IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA I

1^o SEMESTRE 2018/2019

1^o Teste - Recuperação

4 de Fevereiro de 2019 Duração: **2 horas**

Instruções:

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- Não pode responder a diferentes questões numa mesma folha de resposta.
- O abandono da sala só poderá efectuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É permitida a consulta de uma folha A4 manuscrita pelo aluno.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de equipamentos electrónicos durante a prova.
- Justifique convenientemente todas as respostas.

Nos exercícios 1, 2 e 4 não poderá ser utilizada a Regra de Cauchy no cálculo de limites.

1. Calcule os seguintes limites:

[2.0] (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^3}{x^3-x^2-4x+4}$;

[2.0] (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)(x^3+3)}{\sqrt{x^6+2x}}$.

2. Considere a função real de variável real definida por,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{x-1}}{x^2-1} & , \ x<1 \\ x\cos\left(\pi x - \dfrac{\pi}{3}\right) & , \ x \geq 1 \end{cases}.$$

[2.0] (a) Indique o domínio da função e estude a continuidade.

[1.0] (b) Determine, se possível, o prolongamento por continuidade de f a $\mathbb{R}$.

[1.0] (c) Justifique a existência de um zero da derivada de f no intervalo $\left]\dfrac{11}{6}, \dfrac{17}{6}\right[$.

3. Considere a função g definida por

$$g(x) = 5\pi + 3\arccos\left(\frac{1-x}{3}\right).$$

[2.0] (a) Caracterize a função inversa de g.

[1.0] (b) Resolva, caso seja possível, a equação $g(x) = 6\pi$.

4. Considere a função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x^2)}{x} & , \ x < 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & , \ x \geqslant 0 \end{cases}.$$

[2.0] (a) Determine, justificando, a derivada da função f para $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

[2.0] (b) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ e que $f'(0) = -1$.

[1.5] (c) Determine a aproximação linear de f em torno de 0 e use-a para calcular uma estimativa do número $-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}\right)$.

5. Mostre que:

[1.5] (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} = \dfrac{1}{2}$.

[2.0] (b) A equação $e^x = 10 - x$ tem uma só solução em $\mathbb{R}$.

Fim do teste