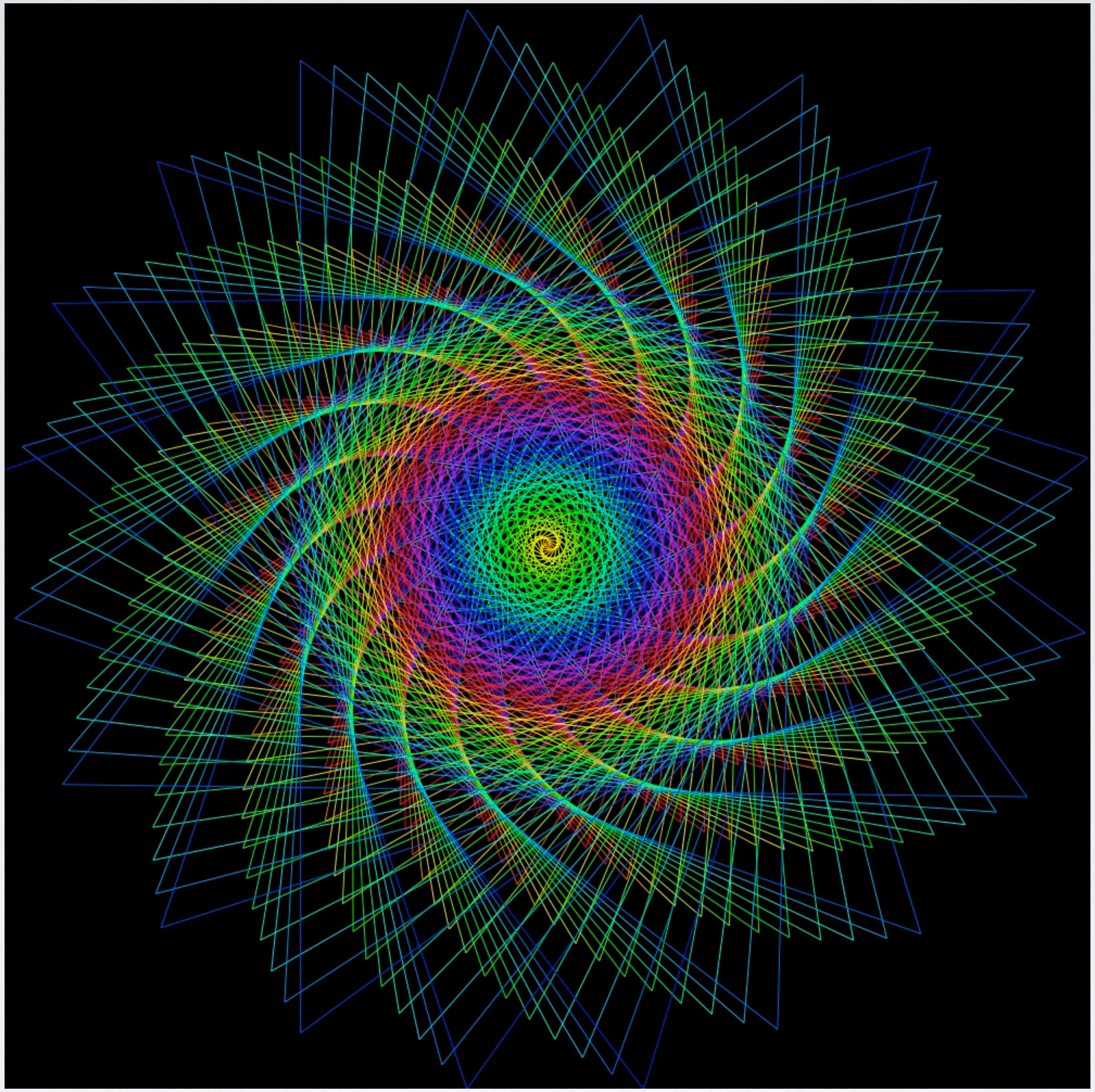

MATEMÁTICA DISCRETA

Exercícios Resolvidos de Aritmética Modular

EXERCÍCIO 1 - PÁG 50

Determine o valor lógico das seguintes proposições:

Questão:	Resposta:
a. $91 \equiv 28 \pmod 7$	a. Verdade: $7 \mid (91 - 28)$
b. $17 \equiv 6 \pmod 8$	b. Falso: $8 \nmid (17 - 6)$
c. $12 \equiv -12 \pmod 6$	c. Verdade: $6 \mid (12 + 12)$
d. $25 \equiv 0 \pmod 5$	d. Verdade: $5 \mid (25 - 0)$
e. $11^3 \equiv 23 \pmod 3$	e. Verdade: $3 \mid (11^3 - 23)$
f. $54637 \equiv 54636 \pmod 2$	f. Falso: $2 \nmid (54637 - 54636)$

EXERCÍCIO 2 A.

Determine os restos das divisões de 2^{50} e 41^{65} por 7.

Resposta:

$$2^{50} = 2^{3\times 16+2} = \left(2^3\right)^{16} \times 2^2$$

e

$$2^3 \equiv 1 \pmod 7,$$

então

$$\left(2^3\right)^{16} \times 2^2 \pmod 7 \equiv 1 \times 2^2 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7$$

O resto é 4.

Como

$$41 \equiv (-1) \pmod 7$$

então

$$(41)^{65} \pmod 7 \equiv (-1)^{65} \pmod 7$$

$$\equiv -1 \pmod 7 \equiv 6 \pmod 7$$

O resto é 6.

EXERCÍCIO 2 B.

Determine o resto da divisão de 23^{84292} por 3.

Resposta:

Como

$$23 \equiv (-1)(\text{mod } 3),$$

então

$$23^{84292} (\text{mod } 3) \equiv (-1)^{84292} (\text{mod } 3) \equiv 1 \, (\text{mod } 3)$$

O resto é 1.

EXERCÍCIO 2 C.

Determine o resto da divisão de 113^{34291} por 5.

Resposta:

Como $113 \equiv 3 \pmod{5}$, então

$$113^{34291} \equiv 3^{34291} \pmod{5}.$$

Além disso,

$$3^2 \equiv (-1) \pmod{5}.$$

Então,

$$3^{34291} = \left(3^2\right)^{17145} \times 3^1 \equiv -1 \times 3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{5}.$$

O resto é 2.

EXERCÍCIO 4 A.

Determine o algarismo das unidades das representações decimais de 13^{2004} e de 572^{42}.

Resposta: Note-se que se pergunta qual o resto da divisão por 10.

$$13 \equiv 3 \pmod{10}$$

e

$$3^2 \equiv -1 \pmod{10}$$

Então,

$$13^{2004} \equiv \left(3^2\right)^{1002} \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10}$$

O resto é 1, ou seja, o algarismo das unidades é 1.

Como

$$572 \equiv 2 \pmod{10} \text{ e } \ 2^5 \equiv 2 \pmod{10},$$

então

$$2^{42} \pmod{10} \equiv \left(2^5\right)^8 \times 2^2 \pmod{10}$$

$$\equiv 2^{10} \pmod{10} \equiv 4 \pmod{10}$$

O algarismo das unidades é 4.

EXERCÍCIO 5 A.

Mostre que $53^{103} + 103^{53}$ é divisível por 5.

Resposta:

Note-se que

$$53 \equiv 3 \pmod{5} \quad \text{e} \quad 103 \equiv 3 \pmod{5}$$

e, além disso,

$$3^2 \equiv -1 \pmod{5}.$$

Então,

$$53^{103} \equiv \left(3^2\right)^{51} \times 3 \pmod{5} \equiv -3 \pmod{5}$$

$$103^{53} \equiv \left(3^2\right)^{26} \times 3 \pmod{5} \equiv 3 \pmod{5}.$$

Finalmente,

$$53^{103} + 103^{53} \equiv -3 + 3 \pmod{5} \equiv 0 \pmod{5}.$$

EXERCÍCIO 13 A.

Determine os algarismos a e b tais que $56a21b$ seja divisível por 9 e 10.

Resposta:

Se o número é divisível por 10, então $b = 0$.

Como

$$5 + 6 + a + 2 + 1 + 0 = 14 + a,$$

então $a = 4$ e o número é divisível por 9.

Logo, $a = 4$ e $b = 0$.

EXERCÍCIO 13 B.

Determine os algarismos a e b tais que $67ab$ seja divisível por 5 e 11.

Resposta:

Se o número é divisível por 5, então $b = 0$ ou $b = 5$.

Para que o número seja divisível por 11,

$$6 - 7 + a - b$$

tem de ser divisível por 11.

Logo,

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = 5 \end{cases}.$$

EXERCÍCIO 14 A.

Utilizando o critério de divisibilidade por 9, determine o algarismo a tal que

$$98564 \times 54975 = 541a555900.$$

Resposta:

O número 98564 tem resto 5 quando dividido por $9\left(9 + 8 + 5 + 6 + 4 = 32\right)$.

O número 54975 tem resto 3 quando dividido por $9\left(5 + 4 + 9 + 7 + 5 = 30\right)$.

O número $541a555900$ terá de ter resto $5 \times 3 \equiv 6 \pmod{9}$. Como

$$5 + 4 + 1 + a + 5 + 5 + 5 + 9 + 0 + 0 = 34 + a,$$

então $a = 8$.

EXERCÍCIO 15 A.

Determine, se existir, as soluções da congruência linear:

$$2x \equiv 1 \pmod{17}.$$

Resposta:

$$17 = 2 \times 8 + 1$$

$$2 = 1 \times 2$$

O m.d.c.$(17,2) = 1$, logo a congruência linear tem solução. Como

$$1 = 17 + 2 \times (-8),$$

então uma solução particular da congruência linear é $x_0 = -8$ e todas as soluções são da forma

$$x \equiv -8 \pmod{17} \text{ ou } \{-8 + 17k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

EXERCÍCIO 15 B.

Determine, se existir, as soluções da congruência linear:

$$3x \equiv 6 \pmod{18}.$$

Resposta:

O m.d.c.$(3,18) = 3$ e como $3 \mid 3$ a congruência linear tem solução. Além disso,

$$3x \equiv 6 \pmod{18} \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod{6}.$$

Todas as soluções são da forma

$$x \equiv 2 \pmod{6} \text{ ou } \{2 + 6k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

EXERCÍCIO 15 C.

Determine, se existir, as soluções da congruência linear:

$$8x \equiv 4 \pmod{12}.$$

Resposta:

O m.d.c.$(8,12) = 4$ e como $4 \mid 4$, a congruência linear tem solução. Além disso,

$$8x \equiv 4 \pmod{12} \Leftrightarrow 2x \equiv 1 \pmod{3}.$$

Como

$$2 \times 2 \equiv 1 \pmod{3},$$

então uma solução particular da congruência linear é $x_0 = 2$ e todas as soluções são da forma

$$x \equiv 2 \pmod{3} \text{ ou } \{2 + 3k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

EXERCÍCIO 15 D.

Determine, se existir, as soluções da congruência linear:

$$14x \equiv 5 \pmod{45}.$$

Resposta:

O m.d.c.$(14,45) = 1$ logo a congruência linear tem solução.

$45 = 14 \times 3 + 3$

$14 = 3 \times 4 + 2$

$3 = 2 + 1$

$2 = 1 \times 2$

m.d.c.$(45,14) = 1$

$1 = 3 - 2$

$= 3 - (14 - 3 \times 4)$

$= 3 \times 5 - 14$

$= (45 - 14 \times 3) \times 5 - 14$

$= 45 \times 5 + 14(-16)$

EXERCÍCIO 15 D. (CONT.)

Como

$$45 \times 5 + 14(-16) = 1$$

$$\Leftrightarrow 45 \times 25 + 14(-80) = 5,$$

então uma solução particular da congruência linear é $x_0 = -80$ e todas as soluções são da forma

$$x \equiv -80 \pmod{45} \text{ ou } \{-80 + 45k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

EXERCÍCIO 15 E.

Determine, se existir, as soluções da congruência linear:

$$5x \equiv 1 \pmod{13}.$$

Resposta:

O m.d.c.$(5,13) = 1$ logo a congruência linear tem solução. Como

$$5 \times 8 \equiv 1 \pmod{13},$$

então uma solução particular da congruência linear é $x_0 = 8$ e todas as soluções são da forma

$$x \equiv 8 \pmod{13} \text{ ou } \{8 + 13k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

EXERCÍCIO 16

Determine todos os múltiplos de 12 que dão resto 6 quando divididos por 15.

Resposta:

Pede-se para que se resolva a congruência linear

$$12x \equiv 6 \pmod{15}.$$

Como m.d.c.$(12,15) = 3$ e $3 \mid 6$, a congruência linear tem solução e

$$12x \equiv 6 \pmod{15} \Leftrightarrow 4x \equiv 2 \pmod{5}.$$

Uma solução particular da congruência linear é $x_0 = 3$ e todas as soluções são da forma

$$x \equiv 3 \pmod{5} \text{ ou } \{3 + 5k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

EXERCÍCIO 17 A.

Determine, se existir, a solução do sistema de congruências lineares:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \,(\text{mod } 2) \\ x \equiv 3 \,(\text{mod } 5) \end{cases}.$$

Resposta: O sistema de congruências tem solução pois os números 2 e 5 são primos entre si dois a dois. Sejam

$$M = 2 \times 5 = 10, \; M_1 = \frac{M}{m_1} = \frac{10}{2} = 5 \text{ e } M_2 = \frac{M}{m_2} = \frac{10}{5} = 2.$$

Encontre-se soluções particulares das congruências

$$\begin{array}{lcl} \quad 5x \equiv 1(\text{mod } 2) & & \quad 2x \equiv 1(\text{mod } 5) \\ \Leftrightarrow x \equiv 1(\text{mod } 2) & \text{e} & \Leftrightarrow x \equiv 3(\text{mod } 5) \\ \Rightarrow s_1 = 1 & & \Rightarrow s_2 = 3 \end{array}.$$

Então, $x_0 = M_1 \times s_1 \times a_1 + M_2 \times s_2 \times a_2 = 5 \times 1 \times 1 + 2 \times 3 \times 3 = 23$ é uma solução particular do sistema e a solução geral é dada por

$$x \equiv 23(\text{mod } 10) \Leftrightarrow x \equiv 3(\text{mod } 10).$$

EXERCÍCIO 17 B.

Determine, se existir, a solução do sistema de congruências lineares:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \,(\text{mod } 12) \\ x \equiv 3 \,(\text{mod } 9) \end{cases}.$$

Resposta: Como os números 9 e 12 não são primos entre si não se pode aplicar o Teorema Chinês dos Restos.

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $x = 12a + 5$ e $x = 9b + 3$.

Logo,

$$12a + 5 = 9b + 3 \Leftrightarrow 12a - 9b = -2.$$

Como a equação $12a - 9b = -2$ é uma equação Dionfantina sem soluções (m.d.c$(12,9) = 3 \nmid 2$), conclui-se que o o sistema de congruências lineares não tem solução.

EXERCÍCIO 17 C.

Determine, se existir, a solução do sistema de congruências lineares:

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{11} \end{cases}.$$

Resposta: O sistema de congruências não está escrito na forma do Teorema Chinês dos Restos.

Como

$$2x \equiv 3 \pmod{7} \Leftrightarrow x \equiv 5 \pmod{7},$$

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{11} \end{cases}.$$

EXERCÍCIO 17 C.

O sistema de congruências tem solução pois os números 7 e 11 são primos entre si dois a dois. Sejam

$$M = 7 \times 11 = 77,\ M_1 = \frac{M}{m_1} = \frac{77}{7} = 11 \text{ e } M_2 = \frac{M}{m_2} = \frac{77}{11} = 7.$$

Encontre-se soluções particulares das congruências

$$\begin{aligned} &11x \equiv 1 (\text{mod } 7) \\ &\Leftrightarrow x \equiv 2 (\text{mod } 7) \\ &\Rightarrow s_1 = 2 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} &7x \equiv 1 (\text{mod } 11) \\ &\Leftrightarrow x \equiv 8 (\text{mod } 11) \\ &\Rightarrow s_2 = 8 \end{aligned} \ .$$

Então, $x_0 = M_1 \times s_1 \times a_1 + M_2 \times s_2 \times a_2 = 11 \times 2 \times 5 + 7 \times 8 \times 2 = 222$ é uma solução particular do sistema e a solução geral é dada por

$$x \equiv 222 (\text{mod } 77) \Leftrightarrow x \equiv 68 (\text{mod } 77).$$

EXERCÍCIO 18 A.

Determine a menor solução positiva dos seguinte sistemas de congruências:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{45} \\ x \equiv 6 \pmod{49} \\ x \equiv 7 \pmod{52} \end{cases}.$$

Resposta:O sistema de congruências tem solução pois os números 45, 49 e 52 são primos entre si dois a dois. Sejam

$$M = 45 \times 49 \times 52 = 114660,$$

$$M_1 = \frac{M}{m_1} = \frac{114660}{45} = 2548,\ M_2 = \frac{M}{m_2} = \frac{114660}{49} = 2340 \text{ e } M_3 = \frac{M}{m_3} = \frac{114660}{7} = 2205.$$

EXERCÍCIO 18 A.

$$2548x \equiv 1(\mathrm{mod}\ 45)$$

$2548 = 45 \times 56 + 28$

$45 = 28 + 17$

$28 = 17 + 11$

$17 = 11 + 6$

$11 = 6 + 5$

$6 = 5 + 1$

$5 = 5 \times 1$

$$
\begin{aligned}
1 &= 6 - 5 \\
&= 6 - (11 - 6) \\
&= 6 \times 2 - 11 \\
&= (17 - 11) \times 2 - 11 \\
&= 17 \times 2 - 11 \times 3 \\
&= 17 \times 2 - (28 - 17) \times 3 \\
&= 17 \times 5 - 28 \times 3 \\
&= (45 - 28) \times 5 - 28 \times 3 \\
&= 45 \times 5 - 28 \times 8 \\
&= 45 \times 5 - (2548 - 45 \times 56) \times 8 \\
&= 2548 \times (-8) + 45 \times 453
\end{aligned}
$$

EXERCÍCIO 18 A.

$$2340x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 49)$$

$$2340 = 49 \times 47 + 37$$

$$49 = 37 + 12$$

$$37 = 12 \times 3 + 1$$

$$12 = 12 \times 1$$

$$1 = 37 - 12 \times 3$$

$$= 37 - (49 - 37) \times 3$$

$$= 37 \times 4 - 49 \times 3$$

$$= (2340 - 49 \times 47) \times 4 - 49 \times 3$$

$$= 2340 \times 4 - 49 \times 191$$

EXERCÍCIO 18 A.

$$2205x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 52)$$

$$2205 = 52 \times 42 + 21$$

$$52 = 21 \times 2 + 10$$

$$21 = 10 \times 2 + 1$$

$$10 = 10 \times 1$$

$$1 = 21 - 10 \times 2$$

$$= 21 - (52 - 21 \times 2) \times 2$$

$$= 21 \times 5 - 52 \times 2$$

$$= (2205 - 52 \times 42) \times 5 - 52 \times 2$$

$$= 2205 \times 5 + 52 \times (-212)$$

EXERCÍCIO 18 A. (CONT.)

Então,

$$x_0 = M_1 \times s_1 \times a_1 + M_2 \times s_2 \times a_2 + M_3 \times s_3 \times a_3$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 2548 \times (-8) \times 5 + 2340 \times 4 \times 6 + 2205 \times 5 \times 7$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 31415$$

é uma solução particular do sistema e a solução geral é dada por

$$x \equiv 31415 (\text{mod } 114660).$$

A menor solução positiva é 31415.

EXERCÍCIO 22 A.

Utilize o Teorema de Euler para mostrar que

$$2^{18} \equiv 1 \pmod{19}.$$

Resposta:

19 é um número primo.

Como m.d.c.$(2,19) = 1$ e $\phi(19) = 18$, então

$$2^{18} \equiv 1 \pmod{19}.$$

EXERCÍCIO 22 B.

Utilize o Teorema de Euler para mostrar que

$$4^{13} \equiv 4 \pmod{21}.$$

Resposta:

Como m.d.c.$(4,21) = 1$ e $\phi(21) = \phi(7)\phi(3) = 6 \times 2 = 12$, então

$$4^{12} \equiv 1 \pmod{21} \Rightarrow 4^{13} \equiv 4 \pmod{21}.$$

EXERCÍCIO 22 C.

Utilize o Teorema de Euler para mostrar que

$$3^{24} \equiv 8^{24} \pmod{35}.$$

Resposta:

m.d.c.$(3,35) = 1$ e m.d.c.$(8,35) = 1$

$\phi(35) = \phi(7)\phi(5) = 6 \times 4 = 24$, então

$$3^{24} \equiv 1 \pmod{35} \text{ e } 8^{24} \equiv 1 \pmod{35}.$$

Logo, $3^{24} \equiv 8^{24} \pmod{35}$.

EXERCÍCIO 24 A.

Utilize o Teorema de Fermat para mostrar que o resto da divisão de 614^{6943} por 17 é 9.

Resposta:

Note-se que $614 \equiv 2 \pmod{17}$.

O número 17 é primo e não divide 2. Logo, pelo Teorema de Fermat, $2^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.

Além disso, tem-se que

$$6943 = 16 \times 433 + 15.$$

Logo,

$$2^{6943} = \left(2^{16}\right)^{433} \times 2^{15} \equiv 2^{15} \pmod{17} \equiv 9 \pmod{17}.$$

Ou seja, o resto é 9.

EXERCÍCIO 24 B.

Utilize o Teorema de Fermat para mostrar que o resto da divisão de $5^{6614} - 12^{857}$ por 7 é 1.

Resposta:

Note-se que $12 \equiv 5 \pmod{7}$.

O número 7 é primo e não divide 5. Logo, pelo Teorema de Fermat, $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

Além disso, tem-se que

$$6614 = 6 \times 1102 + 2 \text{ e } 857 = 6 \times 142 + 5.$$

Logo,

$$5^{6614} = \left(5^6\right)^{1102} \times 5^2 \equiv 5^2 \pmod{7} \equiv 4 \pmod{7}$$

$$5^{857} = \left(5^6\right)^{142} \times 5^5 \equiv 5^5 \pmod{7} \equiv 3 \pmod{7}$$

Logo,

$$5^{6614} - 12^{857} \equiv 4 - 3 \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}.$$