Exercícios Resolvidos Semana 6 20/IV/2020 até 24/IV/2020

Exercício 2.24

Represente matricialmente os seguintes sistemas de equações lineares e resolva-os pelo método de eliminação de Gauss:

1. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+w=3 \\ z-w=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-2y+z=1 \\ x+3y-z=10 \\ 3x-2y+2z=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x+2y+2z=1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y+3z=1 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-y-z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -3x+5y+8z=2 \\ 4x-y-5z=3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y+w=1 \\ y+2z+w=0 \\ x+y+z+3w=1 \\ -3y-2z+2=4 \end{cases}$

•(1)• Matricialmente temos o sistema

$$\left\{\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x+y&=1\\ 3x+2y&=4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\3&2&0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$$

A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\3&2&0&4\end{bmatrix}$ Aplicamos o algoritmo de eliminação de gauss para encontrar uma matriz equivalente, com forma triangular geral:

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&1&1\\1&1&0&1\\3&2&0&4\end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \quad \cdot(-3)\\ \leftarrow + \\ \leftarrow \quad + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix}\boxed{1}&1&1&1\\0&0&\boxed{-1}&0\\0&\boxed{-1}&-3&1\end{bmatrix}$$

Temos forma triangular geral, com primeiro pivô situado na posição $(1,1)$, segundo pivô em $(3,2)$, e terceiro pivô em $(2,3)$. Podemos já aplicar substituição inversa:

$$\left\{\begin{aligned} x+y+z&=1\\ -z&=0\\ -y-3z&=1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x+y&=1\\ z&=\boxed{0}\\ -y&=1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x&=2\\ z&=\boxed{0}\\ y&=\boxed{-1} \end{aligned}\right\}$$

A solução única é $(x,y,z)=(2,-1,0)$.

•(2)• Matricialmente temos o sistema

$$\left\{\begin{aligned} x-y&=0\\ x+y+w&=3\\ z-w&=0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&-1&0&0\\1&1&0&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$$

A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\1&1&0&1&3\\0&0&1&-1&0\end{bmatrix}$ Aplicamos o algoritmo de eliminação de Gauss para encontrar uma matriz equivalente, com forma triangular geral:

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&-1&0&0&0\\1&1&0&1&3\\0&0&1&-1&0\end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1)\\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix}\boxed{1}&-1&0&0&0\\0&2&0&\boxed{1}&3\\0&0&\boxed{1}&-1&0\end{bmatrix}$$

Temos já um sistema com forma triangular geral, com pivôs nas posições $(1,1),(3,3),(2,4)$. Resolvemos por substituição inversa:

$$\left\{\begin{array}{r} x-y=0 \\ 2y+w=3 \\ z-w=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y=\boxed{a}\in\mathbb{R} \\ x=a \\ w=3-2a \\ z-w=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\boxed{a}\in\mathbb{R} \\ x=\boxed{a} \\ w=\boxed{3-2a} \\ z=3-2a \end{array}\right\}$$

Existem infinitas soluções diferentes $(x,y,z,w)=(a,a,3-2a,3-2a)$

•(3)•

Matricialmente temos o sistema

$$\left\{\begin{array}{r} 3x-2y+z=1 \\ x+3y-z=10 \\ 3x-2y+2z=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 10 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Aplicamos o algoritmo de eliminação de gauss para encontrar uma matriz equivalente, com forma triangular geral:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 10 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & \boxed{1} & 1 \\ 4 & \boxed{1} & 0 & 11 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & \boxed{1} & 1 \\ 4 & \boxed{1} & 0 & 11 \\ \boxed{-11} & 0 & 0 & -22 \end{bmatrix}$$

Temos já um sistema com forma triangular geral, com pivôs nas posições $(1,3),(2,2),(3,1)$. Resolvemos por substituição inversa:

$$\left\{\begin{array}{r} 3x-2y+z=1 \\ 4x+y=11 \\ -11x=-22 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} -2y+z=-5 \\ y=3 \\ x=\boxed{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=1 \\ y=\boxed{3} \\ x=\boxed{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

Existe uma única solução $(x,y,z)=(2,3,1)$

•(4)• Matricialmente temos o sistema:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x+2y+2z=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Aplicamos o algoritmo de eliminação de gauss para encontrar uma matriz equivalente, com forma triangular geral:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Já temos forma triangular geral com pivôs na posição $(1,1)$ e $(2,2)$. Vemos que o sistema é impossível, não tem soluções, porque a última equação $0x+0y+0z=-1$ não é satisfeita por nenhum ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

•(5)• Matricialmente temos o sistema:

$$\left\{\begin{array}{r} x-2y=1 \\ 2x+y+3z=1 \\ -x+2y+z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Aplicamos o algoritmo de eliminação de gauss para encontrar uma matriz equivalente, com forma triangular geral:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix}$$

Temos já um sistema com forma triangular geral, com pivôs nas posições $(2,2),(3,3),(1,1)$. Resolvemos por substituição inversa:

$$\left\{\begin{aligned} x-2y&=1 \\ 5y&=-4 \\ z&=1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x&=-3/5 \\ y&=\boxed{-4/5} \\ z&=\boxed{1} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x&=-3/5 \\ y&=\boxed{-4/5} \\ z&=\boxed{1} \end{aligned}\right\}$$

O sistema tem uma solução única $(x,y,z)=(-3/5,-4/5,1)$

•(6)• Matricialmente temos o sistema:

$$\left\{\begin{aligned} x+y-z&=2 \\ x-y-z&=1 \\ x+y+z&=0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Aplicamos o algoritmo de eliminação de gauss para encontrar uma matriz equivalente, com forma triangular geral:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Temos já um sistema com forma triangular geral, com pivôs nas posições $(1,1),(2,2),(3,3)$. Resolvemos por substituição inversa:

$$\left\{\begin{aligned} x+y-z&=2 \\ -2y&=-1 \\ 2z&=-2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x+y&=1 \\ -2y&=-1 \\ z&=\boxed{-1} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x&=1/2 \\ y&=\boxed{1/2} \\ z&=\boxed{-1} \end{aligned}\right\}$$

Existe uma única solução $(x,y,z)=(1/2,1/2,-1)$

•(7)• Matricialmente temos o sistema:

$$\left\{\begin{aligned} x+2y+z&=3\\ -3x+5y+8z&=2\\ 4x-y-5z&=3\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&2&1\\-3&5&8\\4&-1&-5\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}$$

A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix}1&2&1&3\\-3&5&8&2\\4&-1&-5&3\end{bmatrix}$ Aplicamos o algoritmo de eliminação de gauss para encontrar uma matriz equivalente, com forma triangular geral:

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&1&3\\-3&5&8&2\\4&-1&-5&3\end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \quad \cdot(-4)\\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix}\boxed{1}&2&1&3\\0&\boxed{11}&11&11\\0&-9&-9&-9\end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 9/11 \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix}\boxed{1}&2&1&3\\0&\boxed{11}&11&11\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Temos já um sistema com forma triangular geral, com pivôs nas posições $(1,1),(2,2)$. Resolvemos por substituição inversa:

$$\left\{\begin{aligned} x+2y+z&=3\\ 11y+11z&=11\\ 0x+0y+0z&=0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} z&=\boxed{a}\\ x+2y&=3-a\\ 11y&=11-11a\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} z&=\boxed{a}\\ x&=1+a\\ y&=\boxed{1-a}\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

O sistema tem infinitas soluções $(x,y,z)=(1+a,1-a,a)\in\mathbb{R}^3$, uma diferente para cada escolha do parâmetro $a\in\mathbb{R}$

•(8)• Matricialmente temos o sistema:

$$\left\{\begin{aligned} x+y+w&=1\\ y+2z+w&=0\\ x+y+z+3w&=1\\ -3y-2z+2&=4\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&1&2&1\\0&1&2&1\\1&1&1&3\\0&-3&-2&0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}$$

A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix}0&1&2&1&0\\0&1&2&1&0\\1&1&1&3&1\\0&-3&-2&0&2\end{bmatrix}$ Aplicamos o algoritmo de eliminação de gauss para encontrar uma matriz equivalente, com forma triangular geral:

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \quad \cdot 3 \\ + \\ \\ \qquad\quad + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos já um sistema com forma triangular geral, com pivôs nas posições $(3,1), (1,2), (4,3)$. Resolvemos por substituição inversa:

$$\left\{ \begin{aligned} y + 2z + w &= 0 \\ 0x + 0y + 0z + 0w &= 0 \\ x + y + z + 3w &= 1 \\ 4z + 3w &= 2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} w &= \boxed{a} \\ y + 2z &= -a \\ x + y + z &= 1 - 3a \\ 4z &= 2 - 3a \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} w &= \boxed{a} \\ y &= -1 + (1/2)a \\ x + y &= (1/2) - (9/4)a \\ z &= \boxed{(1/2) - (3/4)a} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} w &= \boxed{a} \\ y &= \boxed{-1 + (1/2)a} \\ x &= (3/2) - (11/4)a \\ z &= \boxed{(1/2) - (3/4)a} \end{aligned} \right\}$$

Existem infinitas soluções

$$(x, y, z, w) = ((3/2) - (11/4)a, -1 + (1/2)a, (1/2) - (3/4)a, a) \in \mathbb{R}^4$$

uma solução diferente para cada escolha do parâmetro $a \in \mathbb{R}$

Exercício 2.30

Resolver o sistema matricial $A{\cdot}X = \mathrm{Id}$ para calcular as inversas das seguintes matrizes:

1. $\begin{bmatrix} 9 & 10 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & -4 \\ 9 & -3 & 13 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & -8 \\ -5 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

•(1)• Queremos resolver o sistema matricial linear:

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$M = \begin{bmatrix} 9 & 10 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apliquemos eliminação gaussiana nesta matriz:

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot(-2) \quad \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{array} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow + \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Já temos o sistema com forma triangular geral, com os pivôs na posição $(2,3)$, $(1,1)$, $(3,2)$. Aplicamos algoritmo de substituição inversa para determinar as linhas x_1, x_2, x_3 da matriz solução X:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= [1\ -2\,0] \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 &= [0\,1\,0] \\ x_2 &= [1\ -3\,1] \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= [-1\,4\ -2] \\ 4x_1 - x_3 &= [-4\,13\ -4] \\ x_2 &= \boxed{[1\ -3\,1]} \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= \boxed{[-1\,4\ -2]} \\ -x_3 &= [0\ -3\,4] \\ x_2 &= \boxed{[1\ -3\,1]} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= \boxed{[-1\,4\ -2]} \\ x_3 &= [0\,3\ -4] \\ x_2 &= \boxed{[1\ -3\,1]} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

Deduzimos que a única solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz inversa pedida, como podemos comprovar.

•(2)• Queremos resolver o sistema matricial linear:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & -4 \\ 9 & -3 & 13 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$M = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apliquemos eliminação gaussiana nesta matriz:

$$\begin{bmatrix} -4 & \boxed{1} & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \quad \cdot 3 \\ + \\ \qquad\quad + \end{array} \sim \begin{bmatrix} -4 & \boxed{1} & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ + \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -4 & \boxed{1} & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Já temos o sistema com forma triangular geral, com os pivôs na posição $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$. Aplicamos algoritmo de substituição inversa para determinar as linhas x_1, x_2, x_3 da matriz solução X:

$$\left\{\begin{aligned} -4x_1 + x_2 - 5x_3 &= [1\,0\,0] \\ 2x_1 + x_3 &= [-1\,1\,0] \\ x_1 &= \boxed{[1\,2\,1]} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_2 - 5x_3 &= [5\,8\,4] \\ x_3 &= \boxed{[-3\ -3\ -2]} \\ x_1 &= \boxed{[1\,2\,1]} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} x_2 &= [-10\ -7\ -6] \\ x_3 &= \boxed{[-3\ -3\ -2]} \\ x_1 &= \boxed{[1\,2\,1]} \end{aligned}\right\}$$

Deduzimos que a única solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -10 & -7 & -6 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz inversa pedida, como podemos comprovar.

•(3)• Queremos resolver o sistema matricial linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & -8 \\ -5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apliquemos eliminação gaussiana nesta matriz:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 5 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1/2} & -3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & \boxed{2} & 5 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Já temos o sistema com forma triangular geral, com os pivôs na posição $(1,1)$, $(3,2)$, $(2,3)$. Aplicamos algoritmo de substituição inversa para determinar as linhas x_1, x_2, x_3 da matriz solução X:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 &= [1\,0\,0] \\ (-1/2)x_3 &= [-3/2\,1\,3/2] \\ 2x_2 + 5x_3 &= [5\,0\,1] \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 &= [1\,0\,0] \\ x_3 &= \boxed{[3\ -2\ -3]} \\ 2x_2 &= [-10\,10\,16] \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= [6\ -5\ -8] \\ x_3 &= \boxed{[3\ -2\ -3]} \\ x_2 &= \boxed{[-5\,5\,8]} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

Deduzimos que a única solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -8 \\ -5 & 5 & 8 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz inversa pedida, como podemos comprovar.

Exercício 2.41

`Estamos a procura de uma curva no plano que tenha equações da forma:`

$$ax^3 + by^3 + cx + dy + e = xy$$

`e que passe pelos pontos` $(x, y) = (1, 1)$`,` $(x, y) = (1, 2)$`,` $(x, y) = (2, 1)$`,` $(x, y) = (2, 2)$`.`
`Determine as equações lineares que devem verificar` $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ `para que isto aconteça.`
`Resolva completamente o sistema, determinando todas as soluções possíveis.`
`Interprete o conjunto das soluções`

A curva está determinada se conhecemos os parâmetros (incógnitas) a, b, c, d, e.
Se a curva passa por $(1, 1)$ e tem as equações indicadas, deduzimos:

$$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1 + d \cdot 1 + e = 1 \cdot 1$$

De maneira similar, cada um dos pontos indica uma equação nas incógnitas a, b, c, d, e.

$$\begin{aligned}
&\text{Passa por } (1,1) \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1 + d \cdot 1 + e = 1 \cdot 1 \\
&\text{Passa por } (1,2) \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 2^3 + c \cdot 1 + d \cdot 2 + e = 1 \cdot 2 \\
&\text{Passa por } (2,1) \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 1^3 + c \cdot 2 + d \cdot 1 + e = 2 \cdot 1 \\
&\text{Passa por } (2,2) \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2 + d \cdot 2 + e = 2 \cdot 2
\end{aligned}$$

Matricialmente temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 8 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se aplicamos eliminação gaussiana temos:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 8 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -7 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -7 & -4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -7 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Observamos que no sistema obtido (equivalente ao original) aparece no fim uma equação $0a + 0b + 0c + 0d + 0e = 1$, que não tem soluções. Deduzimos que o sistema original não tem soluções, nenuma curva que passe por estes 4 pontos irá ter equações da forma indicada.

Exercício 2.43

Encontrar, pelo método de Gauss e substituição inversa, a inversa da matriz $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

1. $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -3 & -8 & 2 \end{bmatrix}$

2. $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -6 \\ -6 & 1 & -9 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $C = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

5. $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ -10 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

6. $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

7. $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ -6 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

8. $C = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$\bullet(1)\bullet$ Queremos resolver o sistema matricial linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -3 & -8 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apliquemos eliminação gaussiana nesta matriz:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Já temos o sistema com forma triangular, com os pivôs na posição $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$. Aplicamos algoritmo de substituição inversa para determinar as linhas x_1, x_2, x_3 da matriz solução X:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= [1\,0\,0] \\ x_2 - 2x_3 &= [1\,1\,0] \\ x_3 &= [2\ -1\,1] \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= [3\ -1\,1] \\ x_2 &= [5\ -1\,2] \\ x_3 &= \boxed{[2\ -1\,1]} \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 &= [-12\,2\ -5] \\ x_2 &= \boxed{[5\ -1\,2]} \\ x_3 &= \boxed{[2\ -1\,1]} \end{aligned} \right\}$$

Deduzimos que a única solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 2 & -5 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz inversa pedida, como podemos comprovar.

•(2)• Queremos resolver o sistema matricial linear:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -6 \\ -6 & 1 & -9 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apliquemos eliminação gaussiana nesta matriz:

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-4) \quad \cdot(-6) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & \boxed{-2} & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-3/2) \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & \boxed{-2} & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1/2} & 0 & 0 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Já temos o sistema com forma triangular geral, com os pivôs na posição $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$. Aplicamos algoritmo de substituição inversa para determinar as linhas x_1, x_2, x_3 da matriz solução X:

$$\left\{ \begin{array}{r} -x_1 + 2x_2 - x_3 = [1\,0\,0] \\ -7x_2 - 2x_3 = [-4\,1\,0] \\ -(1/2)x_2 = [0\ -3/2\,1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -x_1 - x_3 = [1\ -6\,4] \\ -2x_3 = [-4\,22\ -14] \\ x_2 = \boxed{[0\,3\ -2]} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -x_1 = [3\ -17\,11] \\ x_3 = \boxed{[2\ -11\,7]} \\ x_2 = \boxed{[0\,3\ -2]} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = [-3\,17\ -11] \\ x_3 = \boxed{[2\ -11\,7]} \\ x_2 = \boxed{[0\,3\ -2]} \end{array} \right\}$$

Deduzimos que a única solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 17 & -11 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -11 & 7 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz inversa pedida, como podemos comprovar.

$\bullet$(3)$\bullet$ Queremos resolver o sistema matricial linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apliquemos eliminação gaussiana nesta matriz:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \hookleftarrow_{+} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \hookleftarrow_{+} \\ \lrcorner_{\cdot(-9)} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Já temos o sistema com forma triangular geral, com os pivôs na posição $(1,1)$, $(3,2)$, $(2,3)$. Aplicamos algoritmo de substituição inversa para determinar as linhas x_1, x_2, x_3 da matriz solução X:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= [1\,0\,0] \\ -x_3 &= [1\,1\,-9] \\ x_2 + x_3 &= [0\,0\,1] \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 &= [3\,2\,-18] \\ x_3 &= \boxed{[-1\,-1\,9]} \\ x_2 &= [1\,1\,-8] \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 &= [2\,1\,-10] \\ x_3 &= \boxed{[-1\,-1\,9]} \\ x_2 &= \boxed{[1\,1\,-8]} \end{aligned} \right\}$$

Deduzimos que a única solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -10 \\ 1 & 1 & -8 \\ -1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz inversa pedida, como podemos comprovar.

$\bullet(4)\bullet$ Queremos resolver o sistema matricial linear:

$$\begin{bmatrix} 4 & -9 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apliquemos eliminação gaussiana nesta matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & -9 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot(-4) \quad \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-1} & 0 & 1 & -4 & 0 \\ \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

Já temos o sistema com forma triangular geral, com os pivôs na posição $(2,1)$, $(1,2)$, $(3,3)$. Aplicamos algoritmo de substituição inversa para determinar as linhas x_1, x_2, x_3 da matriz solução X:

$$\left\{ \begin{aligned} -x_2 &= [1\ -4\,0] \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= [0\,1\,0] \\ x_3 &= [0\ -1\,1] \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} -x_2 &= [1\ -4\,0] \\ x_1 - 2x_2 &= [0\,3\ -2] \\ x_3 &= \boxed{[0\ -1\,1]} \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_2 &= \boxed{[-1\,4\,0]} \\ x_1 &= [-2\,11\ -2] \\ x_3 &= \boxed{[0\ -1\,1]} \end{aligned} \right\}$$

Deduzimos que a única solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz inversa pedida, como podemos comprovar.

$\bullet(5)\bullet$ Queremos resolver o sistema matricial linear:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ -10 & 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Apliquemos eliminação gaussiana nesta matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 4 \\ + \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Já temos o sistema com forma triangular geral, com os pivôs na posição $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,3)$. Aplicamos algoritmo de substituição inversa para determinar as linhas x_1, x_2, x_3 da matriz solução X:

$$\left\{\begin{array}{r} 3x_1 - x_2 = [1\,0\,0] \\ x_1 - 3x_3 = [1\,1\,0] \\ x_3 = [2\,-2\,1] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 3x_1 - x_2 = [1\,0\,0] \\ x_1 = [7\,-5\,3] \\ x_3 = \boxed{[2\,-2\,1]} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} -x_2 = [-20\,15\,-9] \\ x_1 = \boxed{[7\,-5\,3]} \\ x_3 = \boxed{[2\,-2\,1]} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x_2 = [20\,-15\,9] \\ x_1 = \boxed{[7\,-5\,3]} \\ x_3 = \boxed{[2\,-2\,1]} \end{array}\right\}$$

Deduzimos que a única solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 3 \\ 20 & -15 & 9 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz inversa pedida, como podemos comprovar.

•(6)• Queremos resolver o sistema matricial linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apliquemos eliminação gaussiana nesta matriz:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \quad \cdot(-1) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \\ \end{matrix} \sim$$

Já temos o sistema com forma triangular geral, com os pivôs na posição $(1,1)$, $(3,2)$, $(2,3)$. Aplicamos algoritmo de substituição inversa para determinar as linhas x_1, x_2, x_3 da matriz solução X:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= [1\,0\,0] \\ x_3 &= [-2\,1\,0] \\ -x_2 &= [1\,-1\,1] \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 + 4x_3 &= [4\,-3\,3] \\ x_3 &= [-2\,1\,0] \\ x_2 &= \boxed{[-1\,1\,-1]} \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 &= [12\,-7\,3] \\ x_3 &= \boxed{[-2\,1\,0]} \\ x_2 &= \boxed{[-1\,1\,-1]} \end{aligned} \right\}$$

Deduzimos que a única solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -7 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz inversa pedida, como podemos comprovar.

•(7)• Queremos resolver o sistema matricial linear:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ -6 & 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 9 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apliquemos eliminação gaussiana nesta matriz:

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 9 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \quad \cdot(-6) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-9) \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

Já temos o sistema com forma triangular geral, com os pivôs na posição $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$. Aplicamos algoritmo de substituição inversa para determinar as linhas x_1, x_2, x_3 da matriz solução X:

$$\left\{\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= [1\,0\,0] \\ -x_2 - x_3 &= [-1\,1\,0] \\ x_3 &= [3\,-9\,1] \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= [-8\,27\,-3] \\ -x_2 &= [2\,-8\,1] \\ x_3 &= \boxed{[3\,-9\,1]} \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} -x_1 &= [-2\,3\,0] \\ x_2 &= \boxed{[-2\,8\,-1]} \\ x_3 &= \boxed{[3\,-9\,1]} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= \boxed{[2\,-3\,0]} \\ x_2 &= \boxed{[-2\,8\,-1]} \\ x_3 &= \boxed{[3\,-9\,1]} \end{aligned}\right\}$$

Deduzimos que a única solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 8 & -1 \\ 3 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz inversa pedida, como podemos comprovar.

•(8)• Queremos resolver o sistema matricial linear:

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apliquemos eliminação gaussiana nesta matriz:

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -2 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & -3 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -2 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Já temos o sistema com forma triangular geral, com os pivôs na posição $(3,3)$, $(2,2)$, $(1,1)$. Aplicamos algoritmo de substituição inversa para determinar as linhas x_1, x_2, x_3 da matriz solução X:

$$\left\{ \begin{aligned} -x_3 &= [1 \; -3 \; -1] \\ x_2 &= [0\,1 \; -2] \\ x_1 + x_2 + x_3 &= [0\,0\,1] \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_3 &= \boxed{[-1\,3\,1]} \\ x_2 &= [0\,1 \; -2] \\ x_1 + x_2 &= [1 \; -3\,0] \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_3 &= \boxed{[-1\,3\,1]} \\ x_2 &= \boxed{[0\,1 \; -2]} \\ x_1 &= [1 \; -4\,2] \end{aligned} \right\}$$

Deduzimos que a única solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz inversa pedida, como podemos comprovar.

•(9)• Queremos resolver o sistema matricial linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apliquemos eliminação gaussiana nesta matriz:

$$\left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1/2} & 1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & \boxed{2} & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Já temos o sistema com forma triangular geral, com os pivôs na posição $(1,1)$, $(3,2)$, $(2,3)$. Aplicamos algoritmo de substituição inversa para determinar as linhas x_1, x_2, x_3 da matriz solução X:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= [1\,0\,0] \\ (-1/2)x_3 &= [1/2\,1\,-3/2] \\ 2x_2 + 7x_3 &= [-1\,0\,1] \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 &= [-1\,-4\,6] \\ x_3 &= \boxed{[-1\,-2\,3]} \\ 2x_2 &= [6\,14\,-20] \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= [2\,3\,-4] \\ x_3 &= \boxed{[-1\,-2\,3]} \\ x_2 &= \boxed{[3\,7\,-10]} \end{aligned}\right\}$$

Deduzimos que a única solução é:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 7 & -10 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz inversa pedida, como podemos comprovar.

Exercício 2.44

Considere o sistema:

$$\begin{cases} 0.0001456x_1 + 123.4x_2 = 124.1 \\ \quad 2.885x_1 + 2.877x_2 = 3.874 \end{cases}$$

cuja solução (com precisão de 8 algarismos decimais) é $x_1 = 0.33992411$, $x_2 = 1.0056722$.

1. Use o método de eliminação de Gauss com escolha de pivô imediata num sistema $FP(10, 4, -99, 99, A)$ e a seguir repita com escolha de pivô total no mesmo sistema.

2. Identifique o erro absoluto cometido pela solução aproximada, em cada um dos casos, se medimos erros com a norma.∞.

A máquina trabalha com sistema $FP(10, 4, -99, 99)$.

No algoritmo de Gauss muitas operações são do tipo: $\bar{L}_i = L_i - \frac{a_{ik}}{a_{jk}} L_j$, onde L_i representa a linha i da matriz, e $\bar{L}_i$ representa a nova linha.

Poderíamos pensar que nestas operações o sistema calcula os quocientes $-a_{ik}/a_{jk}$ arredondados, depois os produtos deste número com cada linha L_j, arredondados, e depois a soma deste resultado, na linha L_i, arredondado. Fazer estas operações por esta ordem ou por outra levaria a erros diferentes. Ainda pior, o sistema às vezes nem sequer consegue eliminar as entradas, não obtém zeros onde era suposto obter zeros.

Vamos admitir, então, que o computador não faz estas operações, senão que usa algum algoritmo para resolver em forma aproximada a igualdade

$$a_{jk}\bar{L}_i + a_{ik}L_j = a_{jk}L_i$$

Interpretado assim podemos aceitar que a máquina substitui L_i por outra linha $\bar{L}_i^*$ que fosse o melhor arredondamento possível da autêntica solução $\bar{L}_i$, ou seja, que a máquina consegue identificar a linha arredondada $\bar{L}_i^*$ que melhor aproxima a linha $\bar{L}_i$ na aritmética que tem. Em particular, podemos admitir que consegue realmente eliminar as entradas que pretendemos eliminar em cada passo do algoritmo de eliminação gaussiana.

Após esta discussão, aceitemos que a maneira de operar da máquina é a indicada: não se calculam somas ou diferenças de linhas, senão que o algoritmo identifica em cada passo a linha que deveria ter identificado com aritmética exata, mas arredondada com 4 algarismos significativos em base 10.

• Começamos com escolha de pivô imediata. Começamos com a matriz ampliada do sistema.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1.456E-4} & 1.234E2 & 1.241E2 \\ 2.885E0 & 2.877E0 & 3.874E0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2.885/1.456)E4 \\ + \end{matrix} \sim^{\text{arred}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1.456E-4 & 1.234E2 & 1.241E2 \\ 0 & -2.445E6 & -2.459E6 \end{bmatrix}$$

Neste passo resolveríamos por substituição inversa. Esta operação equivale a fazer novas transformações elementares, e dividir linhas entre o pivô:

$$\sim \begin{bmatrix} 1.456E-4 & 1.234E2 & 1.241E2 \\ 0 & -2.445E6 & -2.459E6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot(-1/2.445)E-6 \end{matrix} \sim^{\text{arred}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1.456E-4 & 1.234E2 & 1.241E2 \\ 0 & 1 & 1.006 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot -1.234E2 \end{matrix} \sim^{\text{arred}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1.456E-4 & 0 & -4.040E-2 \\ 0 & 1 & 1.006 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot(1/1.456)E4 \\ \end{matrix} \sim^{\text{arred}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2.775E-2 \\ 0 & 1 & 1.006 \end{bmatrix}$$

A solução obtida seria:

$$x_1 = -0.02775, \qquad x_2 = 1.006$$

Se repetimos agora com escolha de pivô total, deveríamos escolher como pivô o valor mais elevado (em valor absoluto) entre os disponíveis

$$\begin{bmatrix} 1.456E-4 & 1.234E2 & 1.241E2 \\ \boxed{2.885} & 2.877 & 3.874 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-1.456/2.885)E-4 \end{matrix} \sim^{\text{arred}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.234E2 & 1.241E2 \\ 2.885 & 2.877 & 3.874 \end{bmatrix}$$

Agora resolvemos por substituição inversa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.234E2 & 1.241E2 \\ 2.885 & 2.877 & 3.874 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mid (1/1.234)E-2 \\ \end{matrix} \sim^{\text{arred}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.006 \\ 2.885 & 2.877 & 3.874 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-2.877) \end{matrix} \sim^{\text{arred}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.006 \\ 2.885 & 0 & 9.797E-1 \end{bmatrix} \quad | \cdot (1/2.885) \quad \sim^{\text{arred}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.006 \\ 1 & 0 & 3.396E-1 \end{bmatrix}$$

A solução agora obtida é:

$$x_1 = 0.3396, \quad x_2 = 1.006$$

No enunciado se indica que a solução exata é $(x_1, x_2) = (0.33992411, 1.0056722)$

Medir os erros absolutos cometidos é simples:

Na escolha de pivô total temos: $\Delta_\infty((0.3396, 1.006), (0.33992411, 1.0056722)) = \|(0.3396, 1.006) - (0.33992411, 1.0056722)\|_\infty = \|(-0.00032411, 0.0003278)\|_\infty = 0.0003278$

Na escolha de pivô imediata temos: $\Delta_\infty((-0.02775, 1.006), (0.33992411, 1.0056722)) = \|(-0.02775, 1.006) - (0.33992411, 1.0056722)\|_\infty = \|(-0.36766411, 0.0003278)\|_\infty = 0.36766411$

O erro cometido com escolha de pivô total é muito menor.

Exemplo de decomposição LU de Doolittle

Consideremos a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

Aplicamos o algoritmo de Gauss com escolhas de pivô imediata, na matriz $[A\,\mathrm{Id}]$:

$$[A\,\mathrm{Id}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-3) \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes obtidas satisfazem $\bar{L} \cdot A = U$, e simplificam o problema de resolver equações $A \cdot X = B$

Ainda podemos ir um passo à frente e aplicar Gauss em $[\bar{L}\,\mathrm{Id}]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \quad \cdot 5 \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim temos $L = \bar{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, e portanto uma decomposição de Doolittle da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L \cdot U$$

Exemplo de decomposição de Cholesky

Determinemos se a seguinte matriz simétrica é definido-positiva, e uma decomposição de Cholesky para esta matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ -6 & 8 & -12 \\ 3 & -12 & 30 \end{bmatrix}$$

Começamos o estudo na primeira linha $[\alpha\, b]$ da matriz U:

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ -6 & 8 & -12 \\ 3 & -12 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -10 \\ 0 & -10 & 29 \end{bmatrix}$$

Onde resolvemos $\alpha^2 = 9$, $\alpha \cdot b = [-6\, 3]$ e calculamos a matriz 2×2 restante.

Voltamos a aplicar o método agora com a matriz 2×2:

$$\begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

onde novamente resolvemos $\alpha^2 = 4$, $\alpha \cdot b = [-10]$ Finalmente o resto $[4]$ produz $\alpha^2 = 4$ portanto $\alpha = 2$

Se juntamos as três linhas que acabamos de encontrar, a decomposição $A = U^t \cdot U$ é:

$$A = U^t \cdot U \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como existe decomposição de Cholesky, podemos garantir que a matriz simétrica A é definido-positiva.