IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

Departamento de Matemática
Análise Numérica
Exame Final Época Especial
18 de setembro de 2020
Duração 2h30min

---

1. Numa máquina os números são guardados com representação octal em ponto flutuante e arredondamento simétrico com 5 algarismos significativos. Foram guardados os valores $a, b \in \mathbb{R}$ arredondados como:

$$a^* = (7.1142)_8 \cdot 8^{-3}, \qquad b^* = (2.2055)_8 \cdot 8^{-2}$$

e pretendemos estimar $f(a, b) = a^{1/2} \cdot b^{1/3} - b$

(a) `[1v]` Identifique, com notação em base 10, quais são os valores a^*, b^* e o valor $f(a^*, b^*)$

(b) `[1v]` Determine o vetor gradiente da função

$$f(x, y) = x^{1/2} \cdot y^{1/3} - y$$

no ponto (a^*, b^*).

(c) `[1.5v]` Identifique qual é o erro absoluto máximo que podemos estar a cometer em a^*, b^* como aproximações de a, b e indique o erro absoluto máximo que poderíamos esperar em $f(a^*, b^*)$ como aproximação de $f(a, b)$.

(d) `[1.5v]` Programe em sintaxe Matlab uma função que usa os valores x, y como argumentos de entrada, sendo o vetor gradiente de f no ponto (x, y) o valor de saída.

2. Considere a equação matricial $A \cdot X = B$, onde:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \qquad A = U^t \cdot U, \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

(a) `[1.5v]` Determine a inversa e o número de condição para erros relativos da matriz U, aplicando a norma-infinito.

(b) `[1.5v]` Determine a função de iteração $G(X)$ do método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema $A \cdot X = B$, e justifique se este método é convergente.

(c) `[1.5v]` Resolva o sistema $A \cdot X = B$ com ajuda da decomposição de Cholesky da matriz A.

3. Para $x > 0$, a equação $x^x = 6$ pode ser escrita de forma equivalente como $x \cdot \ln x = \ln 6$

   (a) `[1.5v]` Elabore um código em sintaxe Matlab que, a partir do valor guardado na variável n, gera o valor obtido por aplicação do algoritmo de bissecção, iterado n vezes, no intervalo $[2, 2.4]$, para a função
   $$f(x) = x^x - 6$$

   (b) `[1.5v]` Aplique iterações do método de Newton-Raphson, para a função
   $$h(x) = x \cdot \ln x - \ln 6$$
   até encontrar um ponto $x \in [2, 2.4]$ onde $|x^x - 6| \leq 10^{-4}$.

   (c) `[1.5v]` Prove que a solução das equações indicadas é um ponto fixo de
   $$g(x) = 6^{1/x}$$
   e justifique se a iteração de g é convergente a partir de pontos numa vizinhança do ponto fixo.

4. Para uma determinada função definida no intervalo $[-4, 4]$ foram observados os seguintes valores:

x	-4	-2	2	4
f(x)	8	11	12	8

   (a) `[1.5v]` Determine o polinómio interpolador associado aos valores de f em todos os nós dados na tabela (sem desenvolve em potências de x) e use-o para estimar o valor de $f(1)$.

   (b) `[1v]` Sabendo que $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 3$, determine um majorante do erro absoluto cometido na estimativa calculada.

5. Considere a função
   $$f(x) = \frac{1000}{x^4 + x^2 + x + 1}$$
   Pretendemos dar um valor aproximado de $I = \displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   (a) `[1.5v]` Identifique a regra de quadratura que aproxima I com grau de exatidão 2 e com nós em $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Determine o correspondente valor aproximado do integral I para a função $f(x)$ dada.

   (b) `[1v]` Aplique uma regra de quadratura de Simpson simples para dar uma estimativa do integral I

   (c) `[1v]` Programe um código Matlab para calcular um valor aproximado do integral I, que use a regra de quadratura do trapézio composta, e utilize o valor de f em 41 nós.

Questão 1:

[a] Os valores arredondados guardados na máquina são:

$$a^* = (7.1142)_8 \cdot 8^{-3} = (71142)_8 \cdot 8^{-7} = (2 + 8 \cdot (4 + 8 \cdot (1 + 8 \cdot (1 + 8 \cdot 7)))) \cdot 8^{-6} =$$
$$= 29282 \cdot 8^{-7} = \frac{14641}{1048576} \simeq 0.013963$$
$$b^* = (2.2055)_8 \cdot 8^{-2} = (22055)_8 \cdot 8^{-6} = (5 + 8 \cdot (5 + 8 \cdot (0 + 8 \cdot (2 + 8 \cdot 2)))) \cdot 8^{-6} =$$
$$= 9261 \cdot 8^{-6} = \frac{9261}{262144} = 0.035328$$

O valor da função f no ponto (a^*, b^*) é portanto:

$$f(a^*, b^*) = \sqrt{\frac{14641}{1048576}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9261}{262144}} - \frac{9261}{262144} = \frac{121}{1024} \cdot \frac{21}{64} - \frac{9261}{262144} =$$
$$= \frac{121 \cdot 21 \cdot 4 - 9261}{262144} = \frac{903}{262144} \simeq 0.0034447$$

[b] O vetor gradiente da função f em qualquer ponto (x, y) está dado por:

$$\nabla_{(x,y)} f = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y) (x, y)$$

Calcular a derivada parcial com respeito duma variável pode ser feito com ajuda das regras de derivação de funções numa única variável (consideramos as restantes como parâmetros fixos). Portanto consideramos y como constante quando calculamos a derivada parcial na variável x, e consideramos x como constante quando calculamos a derivada parcial na variável y. Aplicamos $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$, $(cte)' = 0$ e a linearidade da derivada, e temos:

$$f = x^{1/2} \cdot y^{1/3} - y \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \cdot y^{1/3} - 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} x^{1/2} \cdot y^{-2/3} - 1$$

Se substituímos no ponto $(x, y) = (a^*, b^*)$ temos:

$$\nabla_{(a*,b^*)} f = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1024}{121} \cdot \frac{21}{64}, \frac{1}{3} \cdot \frac{121}{1024} \cdot \frac{64^2}{21^2} - 1 \right) = \left(\frac{21 \cdot 8}{121}, \frac{4 \cdot 121}{3 \cdot 21^2} - 1 \right) =$$
$$= \left(\frac{168}{121}, \frac{-839}{1323} \right) \simeq (1.38843\,, -0.63416)$$

[c] Como os arredondamentos da máquina são simétricos com 5 algarismos significativos, e como a^* tem expoente -3 (em base octal) temos:

$$a^* - \frac{1}{2}(0.0001)_8 \cdot 8^{-3} \leq a \leq a^* + \frac{1}{2}(0.0001)_8 \cdot 8^{-3}$$

Análogamente, para b^*, com expoente -2 temos

$$b^* - \frac{1}{2}(0.0001)_8 \cdot 8^{-2} \leq b \leq b^* + \frac{1}{2}(0.0001)_8 \cdot 8^{-2}$$

Portanto deduzimos majorantes para o erro cometido na aproximação de a e na aproximação de b:

$$\Delta(a^*, a) = |a^* - a| \leq \frac{1}{2}(0.0001)_8 \cdot 8^{-3} = \frac{1}{2} 8^{-7} \simeq 2.4 \cdot 10^{-7}$$

$$\Delta(b^*, b) = |b^* - b| \leq \frac{1}{2}(0.0001)_8 \cdot 8^{-2} = \frac{1}{2}8^{-6} \simeq 1.9 \cdot 10^{-6}$$

O erro absoluto de a^* como aproximação de a não é superior a $2.4 \cdot 10^{-7}$, e o erro absoluto de b^* como aproximação de b não é superior a $1.9 \cdot 10^{-6}$.

Se usamos a fórmula de propagação do erro, a partir do gradiente calculado em (a^*, b^*) temos:

$$\begin{aligned}\Delta(f(a^*, b^*), f(a, b)) &\simeq \left|\left(\nabla_{(a^*,b^*)} f\right) \cdot (a^* - a, b^* - b)\right| \leq \\ &\leq \frac{168}{121} \cdot 2.4 \cdot 10^{-7} + \frac{839}{1323} \cdot 1.9 \cdot 10^{-6} \simeq 1.54 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

O erro absoluto de $f(a^*, b^*)$ como aproximação de $f(a, b)$ não será superior a $1.6 \cdot 10^{-6}$

`[d]` Tendo em conta as derivadas parciais já calculadas, a função pedida poderia ser programada através do seguinte código:

```
function vetor=gradiente(x,y)
dfdx=(1/2)*power(x,-1/2)*power(x,1/3);
dfdy=(1/3)*power(x,1/2)*power(x,-2/3)-1;
vetor=[dfdx,dfdy];
end;
```

Questão 2:

`[a]` Comecemos por calcular a inversa de U. A inversa U^{-1} é uma solução da equação matricial $U \cdot X = \mathrm{Id}_4$. Como a matriz U é triangular superior, podemos encontrar a solução através do método de substituição inversa. Se chamamos x_1, x_2, x_3, x_4 as linhas (incógnitas) da matriz X, a igualdade $U \cdot X = \mathrm{Id}_4$ produz o seguinte sistema triangular:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 2x_4 &= [1\,0\,0\,0] \\ -x_2 + x_3 &= [0\,1\,0\,0] \\ x_3 - x_4 &= [0\,0\,1\,0] \\ x_4 &= [0\,0\,0\,1] \end{aligned}$$

Começamos a resolver em ordem inverso, a começar pela última equação, e a substituir as incógnitas já calculadas, nas equações anteriores:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 2x_4 &= [1\,0\,0\,0] \\ -x_2 + x_3 &= [0\,1\,0\,0] \\ x_3 - x_4 &= [0\,0\,1\,0] \\ \boxed{x_4} &= [0\,0\,0\,1] \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_3 &= [1\,0\,0\,-2] \\ -x_2 + x_3 &= [0\,1\,0\,0] \\ \boxed{x_3} &= [0\,0\,1\,1] \\ \boxed{x_4} &= [0\,0\,0\,1] \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= [1\,0\,-1\,-3] \\ -x_2 &= [0\,1\,-1\,-1] \\ \boxed{x_3} &= [0\,0\,1\,1] \\ \boxed{x_4} &= [0\,0\,0\,1] \end{aligned}$$

Obtemos finalmente a solução

$$\begin{aligned} \boxed{x_1} &= [1\,0\,-1\,-3] \\ \boxed{x_2} &= [0\,-1\,1\,1] \\ \boxed{x_3} &= [0\,0\,1\,1] \\ \boxed{x_4} &= [0\,0\,0\,1] \end{aligned} \Rightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Queremos agora o número de condição $k(U) = \|U\| \cdot \|U^{-1}\|$. Para calcular a norma da matriz, estamos a usar a norma matricial induzida pela norma-infinito. Devemos calcular a norma-1 de cada linha (soma das entradas em valor absoluto) e identificar qual é a maior destas somas

Para U:

$$\|U\|_\infty = \max(1 + 1 + 2, 1 + 1, 1 + 1, 1) = \max(4, 2, 2, 1) = 4$$

Para U^{-1}:

$$\|U^{-1}\|_\infty = \max(1 + 1 + 3, 1 + 1 + 1, 1 + 1, 1) = \max(5, 3, 2, 1) = 5$$

Concluímos $k(U) = 5 \cdot 4 = 20$

`[b]` A matriz de coeficientes do sistema é a seguinte:

$$A = U^t \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Como esta matriz tem uma decomposição de Cholesky (dada no enunciado), podemos ter a certeza que é simétrica e positiva definida. Sabemos que para matrizes simétricas e positivas definidas, o método de Gauss-Seidel é convergente. No caso dado, este método é, portanto, convergente.

O método de Gauss-Seidel decompõe a matriz A numa triangular inferior Ω e outra triangular superior com diagonal nula, como segue:

$$A = (D{+}L){+}(A{-}D{-}L) \quad \text{onde} \quad D{+}L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad (A{-}D{-}L) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos:

$$A{\cdot}X = B \Leftrightarrow (D{+}L){\cdot}X = B{-}(A{-}D{-}L){\cdot}X \Leftrightarrow X = (D{+}L)^{-1}{\cdot}(B{-}(A{-}D{-}L){\cdot}X)$$

As soluções são os pontos fixos da função de iteração de Gauss-Seidel

$$G(X) = (D+L)^{-1} \cdot (B - (A - D - L) \cdot X)$$

Para identificar a inversa $(D+L)^{-1}$, consideramos a equação $(D+L) \cdot X = \mathrm{Id}$, que representa um sistema triangular onde as incógnitas são x_1, x_2, x_3, x_4, as linhas da matriz inversa $(D+L)^{-1}$, e que podemos resolver por substituição direta:

$$\begin{aligned} \boxed{x_1} &= [1\,0\,0\,0] \\ \boxed{x_2} &= [0\,1\,0\,0] \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= [0\,0\,1\,0] \\ 2x_1 + x_3 + 6x_4 &= [0\,0\,0\,1] \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \boxed{x_1} &= [1\,0\,0\,0] \\ \boxed{x_2} &= [0\,1\,0\,0] \\ 3x_3 &= [-1\,1\,1\,0] \\ x_3 + 6x_4 &= [-2\,0\,0\,1] \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \boxed{x_1} &= [1\,0\,0\,0] \\ \boxed{x_2} &= [0\,1\,0\,0] \\ \boxed{x_3} &= [-1/3\,1/3\,1/3\,0] \\ 6x_4 &= [-5/3\ -1/3\,1-/3\,1] \end{aligned}$$

A função de iteração será, explicitamente, a seguinte:

$$G(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ -5/18 & -1/18 & -1/18 & 1/6 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/3 \\ -7/18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -2/9 & -11/18 \end{bmatrix} \cdot X$$

`[c]` Temos uma decomposição de Cholesky para a matriz A, sabemos que $A = U^t {\cdot} U$ para a matriz triangular U dada no enunciado. Mais ainda, já conhecemos a matriz inversa de U, o qual faz desnecessário ter que aplicar o algoritmo de Gauss para resolver sistemas triangulares dados pela matriz de coeficientes U.

$$A \cdot X = B \Leftrightarrow U^t \cdot U \cdot X = B \Leftrightarrow U \cdot X = (U^t)^{-1} \cdot B = (U^{-1})^t \cdot B$$

$$\Leftrightarrow U \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = U^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Questão 3:

[a] Afirmar $f(x) < 0$ equivale a afirmar $x^x < 6$ e afirmar $f(x) > 0$ equivale a afirmar $x^x > 6$. Em $a = 2$ temos $2^2 = 4 < 6$ e em $b = 2.4$ temos $b^b > 6$, portanto f toma valores com sinal oposto, e por ser contínua o teorema de Bolzano garante que existe um zero da função f no intervalo $[2, 2.4]$.

Se aceitamos que a variável `n` contém o número de iterações, podemos aplicar o algoritmo de bissecção através do seguinte programa Matlab:

```
a=2; b=2.4;
for i=1:n;
m=(a+b)/2;
if(power(m,m)<6) a=m; else b=m; end;
end;
disp((a+b)/2);
```

[b] Calculamos $h'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 0 = 1 + \ln x$. Nos pontos $x \in [2, 2.4]$ temos certeza que $h'(x) > 1 + \ln 2 > 0$, a derivada não se anula e podemos definir neste intervalo a correspondente função de iteração de Newton-Raphson.

A função de iteração de Newton-Raphson associada à função $h(x)$ é a seguinte:

$$g(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)} = x - \frac{x \cdot \ln x - \ln 6}{1 + \ln x} = \frac{x + \ln 6}{1 + \ln x}$$

Se escolhemos um valor inicial próximo do zero de $h(x)$, a sucessão de pontos definidos por $x_{k+1} = g(x_k)$ irá ter um limite que é solução de $h(x) = 0$ e portanto solução de $x^x = 6$. Para algum k portanto $|x_k^{x_k} - 6| < 10^{-4}$.

Calculamos, a partir de x_0, os correspondentes valores $x_k = g(x_{k-1})$ e os erros $|x_k^{x_k} - 6|$. Queremos deter o processo quando este erro seja inferior a 10^{-4}

k	0	1	2
x_k	2	2.239474	2.231836
$\lvert x_k^{x_k} - 6\rvert$	2	0.083354	$7.82 \cdot 10^{-5}$
$x_{k+1} = g(x_k)$	2.239474	2.231836	

Encontramos o valor $x_2 = 2.231836$ que satisfaz a condição exigida.

[c] Podemos aplicar logaritmos em qualquer valor real positivo. Através das propriedades da função logaritmo deduzimos:

$$x^x = 6 \Leftrightarrow \ln(x^x) = \ln 6 \Leftrightarrow x \cdot \ln x = \ln 6 \Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln 6}{x} \Leftrightarrow x = e^{\ln 6/x} = 6^{1/x}$$

Temos assim a equivalência entre ser solução de $x^x = 6$, ou solução de $x \cdot \ln x = \ln 6$, ou solução de $x = 6^{1/x}$. As soluções desta última equação são soluções duma equação $x = g(x)$ com $g(x) = 6^{1/x}$, portanto pontos fixos de g.

Há uma solução $\bar{x}$ de $f(x) = 0$ no intervalo $[2, 2.4]$, portanto existe um ponto fixo de $g(x)$ neste intervalo. Se calculamos a derivada de $g(x)$ temos:

$$g'(x) = \ln 6 \cdot 6^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

No ponto fixo $\bar{x}$ temos $6^{1/\bar{x}} = \bar{x}$, portanto neste ponto $g'(\bar{x}) = (\ln 6) \cdot \frac{-1}{\bar{x}}$, o qual mostra que $|g'(\bar{x})| < \frac{\ln 6}{2} = 0.896 < 1$

Como a função de iteração é diferenciável, com $|g'(\bar{x})| < 1$ no ponto fixo $\bar{x} \in [2, 2.4]$, podemos garantir que existe alguma vizinhança deste ponto onde $g(x)$ é uma contração, a ao iterarmos g a partir de qualquer valor inicial nesta vizinhança, a sucessão criada será convergente ao ponto fixo $\bar{x}$.

Questão 4:

`[a]` Partimos das diferenças divididas de ordem zero $y[x_i] = f(x_i)$ conhecidas, e usamos a fórmula que determina as diferenças divididas de ordem superior a partir de diferenças divididas de ordem menor:

$$y[x_i, \ldots, x_{i+j}] = \frac{y[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] - y[x_i, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

Geramos assim a seguinte tabela

i	x_i	$y[x_i]$	$y[x_i, x_{i+1}]$	$y[x_i, \ldots, x_{i+2}]$	$y[x_i, \ldots, x_{i+3}]$
0	-4	8	3/2	-5/24	-1/48
1	-2	11	1/4	-3/8	
2	2	12	-2		
3	4	8			

Portanto o polinómio interpolador associado é:

$$p_3(x) = 8 + (x+4) \cdot \left(\frac{3}{2} + (x+2) \cdot \left(\frac{-5}{24} + (x-2) \cdot \frac{-1}{48} \right) \right)$$

Podemos usar o valor do polinómio em $x = 1$ como estimativa de $f(1)$:

$$f(1) \simeq p_3(1) = 8 + 5 \cdot \left(\frac{3}{2} + 3 \cdot \left(\frac{-5}{24} + (-1) \cdot \frac{-1}{48} \right) \right) = \frac{203}{16} = 12.6875$$

`[b]` Se usamos a fórmula do erro de interpolação, para qualquer $x \in [-4, 4]$, existe $\xi \in [-4, 4]$ onde:

$$f(x) = p_3(x) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+4)(x+2)(x-2)(x-4)$$

No caso particular $x = 1$ temos:

$$f(1) = p_3(1) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(1+4)(1+2)(1-2)(1-4)$$

Assim deduzimos

$$\left| f(1) - \frac{203}{16} \right| \leq \frac{3}{24} \cdot 45 = \frac{45}{8} = 5.625$$

O erro absoluto cometido não é superior a 45/8

Questão 5

`[a]` A regra de quadratura pedida tem a forma $S(f) = c_0 \cdot f(1) + c_1 \cdot f(2) + c_2 \cdot f(4)$. Os pesos c_0, c_1, c_2 são desconhecidos, mas deveriam satisfazer $S(p) = I(p) = \int_0^4 p(x)\,\mathrm{d}x$ para polinómios $p(x)$ de grau menor ou igual a 2 (o grau de exatidão exigido).

Se estudamos o que acontece com o polinómio $p(x) = (x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$ temos:

$$S(p) = c_0 \cdot (1-2) \cdot (1-4) + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 3c_0$$

$$I(p) = \int_0^4 p(x), \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_0^4 = \frac{64}{3} - 48 + 32 = \frac{16}{3} \Rightarrow c_0 = \frac{16}{9}$$

Se estudamos o que acontece com o polinómio $p(x) = (x-1)(x-4) = x^2 - 5x + 4$ temos:

$$S(p) = c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot (2-1) \cdot (2-4) + c_2 \cdot 0 = -2c_1$$

$$I(p) = \int_0^4 p(x), \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x\right]_0^4 = \frac{64}{3} - 40 + 16 = \frac{-8}{3} \Rightarrow c_1 = \frac{4}{3}$$

Se estudamos o que acontece com o polinómio $p(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ temos:

$$S(p) = c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot (4-1) \cdot (4-2) = 6c_2$$

$$I(p) = \int_0^4 p(x), \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^4 = \frac{64}{3} - 24 + 8 = \frac{16}{3} \Rightarrow c_2 = \frac{8}{9}$$

Os valores c_0, c_1, c_2 ficam assim determinados. A regra de quadratura pedida é portanto

$$S(f) = \frac{1}{9} \cdot (16 \cdot f(1) + 12 \cdot f(2) + 8 \cdot f(3))$$

Para a função considerada temos os valores e pesos da regra de quadratura nos diferentes nós:

x_i	1	2	4
$f(x_i)$	1000/4	1000/23	1000/277
c_i	16/9	12/9	8/9

sendo portanto o valor aproximado do integral o seguinte:

$$I(f) \simeq S(f) = \sum c_i \cdot f(x_i) = \frac{227531}{450} \simeq 505.62$$

`[b]` A regra de quadratura de Simpson simples aplicada na função f no intervalo $[0, 4]$ indica que

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{4-0}{6}\,(f(0) + 4 \cdot f(2) + f(4)) =$$
$$= \frac{4}{6}\left(1000 + 4 \cdot \frac{1000}{23} + \frac{1000}{277}\right) = \frac{254345}{324} \simeq 785.02$$

[c] Numa regra do trapézio composta onde usamos 41 nós, estamos a dividir o intervalo de integração em 40 subintervalos. Os limites esquerdo e direito destes intervalos são então os 41 nós exigidos $x_k = 0 + k \cdot 4/40 = k \cdot 0.1$, onde $k = 0, 1, \ldots, 40$. A regra composta calcula a soma dos valores correspondentes a aplicar a fórmula do trapézio $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b))$ em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, com $k = 1, 2, \ldots, 40$. Portanto um código possível para executar esta tarefa seria:

```
s=0;
for k=1:40;
a=(k-1)*0.1; b=k*0.1;
fa=1000/(1+a+power(a,2)+power(a,4));
fb=1000/(1+b+power(b,2)+power(b,4));
s=s+(0.1/2)*(fa+fb);
end; disp(s);
```

Observação: A resolução do teste contém processos incluídos nas sebentas e materiais usados no curso de Análise Numérica 2019/2020. Existem muitos processos alternativos que levam à resolução das questões dadas no enunciado. Alguns destes processos podem ser encontrados no material disponibilizado com o curso, e alguns em outros livros ou materiais de estudo. A justificação das respostas aqui apresentada é, portanto, só uma de muitas possíveis resoluções que poderiam ser aceites.