DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA I

Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

1^o SEMESTRE 2019/2020
Exame - Época de Recurso

19 de Fevereiro de 2020 Duração: **2h30**

Instruções:

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- Não pode responder a diferentes questões numa mesma folha de resposta.
- O abandono da sala só poderá efectuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É permitida a consulta de uma folha A4 manuscrita pelo aluno.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de equipamentos electrónicos durante a prova.
- **Justifique convenientemente todas as respostas**.

No exercício 2 não pode ser usada a Regra de Cauchy no cálculo de limites.

[2.0] 1. Considerando a restrição principal do coseno, caracterize a função inversa da função real de variável real definida por

$$f(x) = 4 - \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

2. Seja f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + 1 - e^{-x}}{x} & , \ x \leq 2 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{4 - x^2} & , \ x > 2 \end{cases}$$

[1.5] (a) Determine o domínio de f e estude a sua continuidade.

[1.5] (b) Verifique que f é prolongável por continuidade ao ponto de abcissa $x = 0$ e indique o seu prolongamento.

[2.0] (c) Verifique se a função f é diferenciável no ponto de abcissa $x = 2$ e indique, justificando, a expressão da derivada de f.

3. Considere a função definida por $f(x) = \ln(4+x) - \ln(4-x)$.

[1.5] (a) Determine o domínio de f e prove, justificando, que existe pelo menos um ponto do intervalo $]-2,2[$ onde a recta tangente ao gráfico de f tem declive $\frac{\ln 3}{2}$.

[2.0] (b) Sendo f 2-vezes diferenciável no seu domínio, determine o seu polinómio de Mac-Laurin de ordem 2 e utilize-o para calcular um valor aproximado de $\ln\left(\frac{17}{15}\right)$.

(**Nota:** na aproximação use o valor real x que satisfaz a condição $\frac{17}{15} = \frac{4+x}{4-x}$)

4. Calcule:

[1.8] (a) $P\left[\frac{4x^2+2x-3}{x^2(x+3)}\right]$.

[1.5] (b) $P[x\cos(3x+\pi)]$.

[1.7] (c) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

5. Considere a função f definida em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ por $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

[1.5] (a) Determine a expressão da função $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ e calcule o valor médio de f no intervalo $[0,7]$.

[1.0] (b) Calcule, justificando, a derivada de $H(x) = \int_0^{4x^2} f(t)\operatorname{arctg}(2t)\,dt$.

[2.0] 6. Considere a região do plano infinita que é limitada pela curva $y = \frac{1}{x^3}$ e pelas condições $y \geq 0$ e $x \geq 1$. Faça um esboço da região e calcule a sua área.

Fim do exame