Matemática I

Funções Reais de Variável Real

Anabela Pereira

Depart. de Matemática

Outubro de 2018

Generalidades de f.r.v.r.

Domínio e contradomínio

Zeros e sinal

Paridade e bijectividade (injectividade e sobrejectividade)

Monotonia e extremos

Concavidades e pontos de inflexão

Funções limitadas

Definição

Seja A subconjunto de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é um **ponto de acumulação de** A se, qualquer que seja o valor $\varepsilon > 0$, no intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ (**vizinhança de** a **com raio** ε), existe pelo menos um elemento de A diferente de a.

Notação: $A' \longrightarrow$ conjunto dos pontos de acumulação de A.

Observações:

- O ponto de acumulação a pode pertencer ao conjunto A ou não;
  exemplos: $\begin{cases} \text{se } a=0 \text{ e } A=[0,2[\,, \text{ então } A'=[0,2]\,; \\ \text{se } a=0 \text{ e } A=]0,2[\,, \text{ então } A'=[0,2]\,. \end{cases}$
- Se $a \in A$ e a é um ponto isolado, então não é ponto de acumulação A; exemplo: se $a=0$ e $A=\{0\}\cup]1,2[$, então $A'=[1,2]$.

Definição (**Limite segundo Cauchy**)

Sejam a um ponto de acumulação de D_f e $b \in \mathbb{R}$. Diz-se que f **tende para** b **quando** x **tende para** a, isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{sse}$$

$$\forall \delta > 0 \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in D_f \setminus \{a\} : |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

ou

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x \in D_f \setminus \{a\} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Rightarrow b - \delta < f(x) < b + \delta$$

Lê-se:

qualquer que seja o número real $\delta > 0$,
existe um número real $\varepsilon > 0$
tal que, para qualquer $x \in D_f \setminus \{a\}$,
se x se aproxima de a numa vizinhança de raio ε, $|x - a| < \varepsilon$,
então f aproxima-se de b numa vizinhança de raio δ, $|f(x) - b| < \delta$.

Limites laterais à direita (segundo Cauchy): Seja a um ponto de acumulação de $D_f \cap]a, +\infty[$. Diz-se que f **tende para** b **quando** x **tende para** a **por valores superiores** (ou, **à direita de** a), isto é,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b \text{ sse}$$

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in D_f : \underbrace{0 < x - a < \varepsilon}_{\substack{\Updownarrow \\ x > a \wedge |x-a| < \varepsilon}} \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

ou

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in D_f :\ a < x < a + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

Analogamente se define o **limite por valores inferiores** (ou, **à esquerda de** a) , isto é,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b \text{ sse}$$

$$\forall \delta > 0\ \exists\ \varepsilon > 0\ \forall x \in D_f :\ -\varepsilon < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

Observações:

- Se $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b$ então $\lim_{x\to a} f(x) = b$;
- Se $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) = b$ então não existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

Proposição (Unicidade de Limite): O limite de uma função num ponto, quando existe, é único.

Vamos estender a definição de limite segundo Cauchy a $a = \pm\infty$ ou $b = \pm\infty$.

- Limite de f com $a = +\infty$ e $b \in \mathbb{R}$**:** seja f uma f.r.v.r., com D_f não limitado superiormente, e $b \in \mathbb{R}$**,**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{sse}$$
$$\forall \delta > 0 \; \exists M > 0 \; \forall x \in D_f : x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

- Limite de f com $a = -\infty$ e $b \in \mathbb{R}$: seja f uma f.r.v.r., com D_f não limitado inferiormente, e $b \in \mathbb{R}$**,**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{sse}$$
$$\forall \delta > 0 \; \exists M < 0 \; \forall x \in D_f : x < M \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

- Limite de f com $a \in \mathbb{R}$ e $b = +\infty$: sejam f uma f.r.v.r. e a um ponto de acumulação de D_f,

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{sse}$$
$$\forall L > 0 \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in D_f \setminus \{a\} : |x - a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > L.$$

- Limite de f com $a \in \mathbb{R}$ e $b = -\infty$: sejam f uma f.r.v.r. e a um ponto de acumulação de D_f,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \text{sse}$$
$$\forall L < 0 \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in D_f \setminus \{a\} : |x - a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < L.$$

- Limite de f com $a=+\infty$ e $b=+\infty$: seja f uma f.r.v.r., com D_f não limitado superiormente,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{sse}$$
$$\forall L>0\ \exists M>0\ \forall x\in D_f : x>M \Rightarrow f(x)>L.$$

- Limite de f com $a=-\infty$ e $b=-\infty$: seja f uma f.r.v.r., com D_f não limitado inferiormente,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{sse}$$
$$\forall L<0\ \exists M<0\ \forall x\in D_f : x<M \Rightarrow f(x)<L.$$

Analogamente se definiriam os outros casos.

Teorema (do Encaixe)

Sejam f, g e h f.r.v.r., definidas num intervalo I, e a pertencente ao interior de I. Se

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in I \quad e$$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} h(x) = b,$$

então

$$\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = b.$$

Proposição: Se f e g são f.r.v.r. *com limite finito* em a (para a finito ou infinito) e $k \in \mathbb{R}$, então:

-
$$\lim_{x \longrightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \longrightarrow a} f(x);$$
$$\lim_{x \longrightarrow a} [(f+g)(x)] = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) + \lim_{x \longrightarrow a} g(x);$$
$$\lim_{x \longrightarrow a} [(f-g)(x)] = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) - \lim_{x \longrightarrow a} g(x);$$
$$\lim_{x \longrightarrow a} [(f \times g)(x)] = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \times \lim_{x \longrightarrow a} g(x);$$
$$\lim_{x \longrightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \right|.$$

  (**nota:** $|\, f \,|$ pode ter limite no ponto a e a função f não ter)

- se $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x \longrightarrow a} \left[\left(\frac{f}{g} \right)(x) \right] = \frac{\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)}{\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)}.$$

Sejam f, g f.r.v.r e a finito ou infinito, então:

Para a soma:

1. se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} [(f+g)(x)] = +\infty$;

2. se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a} [(f+g)(x)] = -\infty$;

3. sendo $b \in \mathbb{R}$,

se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} [(f+g)(x)] = +\infty$;

se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} [(f+g)(x)] = -\infty$.

Para o produto:

4. sendo $b \in \mathbb{R}^+$,

$$\text{se } \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = b, \text{ então } \lim_{x \to a} \left[(f \times g)(x) \right] = +\infty;$$
$$\text{se } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = b, \text{ então } \lim_{x \to a} \left[(f \times g)(x) \right] = -\infty;$$

5. sendo $b \in \mathbb{R}^-$,

$$\text{se } \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = b, \ \lim_{x \to a} \left[(f \times g)(x) \right] = -\infty;$$
$$\text{se } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = b, \ \lim_{x \to a} \left[(f \times g)(x) \right] = +\infty;$$

6.

$$\text{se } \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = +\infty, \text{ então } \lim_{x \to a} \left[(f \times g)(x) \right] = +\infty;$$
$$\text{se } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = +\infty, \text{ então } \lim_{x \to a} \left[(f \times g)(x) \right] = -\infty;$$
$$\text{se } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = -\infty, \text{ então } \lim_{x \to a} \left[(f \times g)(x) \right] = +\infty.$$

Para o inverso e o quociente: seja g não nula numa vizinhança de a (excepto, eventualmente em a).

7. se $\lim_{x\to a} \mathrm{g(x)}=\infty$ então $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$;

8. se $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ então $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \infty$;

9. se $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} f(x)$ é finito, então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

10. se $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} f(x)$ é infinito ou finito *e diferente de zero*, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. (dependendo do sinal de f e g, poderemos averiguar se este limite é $+\infty$ ou $-\infty$)

Observações complementares:

Diz-se que f é um **infinitésimo** quando x tende para a se

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = 0.$$

Proposição: Se f é um infinitésimo quando x tende para a e g é uma f.r.v.r. **limitada**. então $f \times g$ **é um infinitésimo** quando x tende para a.

Os símbolos seguintes são designados por **símbolos de indeterminação:**

$(+\infty) - (+\infty)$	$(+\infty) + (-\infty)$	$0 \times (+\infty)$
$0 \times (-\infty)$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$
0^0	∞^0	1^∞

Alguns **limites notáveis** ou de referência**:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$ (caso geral $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{N})$)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$ (caso geral $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[p]{x}} = 0$ $(p \in \mathbb{N})$)

Consideremos $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real (f.r.v.r.) e a um ponto de acumulação de D_f que pertence a D_f.

- Diz-se que f **é contínua em** a se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Diz-se que f **é contínua à esquerda em** a se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
- Diz-se que f **é contínua à direita em** a se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Diz-se que a f **é contínua no intervalo** $[a, b]$ se f é contínua em qualquer ponto de $]a, b[$, contínua à direita em a e contínua à esquerda em b.
- Diz-se que f **é contínua** se f é contínua em qualquer ponto do seu domínio.

Da definição de limite segundo Cauchy, resulta que f **é contínua em** a, isto é,

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a) \text{ sse}$$

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in D_f : |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$$

Nota: São consideradas contínuas em todo o seu domínio as seguintes funções:

polinomiais,
racionais,
com raízes,
trigonométricas,
exponenciais e
logarítmicas.

Proposição: Se f, g são funções contínuas em a e $k \in \mathbb{R}$, então:

- as funções kf, $f+g$, $f-g$, $f \times g$ e $|f|$ são contínuas em a;
- se $g(a) \neq 0$, as funções $\frac{1}{g}$ e $\frac{f}{g}$ são contínuas em a.

Proposição: Se f é uma função contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.

Sendo f e g duas funções com domínios D_f e D_g, diz-se que g **é um prolongamento de** f (ou que f **é uma restrição de** g) se

$$D_f \subsetneqq D_g \quad \text{e} \quad \forall x \in D_f, \quad f(x) = g(x).$$

Proposição: Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D_f, com $a \notin D_f$.

- f é prolongável por continuidade a a sse existe (e é finito) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- Neste caso, **o prolongamento por continuidade de** f **a** a é a função

$$g : D_f \cup \{a\} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, se} \quad x \in D_f \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & \text{, se} \quad x = a \end{cases}$$

Teorema (de Bolzano)

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$, *com* $a < b$. *Então, para qualquer* k *estritamente compreendido entre* $f(a)$ *e* $f(b)$, *existe pelo menos um* $c \in]a, b[$ *tal que* $f(c) = k$, *isto é,* $\exists c \in]a, b[: f(c) = k$.

Corolário (1)

Se f *é contínua no intervalo* $[a, b]$ *e não se anula em algum ponto de* $[a, b]$, *então em todos os pontos de* $[a, b]$ *a função* f *tem o mesmo sinal.*

Corolário (2)

Se f *é contínua no intervalo* $[a, b]$ *e* $f(a) \times f(b) < 0$ *então* f *tem pelo menos um zero em* $]a, b[$, *isto é,* $\exists c \in]a, b[: f(c) = 0$

Teorema (de Weierstrass)

Qualquer função contínua num intervalo $[a, b]$ (fechado e limitado) tem máximo e mínimo nesse intervalo.

Observação: Em qualquer um destes resultados, as condições são apenas condições suficientes; não são condições necessárias.

Teorema (continuidade da função inversa)

Se $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e estritamente monótona em I, então:

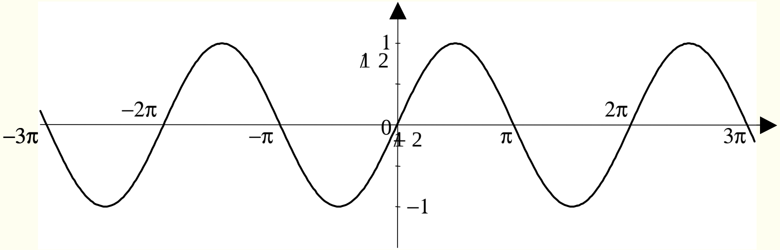
- *f é invertível em I;*
- *f^{-1} é estritamente monótona;*
- *f^{-1} é contínua.*

Observação: O facto de f ser estritamente monótona em I garante que f é injectiva em I.

Função Seno e sua inversa Arco Seno

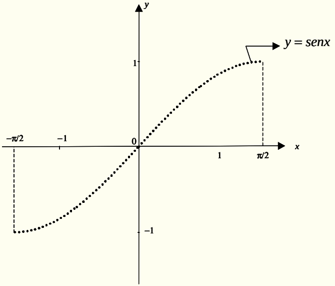
Considere-se a função seno, definida por:

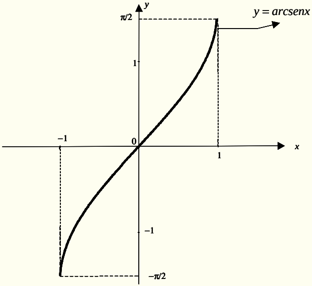
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longrightarrow & \operatorname{sen} x \end{array}$$



Esta função é contínua em $\mathbb{R}$ mas não é injectiva. Para a inverter vamos considerar a sua restrição principal $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ onde a função seno é contínua e estritamente crescente.

Função Seno e sua inversa Arco Seno



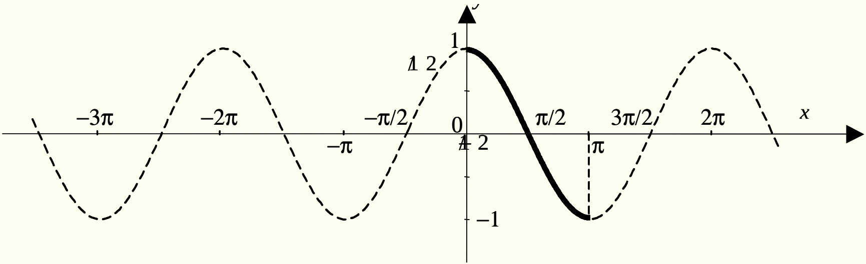


$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$, $x \to \operatorname{sen} x$	$f^{-1}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \to \operatorname{arcsen} x$
é contínua	é contínua
é estritamente crescente	é estritamente crescente
é impar	é impar
tem zero em $x = 0$	tem zero em $x = 0$

Função Coseno e sua inversa Arco Coseno

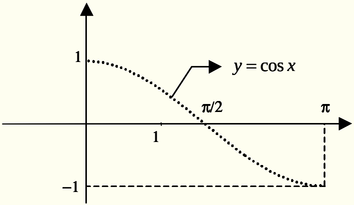
Considere-se a função coseno, definida por:

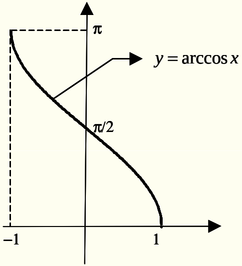
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longrightarrow & \cos x \end{array}$$



Esta função é contínua em $\mathbb{R}$ mas não é injectiva. Para a inverter vamos considerar a sua restrição principal $[0, \pi]$ onde a função coseno é contínua e estritamente decrescente.

Função Coseno e sua inversa Arco Coseno



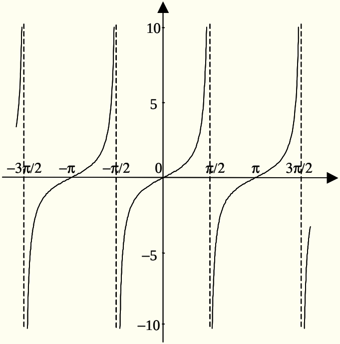


$f: [0,\pi] \to [-1,1]$ $x \to \cos x$	$f^{-1}: [-1,1] \to [0,\pi]$ $x \to \arccos x$
é contínua é estrit. decrescente tem zero em $x = \frac{\pi}{2}$	é contínua é estrit. decrescente tem zero em $x = 1$

Função Tangente e sua inversa Arco Tangente

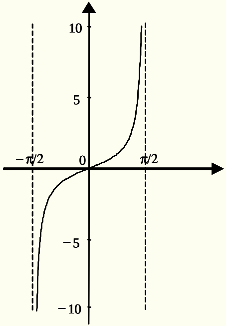
Considere-se a função tangente, definida por:

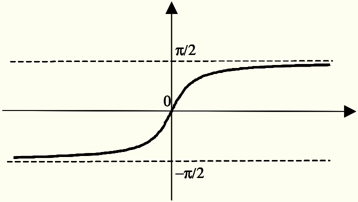
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\backslash\{x : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \end{array}$$



Para a inverter a tangente vamos considerar a sua restrição principal $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ onde a função é contínua e estritamente crescente.

Função Tangente e sua inversa Arco Tangente



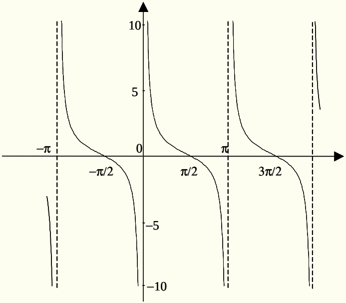


$\begin{array}{lccc} f: & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \operatorname{tg} x \end{array}$	$\begin{array}{lccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \longrightarrow & \operatorname{arctg} x \end{array}$
é contínua	é contínua
é estrit. crescente	é estrit. crescente
tem zero em $x = 0$	tem zero em $x = 0$

Função Cotangente e sua inversa Arco Cotangente

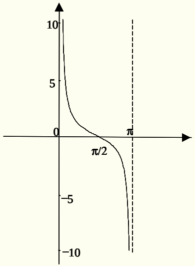
Considere-se a função cotangente, definida por:

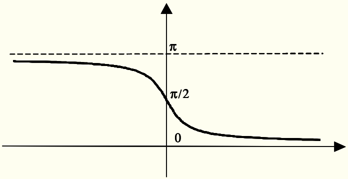
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\backslash\{x : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \end{array}$$



Para inverter a cotangente vamos considerar a sua restrição principal $]0, \pi[$ onde a função é contínua e estritamente decrescente.

Função Cotangente e sua inversa Arco Cotangente





$\begin{array}{llll} f: &]0,\pi[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & \operatorname{cotg} x \end{array}$	$\begin{array}{llll} f^{-1}: & \mathbb{R} & \rightarrow &]0,\pi[\\ & x & \rightarrow & \operatorname{arccotg} x \end{array}$
é contínua é estrit. decrescente tem zero em $x = \frac{\pi}{2}$	é contínua é estrit. decrescente não tem zero

Algumas fórmulas trigonométricas:

- $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(2\alpha\right)\right)$
- $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(2\alpha\right)\right)$
- $\text{sen}\left(\alpha \pm \beta\right) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$
- $\cos\left(\alpha \pm y\right) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$
- $\text{tg}^2\alpha = 1 - \sec^2\alpha \qquad (\text{com } \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha})$