Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$

Matemática I

2018-2019

Noção de derivada de uma função

Definição e interpretações em termos geométricos e físicos; retas tangente e normal ao gráfico de uma função.

Definição de Derivada

Seja f uma função real de variável real definida num intervalo aberto que contém c. Chama-se **derivada** de f em c a

$$\boxed{f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c},}$$

caso este limite exista.

Esta definição é equivalente a

$$\boxed{f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}} \quad \text{e} \quad \text{a} \quad \boxed{f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}}$$

$\Delta x = x - c$ → **incremento de x**

$\Delta y = \Delta f = f(c + \Delta x) - f(c)$ → **incremento de y**

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$ → **razão incremental**

Definições

Diz-se que:

- f é **derivável** em c, se f tem derivada (finita ou infinita) em c;
- f é **diferenciável** em c, se f tem derivada finita em c;
- f é **derivável no intervalo aberto** $]a, b[$, se f for derivável em todos os pontos de $]a, b[$.
- f é **diferenciável no intervalo aberto** $]a, b[$, se f for diferenciável em todos os pontos de $]a, b[$.

Notações

- $f'(x)$
- y', com $y = f(x)$
- $\frac{df}{dx}(x)$
- $\frac{dy}{dx}$, com $y = f(x)$
- $D_x\left[f(x)\right]$.

Interpretação Geométrica

Se f é diferenciável em c:

- a reta que passa por $(c, f(c))$ e tem declive m é a **reta tangente ao gráfico de f no ponto** $(c, f(c))$ e é definida por:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c);$$

- a **reta normal ao gráfico de f no ponto** $(c, f(c))$ é a reta perpendicular à reta tangente nesse ponto e é definida por:
    - se $f'(c) \neq 0$, então $y - f(c) = -\frac{1}{f'(c)}(x - c)$,
    - se $f'(c) = 0$, então $x = c$.

Observações

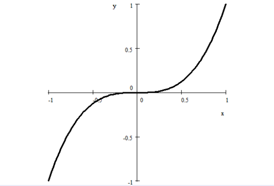
- Se $f'(c) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é horizontal e a reta normal é vertical.
- Se $f'(c) = +\infty$ ou $f'(c) = -\infty$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é vertical e a reta normal é horizontal.
- Se $f'(c)$ é infinito sem sinal determinado, não existe reta tangente nem reta normal ao gráfico de f nesse ponto.

Observações

- Se $f'(c) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é horizontal e a reta normal é vertical.
- Se $f'(c) = +\infty$ ou $f'(c) = -\infty$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é vertical e a reta normal é horizontal.
- Se $f'(c)$ é infinito sem sinal determinado, não existe reta tangente nem reta normal ao gráfico de f nesse ponto.

Observações

- Se $f'(c) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é horizontal e a reta normal é vertical.
  - Exemplo: $f(x) = x^3$



$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = 0$$

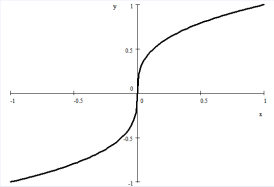
- Se $f'(c) = +\infty$ ou $f'(c) = -\infty$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é vertical e a reta normal é horizontal.
- Se $f'(c)$ é infinito sem sinal determinado, não existe reta tangente nem reta normal ao gráfico de f nesse ponto.

Observações

- Se $f'(c) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é horizontal e a reta normal é vertical.
- Se $f'(c) = +\infty$ ou $f'(c) = -\infty$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é vertical e a reta normal é horizontal.
- Se $f'(c)$ é infinito sem sinal determinado, não existe reta tangente nem reta normal ao gráfico de f nesse ponto.

Observações

- Se $f'(c) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é horizontal e a reta normal é vertical.
- Se $f'(c) = +\infty$ ou $f'(c) = -\infty$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é vertical e a reta normal é horizontal.
  - Exemplo: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = +\infty$$

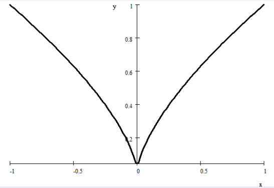
- Se $f'(c)$ é infinito sem sinal determinado, não existe reta tangente nem reta normal ao gráfico de f nesse ponto.

Observações

- Se $f'(c) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é horizontal e a reta normal é vertical.
- Se $f'(c) = +\infty$ ou $f'(c) = -\infty$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é vertical e a reta normal é horizontal.
- Se $f'(c)$ é infinito sem sinal determinado, não existe reta tangente nem reta normal ao gráfico de f nesse ponto.

Observações

- Se $f'(c) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é horizontal e a reta normal é vertical.
- Se $f'(c) = +\infty$ ou $f'(c) = -\infty$, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é vertical e a reta normal é horizontal.
- Se $f'(c)$ é infinito sem sinal determinado, não existe reta tangente nem reta normal ao gráfico de f nesse ponto.
  - Exemplo: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$



$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \infty$$

Aplicações à Física

Considere um ponto móvel sobre um eixo e $s(t)$ a posição do ponto em cada instante t. Sejam t_0 e t dois instantes distintos (com $t_0 < t$).

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{espaço percorrido}}{\text{tempo gasto}},$$

representa a **velocidade média no intervalo de tempo** $[t_0, t]$.

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0) \qquad \rightarrow \quad \text{derivada de } s(t) \text{ em } t_0$$

representa a **velocidade instantânea no instante** t_0.

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{velocidade atingida}}{\text{tempo gasto}},$$

representa a **aceleração média no intervalo de tempo** $[t_0, t]$.

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0) \qquad \rightarrow \quad \text{derivada de } v(t) \text{ em } t_0$$

representa a **aceleração instantânea no instante** t_0.

Observação

- A razão incremental,
$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$
representa a **taxa de variação média da função f no intervalo de extremos x e c**.

- A derivada de f em c,
$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$
representa a **taxa de variação instantânea da função f em c**.

Derivadas laterais

Derivadas Laterais

Derivadas laterais de f em c:

- **derivada à esquerda de f em c**

$$f'_e(c) = f'(c^-) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

- **derivada à direita de f em c**

$$f'_d(c) = f'(c^+) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}.$$

Observações:

- Diz-se que f é **derivável à esquerda em** c se existe $f'_e(c)$.
- Diz-se que f é **diferenciável à esquerda em** c se existe e é finita $f'_e(c)$.
- Diz-se que f é **derivável à direita em** c se existe $f'_d(c)$.
- Diz-se que f é **diferenciável à direita em** c se existe e é finita $f'_d(c)$.
- f diz-se **derivável no intervalo** $[a, b]$ (subconjunto de D_f) se for derivável em todos os pontos do intervalo $]a, b[$ e existirem $f'_d(a)$ e $f'_e(b)$;
- f diz-se **diferenciável no intervalo** $[a, b]$ (contido em D_f) se for diferenciável em todos os pontos do intervalo $]a, b[$ e existirem e forem finitas $f'_d(a)$ e $f'_e(b)$.

Proposição

- Uma função definida num intervalo aberto que contém c é derivável em c sse existem e são iguais as derivadas laterais de f em c.
- Uma função definida num intervalo aberto que contém c é diferenciável em c sse existem, são finitas e são iguais as derivadas laterais de f em c.

Observação

Se $f_e'(c) \neq f_d'(c)$, então f não é derivável (nem diferenciável) em c e o gráfico de f não tem reta tangente no ponto $(c, f(c))$.

Diferenciabilidade

Diferenciabilidade e suas propriedades; regras de derivação; derivada da função composta e da função inversa; derivadas das funções trigonométricas inversas; noção de diferencial.

Diferenciabilidade e continuidade

Proposição

Se f é diferenciável em c, então f é contínua em c.

Observação

- O contra-recíproco é verdadeiro, isto é

  se f não é contínua em c, então f não é diferenciável em c.

- O recíproco não é verdadeiro, isto é

  f contínua em c **não implica** f diferenciável em c.

Regras de derivação

Primeira Tabela de Derivadas

- $k' = 0, \quad k \in \mathbb{R};$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$
- $(e^x)' = e^x;$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x};$
- $(\operatorname{sen} x)' = \cos x;$
- $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x;$

Propriedades das operações

Se f e g são funções diferenciáveis em a e $k \in \mathbb{R}$, então $f+g$, $f-g$, kf e $f \times g$ também são diferenciáveis em a e:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
- $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$;
- $(kf)'(a) = kf'(a)$, com $k \in \mathbb{R}$;
- $(f \times g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$.

Se $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e

- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Teorema (Derivada da função composta)

Sejam g diferenciável em a e f diferenciável em $g(a)$. Então $f \circ g$ é diferenciável em a e

$$\boxed{(fog)'(a) = f'(g(a))\, g'(a).}$$

Teorema (Derivação da função inversa)

Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua em I. Se f é diferenciável em $a \in I$ e $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.}$$

Tabela de Derivadas

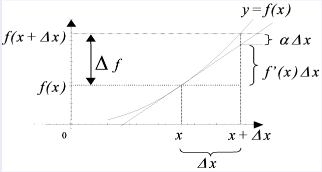
Sendo u e v funções diferenciáveis, k e a constantes reais,

- $k' = 0$;
- $(ku)' = ku'$;
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u-v)' = u' - v'$
- $(u \times v)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u', \quad \alpha \in \mathbb{R}$;
- $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}, \quad n \in \mathbb{N}$
  (resulta do anterior, $\alpha = \frac{1}{n}$);
- $(e^u)' = u'e^u$;
- $(a^u)' = a^u u' \ln a, \quad a > 0$
  (resulta do anterior, $a^u = e^{u \ln a}$);
- $(u^v)' = u^v v' \ln u + vu^{v-1}u'$;
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;
- $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}, \quad a > 0$
  (resulta do anterior, $\log_a u = \frac{\ln u}{\ln a}$);
- $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$;
- $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$;
- $(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$
  (resulta de $\sec u = \frac{1}{\cos u}$);
- $(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
  (resulta de $\operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$);
- $(\sec u)' = u' \sec u \operatorname{tg} u$
  (resulta de $\sec u = \frac{1}{\cos u}$);
- $(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$
  (resulta de $\operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$);
- $(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
- $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
- $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$;
- $(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Diferencial

Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $]a, b[$ e $\Delta x \in \mathbb{R}$ tal que $x + \Delta x \in]a, b[$.

Interpretação geométrica



Acréscimo ou incremento da variável $x = \Delta x$

Acréscimo ou incremento da função f correspondente ao acréscimo Δx $= \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

Para valores de Δx pequenos, tem-se

$$\boxed{\Delta f \approx f'(x)\Delta x \quad \Leftrightarrow \quad f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.}$$

A este processo chama-se **linearização de** f, **em torno de** x. Consiste em aproximar o valor da função em $x + \Delta x$ pelo valor da ordenada do correspondente ponto da reta tangente ao gráfico de f em $(x, f(x))$.

Definição

Chama-se **diferencial de f em x relativamente ao acréscimo Δx**, ao produto $f'(x)\Delta x$ e escreve-se

$$d_x f(\Delta x) = f'(x)\Delta x \qquad \text{ou} \qquad df = f'(x)\Delta x \qquad \text{ou} \qquad df = f'(x)dx.$$

Nota

Em resumo, para uma variação Δx,

- $f(x+\Delta x) \rightarrow$ é o valor exato de f
- $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \rightarrow$ é o valor exato da variação de f
- $f(x) + f'(x)\Delta x \rightarrow$ é um valor aproximado de f
- $df = f'(x)\Delta x \rightarrow$ é um valor aproximado da variação de f

Teoremas fundamentais

Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy; regra de Cauchy.

Teoremas Fundamentais

Proposição

Sejam $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $]a, b[$ e $c \in]a, b[$. Se $f(c)$ é extremo relativo de f, então

$$f'(c) = 0.$$

Observações

- A proposição só se aplica a pontos interiores do intervalo.
- O recíproco não é verdadeiro - *a derivada de uma função pode ser nula num ponto sem que a função tenha um extremo no ponto.*
- A função pode não ser diferenciável num ponto mas ter um extremo nesse ponto.

Teorema de Rolle

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Corolário 1

Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo há pelo menos um zero da sua derivada.

Corolário 2

Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função não pode haver mais do que um zero da função.

Teorema de Lagrange

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, então existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corolário 1

Seja f uma função nas condições do Teorema de Lagrange:

- se $f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$;
- se $f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$;
- se $f'(x) < 0, \forall x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.

Corolário 2

Seja f uma função nas condições do Teorema de Lagrange,

- f é crescente em $[a, b]$ sse $f'(x) \geq 0, \forall x \in]a, b[$,
- f é decrescente em $[a, b]$ sse $f'(x) \leq 0, \forall x \in]a, b[$.

Teorema de Cauchy

Se f e g são funções contínuas em $[a,b]$ e diferenciáveis em $]a,b[$, com $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a,b[$, então existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Aplicação a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

Corolário (Regra de Cauchy)

Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $I \setminus \{c\}$ (com $I =]a,b[$ e $c \in]a,b[$) tais que:

- $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{c\}$;
- $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$.

Então, se existir $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, também existe $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ e estes dois limites são iguais.

(A regra é válida para o caso dos limites para infinito ou limites laterais.)

Observação

Os símbolos

$\infty - \infty$	$0 \times \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	0^0	1^∞	∞^0

representam indeterminações.

Para aplicar a regra de Cauchy é necessário ter ou transformar a indeterminação existente numa indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Derivadas de ordem superior

Definição de derivadas de ordem superior; fórmulas de Taylor e de MacLaurin (resto de Lagrange). Aplicação ao estudo de extremos e concavidades.

Derivadas de ordem superior à primeira

Segunda derivada

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em a. Se a função derivada de f, f', for diferenciável em a, diz-se que f **é duas vezes diferenciável em** a e a derivada de f' designa-se por **segunda derivada de** f **no ponto** a e representa-se por

$$f''(a), \qquad f^{(2)}(a), \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}(a) \qquad \text{ou} \qquad D^2 f(a).$$

Tem-se

$$f''(a) = \left(f'\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

Derivadas de ordem superior à primeira

Derivada de ordem n

A **derivada de ordem n da função f** define-se, por recorrência, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(a) &= f(a), \\ f^{(n)}(a) &= \left(f^{(n-1)}\right)'(a), \qquad \text{com } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Diz-se que f **é n vezes diferenciável no ponto** a se existir e for finita a derivada $f^{(n)}(a)$ (o que obriga a que a função e todas as suas derivadas de ordem menor que n sejam diferenciáveis em a).

Tem-se assim

$$f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

Observação

- Diz-se que uma função f é continuamente diferenciável ou de classe C^1 se f for diferenciável e, além disso, a sua derivada for contínua.
- Se, para algum $k \in \mathbb{N}$, f for k vezes diferenciável e, além disso, $f^{(k)}$ for uma função contínua, diz-se que f é de classe C^k.
- Se uma função f tiver derivadas contínuas de todas as ordens, diz-se que f é de classe C^∞.

Polinómio de Taylor e Fórmula de Taylor

Objectivo

Aproximar uma função dada (perto dum ponto) por funções polinomiais.

Polinómio de Taylor

Suponhamos que as derivadas de f, até à ordem n, existem e são finitas em a. Chama-se **polinómio de Taylor de ordem n de f em a**, (ou polinómio de Taylor de ordem n em potências de $(x-a)$) a

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Polinómio de Mac-Laurin

Suponhamos que as derivadas de f, até à ordem n, existem e são finitas em a. Chama-se **polinómio de Mac-Laurin de ordem n de f** (ou polinómio de Mac-Laurin de ordem n em potências de x) ao polinómio de Taylor de ordem n de f, para $a = 0$, isto é, a

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Teorema (Fórmula de Taylor de ordem n de f em a)

Seja f uma função definida num intervalo aberto I, contínua e n vezes diferenciável no ponto $a \in I$. Então, para qualquer $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

onde $R_n(x)$ verifica a condição

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Se $a = 0$, chama-se fórmula de Mac-Laurin.

Chama-se **erro associado à aproximação de** $f(x)$ **por** $P_n(x)$ a

$$\varepsilon = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

Chama-se **resto de ordem** n **da Fórmula de Taylor de** f **em** a à função $R_n(x)$.

Observação

Há várias expressões para $R_n(x)$, entre as quais a do **resto de Lagrange de ordem** n:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)},$$

para algum ξ no intervalo aberto de extremos a e x.

Monotonia

Recorde-se o corolário do teorema de Lagrange:

Corolário

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$:

- se $f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[$,

  então f é constante no intervalo $[a, b]$;

- se $f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[$,

  então f é estritamente crescente no intervalo $[a, b]$;

- se $f'(x) < 0, \forall x \in]a, b[$,

  então f é estritamente decrescente no intervalo $[a, b]$.

Extremos

Diz-se que a é um **ponto de estacionaridade** de uma função f se $f'(a) = 0$.

Um ponto de estacionaridade pode não ser um extremo de f.

Diz-se que a é um **ponto crítico** de uma função f se $f'(a) = 0$ ou f não é diferenciável em a.

Recorrendo à noção de ponto crítico é possível garantir a existência de extremo de f mesmo que f não tenha derivada em a. Para esclarecer se um ponto crítico é ou não um extremo da função podem-se analisar as derivadas da função:

Proposição

Seja a um ponto crítico de f, tem-se que:

- se à esquerda de a tem-se $f'(x) > 0$ e à direita de a tem-se $f'(x) < 0$, então $f(a)$ é um máximo relativo;
- se à esquerda de a tem-se $f'(x) < 0$ e à direita de a tem-se $f'(x) > 0$, então $f(a)$ é um mínimo relativo;
- se f' tem o mesmo sinal à direita e à esquerda de a, então $f(a)$ não é mínimo nem máximo relativo.

Proposição

Seja f uma função que admite segunda derivada num intervalo aberto que contém a e a é ponto de estacionaridade de f (isto é $f'(a) = 0$):

- se $f''(a) < 0$, então $f(a)$ é um máximo relativo;
- se $f''(a) > 0$, então $f(a)$ é um mínimo relativo.
- se $f''(a) = 0$, nada se concluí.

Concavidades

- Diz-se que f, diferenciável no intervalo $]a, b[$, tem a **concavidade voltada para cima em** $]a, b[$ se, para qualquer $x \in]a, b[$, o gráfico de f está acima da reta tangente ao gráfico em $(x, f(x))$.
- Diz-se que f, diferenciável no intervalo $]a, b[$, tem a **concavidade voltada para baixo em** $]a, b[$ se, para qualquer $x \in]a, b[$, o gráfico de f está abaixo da reta tangente ao gráfico em $(x, f(x))$.

Pontos de inflexão

Um ponto onde ocorra uma mudança de concavidade do gráfico de f diz-se um **ponto de inflexão** de f.

Proposição

Seja f uma função com segunda derivada no intervalo aberto I:

- se $f''(x) > 0, \forall x \in I$, então f tem concavidade voltada para cima;
- se $f''(x) < 0, \forall x \in I$, então f tem concavidade voltada para baixo.

Proposição

Seja a um valor tal que $f''(a) = 0$ ou não existe $f''(a)$. Se

à esquerda de a tem-se $f''(x) > 0$ e à direita de a tem-se $f''(x) < 0$

ou

à esquerda de a tem-se $f''(x) < 0$ e à direita de a tem-se $f''(x) > 0$

então $f(a)$ é um ponto de inflexão.

Proposição

Se f tem um ponto de inflexão em a e $f''(a)$ existe e é finita, então $f''(a) = 0$.

Assíntotas

Seja f uma função real de variável real.

Assíntotas verticais

A reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** de f se

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty.$$

Assíntotas horizontais

A reta $y = b$ é uma **assíntota horizontal** de f se

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x\to -\infty} f(x) = b.$$

Assíntotas não verticais

A reta de equação $y = mx + b$ é uma **assíntota não vertical** de f se

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(mx+b\right)\right]=0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(mx+b\right)\right]=0.$$

- Se $m = 0$, a reta é uma **assíntota horizontal** de f.
- Se $m \neq 0$, a reta é uma **assíntota oblíqua** de f.

Proposição

A reta de equação $y = mx + b$ é uma assíntota não vertical de f , sse

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-mx\right]=b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-mx\right]=b \end{cases}.$$

Observação

Se f tem uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$ (respetivamente $x \to -\infty$), então f não tem assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$ (respetivamente $x \to -\infty$).

Estudo de uma função e esboço do gráfico

Pontos fundamentais (em geral) para esboçar o gráfico de f:

- domínio;
- pontos de descontinuidade e assíntotas verticais;
- interseção com os eixos / zeros de f;
- sinal de f;
- paridade de f (simetrias);
- intervalos de monotonia e extremos;
- concavidades e pontos de inflexão;
- assíntotas não verticais.