

Regras de Derivação

Ana Matos

DMAT

1 Regras de Derivação

1.1 Nota prévia importante

Estas folhas surgem pelo facto de, nos últimos anos, ter tido alguns alunos em disciplinas de Matemática do primeiro semestre das Licenciaturas que nunca tinham dado qualquer noção de derivada, ou mesmo de limite de uma função.

De facto, para um estudo minimamente correcto e fundamentado de derivadas, a noção de limite de uma função é absolutamente indispensável.

A partir do momento em que são dadas as regras de derivação, usá-las com à-vontade é *rigorosamente indispensável* para todo o resto da matéria. As regras de derivação são dadas, dentro do capítulo das derivadas, a um ritmo em que se assume que o aluno já ouviu falar destas noções. Esse ritmo é excessivo para os alunos que referi.

Estas folhas *não pretendem explicar a matéria de derivadas mas apenas explicar o funcionamento das regras de derivação*, sem as justificar. De facto, é possível compreender o funcionamento das regras de derivação, e usá-las com segurança, mesmo sem ter compreendido a noção de derivada. Como um jogo de que se conhecem as regras.

É, aliás, muito mais rápido compreender o funcionamento das regras de derivação do que compreender os restantes aspectos das derivadas, em especial para quem ainda não domine a noção de limite.

No primeiro ano, ao estudo das derivadas segue-se o estudo de primitivas e integrais. Quem souber usar as regras de derivação com à-vontade, mesmo sem ter ainda compreendido adequadamente a restante matéria de derivadas, tem a possibilidade de acompanhar uma parte significativa do conteúdo desse capítulo.

O objectivo destas folhas é, portanto, tomar um atalho para dar aos alunos a possibilidade de usarem as regras de derivação, e assim terem a possibilidade de continuar a acompanhar partes da matéria que exigem apenas esse conhecimento, enquanto ganham tempo para efectuar o estudo correcto e fundamentado das derivadas.

O aluno tem que estar consciente, no entanto, que apenas fica a saber usar, mecanicamente, um dos aspectos das derivadas.

Ao longo do texto vão sendo propostos alguns exercícios, cujas soluções se encontram no fim da matéria.

No final das folhas são propostas duas pequenas fichas de exercícios, com as respectivas soluções. A primeira avalia a aplicação básica das regras de derivação enquanto a segunda exige um maior domínio destas regras.

1.2 Em que consistem as Regras de Derivação

Começamos por referir que, sempre que nos referirmos a funções, estamos a considerar funções reais de variável real.

Como foi explicado na nota prévia, vamos apresentar as regras de derivação como se estivessemos num jogo, em que temos as peças e as regras do jogo:

- as peças são as derivadas de algumas funções, por exemplo:

constantes, x , x^n , $\sqrt[n]{x}$, e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, etc

(ou seja, *as derivadas das funções mais elementares, à custa das quais obtemos as outras funções por meio das operações*);

- as regras do jogo vão-nos indicar o comportamento da derivada quando fazemos operações com funções, por exemplo:

conhecendo a derivada de duas funções, f e g , podemos obter as derivadas de $2f$, $-f$, $f + g$, $f - g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$, etc.

Vamos aceitar como válidas as peças e as regras do jogo, ou seja, não vamos justificar as derivadas que vamos indicar para as funções mais elementares, nem as propriedades relativamente às operações.

Aplicar as regras de derivação consiste em usar estes conhecimentos para, a partir das derivadas de funções mais simples, determinar as derivadas de funções que delas se obtêm por meio das operações.

1.3 Notação

Como foi referido, não vamos fazer o estudo geral das derivadas, mas apenas das regras de derivação, assumindo o conhecimento da noção de derivada de uma função num ponto.

Recorde-se que uma **função é diferenciável** num ponto se tem derivada finita nesse ponto e que, sendo f uma função (na variável x) a **derivada de f** é uma nova função, que se representa por

$$f' \quad \text{ou por} \quad \frac{df}{dx},$$

que, a cada ponto em que f é diferenciável, associa a sua derivada nesse ponto.

1.4 Funções constantes e potências

Proposição 1 (derivada de uma constante)

A derivada de uma função contante é nula, isto é, se c é um número real, então

$$c' = 0.$$

Exemplos:

Quais são as derivadas das funções $f(x) = 3$, $g(x) = -2$, $h(x) = 0$, $l(x) = \pi$ e $s(x) = e$?

Todas estas funções são constantes, pelo que as suas derivadas são nulas.

Proposição 2 (derivada da função $f(x) = x$)

$$x' = 1.$$

Proposição 3 (derivada da potência)

Se $n \in \mathbb{N}$,

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Repare-se que, aplicando esta regra, concluímos também que $x' = 1$, mas é mais simples pensar neste caso à parte.

Exemplos:

Quais são as derivadas das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^5$?

- $f'(x) = (x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$;
- $g'(x) = (x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

1.5 Soma, subtracção e produto por uma constante

Proposição 4 (derivadas da soma e da subtracção)

Se f e g são funções diferenciáveis, então $f+g$ e $f-g$ são diferenciáveis e

$$\begin{aligned}[f(x) + g(x)]' &= f'(x) + g'(x); \\ [f(x) - g(x)]' &= f'(x) - g'(x).\end{aligned}$$

Proposição 5 (derivada da multiplicação por uma constante)

Se f é uma função diferenciável e c um número real, então cf é diferenciável e

$$[cf(x)]' = cf'(x).$$

Exemplos:

Quais são as derivadas das funções $f(x) = 3 + x$, $g(x) = x^4 + 5x$ e $h(x) = 3x^5 - 8x^2 + 1$?

- $(3 + x)' = 3' + x' = 0 + 1 = 1$;
- $(x^4 + 5x)' = (x^4)' + (5x)' = 4x^{4-1} + 5x' = 4x^3 + 5$;
- $(3x^5 - 8x^2 + 1)' = (3x^5)' - (8x^2)' + 1' = 3(5x^4) - 8(2x) + 0 = 15x^4 - 16x$.

Neste momento já sabemos calcular a derivada de qualquer polinómio.

Exercício 1

Determine a derivada do polinómio $x^4 - 12x^3 + 2x^2 + x - 1$.

1.6 Potências de expoente racional

Proposição 6 (derivada da raiz)

Se $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$, então

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Exemplos:

Quais são as derivadas das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$?

- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
- $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

Exercício 2

Determine a derivada da função $3\sqrt[6]{x} + 2x^3 + x + 1$.

Tendo presente que

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

a derivada da raiz pode também ser obtida como um caso particular da regra de derivação que se segue.

Proposição 7 (derivada da potência de expoente racional)

Se α é um número racional, então

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Temos, assim, a garantia que a regra já dada para a potência é também válida quando o expoente é um número racional qualquer.

Pode-se provar que esta regra é ainda válida sendo α um número real qualquer.

Exemplos:

Quais são as derivadas das funções $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$, $g(x) = \sqrt[4]{x^3}$, $h(x) = \frac{1}{x^2}$?

- $f'(x) = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x};$
- $g'(x) = \left(\sqrt[4]{x^3}\right)' = \left((x^3)^{\frac{1}{4}}\right)' = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x}};$
- $h'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$

Voltemos a calcular as derivadas das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$, agora por esta regra.

- $f'(x) = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}};$
- $g'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$

Embora este segundo processo possa parecer mais trabalhoso, há toda a vantagem em nos habituarmos a ele pois *esta forma de pensar será indispensável mais à frente, em especial na parte das primitivas.*

Exercício 3

Determine a derivada da função $\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[5]{x}$.

1.7 Multiplicação e divisão

Proposição 8 (derivada do produto)

Se f e g são funções diferenciáveis, então fg é uma função diferenciável e

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Exemplos:

1. Calculemos a derivada do produto das funções $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = 2x - 1$.

Pela derivada do produto,

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= (x^2 + 2x + 1)'(2x - 1) + (x^2 + 2x + 1)(2x - 1)' = \\ &= (2x + 2)(2x - 1) + (x^2 + 2x + 1)2 = 6x^2 + 6x.\end{aligned}$$

É claro que poderíamos ter seguido outro processo, em que calculamos primeiro o produto e derivamos o polinómio obtido:

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= (x^2 + 2x + 1)(2x - 1) = 2x^3 + 4x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1 = \\ &= 2x^3 + 3x^2 - 1\end{aligned}$$

pelo que

$$(f(x)g(x))' = 6x^2 + 6x.$$

2. Calculemos a derivada do produto das funções $h(x) = -x + 3$ e $l(x) = \sqrt{x}$.

Pela derivada do produto,

$$\begin{aligned}(h(x)l(x))' &= (-x+3)' \sqrt{x} + (-x+3) (\sqrt{x})' = \\ &= (-1) \sqrt{x} + (-x+3) \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{x} - \frac{1}{2} x^{1-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \\ &= -\sqrt{x} - \frac{1}{2} \sqrt{x} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{3}{2} \sqrt{x} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Sugere-se que o aluno calcule a derivada pelo outro processo, efectuando primeiro o produto e depois derivando.

Proposição 9 (derivada do quociente)

Se f e g são funções diferenciáveis, então $\frac{f}{g}$ é uma função diferenciável nos pontos em que g não se anula e

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Exemplos:

Consideremos novamente as funções do exemplo anterior.

1. Calculemos a derivada do quociente de $f(x) = x^2 + 2x + 1$ por $g(x) = 2x - 1$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{2x - 1} \right)' &= \frac{(x^2 + 2x + 1)'(2x - 1) - (x^2 + 2x + 1)(2x - 1)'}{(2x - 1)^2} = \\ &= \frac{(2x + 2)(2x - 1) - (x^2 + 2x + 1)2}{(2x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 4}{(2x - 1)^2}.\end{aligned}$$

2. Calculemos a derivada do quociente de $l(x) = \sqrt{x}$ por $h(x) = -x + 3$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{x}}{-x + 3} \right)' &= \frac{(\sqrt{x})'(-x + 3) - \sqrt{x}(-x + 3)'}{(-x + 3)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} (-x + 3) - \sqrt{x}(-1)}{(-x + 3)^2} = \frac{-\frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}}{(-x + 3)^2} = \\ &= \frac{-\frac{1}{2} x^{1-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}}{(-x + 3)^2} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{x} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}}{(-x + 3)^2}.\end{aligned}$$

Exercício 4

Considerando as funções $f(x) = 3x^3 + x^2 + x$ e $g(x) = 3x^2 + 1$, determine as derivadas de $f(x)g(x)$, $\frac{1}{f(x)}$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$.

1.8 Simplificação de cálculos

Um aspecto a ter em conta antes de efectuar um cálculo, e em particular antes de calcular uma derivada, é pensarmos no método mais simples de o abordar. O facto de nos habituarmos a pensar em maneiras alternativas de escrever as funções facilitará muito o nosso trabalho.

A aplicação imediata de uma regra de derivação, sem ter em atenção este aspecto, leva, frequentemente, a contas bem mais complicadas do que seria necessário, com grande perda de tempo e aumento do risco de erro.

Há ainda uma agravante, *o facto de não derivarmos de uma forma eficiente não nos prepara adequadamente para o estudo, que se segue, das primitivas.*

Dois casos típicos são o uso desnecessário da derivada do produto e da derivada do quociente.

Apresentam-se em seguida alguns exemplos representativos, com indicação de maneiras mais simples de efectuar os cálculos.

- Para derivar $\alpha f(x)$, onde α é uma constante, o mais prático é aplicar a derivada da multiplicação por um escalar

$$[\alpha f(x)]' = \alpha f'(x)$$

em vez da derivada do produto.

Por exemplo,

$$(3\sqrt{x})' = 3(\sqrt{x})' = \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

- Consideremos $f(x) = \frac{x}{2}$.

Em vez de aplicar a derivada do quociente, é mais simples pensar que

$$\left(\frac{x}{2}\right)' = \left(\frac{1}{2}x\right)' = \frac{1}{2}.$$

- Para $f(x) = \frac{3x}{5}$ sugere-se o mesmo:

$$\left(\frac{3x}{5}\right)' = \left(\frac{3}{5}x\right)' = \frac{3}{5}.$$

- Derivemos a função $f(x) = \frac{x^3+4x^2}{2x}$.

O mais fácil é simplificar a função e depois derivar, em vez de derivar logo o quociente. Assim,

$$\left(\frac{x^3+4x^2}{2x}\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)' = x + 2.$$

- Derivemos a função $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$.

Como no caso anterior, começamos por simplificar a função e depois derivamos, em vez de derivar logo o quociente:

$$\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{1-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

(já para $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ teria mesmo que ser usada a derivada do quociente).

- Derivemos a função $f(x) = (-x+3)\sqrt{x}$.

Este exemplo foi usado para ilustrar a derivada do produto, mas foi logo sugerido que o aluno fizesse o produto e depois derivasse. Assim,

$$[(-x+3)\sqrt{x}]' = \left(-x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- Derivemos a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

O mais simples é fazer

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

em vez de usar as derivadas do quociente e da raiz.

- Derivemos a função $f(x) = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}$.

$$\frac{x\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{4}} + 2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{7}{6}} + x^{-\frac{1}{12}} + 2x^{-\frac{1}{3}}$$

portanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{x\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}\right)' &= \left(x^{\frac{7}{6}} + x^{-\frac{1}{12}} + 2x^{-\frac{1}{3}}\right)' = \frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{12}x^{-\frac{13}{12}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \\ &= \frac{7}{6}\sqrt[6]{x} - \frac{1}{12}\frac{1}{\sqrt[12]{x^{13}}} - \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \end{aligned}$$

Exercício 5

Derive, simplificando, as funções $\frac{-2x}{3}$, $\frac{x^2+5x}{2}$, $\frac{x^4+2x^3+x^2+1}{2x^2}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ e $\frac{x^2+x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2}}$.

1.9 Funções trigonométricas

Proposição 10 (derivadas do seno e do cosseno)

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x)' &= \cos x, \\(\cos x)' &= -\operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

Tendo presente que:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, & \cotg x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \\ \sec x &= \frac{1}{\cos x}, & \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{\operatorname{sen} x},\end{aligned}$$

das propriedades anteriores conclui-se que

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \sec^2 x, & (\cotg x)' &= -\operatorname{cosec}^2 x, \\ (\sec x)' &= \sec x \operatorname{tg} x, & (\operatorname{cosec} x)' &= -\operatorname{cosec} x \cotg x.\end{aligned}$$

Apresentamos os cálculos para as derivadas da tangente e da secante:

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = \sec^2 x;\end{aligned}$$

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x} \right)' = \frac{0 - 1 (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x \sec x.$$

Exercício 6

Faça as deduções das derivadas da cotangente e da cosecante.

1.10 Exponencial e logaritmo

Proposição 11 (derivada da exponencial)

$$(e^x)' = e^x.$$

Proposição 12 (derivada do logaritmo)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Exemplos:

Calculemos a derivada de $e^x \ln x$:

$$(e^x \ln x)' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right).$$

Exercício 7

Determine as derivadas das funções $f(x) = x^3 e^x$ e $g(x) = x \ln x$.

1.11 Função composta

Uma das operações mais frequentes entre funções é a composição.

Perceber em que situação estamos a aplicar a regra da derivação da função composta e o seu funcionamento é talvez o ponto mais importante para o domínio das regras de derivação.

Para a grande maioria dos alunos, a dificuldade das derivadas reside precisamente nesta questão, por tentarem calcular derivadas em que o uso da regra da derivação da função composta é indispensável, sem sequer terem em conta que se encontram perante uma composição de funções.

Pelo contrário, se estivermos atentos a estas questões, identificarmos correctamente as funções envolvidas e o respectivo papel, a aplicação desta regra torna-se muito simples.

O primeiro ponto a perceber é em que situações o uso desta regra é necessário.

Começemos por recordar que, sendo f e g duas funções, a função composta $f \circ g$, nos pontos do seu domínio, é definida por

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Por exemplo, sendo

$$f(x) = 3x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = 5x - 1$$

então

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(5x - 1) = 3(5x - 1)^2$$

e

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x^2) = 5(3x^2) - 1 = 15x^2 - 1.$$

Consideremos, agora, as seguintes funções:

$$(2x + 1)^6, \quad \sqrt{x^2 + 2}, \quad \sin(4x), \\ \cos(2x^3), \quad e^{3x^2 + 2x}, \quad \ln(x^2 - 1).$$

No cálculo da derivada de qualquer uma destas funções estamos perante a derivação de uma função composta.

- Consideremos $h(x) = (2x + 1)^6$.

Trata-se de uma situação de potência, composta com a função $2x + 1$.

De facto,

$$h(x) = (2x + 1)^6 = f(2x + 1) = f(g(x)) = f \circ g(x)$$

com

$$f(x) = x^6 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x + 1.$$

- Consideremos $h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$.

Trata-se da função raiz quadrada, composta com a função $x^2 + 2$.

De facto,

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 2} = f(x^2 + 2) = f(g(x)) = f \circ g(x)$$

com

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 2.$$

- Consideremos $h(x) = \sin(4x)$

Trata-se da função seno, composta com a função $4x$.

Decompondo,

$$h(x) = \sin(4x) = f(4x) = f(g(x)) = f \circ g(x)$$

com

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{e} \quad g(x) = 4x.$$

Exercício 8

Decomponha cada uma das funções $\cos(x^2)$, e^{3x^2+2x} e $\ln(x^2 - 1)$ como composta de duas funções.

Vejamos, agora, o enunciado da regra da derivação da função composta.

Proposição 13 (derivada da função composta)

Se g é diferenciável em x e f é diferenciável em $y = g(x)$, então $f \circ g$ é diferenciável em x e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x).$$

Exemplos:

Consideremos novamente as três funções acima decompostas.

- $h(x) = (2x + 1)^6$.

Vimos que $h(x) = (2x + 1)^6 = f \circ g(x)$, com $f(x) = x^6$ e $g(x) = 2x + 1$.

Pela regra da derivação da função composta

$$h'(x) = g'(x) f'(g(x)).$$

Como

$$f'(x) = 6x^5 \quad \text{e} \quad g'(x) = 2,$$

então

$$h'(x) = \underbrace{2}_{g'(x)} \times \underbrace{6(2x+1)^5}_{f'(2x+1)} = 12(2x+1)^5.$$

- $h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$.

Vimos que $h(x) = \sqrt{x^2 + 2} = f \circ g(x)$, com $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 2$.

Pela regra da derivação da função composta

$$h'(x) = g'(x) f'(g(x)).$$

Como

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad g'(x) = 2x,$$

então

$$h'(x) = \underbrace{2x}_{g'(x)} \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}}_{f'(x^2+2)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

- $h(x) = \sin(4x)$

Vimos que $h(x) = \sin(4x) = f \circ g(x)$, com $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = 4x$.

Pela regra da derivação da função composta

$$h'(x) = g'(x) f'(g(x)).$$

Como

$$f'(x) = \cos x \quad \text{e} \quad g'(x) = 4,$$

então

$$h'(x) = \underbrace{4}_{g'(x)} \times \underbrace{\cos(4x)}_{f'(4x)}.$$

Exercício 9

Determine as derivadas das funções $\cos(2x^3)$, e^{3x^2+2x} e $\ln(x^2 - 1)$.

1.12 Derivadas genéricas

Conjugando as derivadas já dadas com a regra da derivação da função composta obtemos a maneira como mais frequentemente são apresentadas as regras de derivação. *Não se trata de novas regras de derivação, mas apenas de uma maneira diferente de apresentar a expressão da derivada da composta da função em causa com outra função.*

Proposição 14 (derivada da potência - caso geral)

Se α é um número racional e u é uma função diferenciável, então

$$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}.$$

Exemplos:

- Seja $f(x) = \sqrt[3]{4x^2 - 2x}$.

Escrevendo a função na forma

$$f(x) = (4x^2 - 2x)^{\frac{1}{3}}$$

verificamos que se trata de uma função da forma u^α , com $\alpha = \frac{1}{3}$ e $u = 4x^2 - 2x$ (ou seja, a composta da potência de expoente $\frac{1}{3}$ com a função $u = 4x^2 - 2x$).

Portanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha u' u^{\alpha-1} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\alpha} \underbrace{(8x-2)}_{u'} \underbrace{(4x^2-2x)^{\frac{1}{3}-1}}_{u^{\alpha-1}} = \\ &= \frac{1}{3} (8x-2) (4x^2-2x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{8x-2}{\sqrt[3]{(4x^2-2x)^2}}. \end{aligned}$$

- Seja $f(x) = \cos^3(x)$.

Escrevendo a função na forma

$$f(x) = (\cos(x))^3$$

verificamos que se trata de uma função da forma u^α , com $\alpha = 3$ e $u = \cos x$ (ou seja, a composta da potência de expoente 3 com a função $u = \cos x$).

Portanto

$$f'(x) = \alpha u' u^{\alpha-1} = \underbrace{3}_{\alpha} \underbrace{(-\sin(x))}_{u'} \underbrace{(\cos(x))^{3-1}}_{u^{\alpha-1}} = -3 \sin(x) \cos^2(x).$$

Proposição 15 (derivadas das funções trigonométricas - caso geral)

Se u é uma função diferenciável, então

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} u)' &= u' \cos u, & (\cos u)' &= -u' \operatorname{sen} u, \\(\operatorname{tg} u)' &= u' \sec^2 u, & (\cotg u)' &= -u' \operatorname{cosec}^2 u, \\(\sec u)' &= u' \sec u \operatorname{tg} u, & (\operatorname{cosec} u)' &= -u' \operatorname{cosec} u \cotg u.\end{aligned}$$

Exemplos:

- Seja $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$.

Trata de uma função da forma $\operatorname{sen} u$, com $u = 3x$ (ou seja, a composta do seno com a função $u = 3x$).

Portanto

$$f'(x) = u' \cos u = \underbrace{(3x)'}_{u'} \underbrace{\cos(3x)}_{\cos u} = 3 \cos(3x).$$

- Seja $f(x) = \cos(x^3)$.

Trata de uma função da forma $\cos u$, com $u = x^3$ (ou seja, a composta do cosseno com a função $u = x^3$).

Portanto

$$f'(x) = -u' \operatorname{sen} u = -\underbrace{(x^3)'}_{u'} \underbrace{\operatorname{sen}(x^3)}_{\operatorname{sen} u} = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3).$$

- Seja $f(x) = \sec(\pi x)$.

Trata de uma função da forma $\sec u$, com $u = \pi x$ (ou seja, a composta da secante com a função $u = \pi x$).

Portanto

$$f'(x) = u' \sec u \operatorname{tg} u = \underbrace{(\pi x)'}_{u'} \underbrace{\sec(\pi x)}_{\sec u} \underbrace{\operatorname{tg}(\pi x)}_{\operatorname{tg} u} = \pi \sec(\pi x) \operatorname{tg}(\pi x).$$

Proposição 16 (derivada da exponencial - caso geral)

Se u é uma função diferenciável, então

$$(e^u)' = u'e^u.$$

Proposição 17 (derivada do logaritmo - caso geral)

Se u é uma função diferenciável, então

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Exemplos:

- Seja $f(x) = e^{-x}$.

Trata de uma função da forma e^u , com $u = -x$ (ou seja, a composta da exponencial com a função $u = -x$).

Portanto

$$f'(x) = u'e^u = (-x)'e^{-x} = -e^{-x}.$$

- Seja $f(x) = \ln(x + e^x)$.

Trata de uma função da forma $\ln u$, com $u = x + e^x$ (ou seja, a composta do logaritmo com a função $u = x + e^x$).

Portanto

$$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{(x + e^x)'}{x + e^x} = \frac{1 + e^x}{x + e^x}.$$

Observação: Como já foi referido, todas estas propriedades apresentadas nesta secção não são mais do que uma maneira "encapotada" de apresentar a derivada da composta de cada uma das funções indicadas com uma função u .

No entanto, teremos muito mais segurança ao calcular as derivadas se, para além da mera aplicação da propriedade, tivermos presente que estamos usar a derivada da composta.

1.13 Exponencial e logaritmo de base a

Vamos seguidamente deduzir, a partir das propriedades das funções exponencial e logaritmo de base a , as expressões das derivadas destas funções.

Proposição 18 *Se a é um número real positivo, então:*

- $(a^x)' = \ln(a) a^x$;
- $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$, para $a \neq 1$.

Comecemos por recordar que, sendo a um real positivo,

$$e^{\ln a} = a.$$

Então

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}.$$

É fácil, agora, provar a primeira propriedade:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = (x \ln a)' \underbrace{e^{x \ln a}}_{a^x} = \ln(a) a^x.$$

Para provar a segunda propriedade, comecemos por recordar que

$$\log_a x = \frac{1}{\ln(a)} \ln x.$$

Podemos chegar a esta conclusão do seguinte modo:

$$x = a^{\log_a x} = (e^{\ln a})^{\log_a x} = e^{\ln(a) \log_a x}$$

pelo que

$$\ln(a) \log_a x = \ln x$$

ou seja

$$\log_a x = \frac{1}{\ln(a)} \ln x$$

(note-se que $a \neq 1$, pelo que $\ln(a) \neq 0$).

É fácil, agora, provar a segunda propriedade:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln(a)} \ln x \right)' = \frac{1}{\ln(a)} (\ln x)' = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}.$$

1.14 Funções trigonométricas inversas

Terminamos a apresentação das regras de derivação com as derivadas das funções trigonométricas inversas.

Proposição 19 (deriv. das funções trigonométricas inversas)

$$\begin{aligned}(\arcsen x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\(\arctg x)' &= \frac{1}{1+x^2}, & (\text{arccotg } x)' &= -\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Exemplos:

Calculemos as derivadas de $x \arcsen x$, $\arcsen x + \arccos x$ e $x^2 \text{arccotg } x$:

- $(x \arcsen x)' = x' \arcsen x + x (\arcsen x)' = \arcsen x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$
- $(\arcsen x + \arccos x)' = (\arcsen x)' + (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0;$
- $(x^2 \arctg x)' = (x^2)' \arctg x + x^2 (\arctg x)' = 2x \arctg x + \frac{x^2}{1+x^2}.$

Exercício 10

Determine as derivadas das funções $\arcsen(x) + \arccos(x)$ e $\arccos(x) \text{arccotg}(x)$.

Da proposição anterior e da regra da derivação da função composta resulta que:

Proposição 20 (deriv. funções trigonométricas inversas - caso geral)

Se u é uma função diferenciável, então

$$\begin{aligned}(\arcsen u)' &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, & (\arccos u)' &= -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \\(\arctg u)' &= \frac{u'}{1+u^2}, & (\text{arccotg } u)' &= -\frac{u'}{1+u^2}.\end{aligned}$$

Exemplos:

- Seja $f(x) = \arcsen(3x)$.

Trata de uma função da forma $\arcsen u$, com $u = 3x$ (ou seja, a composta do arcoseno com a função $u = 3x$).

Portanto

$$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

- Seja $f(x) = \operatorname{arctg}(3x^2)$.

Trata de uma função da forma $\operatorname{arctg} u$, com $u = 3x^2$ (ou seja, a composta do arcotangente com a função $u = 3x^2$).

Portanto

$$f'(x) = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{(3x^2)'}{1+(3x^2)^2} = \frac{6x}{1+9x^4}.$$

1.15 Tabela de Derivadas

Tabela de Derivadas	
f	f'
$k, c/ k \in \mathbb{R}$	0
$u + v$	$u' + v'$
$ku, c/ k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u^\alpha, c/ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
e^u	$u' e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$a^u, c/ a \in \mathbb{R}^+$	$u' a^u \ln a$
$\log_a u, c/ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{1}{\ln a} \frac{u'}{u}$
$\text{sen } u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \text{sen } u$
$\text{tg } u$	$u' \sec^2 u$
$\cotg u$	$-u' \text{cosec}^2 u$
$\sec u$	$u' \sec u \text{tg } u$
$\text{cosec } u$	$-u' \text{cosec } u \cotg u$
$\arcsen u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arctg u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\text{arccotg } u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$

1.16 Exercícios resolvidos

Apresentamos agora alguns exercícios resolvidos, envolvendo várias regras de derivação e técnicas de simplificação apresentadas.

1. Calculemos a derivada da função $f(x) = x^2 \sin(5x)$.

Trata-se do produto de duas funções, pelo que

$$f'(x) = (x^2 \sin(5x))' = \underbrace{(x^2)'}_{2x} \sin(5x) + x^2 (\sin(5x))'.$$

Reparemos agora que temos uma situação de função composta, do tipo $\sin u$, com $u = 5x$.

Portanto,

$$(\sin(5x))' = (5x)' \cos(5x) = 5 \cos(5x).$$

Então,

$$f'(x) = 2x \sin(5x) + x^2 (5 \cos(5x)) = 2x \sin(5x) + 5x^2 \cos(5x).$$

2. Calculemos a derivada da função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^5}$.

Podemos aplicar a derivada do quociente ou pensar simplesmente que

$$f(x) = (1-x)^{-5}$$

pelo que

$$f'(x) = ((1-x)^{-5})' = -5(1-x)'(1-x)^{-5-1} = 5(1-x)^{-6} = \frac{5}{(1-x)^6},$$

pois trata-se de situação de função composta, do tipo u^α , com $\alpha = -5$ e $u = 1-x$.

3. Calculemos a derivada da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2}}$.

Podemos aplicar as derivadas do quociente e da raiz, mas as contas ficam mais simples pensando que

$$\frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2}} = (x^4 + x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Assim, temos uma situação de função composta do tipo u^α , com $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $u = x^4 + x^2$, pelo que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} (x^4 + x^2)' (x^4 + x^2)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} (4x^3 + 2x) (x^4 + x^2)^{-\frac{3}{2}} = \\ &= (-2x^3 - x) (x^4 + x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-2x^3 - x}{\sqrt{(x^4 + x^2)^3}}. \end{aligned}$$

4. Calculemos a derivada da função $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}$.

Podemos derivar logo o quociente, fazendo

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+3}{\sqrt{x+2}} \right)' &= \frac{(x+3)' \sqrt{x+2} - (x+3) (\sqrt{x+2})'}{(\sqrt{x+2})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{x+2} - (x+3) \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{x+2} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2} \frac{x+3}{(x+2)\sqrt{x+2}}. \end{aligned}$$

No entanto, podemos também começar por simplificar a função, fazendo

$$\frac{x+3}{\sqrt{x+2}} = \frac{x+2+1}{\sqrt{x+2}} = \frac{x+2}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} = (x+2)^{\frac{1}{2}} + (x+2)^{-\frac{1}{2}};$$

derivando, resulta

$$\left((x+2)^{\frac{1}{2}} + (x+2)^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (x+2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (x+2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}.$$

Note-se que obtivemos expressões com aspecto diferente, mas que podemos provar serem a mesma função.

5. Calculemos a derivada da função $f(x) = \cos^4(3x^3 + 1)$.

Comecemos por recordar que

$$\cos^4(3x^3 + 1) = [\cos(3x^3 + 1)]^4$$

o que torna mais evidente que se trata de uma situação de função composta do tipo u^α , com $\alpha = 4$ e $u = \cos(3x^3 + 1)$.

Portanto

$$f'(x) = 4 (\cos(3x^3 + 1))' [\cos(3x^3 + 1)]^{4-1}.$$

Para prosseguir, convém reparar que agora temos uma situação do tipo $\cos u$, com $u = 3x^3 + 1$, pelo que

$$(\cos(3x^3 + 1))' = (3x^3 + 1)' (-\sin(3x^3 + 1)) = -9x^2 \sin(3x^3 + 1).$$

Então

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(-9x^2 \sin(3x^3 + 1)) [\cos(3x^3 + 1)]^3 = \\ &= -36x^2 \sin(3x^3 + 1) \cos^3(3x^3 + 1). \end{aligned}$$

6. Calculemos a derivada da função $f(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$.

Aplicando a derivada do quociente e, de seguida, da exponencial (no segundo caso composta com $u = -x$) tem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2}{e^x - e^{-x}} \right)' = \frac{0 - 2(e^x - e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-2(e^x)' + 2(e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})^2} = \\ &= \frac{-2e^x + 2(-1)e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-2e^x - 2e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}. \end{aligned}$$

7. Calculemos a derivada da função $f(x) = e^{\sin^2(3x)}$.

De imediato temos uma situação do tipo e^u , com $u = \sin^2(3x)$, pelo que

$$f'(x) = \left(e^{\sin^2(3x)} \right)' = (\sin^2(3x))' e^{\sin^2(3x)}.$$

Para prosseguir, comecemos por recordar que

$$\sin^2(3x) = [\sin(3x)]^2$$

tornando bem evidente que se trata de uma situação do tipo u^α , com $\alpha = 2$ e $u = \sin(3x)$, pelo que

$$(\sin^2(3x))' = 2(\sin(3x))' \sin(3x) = 2(3 \cos(3x)) \sin(3x)$$

visto que esta última situação é do tipo $\sin(u)$, com $u = 3x$.

Portanto

$$\left(e^{\sin^2(3x)} \right)' = 6 \cos(3x) \sin(3x) e^{\sin^2(3x)}.$$

8. Calculemos a derivada da função $f(x) = \ln(-x)$.

(Note-se que a função está definida para todos os valores de x tais que $-x > 0$, ou seja, em $]-\infty, 0[.$)

Trata-se de uma situação do tipo $\ln u$, com $u = -x$, pelo que

$$f'(x) = (\ln(-x))' = (-x)' \frac{1}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

9. Calculemos a derivada da função $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3x+4}}\right)$.

Poderíamos derivar logo o logaritmo, mas é muito mais simples começarmos por transformar a função, recorrendo às propriedades do logaritmo:

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3x+4}}\right) = \ln\left((3x+4)^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2} \ln(3x+4).$$

Portanto

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2} \ln(3x+4)\right)' = -\frac{1}{2} \frac{(3x+4)'}{3x+4} = \frac{-\frac{3}{2}}{3x+4}.$$

10. Calculemos a derivada da função $f(x) = \arcsen(e^{1-x})$.

Trata-se de uma situação de função composta do tipo $\arcsen u$, com $u = e^{1-x}$, pelo que

$$f'(x) = (\arcsen(e^{1-x}))' = \frac{(e^{1-x})'}{\sqrt{1-(e^{1-x})^2}}.$$

Como

$$(e^{1-x})' = -e^{1-x}$$

então

$$f'(x) = \frac{-e^{1-x}}{\sqrt{1-e^{2-2x}}}.$$

1.17 Soluções dos exercícios propostos

1: $4x^3 - 36x^2 + 4x + 1$.

2: $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} + 6x^2 + 1$.

3: $\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$.

4: $(f(x)g(x))' = 45x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 2x + 1$, $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{9x^2+2x+1}{(3x^3+x^2+x)^2}$,

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{9x^4+6x^2+2x+1}{(3x^2+1)^2}$.

5: $-\frac{2}{3}$, $x + \frac{5}{2}$, $x + 1 - \frac{1}{x^3}$, $-\frac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}}$, $\frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}} + \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{1}{15}x^{-\frac{16}{15}}$.

6: $-\operatorname{cosec}^2 x$, $-\operatorname{cosec} x \cot g x$.

7: $3x^2e^x + x^3e^x$, $\ln x + 1$.

8: -

9: $-6x^2 \sin(2x^3)$, $(6x + 2)e^{3x^2+2x}$, $\frac{2x}{x^2-1}$.

10: $\cos x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arccotg}(x) - \frac{1}{1+x^2} \arccos x$.

1.18 Ficha 1 de exercícios

Calcule as derivadas das seguintes funções:

- | | | |
|------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $x^2 + \frac{x}{3} - 2$; | 2. $\frac{x}{x+1}$; | 3. $2x\sqrt{x+1}$; |
| 4. $\sqrt{2x^2+1}$ | 5. $\frac{1}{(x+1)^x}$; | 6. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$; |
| 7. x^2e^x ; | 8. $\frac{\ln x}{x}$; | 9. $\cos(e^x)$; |
| 10. $\frac{1}{3}\sin(3x)$; | 11. $\operatorname{tg}(3x) + \sec(2x)$; | 12. $\arcsen(5x)$; |
| 13. 2^x ; | 14. $\operatorname{cosec}(x)\cotg(x)$; | 15. $\operatorname{arctg}(-x+1)$. |

1.19 Ficha 2 de exercícios

Calcule as derivadas das seguintes funções:

- | | | |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^4}}{x}$; | 2. $\frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$; | 3. $\frac{1}{\sqrt[3]{(x^6+2x)^2}}$; |
| 4. $\sin^3 x$; | 5. $\sin x^3$; | 6. $\cos^5(3x)$; |
| 7. $\ln(1-x)$; | 8. $\ln x^2$; | 9. $\ln^2 x$; |
| 10. $\ln(\ln x)$; | 11. $\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; | 12. 2^{2^x} ; |
| 13. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$; | 14. $\frac{1}{10}\operatorname{arctg}^2(5x)$; | 15. $\arccos^3(\sqrt{1-x})$. |

1.20 Soluções da Ficha 1

1. $2x + \frac{1}{3}$; 2. $\frac{1}{(x+1)^2}$; 3. $\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$;
4. $\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$; 5. $-\frac{2}{(x+1)^3}$; 6. $-(x+1)^{-\frac{3}{2}}$;
7. $(x^2+2x)e^x$; 8. $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 9. $-e^x \sin(e^x)$;
10. $\cos(3x)$; 11. $3 \sec^2(3x) + 2 \sec(2x) \operatorname{tg}(2x)$; 12. $\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$;
13. $2^x \ln 2$; 14. $-\operatorname{cosec}(x) \cotg^2(x) - \operatorname{cosec}^3(x)$; 15. $-\frac{1}{x^2-2x+2}$.

1.21 Soluções da Ficha 2

1. $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; 2. $-\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{6}(x+1)^{-\frac{5}{6}}$; 3. $-\frac{2}{3}(6x^5+2)(x^6+2x)^{-\frac{5}{3}}$;
4. $3 \sin^2 x \cos x$; 5. $3x^2 \cos x^3$; 6. $-15 \cos^4(3x) \sin(3x)$;
7. $-\frac{1}{1-x}$; 8. $\frac{2}{x}$; 9. $\frac{2}{x} \ln x$;
10. $\frac{1}{x \ln x}$; 11. $\frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$; 12. $2^{x+2^x} \ln^2 2$;
13. $\frac{x}{4+x^4}$; 14. $\frac{\operatorname{arctg}(5x)}{1+25x^2}$; 15. $\frac{3}{2} \frac{\arccos^2(\sqrt{1-x})}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.