Métodos Numéricos

(Integração numérica)

Miguel Moreira
DMAT

1 Introdução

Em muitas situações, colocadas à engenharia, é necessário conhecer o integral definido

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

sem que o mesmo possa ser cálculado analiticamente:

1. quando a expressão de f é conhecida apenas através de uma tabela ou em resultado de procedimentos experimentais;

2. quando a expressão de f é demasiado complexa, não se conhece uma primitiva de f ou esta não se pode exprimir de forma elementar.

Nestas circunstâncias são utilizados métodos de **integração numérica**.

Basicamente, na integração numérica procuramos aproximar a função f a integrar por uma função p simples de primitivar:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx.$$

Tendo em vista controlar o erro cometido no processo de integração numérica torna-se igualmente necessário saber estimar um majorante E do erro cometido:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,dx \right| \leq E.$$

Seguidamente introduziremos as mais usuais técnicas de integração numéricas, bem como as expressões que nos permitirão controlar os erros cometidos.

2 Regras dos rectângulos

Começaremos por descrever as regras dos rectângulos. Nestas regras, o intervalo de integração $[a, b]$, é particionado em subintervalos no interior de cada qual a função integranda é aproximada por um polinómio de grau zero (isto é, por uma constante adequada).

Suponha-se que o intervalo de integração se encontra particionado num único subintervalo. Então, o procedimento descrito anteriormente conduz-nos às aproximações do integral definido procurado que seguidamente se apresentam.

1. Regra do rectângulo à esquerda:
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f(a)\,dx = (b-a)\,f(a).$$
2. Regra do rectângulo à direita:
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f(b)\,dx = (b-a)\,f(b).$$
3. Regra do ponto médio:
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Se admitirmos que a função f é diferenciável no intervalo de integração, um majorante do erro cometido, na aplicação das regras do **rectângulo à esquerda e à direita**, pode ser determinado com a seguinte expressão:
$$E_R \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|. \tag{1}$$
Com efeito, se f é diferenciável em $[a,b]$, então
$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$
para um certo $c \in \,]a,b[$ (Teorema de Lagrange). Desta forma
$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)-f(a)|\,dx &\leq \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \int_a^b (x-a)\,dx = \\ &= \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b \\ &= \frac{1}{2}(b-a)^2 \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.\end{aligned}$$
Estes argumentos demonstram a veracidade da afirmação (1), no caso em que utilizamos a regra do rectângulo à esquerda, isto é, quando aproximamos $f(x)$ por $f(a)$. Analogamente se demonstra (1) no caso utilizarmos a regra do rectângulo à direita.

No caso de aplicarmos a **regra do ponto médio** e admitirmos que f é e classe C^2 em $[a,b]$, o respectivo majorante do erro de integração pode ser calculado com a seguinte expressão:
$$E_M \leq \frac{1}{24}(b-a)^3 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|. \tag{2}$$

Notemos, que nas condições indicadas

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(c)\frac{(x - x_0)^2}{2},$$

com $x_0 = \frac{a+b}{2}$, para um certo $c \in]a, b[$ (Fórmula de Taylor de f, em x_0, com resto de ordem um). Então, para um certo $c \in]a, b[$

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) - f(a))\,dx &= f'(x_0)\int_a^b (x - x_0)\,dx + \int_a^b f''(c)\frac{(x - x_0)^2}{2}dx \\ &= \int_a^b f''(c)\frac{(x - x_0)^2}{2}dx,\end{aligned}$$

pois $\int_a^b (x - x_0)\,dx = 0$ (Porquê?). Nestas circunstâncias

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x) - f(a)| &\leq \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\int_a^b \frac{(x - x_0)^2}{2}dx \\ &= \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\left.\frac{(x - x_0)^3}{6}\right|_a^b \\ &= \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\left.\frac{(2x - (a + b))^3}{48}\right|_a^b \\ &= \frac{1}{24}(b - a)^3\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|.\end{aligned}$$

Estes factos demonstram (2).

Tendo em vista diminuir o erro cometido na aplicação das regras anteriores, o intervalo de integração pode ser subdividido em diferentes subintervalos, habitualmente de idêntico comprimento, de forma a repetidamente se aplicarem os algorítmos de integração e assim obter as chamadas **regras de integração compostas**. Suponha-se, então, que $[a, b]$ se encontra subdividido em n subintervalos de idêntico comprimento h

$$h = x_k - x_{k-1} = \frac{b - a}{n}, \forall k = 0, \ldots, n.$$

Assim,

$$x_k = a + kh,\ k = 0, \ldots, n.$$

Tomemos, por exemplo, a aplicação repetida da regra do rectângulo à esquerda. Ter-se-á:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,hdx.$$

Notemos que os majorantes dos erros cometidos no cálculo de cada integral $\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx$, da forma atrás indicada, serão

$$E_{R_i} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \max_{x\in[x_i,x_i+h]} |f'(x)|\,,\ i=0,\ldots,n-1.$$

Assim, um majorante E_R^{Composta} do erro total cometido será

$$\begin{aligned} E_R^{\text{Composta}} &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \max_{x\in[x_i,x_i+h]} |f'(x)| \\ &\leq \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|\, \frac{1}{2} n \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|\,, \end{aligned}$$

o que mostra que o procedimento adoptado conduz efectivamente à dimuição do erro no cálculo aproximado do integral, como seria de esperar. Note-se que o erro total E_R^{Composta} tende para zero quando n tende para mais infinito. Argumentos semelhantes permitem chegar a conclusões análogas no tocante à vantagem de aplicar repetidamente também os outros algorimos de integração.

Resumidamente, a aplicação repetida, de cada uma das regras anteriores, em intervalos particionados conduz aos seguintes algoritmos (regras compostas) e correspondentes fórmulas de majoração dos erros:

1. Regra do rectângulo à esquerda **composta** (n subintervalos, $h = \frac{b-a}{n}$):

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left[\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right], \tag{3}$$

Se f diferenciável em $[a,b]$: $E_R^{\text{Composta}} \leq \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ (4)

2. Regra do rectângulo à direita **composta** (n subintervalos, $h = \frac{b-a}{n}$):

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left[\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right], \tag{5}$$

Se f diferenciável em $[a,b]$: $E_R^{\text{Composta}} \leq \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|\,.$ (6)

3. Regra do ponto médio **composta** ($2n$ subintervalos, $h=\frac{b-a}{2n}$):

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq 2h\left[f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2n-1})\right], \tag{7}$$

$$\text{Se } f \text{ é de classe } C^2 \text{ em } [a,b]: E_M^{\text{Composta}} \leq \frac{1}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}\max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|. \tag{8}$$

Exemplo 1 *Estime* $\int_0^1 \sin x dx$ *aplicando a regra do ponto médio utilizando* 10 *subintervalos de idêntico comprimento. Obtenha um majorante do erro cometido.*

Comecemos por observar que $h=1/10$ *e* $n=5$*. Então,*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin x dx &\simeq \sum_{k=0}^{4}\frac{2}{10}\sin\left(\frac{2k+1}{10}\right)\\ &\simeq 0.460\,46\end{aligned}$$

Tendo em vista estimar o erro cometido começemos por calcular

$$\max_{x\in[0,1]}|\sin x| = \sin 1 \simeq 0.841\,47.$$

Assim,

$$E_M^{Composta} \leq \frac{1}{24}\frac{(1-0)^3}{5^2}0.85 \simeq 1.416\,7\times10^{-3}.$$ ■

3 Regra do trapézio

Nas fórmulas anteriores, as funções integrandas eram aproximadas, em cada subintervalo, por polinómios de grau zero. Na chamada regra do trapézio, em cada subintervalo, a função integranda é aproximada por uma função polinomial de grau um, que a interpola nos extremos dos intervalos considerados. Tal aproximação, sendo claramente menos grosseira, deverá conduzir a, comparativamente, menores erros de integração.

Suponha-se, então, que o intervalo de integração se encontra particionado num único subintervalo. Então, o procedimento descrito anteriormente conduznos, sem dificuldade, à seguinte aproximação do integral definido procurado,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{9}$$

a que corresponde o seguinte majorante do erro cometido E_T, admitindo que a função integranda é de classe C^2 em $[a, b]$:

$$E_T \leq \frac{1}{12} (b-a)^3 \max_{x \in [a,b]} |f'' (x)| . \tag{10}$$

No caso de aplicarmos repetidamente a regra do trapézio a n idênticos subintervalos de $[a, b]$ (n subintervalos, $h = \frac{b-a}{n}$), obtemos o seguinte algoritmo (**Regra do trapézio composta**) e a correspondente fórmula de majoração do erro cometido:

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)], \tag{11}$$

$$\text{Se } f \text{ é de classe } C^2 \text{ em } [a,b] : E_T^{\text{Composta}} \leq \frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| . \tag{12}$$

Tendo em vista comparar a regra do ponto médio com a regra do trapézio, avaliemos a expressão (2)

$$E_M \leq \frac{1}{24} (b-a)^3 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| .$$

e a expressão (12)

$$E_T^{\text{Composta}} \leq \frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| ,$$

fazendo nesta última $n = 2$ (porquê?). Verificamos que na aplicação da regra do trapézio o majorante do erro é duas vezes menor! Este facto confirma a ideia referida inicialmente que sugeria a obtenção de erros de integração comparativamente menores.

4 Regra de Simpson

Finalmente, na chamada regra de Simpson, em cada subintervalo

$$[x_i, x_i + h, x_i + 2h] ,$$

a função integranda f é aproximada por uma função polinomial de grau dois que interpola f nestes nós. Concretizemos. Suponha-se que o intervalo original de integração se encontra particionado em dois subintervalos de idêntico comprimento ($h = \frac{b-a}{2}$). Então, o procedimento descrito, conduz-nos à seguinte aproximação do integral definido procurado,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \tag{13}$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a)+4f(m)+f(b)\right], m=\frac{a+b}{2}. \tag{14}$$

a que corresponde o seguinte majorante do erro cometido E_S, admitindo que a função integranda é de classe C^4 em $[a,b]$:

$$E_S \leq \frac{(b-a)^5}{2880}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|. \tag{15}$$

No caso de aplicarmos repetidamente a regra de Simpson a $2n$ idênticos subintervalos de $[a,b]$ ($2n$ subintervalos, $h=\frac{b-a}{2n}$), obtemos o seguinte algoritmo (**Regra de Simpson composta**) e a correspondente fórmula de majoração do erro cometido:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[\begin{array}{c} f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots \\ +2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n}) \end{array}\right],$$

$$\text{Se } f \text{ é de classe } C^4 \text{ em } [a,b] : E_S^{\text{Composta}} \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Note-se que cada dois intervalos consecutivos definem os três pontos de interpolação necessários.

Exemplo 2 *Calcule* $\int_1^5 \frac{x}{x+1}dx$ *aplicando a regra dos trapézios e a regra de Simpson utilizando 4 intervalos equidistantes. Estime majorantes dos erros cometidos.*

Utilizando 4 intervalos equidistantes resulta: $x_i = 1+hi$ *com* $i=0,\ldots,4$ *e* $h=1$*. Assim pela regra do trapézio:*

$$\int_1^5 \frac{x}{x+1}dx \approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_4)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)=\frac{173}{60}\approx 2.883\,3.$$

Pela regra de Simpson:

$$\int_1^5 \frac{x}{x+1}dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0+f(x_4))+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+4\times\frac{2}{3}+2\times\frac{3}{4}+4\times\frac{4}{5}\right)=\frac{29}{10}\approx 2.9.$$

Calculemos agora os majorantes dos valores absolutos segunda e quarta derivada de $f(x) = \frac{x}{x+1}$ no intervalo de integração.

Comecemos por calcular os valores abosolutos das seguintes derivadas nos referidos intervalos:

$$\begin{aligned} \left|\frac{d^2\left(\frac{x}{x+1}\right)}{dx^2}\right| &= \frac{2}{(x+1)^3}, \\ \left|\frac{d^4\left(\frac{x}{x+1}\right)}{dx^4}\right| &= \frac{24}{(x+1)^5}. \end{aligned}$$

Como qualquer destas funções é decrescente (no intervalo indicado) o respectivo máximo ocorre em $x = 1$. Assim, os majorantes solicitados, tendo em conta as expressões respectivas, serão

$$E_T^{Composta} \leq \frac{(5-1)^3}{12 \times 4^2} \times \frac{2}{(1+1)^3} \leq 8.4 \times 10^{-2}$$

e

$$E_S^{Composta} \leq \frac{(5-1)^5}{2880 \times 2^4} \times \frac{24}{(1+1)^5} \leq 1.7 \times 10^{-2}. \qquad \blacksquare$$

5 Fórmulas de Newton-Cotes e grau de uma fórmula de quadratura

Como verificámos anteriormente, as fórmulas de integração utilizadas (também chamadas **fórmulas de quadratura**), são caracterizadas por expressões do tipo

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

em que A_k, $k = 0, \ldots, n$, representam pesos apropriados ou coeficientes de ponderação e $f(x_k)$, $k = 0, \ldots, n$, o valor da função integranda nos correspondentes nós.

Estas fórmulas de quadratura, podem ser deduzidas, sem dificuldades de maior, recorrendo ao polinómio interpolador de Lagrange, como ilustraremos seguidamente. Consideremos o polinómio interpolador de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$$

com

$$L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)},\ k = 0, \ldots, n$$

que interpola o intervalo $[a, b]$, nos $n+1$ nós

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b p_n(x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b L_k(x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \end{aligned}$$

com

$$A_k = \int_a^b L_k(x)\,dx. \tag{16}$$

Este facto mostra que a fórmula de quadratura

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

para aproximar o integral definido I, nas condições indicadas, apresenta coeficientes de ponderação A_k que se calculam através da expressão (16).

Ilustremos este procedimento para deduzir a regra de Simpson. Consideremos o polinómio interpolador de grau menor ou igual a dois dos pontos de nós distintos

$$(a, f(a)),\ \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \text{ e } (b, f(b)).$$

Os correspondentes polinómios de Lagrange são

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)}, \\ L_1(x) &= \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} \text{ e} \\ L_2(x) &= \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Então, tendo em conta (16), deduz-se

$$\begin{aligned}
A_0 &= \int_a^b L_0(x)\,dx = \int_a^b \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}dx = \frac{1}{6}(b-a)\,, \\
A_1 &= \int_a^b L_1(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}dx = \frac{2}{3}(b-a) \text{ e} \\
A_2 &= \int_a^b L_2(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}dx = \frac{1}{6}(b-a)\,.
\end{aligned}$$

Assim, a regra de Simpson assume a forma

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\simeq \frac{1}{6}(b-a)\,f(a) \\
&\quad + \frac{2}{3}(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}(b-a)\,f(b)\,,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right],$$

como seria de esperar [basta compar a expressão obtida com (13)].

Ao utilizarmos fórmulas tais como a expressão (12), entre outras, para estimar um majorante do erro cometido na integração numérica realizada, verificamos que estas dependem de uma certa ordem da derivada da função integranda. Assim, se por exemplo, se aplicarmos a regra do trapézio para integrar numericamente um polinómio de grau 0 ou 1, verificamos imediatamente que o erro cometido é nulo, já que a segunda derivada destas funções é identicamente nula.

Este princípio motiva a definição do **conceito de grau** de uma fórmula de integração como sendo o mais elevado grau do polinómio que pode ser integrado numéricamente, por esta, com erro nulo. Mais formalmente o grau de uma fórmula de integração pode ser definido com se segue.

Seja

$$I_n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

uma fórmula de integração. Se

$$I_n(p_n(x)) = I(p_n(x))$$

qualquer que seja o polinómio $p_n(x)$, de grau igual ou inferior a n e se existir um polinómio q_{n+1}, de grau superior a n, tal que

$$I_n(q_{n+1}(x)) \neq I(q_{n+1}(x)),$$

então, a fórmula de integração I_n, tem grau n.

Fórmulas de quadratura de grau não inferior a n que utilizam os pontos (igualmente espaçados) $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, \ldots, n$, são conhecidas por **fórmulas de Newton-Cotes**. As regras do trapézio e de Simpson, como vimos, são fórmulas de Newton-Cotes, para $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente.

É possível mostrar que

1. as regras dos rectângulos são de grau zero;

2. as regras do ponto médio e do trapézio são de grau um;

3. a regra de Simpson é de grau 3.

Exercícios propostos

Alguns destes exercícios foram extraídos de Carpentier [2].

Exercício 1 *Estime, aplicando a regra do* ***rectângulo à esquerda*** $\int_0^1 x^2dx$ *utilizando* 3 *subintervalos iguais.*

Exercício 2 *Estime, aplicando a regra do* ***rectângulo à direita*** $\int_0^1 x^2dx$ *utilizando* 3 *subintervalos iguais.*

Exercício 3 *Estime, aplicando a regra do* ***ponto médio*** $\int_0^1 x^2dx$ *utilizando* 10 *subintervalos iguais.*

Exercício 4 *Considere o integral* $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

1. *Determine o seu valor aproximado, usando 4 subintervalos e utilizando respectivamente a regra dos rectângulos, a regra dos trapézios e a regra de Simpson;*

2. *Faça uma estimativa do número mínimo de subintervalos que se deveria considerar se se pretendesse calcular integral dado com um erro inferior a* 10^{-4}, *utilizando as regras da alínea anterior.*

Exercício 5 *Seja* f *um polinómio do 3º grau, do qual alguns valores são fornecidos na seguinte tabela*

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x)$	-6	f_1	2	f_3	10	f_5

1. *Sabendo que os pontos* x_i *se encontram igualmente espaçados, com passo* $h = 1$, *e que* $\triangle f_2 = 1$, *determine* f_1;

2. *Calcule* $f[x_0, x_1, x_2]$ *e* $\triangle^3 f_0$;

3. *Calcule o integral da função quando* $[a, b] = [x_0, x_4]$, *usando uma fórmula numérica que seja exacta para* $f(x)$ *e com o menor número de operações possíveis. Qual o grau da fórmula utilizada?*

Exercício 6 *Considere a seguinte tabela, onde* $x(t)$ *representa a coordenada de uma ponto material no instante* t:

t	0.2	0.3	0.4	0.5
$x(t)$	0.82	0.745	0.68	0.625

Suponha que $x(t) = \frac{a}{2}t^2 + vt + s_0$.

1. *Determine, a, v e s_0, utilizando o método de interpolação de Newton;*

2. *Utilizando uma quadratura que seja exacta para este caso, calcule $\int_{0.3}^{0.5} x(t)\,dt$. Justifique a escolha da quadratura.*

Exercício 7 *Sabe-se que $\int_0^1 (x^2+x+1)\,dx = \frac{11}{16}$.*

1. *Pretende-se calcular o integral aplicando a regra dos trapézios.*

   (a) *Obtenha o valor pretendido utilizando 2 pontos;*

   (b) *Obtenha o valor pretendido considerando 4 pontos;*

   (c) *Aplique a fórmula de Richardson*

   $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{4T_{2n}-T_n}{3}$$

   em que T_k representa a aplicação da regra do trapézio com k pontos, aos resultados obtidos nas alíneas anteriores. Comente os resultados.

2. *Ao aplicar a regra de Simpson*

   (a) *Qual o número de pontos a considerar de modo a obter a maior exactidão?*

   (b) *Calcule o valor do integral pela fórmula indicada.*

Exercício 8 *Tendo em conta a afirmação "$\frac{\pi}{4}$ é o valor da área da quarta parte de uma círculo de raio unitário", i.e.,*

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx,$$

determine, utilizando a regra dos trapézios com 5 subintervalos, um valor aproximado de $\frac{\pi}{4}$. Poderá estimar o erro de truncatura cometido?

Exercício 9 *Para poder calcular o valor aproximado de $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \ln(\sin x)\,dx$, determine o número mínimo de subintervalos em que será necessário subdividir o intervalo de integração, de forma a assegurar que o erro não exceda, em valor absoluto, 10^{-4}, quando*

1. *se utiliza a regra dos trapézios;*

2. *se utiliza a regra de Simpson;*

Exercício 10 *Pretende-se calcular um valor aproximado de* $I = \int_1^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

1. *Use a regra de Simpson para obter uma aproximação de* I *com erro absoluto inferior a* 0.5×10^{-3};

2. *Sem determinar o valor exacto de* I, *será possível saber se o valor obtido para* I *é por defeito ou por excesso? Justifique.*

Exercício 11 *Demonstre que, na regra de integração do ponto médio, se tem*

$$\int_{x_0-\frac{h}{2}}^{x_0+\frac{h}{2}} f(x)\, dx = hf(x_0) + E(f)$$

onde $E(f) = \frac{h^3 f''(\theta)}{24}$, *com* $\theta \in \left]x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}\right[$.

Referências

[1] Apostol, Tom M., Calculus, Editorial Reverté, 1967.

[2] Carpentier, M. P. J., Análise Numérica-Teoria, Sebenta editada pela AEIST em Fev. 1993.

[3] Conte, S. D. & Boor, C., Elementary Numerical Analysis, McGraw-Hill, 1980.

[4] Gerald, C. e Wheatley, P., Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley, 1997.

[5] Lindfield, G. e Penny, J., Numerical Methods Using Matlab. Ellis Horwood, 1995.

[6] Kreyszig, Erwin., Advanced Engineering Mathematics (Cap. 17 e 18), Willey, 1999. (Livro de texto).

[7] Pina, Heitor, Métodos Numéricos, McGraw-Hill, 1995.

[8] Press, W., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. e Vetterling, W. T., Numerical Recipes-The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 1989.

[9] Santos, F. C., Fundamentos de Análise Numérica, Edições Sílabo, 2003.