

Métodos Numéricos

Resolução Numérica de Equações Não Lineares

Miguel Moreira
Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

Ano Lectivo 2003/2004

1 Equações não lineares

Como se sabe não existem fórmulas resolventes genéricas que permitam determinar algebricamente os zeros de polinômios de grau igual ou superior a cinco. Assim, sem outras técnicas dificilmente resolveríamos a equação

$$x^5 + 3x^2 - 2x = \pi.$$

Um outro exemplo de equação cuja solução não trivial não pode ser obtida algebricamente é a equação transcendente

$$x = 3 \sin x.$$

A necessidade de resolução de problemas deste tipo constitui a motivação para a aprendizagem de algumas técnicas com que se possam enfrentar. Começemos por algumas definições.

Seja $y = f(x)$ uma função real de variável real. Diz-se que $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma **raiz da equação** $f(x) = 0$ ou um **zero da função** f se $f(\alpha) = 0$.

Por outro lado, entende-se por **processo iterativo** um método pelo qual se pode achar uma sucessão $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, de valores aproximados ou **iteradas** da solução procurada. A sucessão de iteradas pode representar-se por

$$\{x_n : n \geq 0\}.$$

Refira-se que, na prática, cada nova iterada x_{n+1} é calculada recorrendo ao conhecimento de uma ou mais das iteradas x_i determinadas nos passos anteriores.

Seja α uma raiz da equação $f(x) = 0$. Chama-se **erro** e_n da **iterada** x_n **dum processo iterativo** a

$$e_n = \alpha - x_n.$$

Um processo iterativo, para ter interesse prático, deve gerar iteradas que se aproximam da raiz procurada, isto é, deve ser convergente para a raiz referida. Um processo iterativo diz-se **convergente** quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

ou, de forma equivalente, quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0.$$

Admitindo convergente um dado processo iterativo, a caracterização da sua “velocidade” de convergência para uma certa raiz, é outra noção que importa formalizar e que tem muito interesse.

Definição 1 *Suponha-se que a sequência de iteradas $\{x_n : n \geq 0\}$ é convergente para α . Diz-se que o processo iterativo **converge com ordem** p ($p \geq 1$) para o ponto α se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = K_\infty$$

para algum $K_\infty > 0$. Se $p = 1$, a velocidade de convergência diz-se linear e se $p > 1$ supralinear. Se $p = 2$ a velocidade de convergência diz-se quadrática, etc. A constante K_∞ designa-se por coeficiente assintótico de convergência.

Relativamente aos conceitos anteriores, podemos referir que quanto maior for a ordem de convergência p maior é a “velocidade” de convergência. Por outro lado, menores coeficientes assintóticos para idênticas ordens de convergência, correspondem a maiores “velocidades” de convergência.

A determinação iterativa de zeros de funções passa pela resolução dos problemas seguintes:

1. Determinação dos intervalos com o menor amplitude possível nos quais existe um e um só dos zeros de f ;
2. Cálculo aproximado da raiz utilizando um processo iterativo convergente. Para tal é importante escolher adequadamente os valores iniciais do processo;
3. Avaliação do erro cometido no decurso da aplicação de um critério de paragem.

Relativamente aos critérios de paragem, podemos referir que é habitual fixar o número máximo de iterações, impondo simultaneamente:

$$|e_n| \leq \varepsilon \quad (1)$$

em que ε representa a exactidão desejada na determinação da raiz. Diversas indicações que serão oportunamente referidas, poderão ser utilizadas para estimar o erro cometido $|e_n|$, em cada iterada.

Em algumas circunstâncias utiliza-se como critério de paragem, em substituição de (1), a condição

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \quad (2)$$

em que ε representa uma tolerância apropriada. Note-se que em (2) se considerarmos $x_{n+1} \approx \alpha$, então, $|x_{n+1} - x_n| \approx |e_n|$. Isto é, (2) representa um valor aproximado do erro absoluto cometido na iteração n .

Podemos, também, utilizar um critério de paragem baseado na estimativa do erro relativo δ :

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} \leq \delta. \quad (3)$$

Em certos casos (quando $f'(x) \geq 1$, numa vizinhança apropriada da raiz α), a condição

$$|f(x_n)| \leq \varepsilon, \quad (4)$$

em que ε representa a tolerância apropriada habitual, fornece-nos uma estimativa adequada do erro absoluto da iterada x_n . Esta última condição é corolário dum resultado mais geral, que pelo seu interesse referiremos de seguida.

Seja f contínua no intervalo $I = [a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Seja α um zero de f em $]a, b[$. Então, do teorema de Lagrange

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(\alpha) &= f'(c)(x_n - \alpha) \Rightarrow \\ |x_n - \alpha| &= \left| \frac{f(x_n)}{f'(c)} \right| \end{aligned}$$

para um certo c entre x_n e α (e portanto em I). Assim,

$$|e_n| = |x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min_{x \in I} |f'(x)|} \quad (5)$$

desde que a derivada de f não se anule em I .

Seguidamente apresentaremos alguns métodos iterativos mais utilizados para resolução de equações não lineares.

1.1 Método da bissecção e da falsa posição

Os métodos da bissecção e da falsa posição apoiam-se, ambos, no corolário do teorema de Bolzano (ou do valor intermédio).

1.1.1 Método da bissecção

Suponha-se $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$, tal que $f(a_0) \times f(b_0) < 0$ e com uma e uma só raiz no intervalo considerado. Consideremos o seguinte processo iterativo. Tomemos para primeiro valor aproximado da raiz procurada o ponto médio do intervalo referido:

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

A raiz α deve localizar-se num dos subintervalos $[a_0, x_1]$ ou $[x_1, b_0]$. Verificando o sinal dos produtos $f(a_0) \times f(x_1)$ e $f(x_1) \times f(b_0)$ pode-se saber em qual dos intervalos se localiza a raiz (porquê?). Designemos este intervalo por $I_1 = [a_1, b_1]$.

A aplicação repetida deste procedimento permite obter uma sucessão de intervalos fechados $I_n = [a_n, b_n]$, encaixados não vazios e cujo diâmetro tende para zero. É sabido que existe um e um só ponto comum a todos os subintervalos I_n : a raiz α procurada (este facto resulta de um teorema da análise conhecido por teorema do encaixe). Por outro lado, em consequência do teorema das sucessões encaixadas, a sucessão dos pontos $x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $n = 0, 1, \dots$, tem de convergir para a raiz α procurada. Este processo iterativo designa-se por **método da bissecção**.

Não é difícil verificar que o erro absoluto $|e_n|$ de cada iterada satisfaz a seguinte desigualdade

$$|e_n| = |\alpha - x_n| \leq \frac{b - a}{2^n} \quad (6)$$

com $n = 1, 2, \dots$.

Pode mostrar-se que a **ordem de convergência p deste método** é pelo menos linear com um coeficiente assintótico $K_\infty = \frac{1}{2}$. Com efeito no pior dos casos (porquê?)

$$|e_{n+1}| = \frac{1}{2} |e_n| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \frac{1}{2}.$$

De assinalar as seguintes **condições suficientes de convergência** do método da bissecção:

1. f é contínua em $[a_0, b_0]$;
2. $f(a_0) \times f(b_0) < 0$.

Exemplo 1 Calcule $\sqrt{5}$ com um erro inferior a 0.01.

Começemos por observar que $\sqrt{5}$ é a raiz positiva de $f(x) = x^2 - 5$ e que esta raiz ocorre no intervalo $[2, 3]$. A raiz procurada é única no intervalo $[2, 3]$ pois f é crescente e $f(2) \times f(3) < 0$.

Construa-se, com vista a sistematizar a aplicação do método da bissecção e a consequente análise do erro em cada iterada, a tabela seguinte (n representa a iteração, a_n o extremo inferior do intervalo, b_n o extremo superior do intervalo e s o sinal de $f(a_n) \times f(x_{n+1})$):

n	a_n	b_n	x_{n+1}	maj. de $ e_{n+1} $	s	Obs:
0	2	3	2.5	0.50	–	$b_1 = 2.5$
1	2	2.5	2.25	0.25	–	$b_2 = 2.25$
2	2	2.25	2.125	0.125	+	$b_3 = 2.25$
3	2.125	2.25	2.1875	0.0625	+	$b_4 = 2.1875$
4	2.1875	2.25	2.21875	0.03125	+	$b_5 = 2.21875$
5	2.21875	2.25	2.234375	0.0151625	+	$b_6 = 2.234375$
6	2.234375	2.25	2.2421875	0.0078125		

A sétima iterada, $x_7 = 2.2421875$, não difere mais do que 0.01 da raiz procurada. A resposta será 2.24. Note-se que este número arredonda x_7 às centésimas e satisfaz o intervalo de erro pretendido (porquê?). ■

Supondo que f satisfaz as condições de convergência num certo intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$, o método da bissecção pode ser aplicado recorrendo ao algoritmo que se exemplifica seguidamente.

Algoritmo 1 (Método da Bissecção) Para $n = 0, \dots, ITMAX$ (número máximo de iteradas)

1. $c = \frac{a_n + b_n}{2}$
2. se $f(a_n) \times f(c) \leq 0$ faça-se $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = c$,
3. caso contrário, faça-se, $a_{n+1} = c$ e $b_{n+1} = b_n$.
4. Parar se algum critério de paragem for satisfeito antes de $n = ITMAX$.

Exemplo 2 Considere a equação $\sin x - e^{-x} = 0$.

1. Prove que esta equação tem uma raiz α em $[0.5, 0.7]$.

Seja $f(x) = \sin x - e^{-x}$:

$$\begin{aligned} f(0.5) &= \sin 0.5 - e^{-0.5} \approx -0.127 \text{ e} \\ f(0.7) &= \sin 0.7 - e^{-0.7} \approx 0.147. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$f'(x) = \cos x + e^x > 0, \forall x \in [0.5, 0.7].$$

Estes factos mostram, tendo em conta o teorema do valor intermédio e pelo facto de f ser estritamente crescente, que f tem uma e uma só raiz em $[0.5, 0.7]$;

2. Efectue uma iteração pelo método da bissecção e indique um novo intervalo que contenha a raiz α .

A primeira iterada é

$$x_1 = \frac{0.5 + 0.7}{2} = 0.6.$$

Como

$$f(0.6) = \sin 0.6 - e^{-0.6} \approx 1.583 \times 10^{-2} > 0,$$

o novo intervalo será $[0.5, 0.6]$;

3. Determine o número n de iterações necessárias para garantir que

$$|x_n - \alpha| < 10^{-6}.$$

Sabemos que

$$|e_n| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Assim, bastará garantir que

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{2^n} &< 10^{-6}, \text{ ou seja,} \\ \frac{0.2}{2^n} &< 10^{-6} \Rightarrow \\ 10^5 &< 2^{n-1} \Rightarrow \\ 5 &< (n-1) \log_{10} 2 \Rightarrow \\ (n-1) &> \frac{5}{\log_{10} 2} \approx 16.61 \Rightarrow \\ n &\geq 18. \end{aligned}$$

■

1.1.2 Método da falsa posição

Como anteriormente, suponha-se $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $I = [a, b]$, tal que $f(a) \times f(b) < 0$ e com uma e uma só raiz no intervalo considerado. No método da bissecção cada termo da sucessão de iteradas consiste num ponto médio de uma sucessão de intervalos encaixados $[a_0, b_0] = [a, b]$, $[a_1, b_1]$, \dots , $[a_n, b_n]$, \dots , que contêm todos a raiz procurada, isto é,

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Como se pode observar na Figura 1, no **método da falsa posição** (também conhecido por *regula falsi*), cada termo é a coordenada x_{n+1} da intersecção com o eixo das abcissas

da secante ao gráfico da função nos pontos $(a_n, f(a_n))$ e $(b_n, f(b_n))$ tais que $f(a_n) \times f(b_n) < 0$. Isto é,

$$\frac{f(b_n) - 0}{b_n - x_{n+1}} = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n},$$

resultando

$$x_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}}, \text{ com } n = 0, 1, \dots$$

ou seja

$$x_{n+1} = b_n - f(b_n) \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}, \text{ com } n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

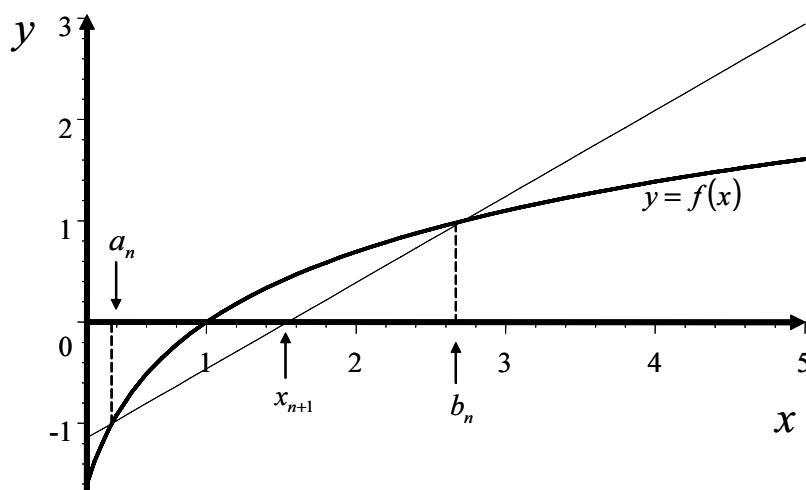


Figura 1: Método da falsa posição.

Como este método utiliza mais informação para gerar as iteradas é, em geral de convergência mais rápida. Pode mostrar-se que em certas circunstâncias, **a ordem de convergência** deste método é linear com um coeficiente assintótico K_∞ menor do que $\frac{1}{2}$.

A principal desvantagem deste método ocorre quando a sucessão das iteradas se posiciona só à esquerda ou só à direita da raiz procurada. Nesta situação que ocorre sempre que o gráfico da função apresenta a concavidade voltada para cima ou para baixo no intervalo em estudo, a velocidade de convergência pode tornar-se bastante mais lenta.

De assinalar que as condições suficientes de convergência do método da falsa posição são idênticas às do método da bissecção:

1. f é contínua em $[a, b]$;
2. $f(a) \times f(b) < 0$.

Tendo em conta que este método pode não gerar pequenos subintervalos em torno da raiz procurada, os critérios de paragem mais utilizados são:

$$|f(a_n)| \leq \varepsilon \text{ ou}$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon.$$

Algoritmo 2 (Método da Falsa Posição) Para $n = 0, \dots, ITMAX$ (número máximo de iteradas)

1. $c = \frac{f(b_n)a_n - f(a_n)b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$
2. se $f(a_n) \times f(c) < 0$ faça-se $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = c$,
3. caso contrário, faça-se, $a_{n+1} = c$ e $b_{n+1} = b_n$.
4. Parar se algum critério de paragem for satisfeito antes de $n = ITMAX$.

Exemplo 3 Considere a função $f(x) = e^{-x} + 2x - 2$.

1. Quantas raízes tem a equação $f(x) = 0$? Determine um intervalo, com amplitude 0.1, que contenha a maior raiz.

A equação referida é equivalente à equação $e^{-x} = -2x + 2$, cujos membros estão representados na Figura 2.

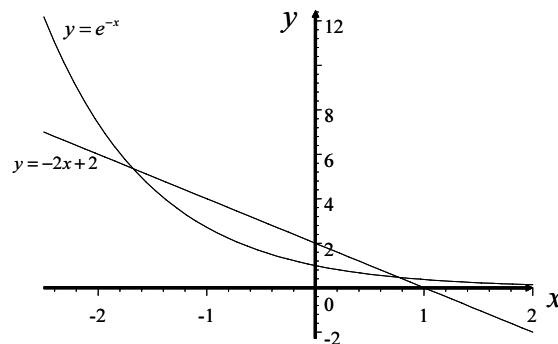


Figura 2: Funções $y = e^{-x}$ e $y = -2x + 2$.

Esta sugere a existência de duas raízes, uma negativa e outra positiva. A maior raiz está no intervalo $[0, 1]$. Note-se que $f(0) = -1$, $f(1) = e^{-1}$ e f é crescente em $[0, 1]$, já que $f'(x) = -e^{-x} + 2 > 0$ neste intervalo. A obtenção de um intervalo com amplitude de 0.1 que contenha a raiz, pode efectuar-se recorrendo ao método da bissecção:

n	a_n	b_n	x_{n+1}	maj. de $ e_{n+1} $	senal de $f(x_{n+1})$
0	0	1	0.5	0.5	—
1	0.5	1	0.75	0.25	—
2	0.75	1	0.875	0.125	+
3	0.75	0.875	0.8125	0.0625	+

O intervalo pretendido é $[0.75, 0.8125]$.

2. No cálculo da raiz localizada no intervalo $[-2, -1]$ utilizando o método da falsa posição obtiveram-se os seguintes resultados

$$\begin{aligned}
 f(-2) &= 1.389056, \\
 f(-1) &= -1.281718, \\
 x_1 &= -1.479905, \\
 f(x_1) &= -0.567281.
 \end{aligned}$$

Determine a segunda iterada.

O novo intervalo que contém a raiz procurada será $[-2, -1.479905]$. Tendo em conta que $f(x) = e^{-x} + 2x - 2$, a iterada seguinte será

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{f(b_1)a_1 - f(a_1)b_1}{f(b_1) - f(a_1)} \\
 &= \frac{f(-1.479905) \times (-2) - f(-2) \times (-1.479905)}{f(-1.479905) - f(-2)} \\
 &\approx -1.6307.
 \end{aligned}$$

■

1.2 Método de Newton e método da secante

1.2.1 O método de Newton

A aplicação, à equação $f(x) = 0$, do método de Newton (também conhecido por método das tangentes) exige que a função f tenha pelo menos a primeira derivada não nula no intervalo em que se pretenda encontrar a raiz. É no entanto um método com convergência mais rápida do que os métodos anteriormente referidos.

Admita-se que f é uma função contínua, com derivada contínua e diferente de zero no intervalo $[a, b]$, tal que $f(a) \times f(b) < 0$.

Pretende-se achar um valor x que satisfaça a equação $f(x) = 0$. Suponha-se que x_1 é um valor próximo da raiz procurada pertencente ao intervalo em estudo. Como

$$f(x) \approx f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1),$$

então

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \Rightarrow \\
 f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1) &= 0 \Rightarrow \\
 x &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.
 \end{aligned}$$

Repare-se que x pode ser considerado como uma segunda aproximação $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$ da raiz de f em $[a, b]$. Como se pode observar na Figura 3, x_2 representa a abscissa do ponto de intersecção da recta tangente ao gráfico de f em $(x_1, f(x_1))$ com eixo das abcissas.

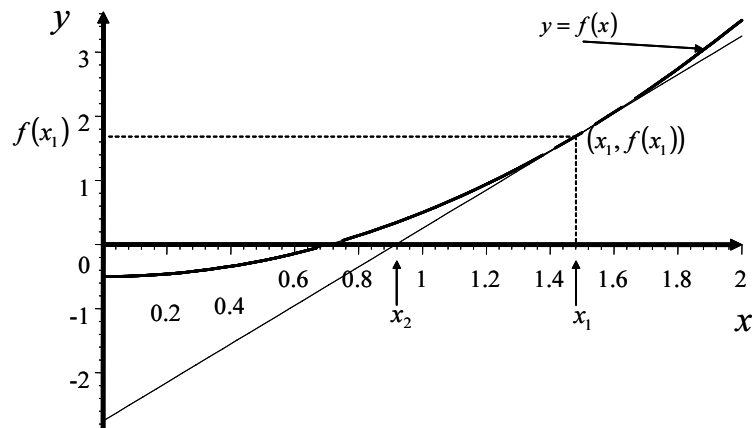


Figura 3: Método de Newton.

A repetição deste procedimento conduz-nos ao seguinte processo iterativo, conhecido por método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

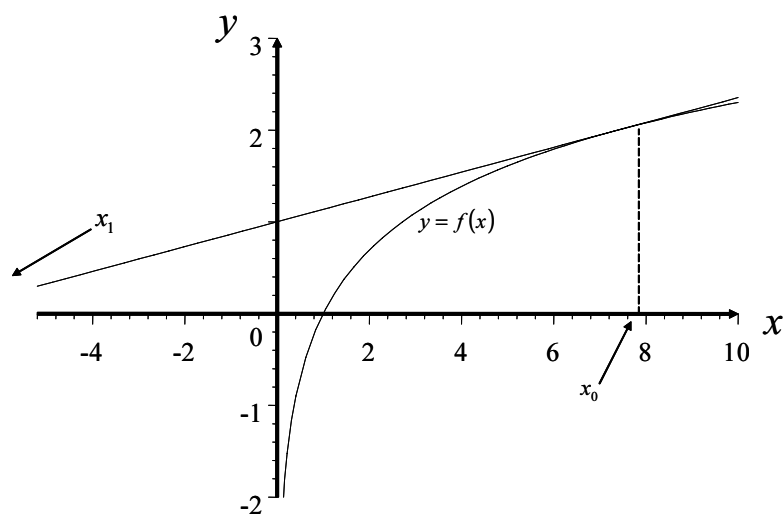


Figura 4: Exemplo de divergência do método de Newton.

Nem sempre a sucessão $\{x_n : n \geq 0\}$ gerada por este método converge para a raiz de f em $[a, b]$. Na Figura 4 ilustra-se um caso em que esta situação pode ocorrer. No entanto, se certas condições forem asseguradas este método não só converge, como o faz rapidamente. No resultado seguinte apresentam-se condições suficientes de convergência.

Teorema 1 *Seja $I = [a, b]$ uma vizinhança do zero α de uma função $f \in C^2([a, b])$ e suponha-se que se verificam as condições:*

1. $0 < m_1 \leq |f'(x)|, \forall x \in I,$
2. $0 < |f''(x)| \leq m_2, \forall x \in I,$
3. $M(b-a) < 1$ com $M = \frac{m_2}{2m_1}$

Então, escolhendo para x_0 o extremo (a ou b) do intervalo I em que a função f tem o mesmo sinal que a sua segunda derivada, isto é, de forma a que $f(x_0)f''(x_0) > 0$, o método de Newton (8) converge para a raiz α e o erro das iteradas consecutivas satisfaz a relação

$$|e_{n+1}| \leq M |e_n|^2. \quad (9)$$

Demonstração. Começemos por observar que f' e f'' são contínuas no intervalo I em resultado da condição pois $f \in C^2([a, b])$. Por outro lado, deste facto e das condições 1 e 2, f' e f'' não mudam de sinal do intervalo em estudo. Assim, o zero α de f é único e será também possível escolher a iterada inicial nas condições indicadas.

Sem perda de generalidade suponha-se que $f'' > 0$ e $f' > 0$ para todo o x no intervalo em estudo (a argumentação da demonstração é idêntica nas outras situações). Nestas circunstâncias $x_0 = b$ (porquê?) e $\alpha < x_0$.

Demonstremos que o método de Newton (8) gera uma sucessão

$$\alpha < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0 = b$$

decrecente e limitada inferiormente pela raiz α .

Efectuemos o desenvolvimento de f em série de Taylor com resto de ordem 2 na vizinhança de x_0 e calculemos o valor desse desenvolvimento em $x = \alpha$:

$$f(\alpha) = 0 = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(\alpha - x_0)^2,$$

para um certo c entre α e x_0 . Desta última expressão deduz-se sucessivamente

$$\begin{aligned} \alpha &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(\alpha - x_0)^2 = \\ &= x_1 - \frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(\alpha - x_0)^2, \text{ atendendo a (8)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Ou seja

$$\alpha - x_1 = -\frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(\alpha - x_0)^2.$$

Como f''/f' é positivo

$$\alpha - x_1 < 0 \Rightarrow \alpha < x_1.$$

Por outro lado, tendo em conta (10)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha - x_1}{\alpha - x_0} \right| &= \left| -\frac{f''(c)}{2f'(x_0)} \right| |\alpha - x_0| \\ &\leq \frac{m_2}{2m_1} |\alpha - x_0| = M |\alpha - x_0| \\ &< M(b - a) < 1. \end{aligned}$$

Isto é, x_1 está mais próximo da raiz do que x_0 . Desta forma $\alpha < x_1 < x_0$. Um raciocínio inteiramente análogo permite concluir que se

$$\alpha < x_n < x_0$$

então o processo (8) origina a iterada x_{n+1} satisfazendo

$$\alpha < x_{n+1} < x_n.$$

Assim, por indução matemática conclui-se que o método de Newton gera uma sucessão

$$\alpha < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1 < x_0 = b$$

decrecente e limitada inferiormente pela raiz α , como se pretendia mostrar. Ora tal sucessão é convergente (porquê?) para um certo número β no intervalo em estudo e por isso

$$\beta = \lim x_{n+1} = \lim \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \Rightarrow f(\beta) = 0.$$

Mas a única raiz de f no intervalo é α , por isso $\beta = \alpha$, o que mostra que $\lim x_n = \alpha$. Este facto demonstra que o método de Newton converge para a raiz α .

Mostremos agora que o erro de duas iteradas consecutivas satisfaz a relação (15).

Das hipóteses, efectuemos o desenvolvimento de f em série de Taylor com resto de ordem 2 na vizinhança de x_n e calculemos o valor desse desenvolvimento em $x = \alpha$:

$$f(\alpha) = 0 = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(c_n)}{2}(\alpha - x_n)^2,$$

para certo c_n entre α e x_0 . Desta última expressão deduz-se sucessivamente

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &= |\alpha - x_{n+1}| = \left| -\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2 \right| \\ &\leq \frac{m_2}{2m_1}(\alpha - x_n)^2 = M |e_n|^2, \end{aligned} \tag{11}$$

onde $M = m_2/2m_1$. Este facto demonstra (9), como se pretendia. ■

A ordem de convergência do método de Newton pode determinar-se com base na expressão (11). Com efeito, admitidos os pressupostos do Teorema 1,

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &= \left| -\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} (\alpha - x_n)^2 \right| \Rightarrow \\ \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} &= \left| \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right| \text{ para um certo } c_n \text{ entre } \alpha \text{ e } x_n, \end{aligned}$$

donde se deduz,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right| = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| = K_\infty > 0.$$

Este facto mostra que o **método de Newton** tem uma **ordem de convergência quadrática** se a raiz α for simples (isto é, se $f'(\alpha) \neq 0$).

Exemplo 4 Calcule $\sqrt{5}$ com um erro inferior a 0.02.

Comecemos por observar que $\sqrt{5}$ é a raiz positiva de $f(x) = x^2 - 5$ e que esta raiz ocorre no intervalo $[2, 3]$. A raiz procurada é única no intervalo $[2, 3]$ pois f é crescente e $f(2) \times f(3) < 0$.

Consideremos a função $f(x) = x^2 - 5$ e o intervalo $[2, 3]$. Notemos que f está nas condições do Teorema 1 pois $f \in C^2([2, 3])$ e

1. $0 < m_1 = 4 \leq |f'(x)| = 2|x|, \forall x \in [2, 3],$
2. $0 < |f''(x)| = 2 \leq m_2 = 2, \forall x \in [2, 3],$
3. $M(b-a) = \frac{m_2}{2m_1}(b-a) = \frac{2}{2 \times 4} = 0.25 < 1.$

Escolha-se x_0 de forma a assegurar que $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$. Como $f''(x) > 0$ a escolha recai sobre $x_0 = 3$.

1. Estamos, assim, em condições de assegurar a convergência do método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right).$$

Construa-se a seguinte tabela para melhor sistematizar os cálculos a efectuar. Note-se que

$$|e_{n+1}| \leq M |e_n|^2 \text{ com } M = \frac{m_2}{2m_1} = \frac{2}{2 \times 4} = 0.25.$$

n	$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{5}{x_{n-1}} \right)$	$ e_n $
0	3	1
1	7/3	0.25
2	2.2380	$0.25 \times 0.25^2 = 0.015625$

Note-se que escolhendo 2.24 para o referido valor aproximado procurado, verificamos que

$$\begin{aligned} |e_{\text{arredondamento}}| + |e_4| &= |2.24 - 2.2380| + 0.015625 \\ &= 1.7625 \times 10^{-2} \leq 0.02 \end{aligned}$$

donde 2.24 satisfaz a condição de ser um valor aproximado da raiz procurada com um erro inferior a 0.02. ■

Seguidamente ilustramos o algoritmo aplicável na implementação do método de Newton.

Algoritmo 3 (Método de Newton) Para $n = 0, \dots, ITMAX$ (número máximo de iteradas)

1. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$;
2. Parar se algum critério de paragem for satisfeito antes de $n = ITMAX$.

Exemplo 5 Considere a equação $2x + \ln x = 1$.

1. Mostre que a equação dada tem uma única raiz.

Seja $f(x) = 2x + \ln x - 1$. Começamos por observar que os zeros de f são as raízes da equação dada. Notemos que a função dada está definida em $]0, +\infty[$, sendo contínua e diferenciável neste intervalo. Observando que $f(\frac{1}{2}) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 < 0$ e que $f(1) = 1 > 0$ e tendo em conta, simultaneamente, que f é estritamente crescente (pois $f'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0$), deduz-se imediatamente (corolários do teorema do valor intermédio e do teorema de Rolle) que f tem um único zero em $]0, +\infty[$, que se localiza mais precisamente em $[\frac{1}{2}, 1]$. Mostrámos assim que a equação dada tem uma única raiz.

2. Pretende-se usar o método de Newton para obter a raiz da equação dada.

- (a) Indique um intervalo de comprimento $\frac{1}{2}$ que contenha a raiz da equação.

O intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, indicado na resposta à alínea anterior tem comprimento $\frac{1}{2}$ e contém a raiz procurada como se mostrou na alínea anterior.

- (b) Verifique se no intervalo indicado são satisfeitas todas as condições de convergência e escolha uma aproximação inicial adequada.

Com efeito, $f \in C^2([\frac{1}{2}, 1])$, $0 < m_1 = 3 \leq |f'(x)| = |2 + \frac{1}{x}|$, $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $0 < |f''(x)| = |-\frac{1}{x^2}| \leq 4$, $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$ e $M(b-a) < 1$ com $M = m_2/2m_1 = 2/3$. Assim para aproximação inicial deveremos escolher o extremo do intervalo referido em que a função tenha o mesmo sinal da segunda derivada: $x_0 = \frac{1}{2}$.

- (c) Efectue duas iterações e indique majorantes para os erros das aproximações obtidas.

Recordemos que o algoritmo correspondente ao método de Newton é, no presente caso

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{2x_n + \ln x_n - 1}{2 + \frac{1}{x_n}}.\end{aligned}$$

Sistematizemos os cálculos na seguinte tabela:

n	x_n	majorante de $ e_n $
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0.67329	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{3} \approx 0.166\,67$
2	0.68735	$0.166\,67^2 \times \frac{2}{3} \approx 1.8519 \times 10^{-2}$

- (d) Determine uma solução aproximada da raiz da equação de modo a garantir um erro absoluto não superior a 10^{-6} .

Na tabela seguinte apresentamos as quatro primeiras iteradas obtidas a partir do programa do Apêndice 1.7 com ligeiras modificações:

n	x_n	majorante de $ e_n $
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$6.7328679e - 001$	$1.666667e - 001$
2	$6.8734899e - 001$	$1.8518519e - 002$
3	$6.8741126e - 001$	$2.2862368e - 004$
4	$6.8741126e - 001$	$3.4845860e - 008$

A resposta é $x_4 = 0.687411$. ■

1.2.2 Método da secante

Suponha-se $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $I = [a, b]$. Tal como no método da falsa posição, no **método da secante**, cada termo, é a coordenada x_{n+1} da intersecção com o eixo das abcissas, da secante ao gráfico da função em dois pontos $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ e $(x_n, f(x_n))$. No entanto, neste método, não se exige que $f(x_{n-1}) \times f(x_n) < 0$.

O **método da secante**, ilustrado na Figura 5, é um processo iterativo cuja forma é idêntica à forma utilizada pelo método da falsa posição:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

ou seja

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

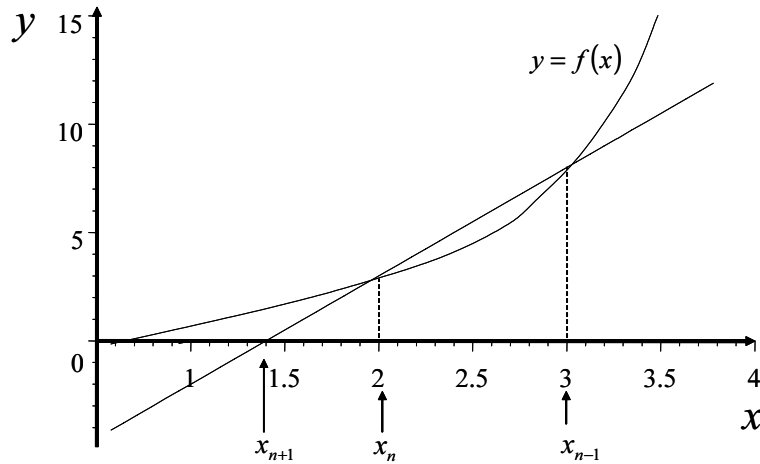


Figura 5: Método da secante.

Tal como no método da falsa posição a aplicação deste processo iterativo exige o conhecimento de dois valores aproximados da raiz para gerar o valor seguinte. Desta forma para ser iniciado torna-se necessário escolher x_0 e x_1 , ambos pertencentes ao intervalo $I = [a, b]$.

As seguintes condições suficientes de convergência, semelhantes às atrás enunciadas na aplicação do método de Newton, podem ser utilizadas:

Teorema 2 *Seja $I = [a, b]$ uma vizinhança do zero α de uma função $f \in C^2([a, b])$ e suponha-se que se verificam as condições:*

1. $0 < m_1 \leq |f'(x)|, \forall x \in I,$
2. $0 < |f''(x)| \leq m_2, \forall x \in I,$
3. $M(b - a) < 1$ com $M = m_2/2m_1.$

Então, escolhendo para x_{-1} e x_0 dois pontos do intervalo I tais que

$$f(x_{-1})f''(x_{-1}) > 0 \text{ e } f(x_0)f''(x_0) > 0$$

o método da secante (12) converge para a raiz α .

Demonstração. Notemos que as condições suficientes 1 a 3 são análogas às condições suficientes de convergência do método de Newton. Observe-se que f' e f'' são contínuas no intervalo I pelo facto de $f \in C^2([a, b])$. Por outro lado, deste facto e das condições 1 e 2, f' e f'' não mudam de sinal do intervalo em estudo. Assim, o zero α de f é único e será também possível escolher x_0 e x_{-1} nas condições indicadas.

Sem perda de generalidade suponha-se que $f'' > 0$ e $f' > 0$ para todo o x no intervalo em estudo (a argumentação da demonstração é idêntica nas outras situações). Nestas circunstâncias escolha-se x_{-1} e x_0 tais que $\alpha < x_0 < x_{-1} < b$. Notemos que a aplicação do método de Newton utilizando como iteradas iniciais $y_0 = x_{-1}$ e $z_0 = x_0$ conduz à obtenção de duas sucessões

$$\{y_n : n \geq 0\} \text{ e } \{z_n : n \geq 0\}$$

decrecentes e convergentes para a raiz α tais que

$$\alpha < z_n < y_n, n \geq 0.$$

Com efeito, a iterada x_n resultante da aplicação do método da secante satisfaz

$$z_{n+1} < x_{n+1} < y_{n+1}, n \geq 0,$$

isto é,

$$z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} < x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} < y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, n \geq 0.$$

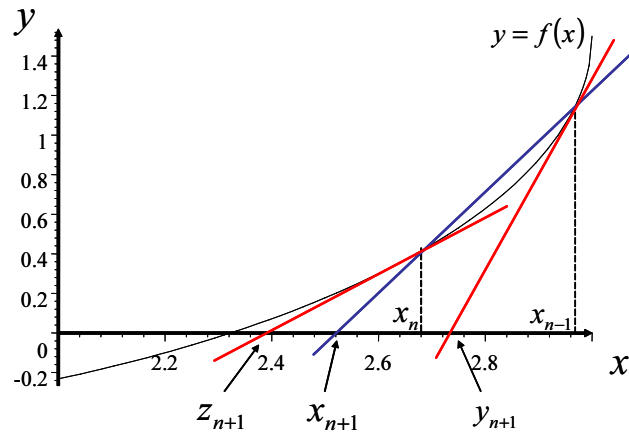


Figura 6: Demonstração da convergência do método da secante.

Este facto, ilustrado na Figura 6, é demonstrável por indução matemática e permite concluir, como se pretendia, que o método da secante converge para a raiz α . ■

A análise do erro cometido pode realizar-se recorrendo ao resultado seguinte que apresentamos sem demonstração (consultar, por exemplo, Pina [12]).

Teorema 3 *Se todas as iteradas resultantes da aplicação do processo (12) estiverem contidas numa vizinhança $[a, b]$ suficientemente pequena da raiz α da função $f \in C^2([a, b])$, então o método da secante é convergente e o erro satisfaz a relação*

$$|e_{n+1}| \leq M |e_n| |e_{n-1}| \quad (14)$$

com $M = \frac{m_2}{2m_1}$, $0 < m_1 \leq |f'(x)|$ e $0 < |f''(x)| \leq m_2$ para todo $x \in [a, b]$.

Nas condições do resultado anterior é possível mostrar que **a ordem de convergência** do método da secante (supondo, portanto, que a raiz procurada é simples) é $p = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \approx 1.618$.

Exemplo 6 Calcule $\sqrt{5}$ com um erro inferior a 0.01.

Começemos por observar que $\sqrt{5}$ é a raiz positiva de $f(x) = x^2 - 5$ e que esta raiz ocorre no intervalo $[2, 3]$. A raiz procurada é única no intervalo $[2, 3]$ pois f é crescente e $f(2) \times f(3) < 0$. Notemos que f está nas condições do Teorema 2.

Nas presentes circunstâncias façamos $m_1 = 4$ e $m_2 = 2$. Então $M = 0.25$ e

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{\frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{x_n - x_{n-1}}} = \frac{x_n x_{n-1} + 5}{x_n + x_{n-1}}.$$

Construa-se uma tabela para sistematizar os cálculos e façamos $x_{-1} = 3$ e $x_0 = 2.5$ (nas condições suficientes de convergência do Teorema 2):

n	x_{n+1}	x_n	x_{n-1}	maj. de $ e_{n+1} $
0	2.272 7	2.5	3	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 1 = 0.125$
1	2.238 1	2.272 7	2.5	$\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 1.562 5 \times 10^{-2}$
2	2.236 1	2.238 1	2.272 7	$\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times 1.562 5 \times 10^{-2} = 4.882 8 \times 10^{-4}$

Arredondando para x_3 para 2.24 este último valor distará de $\sqrt{5}$ não mais do que

$$\begin{aligned} |e_{\text{arredondamento}}| + |e_3| &= |2.24 - 2.236 1| + 4.882 8 \times 10^{-4} \\ &= 4.388 3 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Assim a resposta 2.24 terá certamente um erro inferior a 0.01. ■

De referir que o critério de paragem utilizado baseou-se na estimativa do erro de cada iterada, o qual se pode majorar com base no resultado da proposição 3.

Apresentamos seguidamente o algoritmo típico que se utiliza para implementar o método da secante.

Algoritmo 4 (Método da Secante) Para $n = 0, \dots, ITMAX$ (número máximo de iteradas)

1. $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$;
2. Parar se algum critério de paragem for satisfeito antes de $n = ITMAX$.

Exemplo 7 Considere a equação $x^2 - 1 - \ln(x + 1) = 0$.

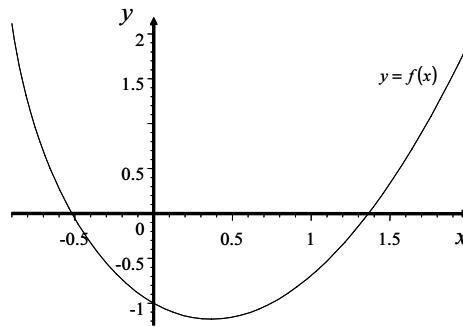


Figura 7: $f(x) = x^2 - 1 - \ln(x + 1)$.

1. Localize graficamente as raízes reais da equação dada e mostre, analiticamente, que no intervalo $[1, 2]$ a equação tem uma só raiz.

Com efeito, a partir do gráfico podemos observar que a equação dada tem raízes reais nos intervalos $]-1, 0[$ e $[1, 2]$ tem raízes reais.

Por outro lado, fazendo $f(x) = x^2 - 1 - \ln(x + 1)$ deduz-se $f(1) = -\ln 2 < 0$ e $f(2) = 3 - \ln 3 > 0$. Tal facto determina a existência de pelo menos uma raiz no intervalo indicado (corolário do teorema do valor intermédio tendo em conta que f é contínua no seu domínio). Como $f'(x) = 2x - \frac{1}{x+1} > 0, \forall x \in [1, 2]$, f tem um único zero em $[1, 2]$ (corolário do Teorema de Rolle).

2. Partindo do intervalo da alínea anterior determine a terceira iterada pelo método da falsa posição.

Consideremos o método da falsa posição

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= b_n - f(b_n) \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} \\ &= b_n - \frac{(b_n - a_n)(b_n^2 - 1 - \ln(b_n + 1))}{b_n^2 - 1 - \ln(b_n + 1) - (a_n^2 - 1 - \ln(a_n + 1))}, \text{ com } n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

com $a_0 = 1$ e $b_0 = 2$ e sistematizemos os cálculos das sucessivas iteradas:

n	x_{n+1}	a_n	b_n	sinal de $f(x_{n+1})$	maj. de $ e_{n+1} $
0	1.267 2	1	2	—	0.7328
1	1.340 9	1.267 2	2	—	0.6591
2	1.358 6	1.340 9	2	—	0.6414

Concluimos que $x_3 = 1.3586$.

3. Partindo das aproximações iniciais $x_0 = 1.5$ e $x_{-1} = 2$, aproxime agora essa raiz usando o método da secante em três iterações.

Comecemos por notar que f está nas condições de convergência do método da secante, já que $f \in C^2([1, 2])$, $0 < m_1 = 3/2 \leq |f'(x)| = |2x - 1/(x+1)|, \forall x \in [1, 2]$, $0 < |f''(x)| = |1/(x+1)^2 + 2| \leq m_2 = 9/4$ e $M(b-a) = M(2-1) < 1$ com $M = m_2/2m_1 = 3/4$.

Seja, então o método

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, n = 1, 2, \dots$$

Consideremos a seguinte tabela para sistematizar os cálculos:

n	x_{n+1}	x_n	x_{n-1}	maj. de $ e_{n+1} $
0	1.3936	1.5	2	$\frac{3}{4}$
1	1.3657	1.3936	1.5	$(\frac{3}{4})^2 = 0.5625$
2	1.3640	1.3657	1.3936	$\frac{3}{4} \times 0.5625 \times \frac{3}{4} = 0.31641$.

Obtemos para terceira iterada o valor $x = 1.3640$.

4. Compare as aproximações a que chegou nas alíneas anteriores determinando, em cada caso um limite superior para o erro absoluto para cada uma das aproximações.

Estes limites superiores encontram-se estimados nas tabelas anteriores. ■

1.3 Método iterativo do ponto fixo

No método do ponto fixo a equação $f(x) = 0$, cuja raiz α se procura, é rearranjada na forma equivalente $x = g(x)$. Nesta nova forma deve assegurar-se que

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha = g(\alpha).$$

A raiz α costuma designar-se por **ponto fixo** de $g(x) = x$ e o processo iterativo consiste no algoritmo

$$x_{n+1} = g(x_n), n \geq 0 \quad (15)$$

ilustrado na Figura 8.

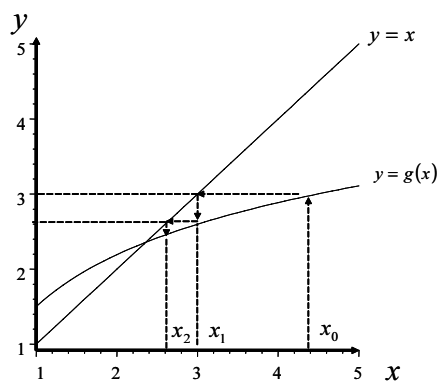


Figura 8: O método do ponto fixo.

De salientar que, em geral, a convergência do método iterativo do ponto fixo está associada à contractividade da função iteradora g . Basicamente, uma aplicação g diz-se **contractiva** num intervalo I , se

$$|g(x) - g(y)| \leq M |x - y|, \forall x, y \in I$$

para algum $0 < M < 1$. É possível mostrar que se $g \in C^1([a, b])$ e $|g'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in [a, b]$, então g é contractiva no intervalo em causa.

Na Figura 9 apresentamos o exemplo de um processo iterativo do tipo $x_{n+1} = g(x_n)$ que não converge para o ponto fixo.

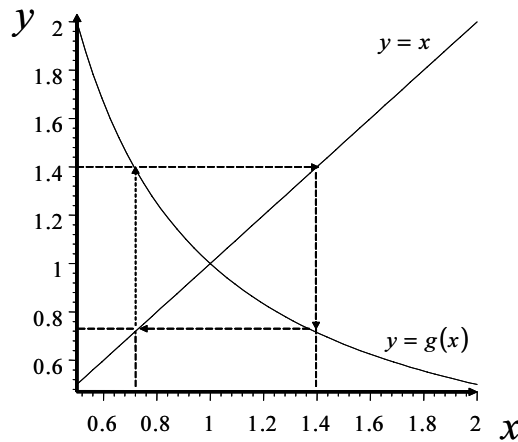


Figura 9: Exemplo de processo iterativo não convergente.

Seguidamente apresentaremos condições suficientes de convergência deste método iterativo.

Proposição 4 *Suponha-se que g e g' são funções contínuas em $I = [a, b]$ ($b > a$) com $g([a, b]) \subseteq [a, b]$ e $|g'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in [a, b]$. Então, g tem um único ponto fixo α no intervalo I e o processo iterativo (15) converge para α se $x_0 \in [a, b]$.*

Demonstração. Notemos que a aplicação g é contractiva (porquê?). Começemos por mostrar que g tem pelo menos um ponto fixo α no intervalo I . Consideremos a função auxiliar $h(x) = g(x) - x$. Como $g([a, b]) \subseteq [a, b]$, então

$$h(a) = g(a) - a \geq 0 \text{ e } h(b) = g(b) - b \leq 0.$$

Se $h(a) = 0$ ou $h(b) = 0$, g tem um ponto fixo em a ou b respectivamente. Caso contrário, em consequência do corolário do teorema do valor intermédio, da continuidade de h em I , deduz-se que existe pelo menos um valor $\alpha \in I$ tal que $h(\alpha) = 0$, isto é,

$$g(\alpha) - \alpha = 0 \Rightarrow g(\alpha) = \alpha,$$

o que demonstra a tese. Mostremos agora a unicidade do ponto fixo. Suponha-se com vista a um absurdo que existem dois pontos fixos de g , α_1 e α_2 em I . Do teorema de Lagrange, da continuidade de f' em I , deduz-se

$$\begin{aligned} g(\alpha_1) - g(\alpha_2) &= f'(c)(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= f'(c)(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow \\ f'(c) &= 1, \end{aligned}$$

para um certo c entre α_1 e α_2 . Ora, esta conclusão é absurda, pois por hipótese

$$|g'(x)| \leq M < 1, \forall x \in [a, b].$$

Este facto demonstra a unicidade do ponto fixo de g em I .

Mostremos agora a convergência o processo iterativo (15) para α se $x_0 \in [a, b]$. Seja $M \geq 0$ tal que $|g'(x)| \leq M < 1$ e suponha-se que $x_n \in I$, para um qualquer $n \in \mathbb{N}_0$. Do teorema de Lagrange sabemos

$$g(x_n) - g(\alpha) = g'(c_n)(x_n - \alpha), \quad (16)$$

para certo c_n entre x_n e α . Então,

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq M |x_n - \alpha|.$$

Note-se que $x_{n+1} = g(x_n) \in [a, b]$. Sucessivamente

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq M |e_n| \leq M^2 |e_{n-1}| \leq \dots \leq M^{n+1} |e_0| \Rightarrow \\ 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |e_{n+1}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M^{n+1} |e_0| = 0. \end{aligned}$$

O que demonstra a convergência do processo. ■

De referir que a proposição anterior contém a informação da evolução do erro associado a cada iteração, informação esta que pode ser utilizada como critério de paragem. Mais rigorosamente

$$|e_{n+1}| \leq M |e_n|, \quad n = 0, 1, \dots \quad (17)$$

com $M < 1$ e $|g'(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$, ou alternativamente,

$$|e_n| \leq M^n |e_0|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Com base em (17), podemos deduzir sucessivamente

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq M |x_n - \alpha| \\ &= M |x_n - \alpha - x_{n+1} + x_{n+1}| \\ &\leq M |x_n - x_{n+1}| + M |e_{n+1}| \Rightarrow \\ |e_{n+1}| - M |e_{n+1}| &\leq M |x_n - x_{n+1}| \Rightarrow \\ |e_{n+1}| (1 - M) &\leq M |x_n - x_{n+1}|, \end{aligned}$$

donde resulta a seguinte desigualdade, também, com algum interesse:

$$|e_{n+1}| \leq \frac{M}{1-M} |x_{n+1} - x_n|, \quad n = 0, 1, \dots$$

Quanto à ordem de convergência deste método, suponha-se que g satisfaz os pressupostos da proposição anterior e consideremos a expressão (16):

$$g(x_n) - g(\alpha) = g'(c_n)(x_n - \alpha), \quad (18)$$

para certo c_n entre x_n e α . Então,

$$\frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = |g'(c_n)|$$

para certo c_n entre x_n e α . Donde se conclui (da continuidade de g') que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |g'(\alpha)|.$$

Como, $0 < |g'(\alpha)| < 1$, este facto mostra que a ordem de convergência deste método (supondo α , uma raiz simples de f) é linear com um coeficiente assintótico $K_\infty = |g'(\alpha)|$.

Exemplo 8 Calcule a raiz de $x^2 + x - 1$ situada no intervalo $[0.5, 1]$ com um erro inferior a 0.01.

Começemos por observar que f é crescente no intervalo referido e que $f(0.5) \times f(1) < 0$.

Façamos $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Note-se que g e g' são contínuas em $[0.5, 1]$ e

$$\frac{1}{1+x} = x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0.$$

Por outro lado,

$$|g'(x)| \leq 0.5, \forall x \in [0.5, 1].$$

e (notemos que g é decrescente)

$$g([0.5, 1]) = [g(1), g(0.5)] \subseteq [0.5, 1].$$

Então estamos nas condições da proposição 4. Façamos então $M = 0.5$ e construa-se a seguinte tabela para sistematizar os cálculos:

n	x_n	$x_{n+1} = g(x_n)$	majorante de $ e_{n+1} $
0	1	0.5	0.25
1	0.5	0.666 67	0.125
2	0.666 67	0.6	0.0625
3	0.6	0.625	0.0312 5
4	0.625	0.615 38	$1.562 5 \times 10^{-2}$
5	0.615 38	0.619 05	$7.812 5 \times 10^{-3}$

A resposta será $\alpha = 0.62$. ■

Algoritmo 5 (Método do Ponto Fixo) Para $n = 0, \dots, ITMAX$ (número máximo de iteradas)

1. $x_{n+1} = g(x_n)$;
2. Parar se algum critério de paragem for satisfeito antes de $n = ITMAX$.

Exemplo 9 Considere a função $g(x) = \frac{\pi}{2} - 0.5 \sin x$.

1. Prove que a função g tem um único ponto fixo no intervalo $I = [0, \pi]$.

Notemos que g e g' são contínuas em $[0, \pi]$. Começemos por observar que $g([0, \pi]) \subseteq [0, \pi]$. Com efeito,

$$\max_{x \in [0, \pi]} g = \frac{\pi}{2} - (-0.5) \approx 2.0708 < \pi$$

e

$$\min_{x \in [0, \pi]} g = \frac{\pi}{2} - 0.5 \approx 1.0708 > 0.$$

Como g é contínua e por isso transforma intervalos em intervalos, claramente

$$g([0, \pi]) \subseteq [0, \pi].$$

Por outro lado,

$$g'(x) = -0.5 \cos x \Rightarrow |g'(x)| = |0.5 \cos x| \leq 0.5 < 1.$$

Estão, então asseguradas as condições suficientes de unicidade, existência do ponto fixo de g em I e, adicionalmente, de convergência do respectivo método qualquer que seja x_0 escolhido em I .

2. Encontre uma aproximação da raiz da equação $x + 0.5 \sin x - \frac{\pi}{2} = 0$ usando o método do ponto fixo em 3 iterações. Justifique a convergência do método e indique um majorante do erro absoluto da aproximação a que chegou.

Notemos que

$$x + 0.5 \sin x - \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$$

com $g(x) = \frac{\pi}{2} - 0.5 \sin x$. Assim, tendo por base as justificações da alínea anterior relativamente à convergência apliquemos o método iterativo do ponto fixo escolhendo para x_0 o ponto médio do intervalo I . Façamos $M = 0.5$.

n	x_n	$x_{n+1} = g(x_n)$	majorante de $ e_{n+1} $
0	$\frac{\pi}{2}$	1.0708	$\frac{\pi}{2} \times 0.5$
1	1.0708	1.132	$\frac{\pi}{2} \times 0.5^2$
2	1.132	1.1182	$\frac{\pi}{2} \times 0.5^3$

Assim $x_3 = 1.1182$ com $|e_3| \leq \frac{\pi}{2} \times 0.5^3 \approx 0.19635$. ■

Exemplo 10 Considere a equação $x^4 - x + 0.1 = 0$.

1. Determine uma função φ e um intervalo real tais que o método iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ convirja para a maior raiz real da equação dada.

Localização do intervalo de interesse:

Sabemos que f é estritamente crescente para todo o valor $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ (note-se que $f'(x) = 3x^3 - 1$) e que $f\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0.33359 < 0$ e $f(1) > 0$. Então a maior raiz real tem de situar-se no intervalo $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ (porquê?).

Determinação de uma função φ :

Notemos que

$$\begin{aligned} x^4 - x + 0.1 &= 0 \iff x^4 + 2x - 3x + 0.1 = 0 \\ &\iff x^4 + 2x = 3x - 0.1 \\ &\iff x = \frac{3x - 0.1}{x^3 + 2}. \end{aligned}$$

Este facto mostra que os pontos fixos de $\varphi = \frac{3x-0.1}{x^3+2}$ são zeros de f . Observe-se que φ e φ são contínuas em $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Por outro lado,

$$\varphi'(x) = \frac{6(1-x^3) + 0.3x^2}{(x^3+2)^2} > 0, \forall x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

Deste facto resulta que

$$\varphi\left(\left[\frac{3}{4}, 1\right]\right) \subseteq \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

já que $\varphi\left(\frac{3}{4}\right) = 0.88774$ e $\varphi(1) = 0.96667$. Por outro lado $\forall x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$

$$\frac{1}{(x^3+2)^2} < \varphi'(x) < \frac{6\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3\right] + 0.3}{\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 2\right]^2} < 0.65.$$

Assim, estão garantidas as condições de convergência do processo

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

para o único ponto fixo do intervalo de interesse, escolhendo $x_0 \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

2. Utilizando o método iterativo indicado, obtenha uma aproximação da maior raiz real da equação dada realizando três iterações. Indique um majorante do erro absoluto da aproximação obtida.

Faça-se $M = 0.65$, $x_0 = \frac{0.75+1}{2} = 0.875$ ($|e_0| \leq 0.125$) e considere-se a seguinte tabela para sistematizar os cálculos:

n	x_n	$x_{n+1} = \varphi(x_n)$	majorante de $ e_{n+1} $
0	0.875	0.945 72	$0.65 \times 0.125 = 0.081\,25$
1	0.945 72	0.961 81	$0.65 \times 0.081\,25 = 5.281\,3 \times 10^{-2}$
2	0.961 81	0.963 9	$0.65 \times 5.281\,3 \times 10^{-2} = 3.432\,8 \times 10^{-2}$

Assim, $x_3 = 0.96$ com $|e_3| \leq 3.5 \times 10^{-2}$. ■

Pode não ser fácil, como verificámos nos exemplos resolvidos, construir a equação $x = g(x)$ a partir da equação $f(x) = 0$ de forma a satisfazer as condições de convergência. Referiremos, a título informativo, o artifício que consiste em fazer

$$g(x) = x - \phi(x) f(x)$$

escolhendo de uma função apropriada $\phi(x)$. Esta função ϕ deve ser não nula e limitada num intervalo que contenha a raiz procurada.

1.4 Localização de zeros de polinómios

Já vimos que o conhecimento da localização aproximada dos zeros das funções é importante para assegurar a rápida convergência dos processos iterativos utilizados na sua determinação numérica.

Seguidamente apresentaremos algumas técnicas para conhecermos a natureza e a localização dos zeros de uma classe particular de funções: os polinómios.

Representaremos um polinómio real de grau n seguinte forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (19)$$

com a_0, a_2, \dots, a_n números reais e $a_n \neq 0$.

Notemos que um polinómio real de grau n tem exactamente n zeros (alguns eventualmente idênticos) que podem ser reais ou complexos. De referir que os zeros complexos, a existirem, ocorrem em pares conjugados.

Proposição 5 (Regra de Descartes I) *O número N_+ de zeros reais positivos de um polinómio real p não excede o número V de variações de sinal dos seus coeficientes não nulos, e o valor $V - N_+$ é par.*

Demonstração. Consequência da regra de Budan (proposição 8) considerando o intervalo $I = [0, +\infty[$. ■

Exemplo 11 Seja $p(x) = 8x^3 + 4x^2 - 34x + 15$. Começemos por avaliar o número V de variações de sinal dos seus coeficientes: $V = 2$. Então $N_+ \leq 2$ e $V - N_+ = 2 - N_+$ é par. Assim, podemos concluir imediatamente que $N_+ = 0$ ou $N_+ = 2$. ■

Seja $q(x) = p(-x)$. Sabendo que se z é zero de p então $-z$ é zero de q , resulta da regra anterior o seguinte facto:

Proposição 6 (Regra de Descartes II) *O número N_- de zeros reais negativos de um polinómio real p não excede o número V de variações de sinal dos coeficientes não nulos do polinómio $q(x) = p(-x)$, e o valor $V - N_-$ é par.*

Demonstração. Consequência imediata da regra anterior. ■

Exemplo 12 Seja $p(x) = 8x^3 + 4x^2 - 34x + 15$. Consideremos o polinómio auxiliar $q(x) = p(-x) = -8x^3 + 4x^2 + 34x + 15$. Começemos por avaliar o número V de variações de sinal dos seus coeficientes: $V = 1$. Então $N_- \leq 1$ e $V - N_- = 1 - N_-$ é par. Assim, podemos concluir imediatamente que $N_- = 1$. Resumidamente, p tem em alternativa:

1. Dois zeros positivos e um zero negativo;
2. Dois zeros complexos conjugados e um zero negativo. ■

De referir que a regra de Descartes só nos fornece indicações sobre o número de zeros reais em $] -\infty, 0[$ e $] 0, +\infty[$.

Seguidamente apresentaremos um resultado para melhor localizar os zeros.

Proposição 7 (Regra do máximo) *Todos os zeros z , reais ou complexos de um polinómio p , na forma (19) verifica a desigualdade $|z| < R$, em que*

$$R = 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|.$$

Em particular, se p tiver zeros reais, eles pertencem ao intervalo $] -R, R[$.

Demonstração. Se z for um zero tal que $|z| \leq 1$, o resultado é trivialmente verdadeiro. Suponha-se que $|z| > 1$. Nestas circunstâncias, deduz-se sucessivamente

$$\begin{aligned} p(z) &= 0 \Rightarrow \\ a_n z^n &= - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \Rightarrow \\ |a_n| |z^n| &\leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k| \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k. \end{aligned}$$

Da expressão que nos permite calcular os n primeiros termos de uma progressão geométrica

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z|^k = \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1},$$

deduz-se

$$\begin{aligned} |a_n| |z^n| &\leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k| \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \Rightarrow \\ |z| - 1 &\leq \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} \frac{|z|^n - 1}{|z^n|} \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|}, \end{aligned}$$

como se queria demonstrar. ■

Exemplo 13 Seja $p(x) = 8x^3 + 4x^2 - 34x + 15$. Então,

$$R = 1 + \left| -\frac{34}{8} \right| = 5.25.$$

Desta forma deduz-se que os zeros reais de p , se existirem, situam-se em

$$]-5.25, 5.25[.$$

■

Seguidamente indicaremos um resultado útil na determinação do número de zeros reais existentes num dado intervalo: regra de Budan.

Proposição 8 (Regra de Budan) *Consideremos o intervalo $I = [a, b]$ e p um polinómio de grau n . Sejam V_a e V_b os números de variação de sinal das sucessões*

$$\begin{aligned} & p(a), p'(a), p''(a), \dots, p^{(n)}(a), \\ & p(b), p'(b), p''(b), \dots, p^{(n)}(b), \end{aligned}$$

respectivamente. Então, o número N de zeros reais de p em $]a, b[$ não excede $V_a - V_b$ e $(V_a - V_b) - N$ é par.

Demonstração. Consultar, por exemplo, [11]. ■

Exemplo 14 Seja $p(x) = 8x^3 + 4x^2 - 34x + 15$. Então,

$$\begin{aligned} p'(x) &= 24x^2 + 8x - 34 \\ p''(x) &= 48x + 4 \\ p'''(x) &= 48. \end{aligned}$$

Sistematizemos a análise da aplicação desta regra no intervalo $[-3, 2]$:

x	-3	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	-	+	+	+	-	+
$p'(x)$	+	+	-	-	-	+
$p''(x)$	-	-	-	+	+	+
$p'''(x)$	+	+	+	+	+	+
V_x	3	2	2	2	1	0
$V_x - V_y$	1	0	0	1	1	

Do quadro, conclui-se que existe uma raiz real em cada um dos seguintes subintervalos: $]-3, -2[$, $]0, 1[$ e $]1, 2[$. ■

1.5 Método de Bierge-Vieta

O método de Bierge-Vieta representa uma adaptação do método de Newton à determinação de raízes de polinómios. Seja p um polinómio genérico:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0. \quad (20)$$

Na aplicação do método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}, \quad (21)$$

torna-se necessário calcular $p(x)$ e $p'(x)$ em x_0, x_1, \dots , etc. O método de Bierge-Vieta é um algoritmo que permite efectuar estes cálculos efectuando um menor número de operações aritméticas. Baseia-se no seguinte processo recursivo (conhecido por algoritmo de Horner):

$$p_0(x) = a_n \quad (22)$$

$$p_1(x) = xp_0(x) + a_{n-1} \quad (23)$$

$$p_2(x) = xp_1(x) + a_{n-2} \quad (24)$$

$$\vdots \quad (25)$$

$$p_n(x) = xp_{n-1}(x) + a_0. \quad (26)$$

Não é difícil verificar que

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + xa_n))). \quad (27)$$

Tal processo permite calcular $p(x)$ em cada x_k , $k = 0, 1, \dots$, efectuando apenas n adições e n multiplicações, com vantagens na rapidez e no menor número de erros de arredondamento.

Suponha-se que, com base em (27), pretendemos calcular $p_n(x)$, por exemplo.

x	a_n	a_{n-1} $+xp_0(x)$	a_{n-2} $+xp_1(x)$	\cdots \cdots	a_0 $+xp_{n-1}(x)$
	$p_0(x) = a_n$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	\cdots	$p_n(x)$

De referir que o algoritmo ilustrado é semelhante à regra de Ruffini e designa-se por algoritmo de divisão sintética.

Suponha-se agora que pretendemos calcular $p'_n(x)$. Consideremos as derivadas das expressões (22)-(26):

$$p'_0(x) = 0 \quad (28)$$

$$p'_1(x) = xp'_0(x) + p_0(x) = p_0(x) \quad (29)$$

$$p'_2(x) = xp'_1(x) + p_1(x) \quad (30)$$

$$\vdots \quad (31)$$

$$p'_n(x) = xp'_{n-1}(x) + p_{n-1}(x). \quad (32)$$

As expressões obtidas permitem operacionalizar o seguinte procedimento para calcular $p'_n(x)$:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & p_0(x) & p_1(x) & p_2(x) & \cdots & p_{n-1}(x) \\ & & +xp'_1(x) & +xp'_2(x) & \cdots & +xp'_{n-1}(x) \\ \hline & p'_1(x) & p'_2(x) & p'_3(x) & \cdots & p'_n(x) \end{array}$$

Resumidamente, o algoritmo de Bierge-Vieta, consiste na aplicação dos procedimentos atrás descritos (algoritmo de divisão sintética) para gerar as sucessivas iteradas

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

do método de Newton. Note-se que os procedimentos descritos para calcular $p(x)$ e $p'(x)$ podem ser acoplados, como se ilustrará de seguida.

Exemplo 15 Determine x_1 aplicando o método de Bierge-Vieta ao polinómio

$$p(x) = 3x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x - 120,$$

supondo $x_0 = 2$:

	3	3	-4	0	2	-120
2		6	18	28	56	116
	3	9	14	28	58	-4
2		6	30	88	232	
	3	15	44	116	290	

Assim, $p(2) = -4$ e $p'(2) = 290$. Donde

$$x_1 = 2 - \frac{-4}{290} = 2.013793. \quad \blacksquare$$

Exemplo 16 Considere a equação algébrica $x^4 - x - 1 = 0$.

1. Justificando, utilize as regras de Descartes, do máximo e de Budan para concluir sobre a existência de raízes reais da equação e obter intervalos de comprimento utitário que as contenha.

Consideremos $p(x) = x^4 - x - 1$ e $q(x) = p(-x) = x^4 + x - 1$.

Regras de Descartes: $V(p) = 1$. Assim $N_+ \leq 1$ e $V(p) - N_+$ é par. Logo deve existir uma raiz positiva. $V(q) = 1$. Assim $N_- \leq 1$ e $V(q) - N_-$ é par. Logo deve existir uma raiz negativa. As restantes raízes deverão ser complexas.

Regra do máximo:

$$\begin{aligned} R &= 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \\ &= 1 + \frac{1}{1} = 2. \end{aligned}$$

Assim, as raízes reais estarão no intervalo $[-2, 2]$.

Regra de Budan:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - x - 1, \\ p'(x) &= 4x^3 - 1, \\ p''(x) &= 12x^2, \\ p'''(x) &= 24x, \\ p^{(4)}(x) &= 24 \text{ e} \end{aligned}$$

x	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	+	+	-	-	+
$p'(x)$	-	-	-	+	+
$p''(x)$	+	+	0	+	+
$p'''(x)$	-	-	0	+	+
$p^{(4)}(x)$	+	+	+	+	+
V_x	4	4	1	1	0
$V_x - V_y$	0	3	0	1	

Como, em cada intervalo, o número de zeros reais N não excede $V_x - V_y$ devendo $V_x - V_y - N$ ser par, concluímos que as duas raízes reais existem cada uma nos intervalos $[-1, 0]$ e $[1, 2]$.

- Utilizando o método de Bierge-Vieta, efectue duas iterações para obter uma aproximação da raiz negativa. Escolha para aproximação inicial um dos extremos do intervalo obtido anteriormente e justifique a resposta.

Para assegurar a boa convergência (condições suficientes de convergência do método de Newton) comecemos por escolher o extremo do intervalo em que p tem o mesmo sinal de p'' , isto é, $x_0 = -1$ com

$$p(x) = x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x - 1.$$

Apliquemos agora o método de Bierge-Vieta:

	1	0	0	-1	-1
-1		-1	1	-1	2
	1	-1	1	-2	1
-1		-1	2	-3	
	1	-2	3	-5	

Donde, $p(-1) = 1$ e $p'(-1) = -5$. Assim,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} \\ &= -1 - \frac{1}{-5} = -0.8. \end{aligned}$$

Calculemos, agora, a segunda iterada.

	1	0	0	-1	-1
-0.8		-0.8	0.64	-0.512	1.2096
	1	-0.8	0.64	-1.512	0.2096
-0.8		-0.8	1.28	-1.536	
	1	-1.6	1.92	-3.048	

Donde, $p(-0.8) = 0.2096$ e $p'(-0.8) = -3.048$. Assim,

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} \\
 &= -0.8 - \frac{0.2096}{-3.048} \approx -0.73123.
 \end{aligned}$$

■

Laboratórios

1.6 Laboratório 1

```
% Métodos iterativos de resolução de equações
% metod_bissec.m
% Método da bissecção
clear all; close all; clc;
% intervalo inicial: [xmin, xmax]
% numero de iterações: itmax
% função: fx
% definição simbólica da função
% fx='exp(x)-2*x^3'; xmin=0; xmax=1.5;
fx='exp(x-1)-5*x^3'; xmin=0; xmax=1.5;
% plot da expressão simbólica
ezplot(fx,xmin,xmax);
grid on;
%Método da bissecção
itmax=15;
xn=[];
erron=[];
fn=[];
a=xmin; b=xmax;
for k=1:itmax
    x=a; s1=eval(fx);
    x=(a+b)/2;
    xn=[xn;x];
    erron=[erron;(b-a)/2];
    s2=eval(fx);
    fn=[fn;s2];
    if sign(s1*s2) <= 0
        b=x;
    else
        a=x;
    end
end
pause;
plot(xn,'r-')
title(['f(x)=',fx, sprintf('\n')...
    'x(n)=',num2str(xn(end)), ' // Erro(n)=',num2str(erron(end))])
xlabel('Iteração')
ylabel('raiz')
grid on
```

1.7 Laboratório 2

```
% Métodos iterativos de resolução de equações não lineares
% metodo_newton.m
% Método de Newton
clear all; close all; clc;
format long e
%intervalo inicial: [xmin, xmax]
%numero de iterações: itmax
%função: fx
% definição simbólica da função
fx='exp(x-1)-5*x^3'; xmin0=0.1; xmax0=1.0;
% definição simbólica da derivada da função
dfx='exp(x-1)-15*x^2';
absdfx='abs(exp(x-1)-15*x^2)';
% definição simbólica da segunda derivada da função
ddfx='exp(x-1)-30*x';
absddfx='abs(exp(x-1)-30*x)';
%plot da expressão simbólica
ezplot(fx,xmin0,xmax0);
grid on;
xmin=input('Qual o que pretende?  xmin = ');
if isempty(xmin)==1;
    xmin=xmin0;
end
xmax=input('Qual o valor que pretende?  xmax = ');
if isempty(xmax)==1;
    xmax=xmax0;
end
%plot da derivada de f no intervalo
ezplot(absdfx,xmin,xmax)
m1=input('Valor absoluto mínimo da derivada no intervalo?  m1 = ');
clc;
%plot da segunda derivada de f no intervalo
ezplot(absddfx,xmin,xmax);
M2=input('Valor absoluto máximo da 2ª derivada no intervalo?  M2 = ');
clc;
% cálculo de M (destinado à estimativa dos majorantes dos erros)
M=M2/(2*m1);
%Método de Newton
itmax=5;
%Escolha de x0
x=xmin;
s1=eval(fx); s2=eval(ddfx);
```

```

if sign(s1*s2) < 0
    x=xmax;
end
erro_n=[];
erro=xmax-xmin;
erron=[erro];
xn=[x];
fxn=[eval(fx)];
for k=1:itmax
    x=x-eval(fx)/eval(dfx);
    xn=[xn;x];
    erro=M*erro^2;
    erron=[erron; erro];
    fxn=[fxn;eval(fx)];
end
plot(xn,'r-')
title(['f(x)=',fx, sprintf('\n')...
    'x(n)=',num2str(xn(end)), ' // Erro(n)=',num2str(erron(end))])
xlabel('Iteração')
ylabel('raiz')
grid on
% impressão no display
clc
fprintf(' \n') ;
fprintf(' \n') ;
fprintf('MÉTODO DE NEWTON\n') ;
fprintf(' \n') ;
fprintf(' \n') ;
fprintf(' \n') ;
fprintf(' \n') ;
fprintf(' xn f(xn) erro(n)\n') ;
fprintf(' \n') ;
for k=1:itmax
    fprintf('%15.9f %15.9f %15.9f\n',xn(k),fxn(k),erron(k)) ;
end
fprintf(' \n') ;
fprintf(' \n') ;

```

Referências

- [1] Apostol, Tom M., Calculus, Editorial Reverté, 1967.
- [2] Carlos Alves, Fundamentos de Análise Numérica, 2001-2002, Departamento de Matemática do IST, Edição da AEIST.
- [3] Carpentier, M. P. J., Análise Numérica-Teoria, Fev. 1993, Departamento de Matemática do IST, Edição da AEIST.
- [4] Carvalho, J., Notas manuscritas (não publicadas), 1997.
- [5] Conte, S. D. & Boor, C., Elementary Numerical Analysis, McGraw-Hill, 1980.
- [6] Démidovitch, B. & Maron, I., Éléments de Calcul Numérique, Editora MIR, 1973.
- [7] Gerald, C. e Wheatley, P., Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley, 1997.
- [8] Kharab, A & Guenter, R. b., An Introduction to Numerical Methods: A Matlab Approach, Chapman & All/CRC, 2002.
- [9] Lindfield, G. e Penny, J., Numerical Methods Using Matlab. Ellis Horwood, 1995.
- [10] Kreyszig, Erwin., Advanced Engineering Mathematics (Cap. 17 e 18), Willey, 1999. (Livro de texto).
- [11] Kurosh, A., Cours d'Algèbre Supérieure, MIR, Moscovo, 1998.
- [12] Pina, Heitor, Métodos Numéricos, McGraw-Hill, 1995.
- [13] Press, W., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. e Vetterling, W. T., Numerical Recipes- The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 1989.
- [14] Río, J. A. I. Del & Cabezas, J. M. R., Métodos Numéricos-Teoria, problemas y prácticas com MATLAB, Edições Pirâmide, 2002.
- [15] Santos, F. C., Fundamentos de Análise Numérica, Edições Sílabo, 2003.