DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA I

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

1º Semestre 2018/19
1º Teste

24 de Novembro de 2018 — Duração: 2h

Instruções:

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- Não pode responder a diferentes questões numa mesma folha de resposta.
- O abandono da sala só poderá efectuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É permitida a consulta de uma folha A4 manuscrita pelo aluno.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de equipamentos electrónicos durante a prova.
- **Justifique convenientemente todas as respostas**

Nos exercícios 1, 2 e 4 não poderá ser utilizada a Regra de Cauchy no cálculo de limite.

1. Calcule os seguintes limites e escreva-os segundo a definição de Cauchy:

[1.5] (a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12}$;

[2.0] (b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(1-e^{\frac{1}{x-1}}\right)(x^2-1)}{\sqrt{3x^2+2}}$.

2. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x)=\begin{cases} k+x^2e^{4-x^2} & , \ x>0 \\ \\ x\ln\left(-\frac{1}{x}\right) & , \ x<0 \end{cases} \qquad (\text{com } k\in\mathbb{R}).$$

[1.0] (a) Justifique que f é contínua em todo o seu domínio.

[1.5] (b) Determine, caso exista, o valor de k para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto de abcissa $x=0$.

[1.0] (c) Mostre que f tem pelo menos um zero no intervalo $\left]-2,-\dfrac{1}{2}\right[$.

3. Considere a função g definida por

$$g(x) = \frac{\pi - \operatorname{arcsen}(2x-1)}{3}.$$

[2.0] (a) Caracterize a função inversa de g.

[1.0] (b) Determine, caso exista, $g^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

4. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2x}\right) & , \quad x > 0 \\ \\ \dfrac{x^3}{1+x^2} & , \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

[2.0] (a) Estude a função quanto à diferenciabilidade no ponto de abcissa $x = 0$.

[2.0] (b) Determine, justificando, a derivada da função f.

[1.0] (c) Determine uma equação da recta normal ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$.

[1.5] (d) Determine a aproximação linear em torno de -1 e use-a para calcular uma estimativa de $f(-1.01)$.

5. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \ln(1 + e^{3x})$.

[1.5] (a) Mostre que existe pelo menos um ponto do intervalo $]0, \ln 2[$ onde a recta tangente ao grafico de f tem declive $\dfrac{\ln(\frac{9}{2})}{\ln 2}$.

[2.0] (b) Calcule, justificando, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x+4}$.

Fim do teste