Generalidades sobre Funções Reais de Variável Real

Carlos J. Luz
Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

Ano Lectivo 2007/2008

Índice

1 Generalidades sobre Funções

1.1 Definição de função

Sejam A e B dois conjuntos. Chama-se **produto cartesiano** de A por B, e designa-se por $A \times B$, o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$. Por exemplo, o produto cartesiano de $A = \{1, 2, 3\}$ por $B = \{2, 4, 6, 8\}$ é dado por

$$A \times B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (1,8), (2,2), (2,4), (2,6)\}, (2,8), (3,2), (3,4), (3,6), (3,8)\}$$

e está representado graficamente na figura 1 (12 segmentos orientados de A para B, tantos quantos os pares ordenados).

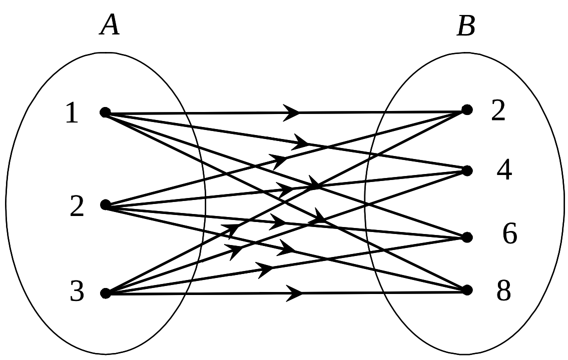
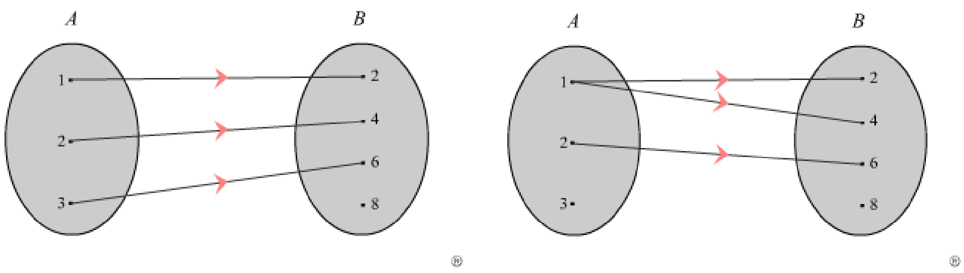


Figura 1: Produto cartesiano de A por B.

O produto cartesiano de $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}$ é o conjunto

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

constituído por todos os pares ordenados de números reais. Geometricamente este conjunto pode ser representado por todos os pontos de um plano no qual foi fixado um referencial cartesiano (cada par ordenado é representado por um ponto do plano).

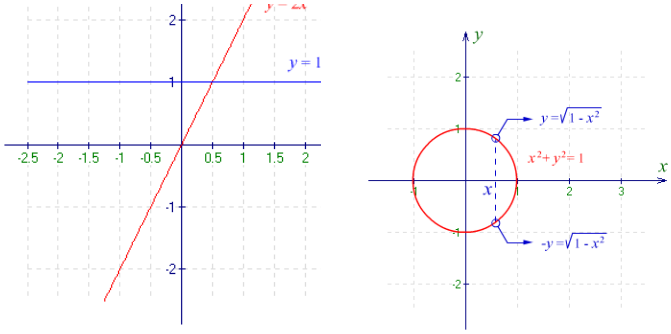


(a) (b)

Figura 2: Diagramas de setas

Qualquer subconjunto de $A \times B$ diz-se uma correspondência de A para B. Relativamente a cada par ordenado $(x, y) \in A \times B$ diz-se que x é **objecto** de y e y é **imagem** de x. Na figura 2 representam-se por diagramas de setas duas correspondências de $A = \{1, 2, 3\}$ para $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

A figura 3 apresenta em referenciais cartesianos os gráficos de uma correspondências de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ e de $[-1,1]$ para $[-1,1]$.



(a) (b)

Figura 3: (a) Correspondência de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$; (b) correspondência de $[-1,1]$ para $[-1,1]$

As correspondências de um conjunto A para um conjunto B podem classificar-se em **unívocas** e **plurívocas**. Nas primeiras, se um elemento $x \in A$ possui uma imagem $y \in B$, então y é a única imagem de x. Nas segundas, um elemento $x \in A$ pode ter duas ou mais imagens $y \in B$. Assim, as correspodências das figuras 2-(a) e 3-(a) são unívocas enquanto as correspondências das figuras 2-(b) e 3-(b) são plurívocas.

Uma **função** ou **aplicação** f de A para B é uma correspondência unívoca de A para B que verifica adicionalmente a seguinte condição: qualquer elemento $x \in A$ possui uma imagem $y \in B$. Exprime-se o facto do par (x, y) ser constituinte da função escrevendo a igualdade $y = f(x)$. A variável y é a **variável dependente** e x a **variável independente** (ou **argumento**) da função f.

Exemplo 1.1 O comprimento C de uma circunferência é função (isto é, depende) do seu raio r. Exprime-se esta função pela fórmula

$$C = 2\pi r.$$

Assim, de cada vez que é atribuído um valor a r, a letra C passa a ter um único valor, que é o produto de r pela constante 2π. Por isso, a cada valor de r corresponde um e um só valor de C. Diz-se então que a variável C é função da variável r e também que C é a variável dependente e r é a variável independente. ■

Vê-se pois que a correspondência da figura 2-(a) é uma função que associa a $x \in A$ o seu dobro $y = 2x \in B$. Designando esta função por f, é natural representá-la do seguinte modo:

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \to & B \\ & x & \to & y = f(x) = 2x \end{array}$$

A correspondência da figura 3-(a) é igualmente uma função que se representa por

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & y = f(x) = 2x \end{array}$$

Por outro lado, as correspondências das figuras 2-(b) e 3-(b) não são funções. No primeiro caso, a correspondência não é uma função por duas razões: o elemento 1 de A é objecto dos elementos 2 e 4 e o elemento 3 não tem qualquer imagem em B. No segundo caso, a correspondência não é unívoca pois a cada $x \in]-1,1[$ correspondem os valores de $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Sistematizando:

Definição 1.1 *Uma função ou aplicação f de um conjunto A para um conjunto B é uma correspondência que a cada elemento x de A associa um único elemento de y de B, isto é,*

$$\forall x \in A, \quad \exists^1 y \in B : y = f(x).$$

Simbolicamente escreve-se:

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \rightarrow & B \\ & x & \rightarrow & y = f(x) \end{array}$$

Registe-se a terminologia habitualmente usada:

- O conjunto A é o **conjunto de partida** da função, sendo designado por **domínio da função** e representado por D_f; tem-se pois $D_f = A$.
- O conjunto B é o **conjunto de chegada** da função;
- Cada elemento $x \in A$ designa-se por **objecto**; se a $x \in A$ corresponde o elemento y de B, y diz-se a **imagem** de x;
- O conjunto das imagens diz-se o **contradomínio da função** e é representado por CD_f, isto é,
$$CD_f = \{y \in B : \quad \exists x \in A : y = f(x)\}.$$
- A **imagem geométrica de** f é o conjunto dos pares ordenados $(x, y) \in A \times B$ tais que $y = f(x)$.

Definição 1.2 *Uma função que tem por domínio e contradomínio subconjuntos do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ diz-se uma função real de variável real (abreviadamente, f.r.v.r).*

Por exemplo, a função representada na figura 3-a) é uma f.r.v.r.. Obtém-se o gráfico de uma f.r.v.r. representando num referencial cartesiano todos ou somente alguns dos pares ordenados da imagem geométrica da função. Na prática, uma vez que não é em geral possível representar todos os pares ordenados da imagem geométrica da função, é desejável que a representação gráfica obtida permita antever a totalidade do gráfico da função em todo o seu domínio.

Exercício 1.1 Represente graficamente as seguintes f.r.v.r. e indique os respectivos domínios e contradomínios: $y = x$, $y = |x|$, $y = x^2$, $y = 1/x$, $y = mx + b$, $y = \sqrt{x}$. ■

1.2 Sinal e monotonia de uma função

A observação de um gráfico de uma função permite de imediato perceber em que pontos do domínio a função é positiva, negativa ou nula, isto é, as abcissas dos pontos do gráfico situados, respectivamente, acima do eixo das abcissas, abaixo deste ou no próprio eixo.

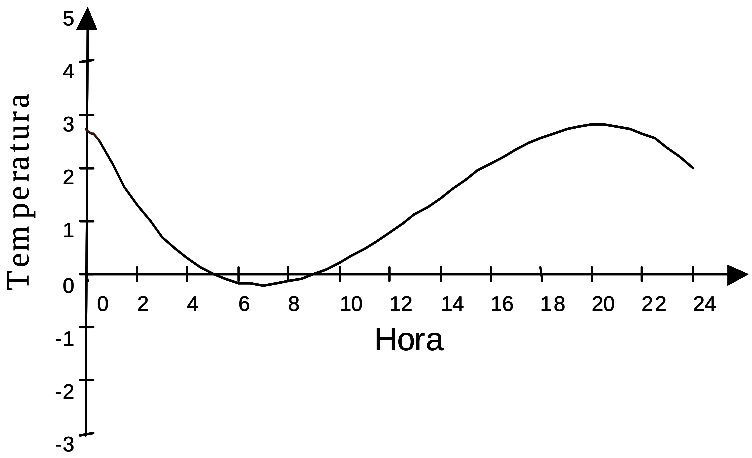


Figura 4: Temperatura em função das horas do dia.

Outra informação que se pode imediatamente extrair diz respeito ao sentido de variação da função. Por exemplo, na figura 4 representa-se a temperatura em função das horas do dia. Olhando este gráfico conclui-se imediatamente: a temperatura desceu desde as 0 horas até às 7 horas; depois subiu até às 20 horas, manteve-se sensivelmente constante entre as 20 e as 21 horas e tornou a descer até às 24 horas.

Por outro lado, a temperatura é positiva nos intervalos $[0, 5[$ e $]9, 24[$, negativa em $]5, 9[$ e nula nos pontos 5 e 9.

Seja f uma função qualquer e designemos por A uma parte do seu domínio. Então diremos que:

1. A função f é **positiva** ou **negativa** em A se, respectivamente, $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$, para $x \in A$; quando $f(x) = 0$, para algum $x \in A$, f diz-se **nula** e x é um **zero** de f;

2. A função f é **crescente** (respectivamente, **estritamente crescente**) em A se, para todo o par de valores x_1 e x_2 pertencentes a A tais que $x_1 > x_2$, se tem $f(x_1) \geq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$);

3. A função f é **decrescente** (respectivamente, **estritamente decrescente**) em A se, para todo o par de valores x_1 e x_2 pertencentes a A tais que $x_1 > x_2$, se tem $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$);

4. A função $f(x)$ é **constante** em A se $f(x_1) = f(x_2)$, quaisquer que sejam os valores x_1 e x_2 pertencentes a A;

5. A função f é **monótona** em A se é crescente ou decrescente em A.

Exemplo 1.2 Mostrar que a função $f(x) = 5x^2$ é crescente no conjunto dos números reais positivos.

Com efeito, sejam x_1 e x_2 dois quaisquer números reais positivos tais que $x_1 > x_2$. Então $x_1^2 > x_2^2$ (não seria assim se, por exemplo, $x_1 = -0.1 > -0.2 = x_2$), e portanto $5x_1^2 > 5x_2^2$, donde se conclui que $f(x_1) \geq f(x_2)$. Ver-se-ia analogamente que $f(x)$ é decrescente no conjunto dos números reais negativos. ■

1.3 Função limitada

Consideremos os gráficos das funções $f(x) = x^2$ (figura 5) e $g(x) = 1/x$ (figura 6). O conjunto das imagens de $[0,1]$ por meio de f representa-se por $f([0,1])$, isto é,

$$f([0,1]) = \{f(x) : x \in [0,1]\}.$$

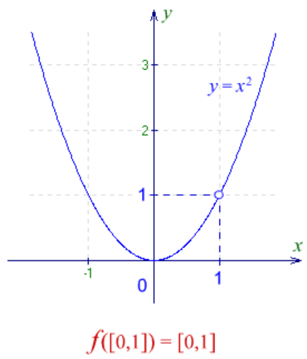


Figura 5: Função limitada em $[0,1]$.

Da observação da figura 5 resulta que $f([0,1]) = [0,1]$ pelo que se trata de um conjunto limitado, isto é, minorado e majorado. Equivale a dizer que existem números reais m e M tais que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [0,1].$$

O menor dos majorantes de $f([0,1])$ diz-se o **supremo** de f em $[0,1]$ e representa-se por $\sup_{x\in[0,1]} f(x)$. Tem-se pois

$$\sup_{x\in[0,1]} f(x) = \sup f([0,1]) = \sup[0,1] = 1.$$

O maior dos minorantes de $f([0,1])$ diz-se o **ínfimo** de f em $[0,1]$ e representa-se por $\inf_{x\in[0,1]} f(x)$. Tem-se agora

$$\inf_{x\in[0,1]} f(x) = \inf f([0,1]) = \inf[0,1] = 0.$$

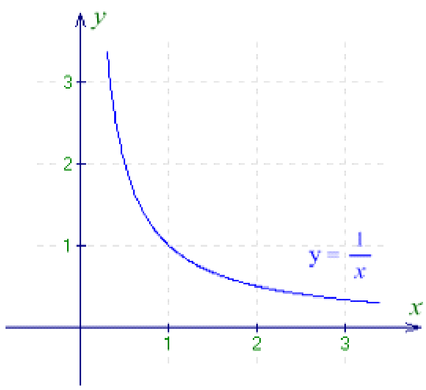


Figura 6: Função não limitada em $]0,1]$ $(f(]0,1]) = [1,+\infty[)$.

Observando por outro lado a figura 6 verifica-se facilmente que $g([0,1]) = [1,+\infty[$. Assim

$$\sup_{x\in]0,1]} g(x) = \sup[1,+\infty[= +\infty,$$

pelo que $g(x)$ não é majorada em $]0,1]$ não podendo pois ser aí limitada. No entanto, $g(x)$ é minorada em $]0,1]$ visto que $\inf_{x\in]0,1]} g(x) = 1$.

Seja $f(x)$ uma função qualquer de designemos por A uma parte do domínio de $f(x)$. Então diremos que $f(x)$ é **limitada** em A se $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ é um conjunto limitado; equivale a dizer que $f(A)$ é um conjunto majorado e minorado, isto é,

$$\exists m, M : \forall x \in A, \quad m \leq f(x) \leq M$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists M > 0 : \forall x \in A, \quad |f(x)| \leq M$$

1.4 Extremos de uma função

A função $f(x)$ da figura 4 tem um mínimo local ou relativo em $x = 7$ pois existe uma vizinhança do ponto 7 (por exemplo $[6.5, 7.5]$) onde o menor valor assumido pela função é precisamente $f(7)$. Por outro lado, a mesma função tem um máximo local ou relativo em $x = 20$ pois é possível identificar uma vizinhança de 20 onde $f(20)$ é o maior valor assumido pela função. Este máximo é também absoluto dado que a função não assume no seu domínio maior valor que $f(20)$.

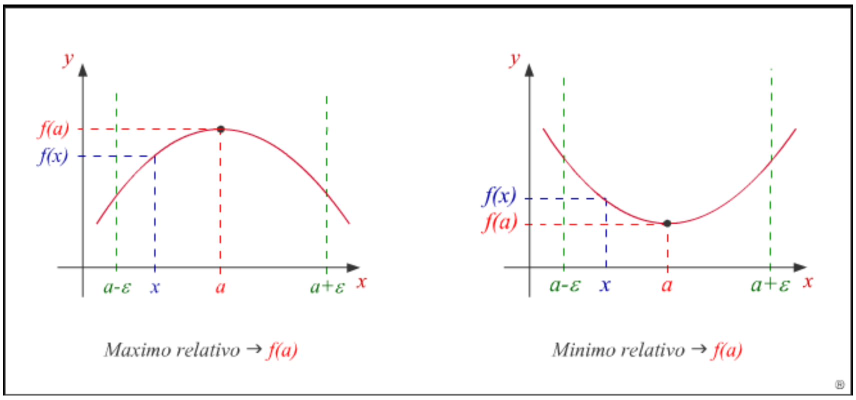


Figura 7: Máximo e mínimo de uma função.

Seja $f(x)$ uma função qualquer e D o seu domínio. Então, diremos que (ver figura 7):

1. A função $f(x)$ tem um **máximo local** (ou **relativo**) no ponto $a \in D$ (ou que $f(a)$ é máximo local de $f(x)$) se existir uma vizinhança de a, $]a-\epsilon, a+\epsilon[$, tal que

$$\forall x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap D, \quad f(x) \leq f(a);$$

2. A função $f(x)$ tem um **mínimo local** (ou **relativo**) no ponto $a \in D$ (ou que $f(a)$ é mínimo local de $f(x)$) se existir uma vizinhança de a, $]a-\epsilon, a+\epsilon[$, tal que

$$\forall x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap D, \quad f(x) \geq f(a);$$

3. A função $f(x)$ tem um **máximo absoluto** no ponto $a \in D$ (ou que $f(a)$ é máximo absoluto de $f(x)$) se

$$\forall x \in D, \quad f(x) \leq f(a);$$

4. A função $f(x)$ tem um **mínimo absoluto** no ponto $a \in D$ (ou que $f(a)$ é mínimo absoluto de $f(x)$) se
$$\forall x \in D, \quad f(x) \geq f(a);$$

1.5 Classificação das funções ou aplicações

Voltemos à função
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & y = f(x) = 2x \end{array}$$
representada na figura 3. Vemos que $CD_f = \mathbb{R}$ isto é, o contradomínio de $f(x)$ coincide com o conjunto de chegada, pelo que $f(x)$ se diz uma função sobrejectiva. Pela observação do seu gráfico também se conclui de imediato que a objectos diferentes correspondem imagens diferentes, pelo que $f(x)$ se diz injectiva. Uma função simultaneamente injectiva e sobrejectiva diz-se bijectiva.

Em geral, sendo $f(x)$ uma função de um conjunto A para um conjunto B, diremos que:

1. A função $f(x)$ é **sobrejectiva** se o contradomínio coincide com o conjunto de chegada, isto é,
$$f(A) = B \Leftrightarrow f(A) \subseteq B \wedge B \subseteq f(A).$$
Como a proposição $f(A) \subseteq B$ é sempre verdadeira, afirmar a sobrejectividade de uma função equivale a afirmar que se verifica $B \subseteq f(A)$, ou seja,
$$\begin{aligned} f(x) \text{ é sobrejectiva} &\Leftrightarrow B \subseteq f(A) \Leftrightarrow \forall y \in B, \quad y \in f(A) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in B, \quad \exists x \in A : y = f(x) \end{aligned}$$

2. A função $f(x)$ é **injectiva** se
$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
o que pela propriedade do contra-recíproco equivale a afirmar que
$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

3. A função $f(x)$ é **bijectiva** se é simultaneamente injectiva e sobrejectiva, isto é,
$$\forall y \in B, \quad \exists^1 x \in A : y = f(x).$$

1.6 Paridade

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **par** se a igualdade $f(-x) = f(x)$, qualquer que seja $x \in D$. Geometricamente, se uma função é par, o seu gráfico é simétrico relativamente ao eixo dos y. Na figura 8 apresenta-se a função $f(x) = \ln |x|$. Trata-se de uma função par pois, para $x \neq 0$ (isto é, para qualquer valor do domínio), $f(-x) = \ln |-x| = \ln x = f(x)$.

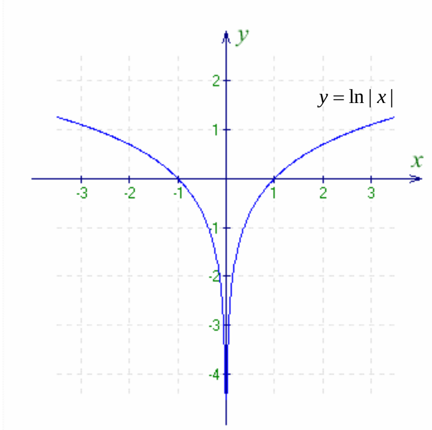


Figura 8: Função par.

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **ímpar** se a igualdade $f(-x) = -f(x)$, qualquer que seja $x \in D$. Geometricamente, se uma função é ímpar, o seu gráfico é simétrico relativamente à origem do referencial. Na figura 9 apresenta-se a função $f(x) = x^3$. Trata-se de uma função ímpar pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

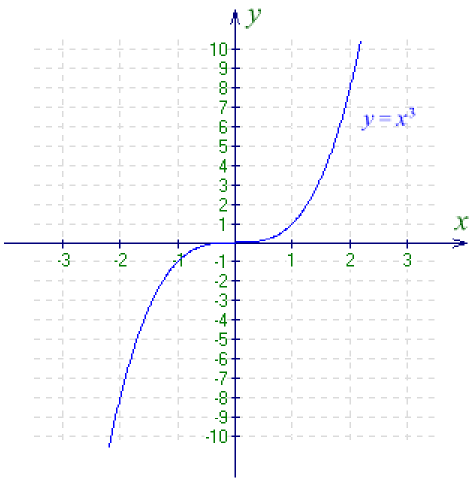


Figura 9: Função ímpar.

1.7 Funções periódicas

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **periódica** se satisfaz a condição $f(x) = f(x+T)$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$; o número T chama-se o período da função, o qual é habitualmente o menor número que satisfaz aquela condição. Na figura10 representa-se a função

$$\begin{array}{rccc} \text{sen}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & y = 2\,\text{sen}\, x \end{array}$$

cujo período é 2π.

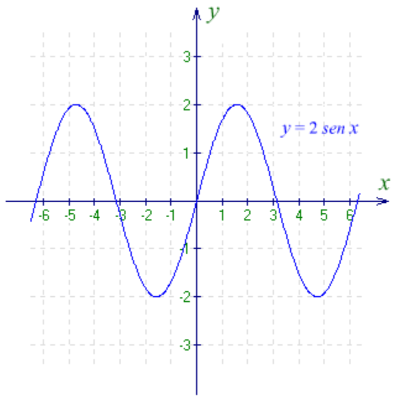


Figura 10: Função periódica.

2 Operações com funções

Entre funções podem realizar-se diversas operações que originam outras funções. Registaremos seguidamente algumas das operações possíveis.

Operações racionais, extracções de raiz e módulo Dadas duas funções reais de variável real f e g, as expressões

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \sqrt[n]{f(x)} \quad \text{e} \quad |f(x)|$$

representam novas funções de x, que se chamam, respectivamente, **soma** de f com g, **diferença** entre f e g, **produto** de f por g, **quociente** de f por g, **raiz de índice** n de f e **módulo** de f.

Os domínios destas novas funções podem ser mais restritos que os domínios originais de f e g. Assim, a soma, a diferença e o produto têm por domínio o conjunto $D_f \cap D_g$. Quanto ao quociente, só está definido nos pontos de $D_f \cap D_g$ que não anulam g, isto é,

$$D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}.$$

Se n é ímpar, tem-se que $D_{\sqrt[n]{f}} = D_f$ mas, se n é par $\sqrt[n]{f(x)}$ não está definida nos pontos x onde $f(x) < 0$, isto é,

$$D_{\sqrt[n]{f(x)}} = \begin{cases} D_f & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ D_f \cap \{x : f(x) \geq 0\} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}.$$

Finalmente,

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases},$$

pelo que $D_{|f|} = D_f$.

Exemplo 2.1 Considerando as funções $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = x^2 + 2$ cujos domínios são $D_f = D_g = \mathbb{R}$, podemos operá-las de modo a originar as seguintes funções:

- Soma: $f(x) + g(x) = (2x - 5) + (x^2 + 2) = x^2 + 2x - 3$, $D_{f+g} = \mathbb{R}$

- Diferença: $f(x)-g(x)=(2x-5)-(x^2+2)=-x^2+2x-7$, $D_{f-g}=\mathbb{R}$
- Produto: $f(x)\cdot g(x)=(2x-5)\cdot(x^2+2)=2x^3-5x^2+4x-10=D_{f\cdot g}=\mathbb{R}$
- Quociente: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x-5}{x^2+2}$, $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}$
- Raiz quadrada: $\sqrt{f(x)}=\sqrt{2x-5}$, $D_{\sqrt{f(x)}}=\{x\in\mathbb{R}:2x-5\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 5/2\}$
- Módulo: $|f(x)|=|2x-5|=\begin{cases} 2x-5 & \text{se } 2x-5\geq 0\Leftrightarrow x\geq 5/2 \\ -2x+5 & \text{se } 2x-5<0\Leftrightarrow x<5/2 \end{cases}$. ■

Exercício 2.1 A partir dos domínios das funções $f(x)=\sqrt{1+x}$ e $g(x)=\sqrt{1-x}$ determine o domínio da função produto $f(x)\cdot g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Composição de funções Consideremos as funções $y=f(t)=t^2-3t+1$ e $t=g(x)=\sqrt{x}$. A função f exprime y como função de t enquanto a função g exprime t como função de x. Assim, y pode ser expressa como função de x, para o que basta substituir t por $g(x)=\sqrt{x}$ na expressão de $f(t)$:

$$y=f(\sqrt{x})=\left(\sqrt{x}\right)^2-3\sqrt{x}+1=x-3\sqrt{x}+1.$$

Diz-se então que y é uma função composta de f com g ou que y é uma função de x por intermédio de t. É costume representar y por $(f\circ g)(x)$ ou por $f\left[g(x)\right]$.

Definição 2.1 *Dadas duas f.r.v.r. $f(x)$ e $g(x)$, a função dada por*

$$(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]$$

denomina-se por função composta de f com g (ou f após g). O domínio de $f\circ g$ é constituído pelos valores $x\in D_g$ tais que $g(x)\in D_f$, isto é,

$$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}.$$

Exemplo 2.2 Considerando as funções do exemplo anterior $f(x)=2x-5$ e $g(x)=x^2+2$, vamos obter $(f\circ g)(x)$ e $(g\circ f)(x)$:

- $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+2)=2\left(x^2+2\right)-5=2x^2-1$, $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$
- $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-5)=(2x-5)^2+2=4x^2-20x+27$, $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$

Vê-se assim que a operação de composição não é comutativa pois não se verifica a igualdade entre $(f\circ g)(x)$ e $(g\circ f)(x)$, qualquer que seja $x\in\mathbb{R}$. ■

Convém referir que, de um modo geral, a operação de composição não é comutativa mas é associativa.

Exercício 2.2 Considere as funções $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\sqrt{x-2}$ e $h(x)=3x$.
(a) Calcule $(g\circ h\circ f)(x)$ e o respectivo domínio
(b)Mostre que $\left[(g\circ h)\circ f\right](x)=\left[g\circ(h\circ f)\right](x)$.

Inversão de uma função Suponhamos que a velocidade de um móvel, v, varia com o tempo, t, segundo a lei

$$v = 20 + 3t \ \ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Esta equação exprime v como função de t; mas resolvendo-a em ordem a t, podemos exprimir t como função de v :

$$t = \frac{v - 20}{3}.$$

Temos agora v no papel de variável independente e t como variável dependente. Diz-se então que a segunda função é *inversa* da primeira e vice-versa. Representando a primeira função por $v = f(t) = 20 + 3t$ é habitual representar a segunda por $t = f^{-1}(v) = \frac{v-20}{3}$.

Nem todas as funções têm inversa. Apenas para as funções injectivas se pode definir uma inversa. De facto, se uma função não é injectiva existe uma imagem y correspondente a dois objectos distintos x' e x''. Assim, a correspondência inversa inclui os pares ordenados (y, x') e (y, x''), pelo que não constitui uma correspondência unívoca. Logo, não se pode definir uma função inversa.

Definição 2.2 *Seja $y = f(x)$ uma aplicação injectiva de um conjunto A para um conjunto B. Chama-se* ***função inversa*** *de f à correspondência unívoca de $CD_f = f(A)$ para $D_f = A$ e representa-se por f^{-1}, isto é,*

$$\begin{array}{llll} f: & f(A) \subseteq B & \rightarrow & A \\ & x & \rightarrow & y = f^{-1}(x) \end{array}$$

De notar que são válidas as igualdades

$$D_{f^{-1}} = CD_f \quad \text{e} \quad CD_{f^{-1}} = D_f,$$

isto é, o *contradomínio de uma função é o domínio da sua inversa* e vice-versa.

Exemplo 2.3 Vamos calcular a inversa da função $f(x) = 2x + 1$. Como

$$y = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y - 1}{2},$$

continuando a representar como habitualmente a variável independente por x e a dependente por y, temos que a função inversa é

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}.$$

Na figura 11 apresenta-se a função f e a sua inversa. De notar que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares, o que sempre acontece quando se representam no mesmo referencial uma função e a sua inversa. ■

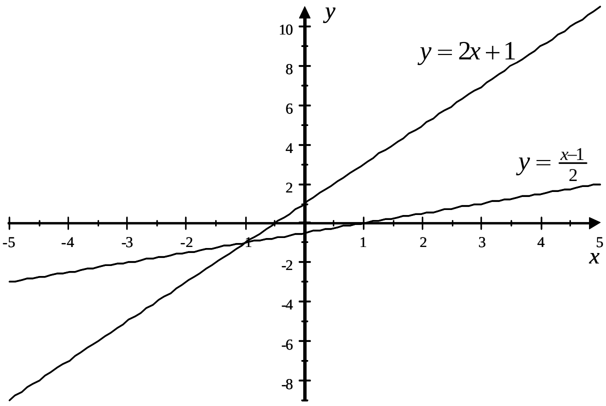


Figura 11: A função $y = 2x + 1$ e a sua inversa $y = \frac{x-1}{2}$.

Não se deve confundir a função inversa de uma dada função $f(x)$ com o inverso aritmético (ou recíproco) de $f(x)$, que é a função $\frac{1}{f(x)}$. Por exemplo a função inversa de $y = x^3$ é $y = \sqrt[3]{x}$; o inverso aritmético de x^3 é $\frac{1}{x^3}$.

3 Tipos de funções elementares

Grande parte dos fenómenos naturais podem ser representados pelas chamadas **funções elementares**. Trata-se de funções definidas por fórmulas que contêm um número finito de operações algébricas ou trigonométricas efectuados com o argumento, com a função e com algumas constantes. As operações mencionadas são as seguintes: as quatro operações aritméticas, a elevação a qualquer potência e a extracção da raiz, a logaritmação e a potenciação com qualquer base, a aplicação de uma função trigonométrica ou de uma função trigonométrica inversa.

As funções elementares dividem-se em algébricas e transcendentes. Veremos seguidamente cada uma destas categorias.

3.1 Funções algébricas

Comecemos por referir algumas funções algébricas bem conhecidas:

Função algébrica racional inteira, função polinomial ou polinómio São as funções algébricas mais simples, as quais se expressam na forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

em que $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ são números reais designados por *coeficientes* e n é um número inteiro positivo, designado por *grau* da função polinomial.

Vejamos alguns exemplos usuais de funções polinomiais:

- A função **constante** $f(x) = a$ (polinómio de grau 0); na figura 12 representa-se a função $f(x) = 3$, em que $D_f = \mathbb{R}$ e $CD_f = \{3\}$;

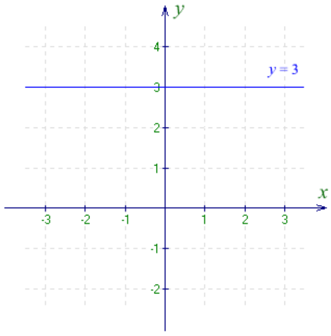


Figura 12: Função constante

- A função **afim** $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ (polinómio de grau 1); na figura 13 representa-se a função $f(x) = 2x - 1$, em que $D_f = CD_f = \mathbb{R}$. Se $b = 0$, a função afim designa-se por função linear; como exemplos de funções lineares temos $f(x) = -x$ ou $f(x) = \pi x$.

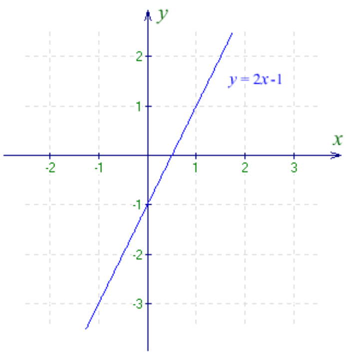


Figura 13: Função afim.

- A função **quadrática** $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ (polinómio de grau 2); na figura 14 representa-se a função $f(x) = x^2 + 2x + 1$, em que $D_f = \mathbb{R}$ e $CD_f = \mathbb{R}_0^+$.

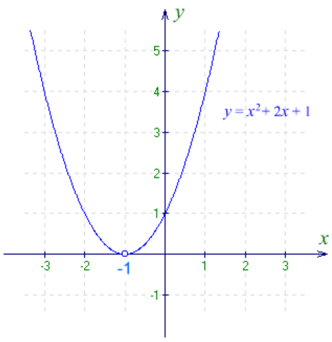


Figura 14: Função quadrática.

- A função **cúbica** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$ (polinómio de grau 3); na figura 15 representa-se a função $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x + 1$, em que $D_f = CD_f = \mathbb{R}$.

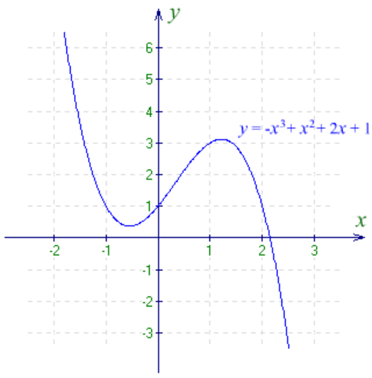


Figura 15: Função cúbica.

Função algébrica racional fraccionária São funções que se podem expressar como quocientes de dois polinómios, isto é, expressam-se na forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

em que $p(x)$ e $q(x)$ são, respectiivamente, polinómios de graus m e n e $q(x) \neq 0$. Na figura 16 representa-se graficamente a função racional $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ cujo domínio é $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ e o contradomínio $CD_f = \mathbb{R}$.

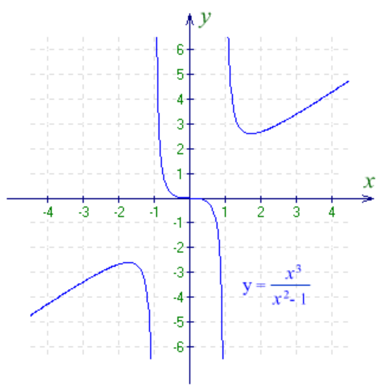


Figura 16: Função racional.

Função algébrica irracional Uma função algébrica diz-se **irracional** se não for racional. Entende-se por função racional uma função que pode ser representada por uma expressão algébrica que contém as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão mas não inclui extracções de raiz. Assim, por exemplo, as funções

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 2x + \sqrt[3]{x^2 - 4x + 1}, \quad h(x) = \frac{x + x^{1/2}}{\sqrt{1 + 5x^2}}$$

são exemplos de funções algébricas irracionais. De notar que a expressão algébrica $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$ inclui uma extracção de raiz mas define uma função racional uma vez que que

$$\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} = \sqrt{(x^2 + 1)^2} = x^2 + 1$$

Função potência de expoente racional Sendo n um número natural, a potência de expoente natural n de um número real a define-se por

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n \cdot a \end{cases}$$

A partir desta definição é possível demonstrar pelo princípio de indução matemática as seguintes propriedades, supondo m e n números naturais:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (*produto de potências da mesma base*)
2. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ (*produto de potências com o mesmo expoente*)
3. $(a^m)^n = a^{mn}$ (*potência de potência*)

A generalização do conceito de potência aos caso em que o expoente não é natural assenta na conservação destas propriedades. Assim, designando o expoente por α, temos:

Potência de expoente racional $\alpha = \frac{m}{n}$ Pela propriedade 3 tem-se

$$(a^\alpha)^n = a^{\alpha n} \Rightarrow (a^\alpha)^n = a^m.$$

Da última igualdade, por definição de raiz de índice n de um número, define-se a potência de expoente racional por

$$a^\alpha = \sqrt[n]{a^m}.$$

Potência de expoente nulo Da propriedade 1 conclui-se

$$a^0 \cdot a^1 = a^1 \Leftrightarrow a^0 \cdot a = a,$$

pelo que se $a \neq 0$,

$$a^0 = 1.$$

Potência de expoente negativo Seja α um número racional positivo e $a \neq 0$. De novo pela propriedade 1,

$$a^\alpha \cdot a^{-\alpha} = a^{\alpha + (-\alpha)} = a^0 = 1,$$

donde sai que

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$$

Estamos agora em condições de poder falar na função potência de expoente racional, a qual se define por

$$f(x) = x^{\alpha}, \quad \text{com } \alpha \text{ racional.}$$

Se α é inteiro estamos perante uma função algébrica racional inteira ou fraccionária. Se α é uma fracção irredutível, a função potência pode ser uma função algébrica racional ou irracional. Vejamos alguns exemplos:

1. As funções $f(x) = x^4$ e $g(x) = x^5$ representadas na figura 17.

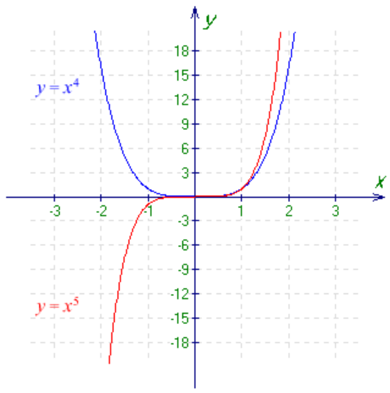


Figura 17: Funções potência algébricas racionais inteiras.

2. As funções $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, representadas na figura 18.

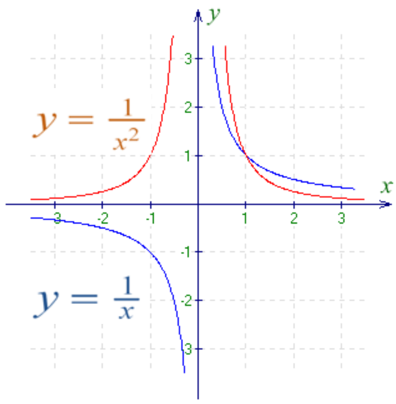


Figura 18: Funções potência algébricas racionais fraccionárias.

3. As funções $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ representadas na figura 19.

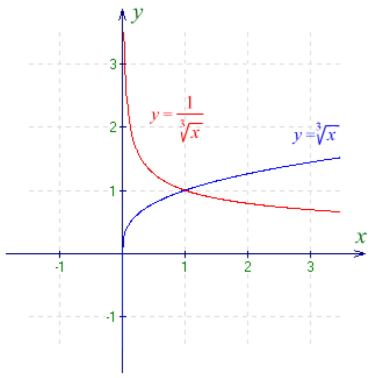


Figura 19: Funções potência algébricas irracionais.

Depois dos exemplos vistos, podemos definir com precisão a noção de função algébrica:

Definição 3.1 *Chama-se função algébrica a toda a função* $y = f(x)$ *que satisfaz uma equação da forma*

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)y + p_n(x) = 0, \tag{1}$$

em que $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ *são polinómios em* x.

Qualquer função algébrica pertencente a um dos três tipos citados verifica uma equação da forma dada na definição anterior. Por exemplo, se $n = 1$, esta equação reduz-se a

$$p_0(x)y + p_1(x) = 0,$$

pelo que define uma função racional se $p_0(x)$ não for o polinómio nulo. Esta função racional será inteira caso $p_0(x)$ se reduza a uma constante não nula. Considerando a função $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ temos que esta igualdade se pode escrever na forma

$$\left(x^2 - 1\right) y - x^3 = 0,$$

pelo que neste caso $p_0(x) = x^2 - 1$ e $p_1(x) = -x^3$.

Caso se atribua um valor a x na igualdade $\left(x^2 - 1\right) y - x^3 = 0$, esta fórmula converte-se numa equação que inclui somente a variável y, a qual admite uma única solução. Diz-se então que a equação $\left(x^2 - 1\right) y - x^3 = 0$ define y como **função implícita** de x (ou define implicitamente y como função de x). Ao resolver esta equação em ordem a y obtém-se como sabemos $y = \frac{x^3}{x^2-1}$. Diz-se então que se explicitou a função ou que a equação $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ (com a variável y isolada num dos membros) define y como **função explícita** de x.

Quando uma função se encontra definida à custa de uma equação do tipo

$$f(x, y) = 0,$$

diz-se que esta equação define y como função implícita de x (o símbolo $f(x, y)$ indica somente uma função qualquer das variáveis x e y). Deste modo se considerarmos o lado esquerdo de (1) como uma função de x e de y, pode-se dizer que esta igualdade define implicitamente as funções algébricas.

Muitas funções algébricas não podem ser explicitadas pelo que não pertencem a nenhum dos três tipos de expressões algébricas vistas acima. É o caso da função algébrica definida implicitamente por

$$y^5 + 2y - x = 0.$$

Tendo em conta (1), para esta função algébrica tem-se $n = 5$, $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = p_2(x) = p_3(x) = 0$, $p_4(x) = 2$ e $p_5(x) = -x$. Demonstra-se porém que não é possível explicitar y por meio de uma expressão algébrica, resultado que se deve ao matemático norueguês Niels H. Abel (1802-1829). Designa-se a função assim definida por função algébrica implícita.

Podemos por fim propor a seguinte classificação das funções algébricas.

$$\text{Funções Algébricas} \begin{cases} \text{Explicitáveis} \begin{cases} \text{Racionais} \begin{cases} \text{Inteiras} \\ \text{Fraccionárias} \end{cases} \\ \text{Irracionais} \end{cases} \\ \text{Implícitas} \end{cases}$$

Exercício 3.1 Considerando as equações $x^2 + y^2 = 1$, $y = \frac{x(1+y^2)}{2}$, explicite y como função de x e indique os domínios e contradomínios das funções definidas implicitamente. ∎

3.2 Funções transcendentes

As funções elementares que não são algébricas dizem-se **transcendentes**. O conjunto das funções transcendentes mais frequentemente utilizadas inclui as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas que veremos de seguida.

3.2.1 Funções exponenciais e logarítmicas

Definição 3.2 *Sendo a um número positivo diferente de 1, chama-se **função exponencial de base** a, à função dada por*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \to & y = a^x \end{array}$$

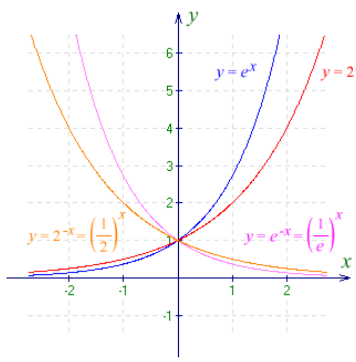


Figura 20: Funções exponenciais.

Na figura 20 estão representadas graficamente diversas funções exponenciais, designadamente para $a = e \approx 2.718281$ (e é o número de Neper), $a = 1/e \approx 0.367879$, $a = 2$ e $a = 1/2$.

De notar que o domínio da função exponencial é o conjunto de todos os números reais e que o contradomínio é o conjunto de todos os números reais positivos. Observa-se também que a função exponencial é estritamente crescente em todo o seu domínio e que $a^x > 1$, $a^x = 1$ ou $a^x < 1$, consoante for $x > 0$, $x = 0$ ou $x < 0$.

Vejamos mais algumas propriedades da função exponencial.

Proposição 3.1 *Sendo a um número real positivo diferente de* 1 *tem-se:*

(a) $a^1 = a$

(b) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(c) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(d) $a^{xy} = (a^x)^y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Podemos ainda observar que a função exponencial é uma bijecção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$, cujo significado é o seguinte:

- Dado $x \in \mathbb{R}$ existe um e um só $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y = a^x$;
- Dado $y \in \mathbb{R}^+$ existe um e um só expoente $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = a^x$; este expoente diz-se o logaritmo de y na base a e representa-se por $x = \log_a y$

Podemos então definir a função logaritmo, a qual é a função inversa da função exponencial:

Definição 3.3 *Seja $f(x) = a^x$ a função exponencial de base a ($a \neq 1$). A função inversa de $f(x)$ designa-se por **função logaritmo de base** a e é dada por*

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & y = \log_a x \end{array}$$

Quando $a = e$, a função logaritmo representa-se simplesmente por $y = \ln x$, e este logaritmo designa-se por *logaritmo neperiano*. Se $a = 10$, a função logaritmo representa-se por $y = \log x$ e este logaritmo designa-se por *logaritmo decimal*.

Das definições das funções exponencial e logaritmo resulta que

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

donde é possível imediatamente concluir que, quaisquer que sejam $y > 0$ e $a \neq 1$,

$$\boxed{a^{\log_a y} = y}$$

Exemplo 3.1 Temos que $\log_2 128 = 8$ pois $2^8 = 128$ pelo que $2^{\log_2 128} = 128$. Também sendo $a \neq 1$, $\log_a a = 1$ pois $a^1 = a$ e, assim, $a^{\log_a a} = a$. Finalmente, $\log_a 1 = 0$ pois $a^0 = 1$. ■

Na figura 21 apresentam-se as funções logaritmo inversas das funções exponenciais representadas na figura 20.

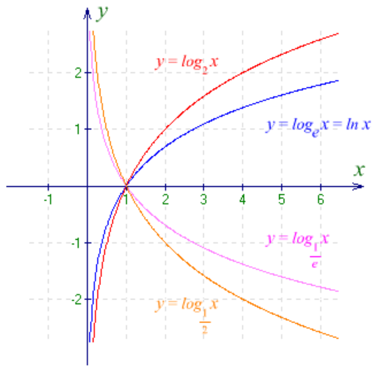


Figura 21: Funções logaritmo.

Como propriedades da função logaritmo registam-se as seguintes:

Proposição 3.2 *Sendo a um número real positivo diferente de 1 tem-se:*

(a) $\log_a a = 1$ *e* $\log_a 1 = 0$ *(logaritmo da base e da unidade)*

(b) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ *(logaritmo do produto)*

(c) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ *(logaritmo do quociente)*

(d) $\log_a x^b = b \log_a x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}$ *(logaritmo da potência)*

(e) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}$ *(logaritmo da raiz)*

(f) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ *(Mudança de base)*

3.2.2 Função potência de expoente real

Vimos atrás que a função potência $f(x) = x^\alpha$ é uma função algébrica no caso de α ser um número racional. Nos casos em que α é um número irracional (dízima infinita não periódica), a função potência é uma função transcendente dada à custa da função exponencial. Com efeito, das propriedades $a^{\log_a y} = y$ e $\log_a x^b = b \log_a x$ resulta que

$$y = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x},$$

desde que $x > 0$, atendendo ao domínio da função logaritmo. Assim, quando x é um número real só se define a função potência para $x > 0$.

Por exemplo, se $\alpha = \pi$, a função potência é dada por $y = x^\pi = e^{\pi \ln x}$(o seu gráfico está situado entre os gráficos de $y = x^{3.1}$ e $y = x^{3.2}$, ver figura 22).

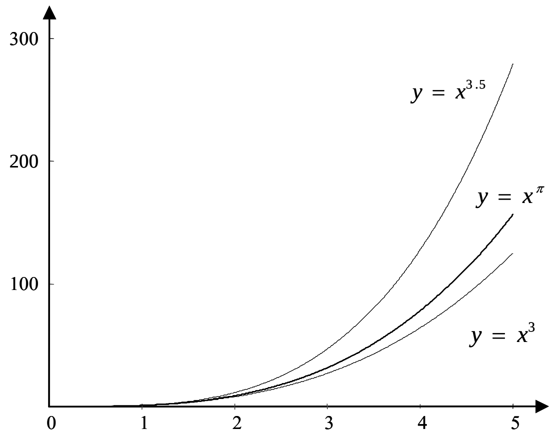


Figura 22: Função $y = x^{\pi}$.

Podemos ainda considerar uma extensão da função potência fazendo variar o expoente no conjunto dos números reais. Obtém-se assim por exemplo a função

$$f(x) = x^x$$

definida à custa da função exponencial por

$$f(x) = e^{x \ln x}$$

Trata-se de uma função cujos domínio é $\mathbb{R}^+$ e o contradomínio é $]1, +\infty[$ (ver figura 23)

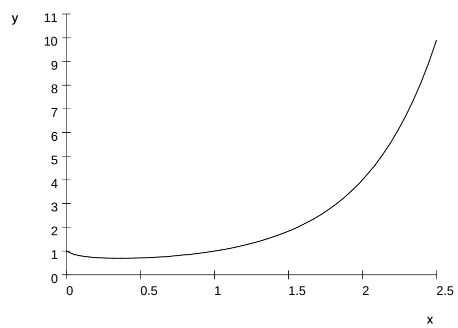


Figura 23: Função $y = x^x$.

Mais geralmente pode ainda considerar-se a função

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

definida somente para os valores de x que verificam $f(x) > 0$.

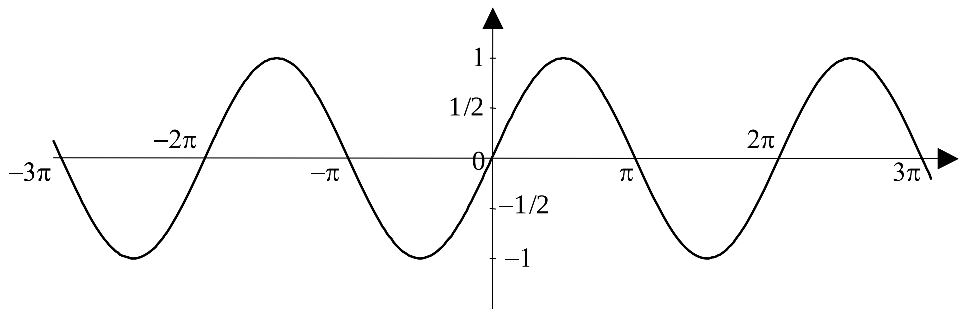
3.2.3 Funções trigonométricas

Dado que uma das suas características especiais é a periodicidade, as funções trigonométricas constituem um instrumento matemático essencial no estudo dos fenómenos periódicos que, como é sabido, são extremamente frequentes na Natureza. Recordaremos seguidamente as funções seno, coseno e tangente ao mesmo tempo que introduziremos as respectivas funções inversas: arco seno, arco coseno e arco tangente.

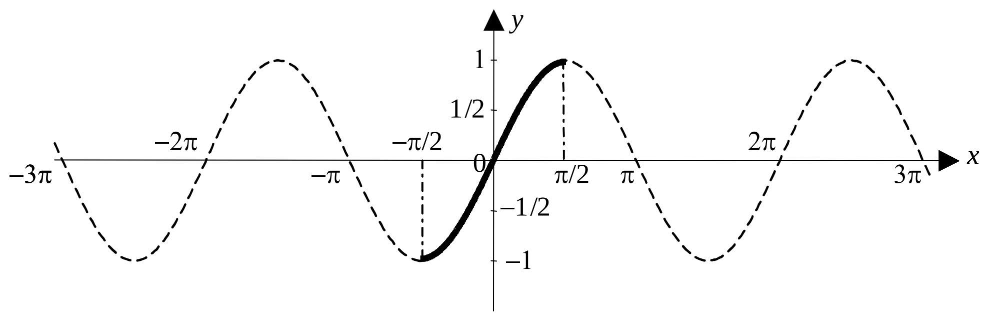
Função seno e a sua inversa arco seno A função seno define-se por

$$\begin{array}{rccl} \text{sen}: & \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ & x & \to & y = \operatorname{sen} x \end{array}$$

apresentando-se a sua representação gráfica na figura abaixo. Tem-se $D_{\text{sen}} = \mathbb{R}$ e $CD_{\text{sen}} = [-1,1]$. Trata-se de uma função ímpar (pois $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$) e periódica de período 2π.

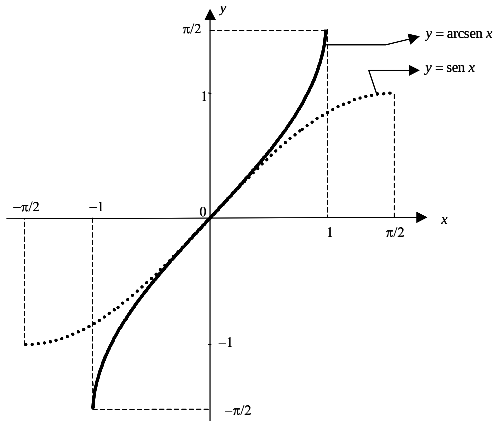


Quando se restringe a função seno ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ obtém-se a chamada restrição principal do seno. Trata-se de uma função bijectiva (e, portanto, invertível) correspondente a um período da função seno (ver figura seguinte).



A sua inversa designa-se por função arco seno, está representada na figura abaixo, sendo definida por

$$\begin{array}{rccl} \text{arcsen}: & [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \to & y = \operatorname{arcsen} x \end{array}$$

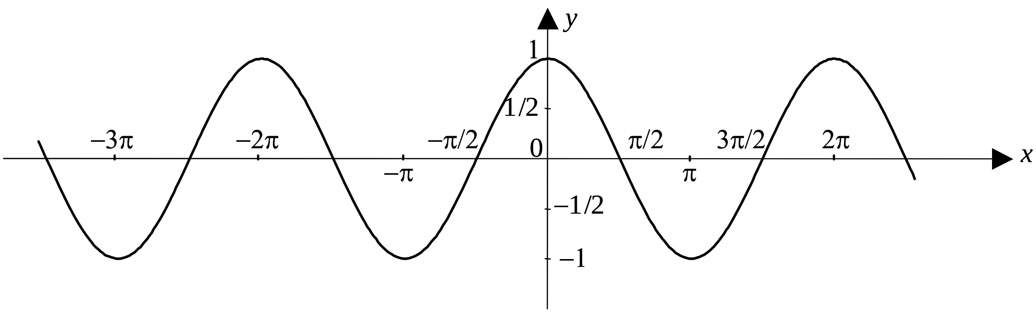


Esta função é habitualmente tomada como a função inversa do seno (na realidade, pode-se considerar uma infinidade de funções inversas do seno bastando para tal inverter qualquer restrição do seno a um intervalo de amplitude 2π).

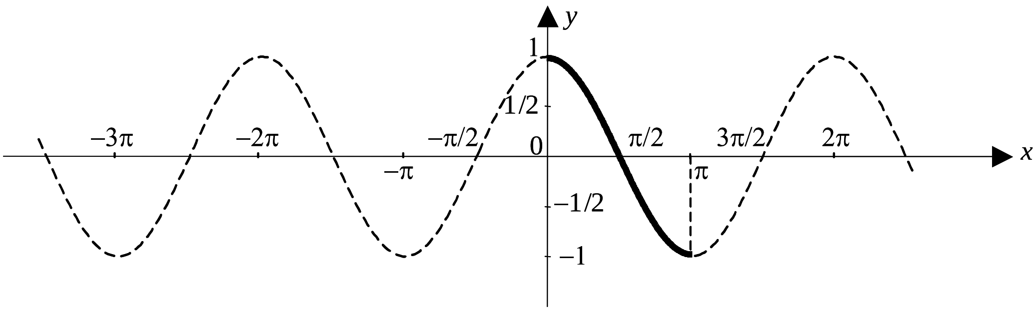
Função coseno e a sua inversa arco coseno A função coseno define-se por

$$\begin{array}{rccl} \cos: & \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ & x & \to & y=\cos x \end{array}$$

apresentando-se a sua representação gráfica na figura abaixo. Tem-se $D_{\cos}=\mathbb{R}$ e $CD_{\cos}=[-1,1]$. Trata-se de uma função par (pois $\cos(-x)=\cos x$) e periódica de período 2π.

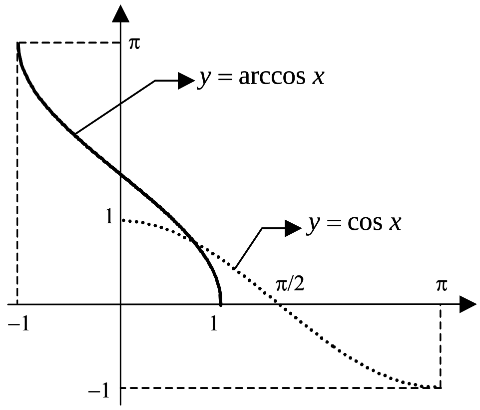


Quando se restringe a função coseno ao intervalo $[0,\pi]$ obtém-se a chamada restrição principal do coseno. Trata-se de uma função bijectiva (e, portanto, invertível) correspondente a um período da função coseno (ver figura seguinte).



A sua inversa designa-se por função arco-coseno, está representada na figura abaixo, sendo definida por

$$\begin{array}{rccl} \arccos: & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & x & \to & y = \arccos x \end{array}$$

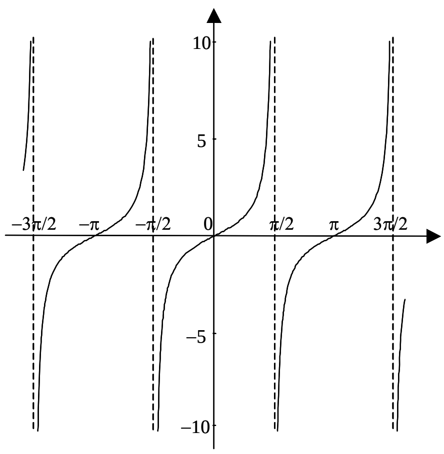


Esta função é habitualmente tomada como a função inversa do coseno (na realidade, pode-se considerar uma infinidade de funções inversas do coseno bastando para tal inverter qualquer restrição do seno a um intervalo de amplitude 2π).

Função tangente e a sua inversa arco-tangente A função tangente define-se pelo quociente entre o seno e o coseno, isto é,

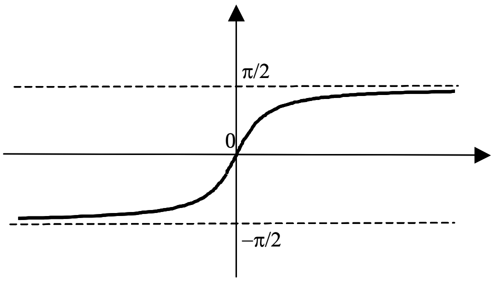
$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

A figura seguinte apresenta o seu gráfico. O seu domínio é $D_{\text{tg}} = \mathbb{R}\backslash\{x : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, dado que a tangente não está definida nos pontos que anulam o coseno. Por outro lado, $CD_{\text{tg}} = \mathbb{R}$, e, como se infere do gráfico, trata-se de uma função ímpar e periódica de período π.



Quando se restringe a função tangente ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ obtém-se a chamada restrição principal da tangente. Trata-se de uma função bijectiva (e, portanto, invertível) correspondente a um período da função tangente. A sua inversa designa-se por função arco-tangente, está representada na figura abaixo, sendo definida por

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{arctg}: & \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ & x & \to & y = \operatorname{arctg} x \end{array}$$

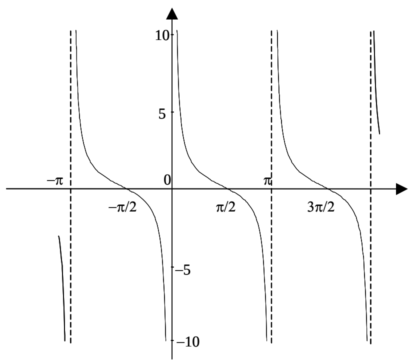


Esta função é habitualmente tomada como a função inversa da tangente podendo, à semelhança do que acontece com o seno e o coseno, considerar-se uma infinidade de funções inversas da tangente.

Função cotangente e a sua inversa arco-cotangente A função cotangente é o inverso aritmético da tangente, isto é,

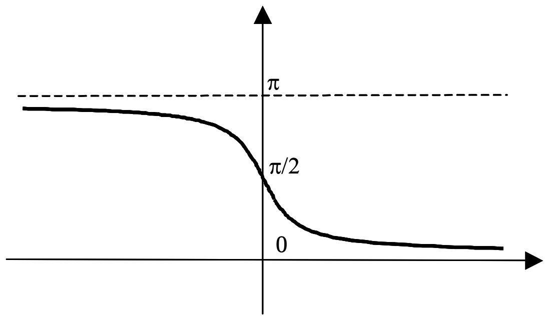
$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

A figura abaixo apresenta o seu gráfico. O seu domínio é $D_{\text{cotg}} = \mathbb{R}\backslash\{x : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, dado que a cotangente não está definida nos pontos que anulam o seno. Por outro lado, $CD_{\text{cotg}} = \mathbb{R}$, e, tal como a tangente, trata-se de uma função ímpar e periódica de período π.



Quando se restringe a função tangente ao intervalo $]0,\pi[$ obtém-se a chamada restrição principal da cotangente. Trata-se de uma função bijectiva (e, portanto, invertível) correspondente a um período da função cotangente. A sua inversa designa-se por função arco-cotangente, está representada na figura seguinte, sendo definida por

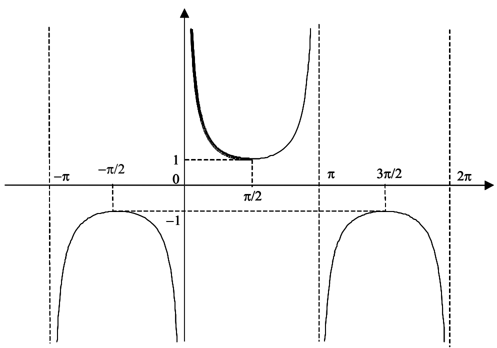
$$\begin{array}{rccl} \operatorname{arccotg}: & \mathbb{R} & \to &]0,\pi[\\ & x & \to & y = \operatorname{arccotg} x \end{array}$$



Função cosecante e a sua inversa arco-cosecante A função cosecante é o inverso aritmético do seno, isto é,

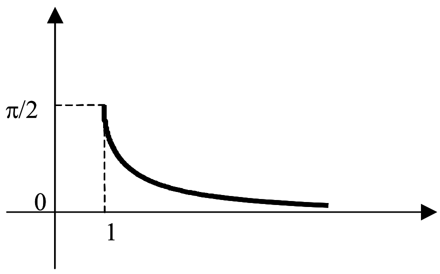
$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

A figura abaixo apresenta o seu gráfico. O seu domínio é $D_{\text{cosec}} = \mathbb{R}\backslash\{x : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, dado que a cosecante não está definida nos pontos que anulam o seno. Por outro lado, $CD_{\text{cosec}} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, tratando-se, tal como o seno, de uma função ímpar e periódica de período 2π.



Quando se restringe a função cosecante ao intervalo $]0, \pi/2]$ (ver fig. acima) obtém-se uma função invertível — a restrição principal da cosecante. A sua inversa designa-se por função arco-cosecante, está representada na figura abaixo, sendo definida por

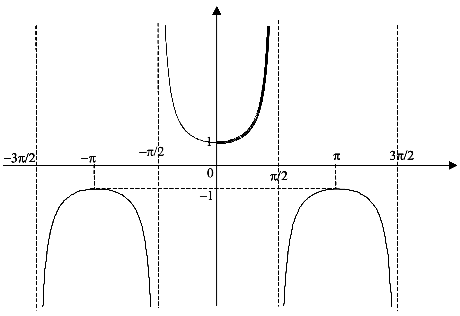
$$\begin{array}{rccl} \operatorname{arccosec}: & [1, +\infty[& \rightarrow &]0, \pi/2] \\ & x & \rightarrow & y = \operatorname{arccosec} x \end{array}$$



Função secante e a sua inversa arco-secante A função secante é o inverso aritmético do coseno, isto é,

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

A figura abaixo apresenta o seu gráfico. O seu domínio é $D_{\sec} = \mathbb{R}\backslash\{x : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, dado que a secante não está definida nos pontos que anulam o coseno. Por outro lado, $CD_{\sec} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, tratando-se, tal como o coseno, de uma função par e periódica de período 2π.



Quando se restringe a função cosecante ao intervalo $[0, \pi/2[$ (ver fig. acima) obtém-se uma função invertível — a restrição principal da secante. A sua inversa designa-se por função arco-secante, está representada na figura abaixo, sendo definida por

$$\begin{array}{llll} \text{arcsec}: & [1, +\infty[& \rightarrow & [0, \pi/2[\\ & x & \rightarrow & y = \text{arcsec}\, x \end{array}$$