IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA I

1º SEMESTRE 2018/2019

Exame - Época de Recurso

18 de Fevereiro de 2019 Duração: **2h30**

Instruções:

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- Não pode responder a diferentes questões numa mesma folha de resposta.
- O abandono da sala só poderá efectuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É permitida a consulta de uma folha A4 manuscrita pelo aluno.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de equipamentos electrónicos durante a prova.
- **Justifique convenientemente todas as respostas**.

[2.0] 1. Considerando a restrição principal do coseno, caracterize a função inversa de

$$f(x) = -1 + 3\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

2. Considere k um número real e f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & , x \leq -1 \\ \operatorname{arcsen} x & , -1 < x < 1 \\ k \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & , x > 1 \end{cases}.$$

[1.5] (a) Indique o domínio e estude a função quanto à continuidade.

[1.5] (b) Determine o valor de k de forma a que f seja prolongável por continuidade a $\mathbb{R}$.

[1.5] (c) Calcule o valor médio de f no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3. Seja g uma função contínua em $\mathbb{R}$ com $g(0) = 2$ e seja f uma função definida por

$$f(x) = 1 + xg(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

[1.5] (a) Usando a definição de derivada, prove que $f'(0) = 2$.

[1.0] (b) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

[2.0] 4. Utilize o polinómio de Mac-Laurin de ordem 2 para calcular um valor aproximado de $\sqrt[10]{e}$.

5. Calcule:

[1.0] (a) $P\left[(3x + 3\cos(2x))\, e^{x^2+\operatorname{sen}(2x)}\right]$;

[2.0] (b) $P\left[\dfrac{3x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2(1 + 2x^2)}\right]$;

[2.0] (c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x + x\ln^2 x}\,dx.$

6. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & , x > 0 \end{cases}.$$

[1.5] (a) Determine a expressão de $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt.$

[1.0] (b) Considere a restrição de f para $x > 0$ e a função H definida por

$$H(x) = \int_{x^2-1}^{2} e^{f(t)}dt.$$

Calcule, justificando, $H'(1)$.

[1.5] 7. Considere a região do plano definida pelas seguintes condições:

$$y \leq e^x, \quad y \geq 0 \text{ e } x \leq 1.$$

Faça o esboço da região e calcule o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno do eixo dos xx.

Fim do exame