

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios sobre Sistemas de Equações Lineares

Matrizes

1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule se possível:

- (a) $3A + 4B$;
- (b) AB e DA ;
- (c) $C^T A^T$.

2. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule, se possível:

- (a) $B - 2A$;
- (b) AC e CA ;
- (c) BC e CB ;
- (d) $A^T B$;
- (e) $3BD - 6D$;
- (f) $3I_2 - C$ e $3I_2 C$, onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2.

3. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix},$$

determine a primeira e a segunda coluna da matriz B .

4. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $AC = BC$. O que se pode concluir quanto à lei do corte nas matrizes?

5. Determine $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, tais que

$$3 \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $AB = [0]$. O que se pode concluir quanto à lei do anulamento do produto nas matrizes ?

7. Considere a matriz invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilize a definição de matriz inversa para determinar a matriz inversa de A .

8. Sabendo que $(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, determine a matriz A .

9. Calcule os determinantes das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

10. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Determine os seguintes complementos algébricos:

(a) Δ_{31} ;

(b) Δ_{23} ;

(c) Δ_{42} .

11. Seja

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ m & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ n & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $|A|$ utilizando o desenvolvimento de Laplace ao longo da primeira coluna da matriz sabendo que os elementos a_{21} e a_{41} são iguais aos respectivos complementos algébricos.

12. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule $|A|$. Em que condições A é invertível?

(b) Sejam $a = 3$, $b = 2$, B e C matrizes quadradas de ordem 4 e C uma matriz invertível tais que $(A^T)^{-1} = C^{-1}BC$. Calcule $|B|$.

13. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule a matriz adjunta de A ;

(b) Mostre que A é invertível e determine a sua inversa.

14. Verifique se a seguinte matriz é invertível e, em caso afirmativo, determine a sua inversa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Diga para que valores de a se verifica $A^{-1} = \text{adj}(A)$.

16. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule a matriz adjunta de A ;

(b) Mostre que A é invertível e determine a sua inversa.

17. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Verifique se estas matrizes são invertíveis;
- (b) Calcule, quando possível, as matrizes inversas.

18. Considere a seguinte matriz de ordem 4:

$$B = \begin{bmatrix} k & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

- (a) Calcule a expressão do determinante da matriz B ;
- (b) Indique, justificando, para que valores de k a matriz B é invertível.

19. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule o determinante da matriz A ;
- (b) Verifique se a matriz A é invertível e, em caso afirmativo, calcule a sua inversa.

Sistemas de Equações Lineares

20. Represente matricialmente os seguintes sistemas de equações lineares e resolva-os pelo método de eliminação de Gauss:

$$(a) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + w = 3 \\ z - w = 0 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 10 \\ 3x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -3x + 5y + 8z = 2 \\ 4x - y - 5z = 3 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} x + y + w = 1 \\ y + 2z + w = 0 \\ x + y + z + 3w = 1 \\ -3y - 2z + w = 4 \end{cases}$$

21. Considere os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 6x_1 - x_2 + 12x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

(a) Obtenha as factorizações LU das matrizes dos coeficientes dos sistemas e aproveite-as para calcular o determinante dessas matrizes.

(b) Utilize a alínea anterior, para resolver os sistemas tomando para 2º membro

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

22. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Resolva o sistema

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

23. Considere o sistema

$$\begin{cases} 0.0001456x_1 + 123.4x_2 = 124.1 \\ 2.885x_1 + 2.877x_2 = 3.874 \end{cases}$$

cuja solução exacta é $x_1 = 0.33992411$ e $x_2 = 1.0056722$. Utilize o método de eliminação de Gauss sem pesquisa de redutor e com pesquisa parcial de redutor para resolver o sistema em $FP(10, 4, -99, 99, A)$ e compare os resultados obtidos.

24. Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = 1 \\ -\sqrt{2}x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1 \end{cases}$$

Sabendo que a solução exacta do sistema é $x_1 = x_2 = x_3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.707107\dots$, compare os resultados obtidos quando se resolve o sistema pelo método de eliminação de Gauss sem pesquisa de redutor e com pesquisa parcial de redutor em $FP(10, 7, -99, 99, A)$.

25. Resolva pelo método de Doolittle o segundo sistema do exercício 21.

26. Resolva pelo método de Cholesky os sistemas

$$(a) \begin{cases} 4x + 2y - 4z = -2 \\ 2x + 10y + 4z = 5 \\ -4x + 4y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases}$$

27. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix}$. Resolva pelo método de Cholesky o sistema $AX = B$ com $B = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 23 \end{bmatrix}^T$.

28. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + 4y = 6 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$$

(a) Reescreva o sistema de modo a garantir a convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, qualquer que seja a aproximação inicial considerada.

(b) Considerando o sistema da alínea anterior e a aproximação inicial $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

i. calcule cinco iterações pelo método de Jacobi;

ii. realize cinco iterações pelo método de Gauss-Seidel.

(c) Determine um majorante do erro das aproximações no final de cada processo iterativo realizado em b). Interprete os resultados obtidos.

29. Considere a equação matricial $AX = B$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Prove que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel são convergentes, qualquer que seja a aproximação inicial $X^{(0)}$ considerada.
- (b) Tomando $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}^T$, obtenha $X^{(1)}$ efectuando uma iteração pelo método de Jacobi.
- (c) A partir de $X^{(1)}$ efectue uma nova iteração e indique um majorante do erro cometido em $X^{(1)}$.

30. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y - 5z = -2 \\ x - 5y - 3z = 3 \end{cases}$$

- (a) Resolva o sistema pelo método de Doolittle.
- (b) Utilizando o método de Jacobi:
 - i. Calcule M^{-1} e a aproximação inicial $X^{(0)} = M^{-1}B$;
 - ii. Efectue duas iterações e indique os valores aproximados da solução.
- (c) Calcule duas iterações pelo método de Gauss-Seidel considerando como aproximação inicial $X^{(0)} = (L + D)^{-1}B$.

31. Considere o sistema

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

- (a) Tomando para aproximação inicial $X^{(0)} = M^{-1}B$, obtenha $X^{(1)}$ através do método de Gauss-Seidel, tendo o cuidado de reescrever o sistema de modo a garantir a convergência do método.
- (b) Obtenha uma solução aproximada do sistema pelo método de Jacobi, de modo a que a norma do erro seja inferior a 10^{-1} .

32. Considere o sistema de equações lineares $AX = B$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & a & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- (a) Indique, justificando, uma condição sobre os elementos de A que garanta a convergência dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel aplicados a este sistema.
- (b) Para $a = 2$, determine duas iterações do método de Gauss-Seidel, tomando $X^{(0)} = M^{-1}B$ para aproximação inicial. Indique um majorante do erro da última solução aproximada obtida.

33. Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$$

- (a) Efectue a primeira iteração dos métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel, partindo da aproximação inicial $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Determine um majorante do erro cometido no cálculo da aproximação obtida em cada um dos métodos.
- (b) Utilize adequadamente os referidos métodos para obter uma aproximação $X^{(k)}$ da solução $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, de modo a que, em ambos os métodos, seja garantido

$$\|X - X^{(k)}\| \leq 0.001.$$