans =  6829.000292955636
```

O número de condição, com 3 algarismos decimais de precisão, será $6.83E+3$

- Ao aplicar o primeiro algoritmo na realidade os dados introduzidos na entrada eram exatos, porque $x = x^*$, $y = y^*$.Em princípio, sendo valores exatos não há um erro nos dados originais que se possa propagar.

No entanto existe um passo intermédios onde calculamos $a^* \ominus b^*$, sendo que o valor usado a^* não coincide de maneira exata com $a = y/x$, e o valor usado b^* não coincide de maneira exata com $b = x/y$. Sabemos que a operação de subtração está mal condicionada quando os valores subtraídos são próximos. Isto quer dizer que os pequenos erros de a^*, b^* vão ser propagados de forma forte ao executar esta operação.

A resposta de 1.9(a) neste caso seria *Forte porque no algoritmo executamos operações mal condicionadas, com valores numéricos arredondados.*

Pelo contrário em 1.9(b), o algoritmo está a calcular uma diferença $x^* - y^*$ e sabemos que os valores usados não contêm erros, portanto nesta diferença (mal condicionada) não há nenhum erro que se esteja a propagar. As restantes operações executadas (produtos, quocientes) utilizam valores aproximados, mas não são operações mal condicionadas. Deduzimos que a propagação de erros nos cálculos intermédios é fraca. Com respeito a termos f mal condicionado, isto não será um problema porque os valores usados na entrada não continham erros, e o número de condição só é um fator multiplicativo que se aplica nos dados arredondados de entrada. Multiplicar um erro nulo com 6829 continua a ser um erro nulo.

A resposta neste caso para 1.9(b) será *Fraca porque nos dados de entrada não existiam erros e no processo algorítmico não executamos operações mal condicionadas em valores arredondados.*

(Aparecem sim operações mal condicionadas, mas aplicadas em valores corretos, exatos)

Respostas no relatório Final (Inquérito Moodle):

- `Chave: [9,5,19,46621583]`
- `Questão 1.1: 4094069`
- `Questão 1.2: Nenhum deles é representável em forma arredondada`
- `Questão 1.3: 10327`
- `Questão 1.4: 88870`
- `Questão 1.5: 10664`
- `Questão 1.6: 0`
- `Questão 1.7: 4`
- `Questão 1.8: 6.83E+3`
- `Questão 1.9a: Forte porque no algoritmo executamos operações mal condicionadas, com valores numéricos arredondados.`
- `Questão 1.9b: Fraca porque nos dados de entrada não existiam erros e no processo algorítmico não executamos operações mal condicionadas em valores arredondados.`

Aviso: Não pode copiar diretamente estas respostas na sua resolução. As respostas corretas são diferentes, nas diferentes versões de exercício