Primitivação de funções racionais

Nesta folhas pretende-se apresentar o método de primitivação de funções racionais, ou seja, de funções que se podem escrever como quociente de dois polinómios.

O procedimento consiste em efectuar a **decomposição da função racional** numa soma de fracções elementares (eventualmente, somadas com um polinómio) e seguidamente primitivar estas funções. Este método é, basicamente, um algoritmo, cujos passos irão ser ilustrados, ao longo das folhas, por meio das funções do exemplo que se segue.

Exemplo:

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$;
2. $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$;
3. $h(x) = \frac{2x^2+1}{2x^3+2x^2}$;
4. $j(x) = \frac{4x^2+3x+5}{x^3+2x^2+5x}$.

Definição: Chama-se **função racional** a qualquer função que se possa escrever na forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, com $P(x)$ e $Q(x)$ polinómios de coeficientes reais.

A **função racional** diz-se **própria** se o grau de $P(x)$ é estritamente menor do que o grau de $Q(x)$ e diz-se **imprópria** caso contrário.

Notação: Representa-se por $gr\left(P(x)\right)$ o grau do polinómio $P(x)$.

Exemplo:
Todas as funções referidas no exemplo inicial são funções racionais.
A primeira é uma função racional imprópria, as restantes são próprias.

Regra Fundamental: Ao primitivar, trabalhar-se sempre com funções racionais próprias.

Passo 1:
Verifica-se se a função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *é própria.*
Se é própria, segue-se para o Passo 2.
Se não é própria, escreve-se a função na forma

$$\boxed{\textit{polinómio} + \textit{função racional própria.}}$$

Fica-se, assim, com a soma de uma primitiva imediata e de uma primitiva duma função racional própria.

- Qualquer função racional imprópria $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pode escrever-se como soma de um polinómio e uma função racional própria.

  Basta fazer a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$.

  Proposição (Regra da divisão):

  Sendo $P(x)$ um polinómio e $Q(x)$ um polinómio de grau ≥ 1, existem polinómios $C(x)$ e $R(x)$, univocamente determinados, tais que

$$\underbrace{P(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{Divisor}}.\underbrace{C(x)}_{\text{Quociente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Resto da div.}}, \text{ com } gr(R(x)) < gr(Q(x)).$$

  Então

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{C(x)}_{\text{polin.}} + \underbrace{\frac{R(x)}{Q(x)}}_{\text{f. racional própria}}.}$$

Exemplifique-se:

As funções g, h e j são funções racionas próprias, pelo que, na primitivação, passa-se logo ao Passo 2.

A função f é imprópria, pelo que vai ser escrita na forma acima indicada. Divide-se o numerador pelo denominador

$$\begin{array}{r|l}
x^2+1 & x-1 \\ \cline{2-2}
-x^2+x & x+1 \\ \cline{1-1}
x+1 & \\
-x+1 & \\ \cline{1-1}
2 & \quad \rightarrow \quad \text{tem o grau estritamente menor que } Q(x)
\end{array}$$

Então,

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+2}{x-1} = \underbrace{x+1}_{\text{polin.}} + \underbrace{\frac{2}{x-1}}_{\text{f. rac. própria}}$$

pelo que

$$Pf(x) = P\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right) = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C,$$

onde C é uma constante real.

Como a função foi decomposta numa soma de primitivas imediatas, calculou-se já a primitiva (executou–se já o Passo 4 do método).

Resta-nos ver como primitivar funções racionais próprias.

Seja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional própria.

Passo 2: *Decompõe-se* $Q(x)$, *tanto quanto possível, como produto de factores mais simples.*

Tenha-se presente que:

- Qualquer polinómio $Q(x)$, de grau ≥ 1, pode decompôr-se como produto de:

  - constantes,

  - factores da forma $(x-r)^s$, c/ $s \in \mathbb{N}$, $\rightarrow$ $\boxed{\text{factores correspondentes aos zeros reais}}$

  - factores da forma $(\underbrace{x^2+bx+c}_{\downarrow})^k$, c/ $k \in \mathbb{N}$, $\rightarrow$ $\boxed{\text{factores correspondentes a pares de zeros complexos conjugados}}$

  $\boxed{\text{polin. de grau 2 } \underline{\underline{\textbf{sem zeros reais}}}}$

  $\underline{\underline{\text{agrupando-se os factores correspondentes aos mesmos zeros.}}}$

  $\rightarrow$ s é a **multiplicidade do zero** real r

  $\rightarrow$ k é a multiplicidade dos zeros de x^2+bx+c (que são dois complexos conjugados)

  Então, $Q(x)$ fica escrito na forma

$$\boxed{Q(x) = \underbrace{a}_{\text{constante}} \times \underbrace{(x-r_1)^{s_1} \times \cdots}_{\text{factores corresp. aos zeros reais}} \times \underbrace{\left(x^2+b_1\,x+c_1\right)^{k_1} \times \cdots}_{\text{factores correspondentes a pares de zeros complexos conjugados}}}$$

Nota: Convém recordar a Regra de Ruffini, que poderá ser necessária, se o grau do polinómio for maior que 2.

Exemplifique-se:

Considerem-se os denominadores das funções g, h e j.
As suas factorizações são:

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \quad \rightarrow \quad$ o polinómio tem dois zeros reais, 1 e -1 (ambos com multiplicidade 1);

$2x^3 + 2x^2 = 2x^2(x+1) \quad \rightarrow \quad$ o polinómio tem dois zeros reais, 0 (com multiplicidade 2) e -1 (com multiplicidade 1);

$x^3 + 2x^2 + 5x = x\underbrace{\left(x^2 + 2x + 5\right)}_{\text{sem zeros reais}} \quad \rightarrow \quad$ o polinómio inicial tem um zero real, 0 (com multiplicidade 1), e dois zeros complexos conjugados ,$-1 \pm 2i$ (ambos com multiplicidade 1).

Passo 3: *Decompõe-se a função racional própria numa soma de fracções elementares.*

Antes de expôr completamente o Passo 3, veja-se a sua aplicação às funções g, h e j, o que facilitará a compreensão do caso geral.

<u>Para a função g:</u>

$$g(x) = \frac{1}{x^2-1} = \underbrace{\frac{1}{(x-1)(x+1)}}_{\text{dois zeros reais c/ mult.1}}.$$

Será explicado no caso geral que, *como os zeros do denominador são dois reais,* 1 *e* -1, *com multiplicidade* 1, determinam-se dois números reais, A e B, tais que

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Calculam–se estes valores pelo **método dos coeficientes indeterminados**:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

logo

$$1 = A(x+1) + B(x-1) \Leftrightarrow 1 = (A+B)x + (A-B).$$

Note-se que não estamos à procura das soluções da equação, mas dos valores de A e B para os quais os dois polinómios são iguais, o que é equivalente a

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} B=-\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Então,

$$g(x)=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}.$$

pelo que

$$Pg(x)=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C,$$

onde C é uma constante real.

Determinou-se já a primitiva, pois g foi transformada numa soma de funções imediatamente primitiváveis (executou–se já o Passo 4 do método).

Para a função h:

$$h(x)=\frac{2x^2+1}{2x^3+2x^2}=\frac{2x^2+1}{2x^2(x+1)}=\frac{1}{2}.\frac{2x^2+1}{x^2(x+1)}.$$

Será explicado no caso geral que, *como os zeros do denominador são dois reais,* 0 *e* -1, *o primeiro com multiplicidade* 2 *e o segundo com multiplicidade* 1, determinam-se três números reais, A, B e C, tais que

$$\frac{2x^2+1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}.$$

Nota: Basicamente, para cada zero real consideram-se tantas parcelas quanto a sua multiplicidade, cujos numeradores são números reais.

Determinam-se os valores de A, B e C, pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{2x^2+1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}\Leftrightarrow\frac{2x^2+1}{x^2(x+1)}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

logo

$$2x^2+1=Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2\Leftrightarrow 2x^2+1=(A+C)x^2+(A+B)x+B.$$

A partir do sistema de equações, conclui-se que

$$A = -1, \quad B = 1 \quad \text{e} \quad C = 3$$

pelo que

$$\frac{2x^2+1}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1}.$$

Pode-se calcular já a primitiva de h, executando o Passo 4 do método:

$$Ph(x) = P\left[\frac{1}{2}\frac{2x^2+1}{x^2(x+1)}\right] = \frac{1}{2}P\left[\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1}\right]$$

portanto

$$Ph(x) = \frac{1}{2}\left(-\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + 3\ln|x+1|\right) + C = -\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2x} + \frac{3}{2}\ln|x+1| + C,$$

onde C é uma constante real.

<u>Para a função j:</u>

$$j(x) = \frac{4x^2+3x+5}{x^3+2x^2+5x} = \frac{4x^2+3x+5}{x\underbrace{(x^2+2x+5)}_{\text{sem zeros reais}}}.$$

Será explicado no caso geral que, *como o denominador tem um zero real,* 0 (*com multiplicidade* 1), *e dois zeros complexos conjugados* ,$-1 \pm 2i$ *(ambos com multiplicidade* 1*)*, determinam-se três números reais, A, B e C, tais que

$$\frac{4x^2+3x+5}{\underbrace{x(x^2+2x+5)}_{\text{sem zeros reais}}} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}.$$

Nota: Será visto no caso geral que, tal como se verifica para cada zero real, *para cada par de zeros complexos conjugados (ou seja, para cada polinómio de grau dois, sem zeros reais) consideram-se tantas parcelas quanto a sua multiplicidade, com a diferença que no numerador temos que contar com um polinómio de grau menor ou igual a* 1 (é claro que, caso B seja zero, o numerador será um número real).

Então

$$\frac{4x^2+3x+5}{\underbrace{x(x^2+2x+5)}_{\text{sem zeros reais}}} = \frac{A(x^2+2x+5) + x(Bx+C)}{x(x^2+2x+5)}$$

donde se conclui que $A = 1$, $B = 3$ e $C = 1$, pelo que

$$j(x) = \frac{4x^2+3x+5}{x^3+2x^2+5x} = \frac{1}{x} + \frac{3x+1}{x^2+2x+5}.$$

Assim,

$$Pj(x) = \ln|x| + P\frac{3x+1}{x^2+2x+5} \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{No Passo 4 veremos como calcular esta primitiva}}$$

Vejamos, então, em que consiste o Passo 3.

Sistematize-se o Passo 3: *Considera-se a decomposição do denominador obtida no Passo 2 e determina-se:*

- *para cada factor $(x-r)^s$* *uma expressão da forma*

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_s}{(x-r)^s} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{n}^o \text{ de parcelas} = s = \\ = \text{multiplicidade do zero real } r\end{array}}$$

- *para cada factor $(x^2+bx+c)^k$* *uma expressão da forma*

$$\frac{D_1+E_1x}{x^2+bx+c} + \frac{D_2+E_2x}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{D_k+E_k\,x}{(x^2+bx+c)^k}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{n}^o \text{ de parcelas} = k = \text{multiplicidade dos zeros} \\ \text{complexos associados a } x^2+bx+c\end{array}}$$

de tal modo que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ seja soma de todas estas parcelas.

Definição: Chamam-se **fracções elementares** (ou **fracções simples**) às funções racionais da forma

$$\frac{A}{(x-r)^n} \quad \text{ou} \quad \frac{D+Ex}{\underbrace{(x^2+bx+c)}_{\textbf{sem zeros reais}}{}^m}.$$

- **Proposição:** Toda a função racional própria pode ser decomposta, de modo único, numa soma de fracções elementares.

Tal como se fez nos exemplos, esta decomposição pode ser obtida pelo método dos coeficientes indeterminados.

Passo 4 (e último!): *Determinam-se as primitivas das fracções elementares.*

Tal como foi feito para as primitivas das funções g, h e para a primeira parcela da função j, é fácil ver que:

- *as zeros reais conduzem sempre a situações de logaritmo e/ou potência.*

  De facto,

$$\boxed{P\left[\frac{A}{(x-r)^n}\right] = \begin{cases} A\ln|x-r| + C, & \underline{\underline{\text{se } n=1}} \\ P\left[A\,(x-r)^{-n}\right] = A\frac{(x-r)^{-n+1}}{-n+1} + C, & \text{se } n>1, \end{cases}}$$

  com C constante real.

Falta, apenas, ver como primitivar as parcelas associadas aos zeros complexos.
Concluir-se-á que

- *os polinómios de grau 2 sem zeros reais conduzem sempre a situações de logaritmo e/ou arcotangente.*

Considere-se uma parcela da forma $\frac{D+Ex}{x^2+bx+c}$, em que x^2+bx+c não tem zeros reais.

Neste caso é, em geral, útil decompor o polinómio na forma

$$x^2+bx+c = (x+p)^2 + q^2,$$

com e p e q números reais.

A decomposição pode ser feita formando o quadrado (verificar-se-á que pode considerar-se $p=\frac{b}{2}$ e $q=\sqrt{c-\left(\frac{b}{2}\right)^2}$) e pode também ser feita a partir dos zeros do polinómio - é fácil provar que os zeros do polinómio são iguais a $-p \pm qi$.

Exemplifique-se:

Considere-se o polinómio de grau 2, sem zeros reais, que se obteve na decomposição do denominador da função j.

Pode-se formar o quadrado, fazendo simplesmente

$$x^2 + 2x + 5 = \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2}\underbrace{-1 + 5}_{4} = (x+1)^2 + 4.$$

Pode-se também decompor o polinómio recordando que os zeros de x^2+2x+5 são $-1\pm 2i$, pelo que $p = 1$ e $q = 2$, logo $x^2+2x+5 = (x+1)^2+2^2$.

Primitivação:

A primitivação destas parcelas pode ser feita directamente (*sabendo que será um logaritmo, um arcotangente ou uma soma de um logaritmo e um arcotangente)* ou efectuando a mudança de variável

$$\boxed{x + p = qt.}$$

Estamos, finalmente, em condições de determinar

$$P\frac{3x+1}{x^2+2x+5}$$

e concluir a primitivação da função j.

1º Processo (fazem-se directamente as contas):

Tendo em conta que a derivada do denominador é $2x + 2$, as contas são feitas de modo a que surjam as parcelas do logaritmo e do arcotangente:

$$\begin{aligned}
P\frac{3x+1}{(x+1)^2+4} &= P\frac{\overbrace{3x+3}^{3(x+1)}\ \overbrace{-3+1}^{-2}}{(x+1)^2+4} = \frac{3}{2}P\frac{2x+2}{(x+1)^2+4} - P\frac{2}{(x+1)^2+4} = \\
&= \frac{3}{2}\ln|\underbrace{(x+1)^2+4}_{>0}| - P\left[\frac{1}{4}.\frac{2}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\right] = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left[(x+1)^2+4\right] - P\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left[(x+1)^2+4\right] - \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C,
\end{aligned}$$

onde C é uma constante real.

2º Processo (por mudança de variável):

A sugestão feita para a mudança de variável, $x + p = qt$, conduz a

$$x + 1 = 2t,$$

pelo que

$$x = 2t - 1, \qquad \varphi(t) = 2t - 1 \quad \text{e} \quad \varphi'(t) = 2.$$

Fazendo a substituição na primitiva

$$P\frac{3x+1}{x^2+2x+5} = P\frac{3x+1}{(x+1)^2+2^2}$$

obtém-se a primitiva

$$P\left(2.\frac{3(2t-1)+1}{(2t)^2+2^2}\right) = P\left(2.\frac{6t-2}{2^2t^2+2^2}\right) = P\frac{3t-1}{t^2+1}$$

onde

$$P\frac{3t-1}{t^2+1} = \frac{3}{2}P\frac{2t}{t^2+1} - P\frac{1}{1+t^2} = \frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right) - \arctan t + C.$$

Portanto

$$P\frac{3x+1}{x^2+2x+5} = \frac{3}{2}\ln\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right] - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

Pelo que foi feito no final do exemplo ilustrativo do Passo 3, conclui-se que

$$Pj(x) = \ln|x| + P\frac{3x+1}{x^2+2x+5} = \ln|x| + \frac{3}{2}\ln\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right] - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Tal como já se referiu, e se verificou neste caso, as parcelas associadas a polinómios de grau 2 sem zeros reais conduzem *a funções logaritmo e/ou arcotangente.*

É um bom exercício provar que

- se $x^2 + bx + c$ é um polinómio sem zeros reais, que se pode escrever na forma $(x+p)^2 + q^2$, então

$$\boxed{P\left[\tfrac{D+Ex}{x^2+bx+c}\right] = \tfrac{E}{2}\ln\left((x+p)^2 + q^2\right) + \tfrac{(D-Ep)}{q} arctg\left(\tfrac{x+p}{q}\right) + C.}$$

Nota:

1. Na primitiva anterior tem-se que:

- se $E = 0$, trata-se de um arcotangente;

- se $E \neq 0$, trata-se de um logaritmo, um arcotangente ou uma soma de um logaritmo e um arcotangente.

2. Não há problemas com o denominador, visto que $q \neq 0$, senão não se estaria no caso de um polinómio sem zeros reais.

Atenção: Nunca se deve aplicar um método cegamente!

Considere-se

$$P\frac{9x^2 + 12x + 15}{x^3 + 2x^2 + 5x}.$$

Seria uma desagradável surpresa efectuar-se todo um trabalho análogo ao da primitiva de j e depois descobrir-se que bastaria fazer

$$P\frac{9x^2 + 12x + 15}{x^3 + 2x^2 + 5x} = 3P\frac{3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = 3\ln\left|x^3 + 2x^2 + 5x\right| + C.$$

Termina-se com a situação que é, claramente, mais complicada, a qual se apresenta a título informativo.

- Parcelas da forma $\frac{D+Ex}{(x^2+bx+c)^k}$, c/ $k > 1$, em que $x^2 + bx + c$ não tem zeros reais:

  Decompõe-se o polinómio como no caso anterior *e efectua-se a mesma mudança de variável*, com o que se reduz esta situação ao cálculo de uma primitiva imediata e de uma primitiva da forma

$$P\left[\frac{1}{(1+t^2)^k}\right].$$

  Esta primitiva (c/ $k > 1$) determina-se por partes do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+t^2)^k} &= \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^k} = \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^k} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \frac{1}{2}\underbrace{t}_{f}\underbrace{\frac{2t}{(1+t^2)^k}}_{g'}\end{aligned}$$

e baixa-se sucessivamente o grau do denominador.

Assim, por exemplo, para o caso $k = 2$:

$$\begin{aligned}P\left[\frac{1}{(1+t^2)^2}\right] &= P\left(\frac{1}{1+t^2}\right) - \frac{1}{2}P(\underbrace{t}_{f}\underbrace{\frac{2t}{(1+t^2)^2}}_{g'}) = \\ \underset{g=-(1+t^2)^{-1}}{\text{pois}}\Bigg| \quad &= P\left(\frac{1}{1+t^2}\right) - \frac{1}{2}\left[-t\frac{1}{1+t^2} + P\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{1+t^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} + C.\end{aligned}$$