

Instruções:

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- Não pode responder a diferentes grupos de questões numa mesma folha de resposta.
- A saída da sala só poderá efetuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É autorizado o uso de máquinas de calcular que respeitem as condições estabelecidas no Ofício-circular/S-DGE/2016/1798.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de telemóveis, ou quaisquer outros meios de comunicação remota, durante a prova, sendo motivo suficiente para a anulação da prova de avaliação, independente de ter havido ou não utilização dos mesmos.

Justifique convenientemente todas as respostas.

Grupo I

Justifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- [1.0] 1. Se $k \in \mathbb{Z}$ é tal que, $2k - 9 \equiv 1 \pmod{4}$, então $k \equiv 1 \pmod{4}$;
- [1.5] 2. $165^{687} \equiv 13 \pmod{16}$;
- [1.0] 3. Se G é um grafo com n vértices e regular de grau k , então o número de arestas é igual $\frac{1}{2}kn$;
- [1.5] 4. Uma floresta com 24 vértices e 4 componentes conexas tem 23 arestas.

Grupo II

- [1.0] 1. Determine os algarismos a e b de modo que o(s) número(s) natural(is) $28a75b$ seja(m) divisível(eis) por 3, por 5 e por 11. Explícite os critérios de divisibilidade usados.
- [2.0] 2. Mostre que $12 + 57^{236}$ é múltiplo de 13.
- [2.0] 3. Determine, caso exista, a menor solução inteira positiva do sistema
$$\begin{cases} x \equiv -27 \pmod{5} \\ x \equiv 13 \pmod{11} \\ 7x \equiv 14 \pmod{21} \end{cases}.$$

Grupo III

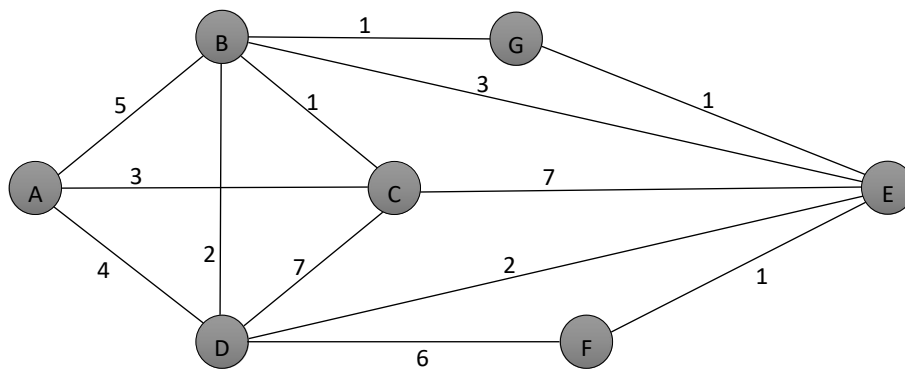
Considere o grafo orientado G de vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ definido pela matriz de incidência:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- [0.5] 1. Faça um esboço do grafo G .
- [1.0] 2. Determine o grau interior de cada vértice.
- [1.5] 3. Determine a matriz de adjacência de G e utilize-a para determinar o número de passeios de comprimento 2 do vértice v_1 para o vértice v_3 . Explícite esse(s) passeio(s).

Grupo IV

Considere o seguinte grafo ponderado G :



- [2.5] 1. Aplique o algoritmo de Dijkstra para determinar o(s) caminho(s) mais curto de A para E.
(Nota: descreva cuidadosamente os passos realizados por aquele algoritmo).
- [1.5] 2. Aplique o algoritmo de Kruskal para determinar uma árvore de suporte de custo mínimo de G e indique o custo mínimo.
- [1.5] 3. Determine, justificando, o número cromático de G .
- [1.5] 4. Determine, justificando, o índice cromático de G .

Fim do teste