DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA I

Exercícios de Cálculo Integral

Exercícios Propostos

1. Calcule uma primitiva das seguintes funções:

   (a) 3;

   (b) $5x$;

   (c) $4x^3$;

   (d) $\frac{2}{x^3}$;

   (e) $-\operatorname{sen}(x)$.

2. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

   (a) As funções $F(x) = 1 + \operatorname{arctg} x$ e $G(x) = \operatorname{arctg} x$ são ambas primitivas da função $m(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

   (b) $P\left[\left(\sqrt{3-2x}\right)'\right] = \sqrt{3-2x}$;

   (c) $\left[P\left(\sqrt{3-2x}\right)\right]' = \sqrt{3-2x}$.

3. Determine a primitiva da função definida por $f(x) = \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$, que toma o valor zero para $x = \pi^2$.

4. Determine a função definida por f, tal que $f'(x) = \frac{x^3}{(1-2x^4)^2}$ e $f(1) = \frac{7}{8}$.

5. Determine as seguintes primitivas:

   (a) $P\left[\cos(-2x+\pi)\right]$;

   (b) $P\left[3x^2 + \frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right]$;

   (c) $P\left[\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - 3x)\right]$;

   (d) $P\left[\dfrac{\ln(x^2)}{x}\right]$;

   (e) $P\left[e^{3x}\cos(e^{3x})\right]$;

   (f) $P\left[\dfrac{5x}{3\sqrt[3]{x^2+3}}\right]$;

   (g) $P\left[\dfrac{x-3}{x^2+25}\right]$;

(h) $P\left[\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\right]$;

(i) $P\left[\dfrac{1}{3}\operatorname{cotg}\left(e^{3x}\right)e^{3x}\right]$;

(j) $P\left[\left(x+\sqrt[3]{x}\right)^2\right]$;

(k) $P\left[x \operatorname{tg}^2\left(x^2-1\right)\sec^2\left(x^2-1\right)\right]$;

(l) $P\left[e^{2x^2+\ln x}\right]$;

(m) $P\left[\sqrt[3]{x^2}+e^{2x}\right]$;

(n) $P\left[(1-x)(1+x)\right]$;

(o) $P\left[\sqrt{4-3x}\right]$;

(p) $P\left[\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}\right]$;

(q) $P\left[\dfrac{1}{1+4x^2}+\dfrac{x}{1+x^2}\right]$;

(r) $P\left[\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\right]$;

(s) $P\left[\cos x \operatorname{sen} x\right]$;

(t) $P\left[\dfrac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\right]$;

(u) $P\left[\operatorname{sen}^2 x\right]$;

(v) $P\left[\operatorname{sen}^3(5x)\right]$.

6. Determine as seguintes primitivas:

(a) $P\left[3x^3\right]$;

(b) $P\left[x(x+3)\right]$;

(c) $P\left[(x+3)^2-4\sqrt[3]{x}\right]$;

(d) $P\left[\dfrac{x+\sqrt{x}}{2x}\right]$;

(e) $P\left[x\sqrt{x^2+2}\right]$;

(f) $P\left[2\sqrt[5]{1-x}\right]$;

(g) $P\left[x^3 e^{x^4}\right]$;

(h) $P\left[\cos(5x)\right]$;

(i) $P\left[\dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right]$;

(j) $P\left[\cos^3(3x)\right]$;

(k) $P\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos^3\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]$;

(l) $P\left[\dfrac{\cos\left(\ln\left(x^3\right)\right)}{x}\right]$;

(m) $P\left[(\operatorname{sen} x+\cos x)^2\right]$;

(n) $P\left[\dfrac{1}{x\ln x}\right]$;

(o) $P\left[\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right]$;

(p) $P\left[\cos\left(\sqrt{1-e^x}\right)\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\right]$;

(q) $P\left[\dfrac{x^5}{1+x^6}\right]$;

(r) $P\left[\dfrac{x^2}{1+x^6}\right]$;

(s) $P\left[\dfrac{\ln^2 x}{x}\right]$;

(t) $P\left[\dfrac{\ln x}{x}\right]$;

(u) $P\left[\operatorname{sen}(3x)\cos^3(3x)\right]$;

(v) $P\left[\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right]$;

(w) $P\left[\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right]$;

(x) $P\left[\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\right]$;

(y) $P\left[\cos^4 x\right]$.

7. Um corpo está em movimento e a sua velocidade em cada instante t (segundos) é dada por $v(t) = 1 + 4t + 3t^2$ metros/segundo. Sabendo que o corpo parte da origem, determine a distância percorrida pelo mesmo nos 3 primeiros segundos.

8. Um carro move-se em linha recta e a sua aceleração é dada por $a(t) = 3 + 2t\ ms^{-2}$ (m representa metros e s segundos). Sabendo que o carro partiu da origem e que a sua velocidade passado um segundo era de $v(1) = 6\ ms^{-1}$, determine qual a posição do carro passado 3 segundos.

9. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $P\left[xe^x\right]$;

(b) $P\left[\ln x\right]$;

(c) $P\left[x^2\cos x\right]$;

(d) $P\left[e^x\operatorname{sen} x\right]$;

(e) $P\left[x^2\ln x\right]$;

(f) $P\left[x^2\operatorname{sen}(2x)\right]$;

(g) $P\left[e^{-x}\cos(-x)\right]$;

(h) $P\left[\operatorname{arctg} x\right]$;

(i) $P\left[x\operatorname{arctg} x\right]$;

(j) $P\left[\ln(2x-1)\right]$;

(k) $P\left[(3x+2)\cos(2x)\right]$;

(l) $P\left[\cos(\ln x)\right]$;

(m) $P\left[\operatorname{arcsen} x\right]$;

(n) $P\left[x^3 e^{-x^2}\right]$;

(o) $P\left[(2x+5)\ln(x+5)\right]$;

(p) $P\left[x \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right]$;

(q) $P\left[e^{3x}\operatorname{sen} x\right]$.

10. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $P\left[\dfrac{e^x+e^{2x}}{1+e^{2x}}\right]$;

(b) $P\left[\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right]$;

(c) $P\left[\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}\right]$;

(d) $P\left[\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\right]$;

(e) $P\left[\sqrt{1-x^2}\right]$;

(f) $P\left[\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right]$;

(g) $P\left[\dfrac{\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\right]$;

(h) $P\left[\dfrac{e^x-e^{3x}}{1+e^{2x}}\right]$;

(i) $P\left[\dfrac{2\ln x}{x\ln(x^2)+x}\right]$;

(j) $P\left[\sqrt{9-x^2}\right]$;

(k) $P\left[\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right]$;

(l) $P\left[\dfrac{1}{3+x+\sqrt[4]{3+x}}\right]$;

(m) $P\left[\sqrt{e^x-1}\right]$;

(n) $P\left[\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}\right]$;

(o) $P\left[\dfrac{1}{9\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}\right]$;

(p) $P\left[\dfrac{e^x-2e^{2x}}{1+e^x}\right]$;

(q) $P\left[\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x(1+\ln x)}\right]$;

(r) $P\left[\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]$.

11. Determine as seguintes primitivas:

(a) $P\left[\frac{1+x}{x\,(x-1)^2}\right]$;

(b) $P\left[\frac{1+x}{x^3+x}\right]$;

(c) $P\left[\frac{x^4-2x^2}{x^3+x^2-2}\right]$;

(d) $P\left[\frac{2x-1}{(x-2)\,(x+3)}\right]$;

(e) $P\left[\frac{x^3+1}{x^3-x^2}\right]$;

(f) $P\left[\frac{x^2}{1-x^4}\right]$;

(g) $P\left[\frac{x^3+x^2}{1+x^2}\right]$;

(h) $P\left[\frac{x^4+x^2+x+1}{x^3+2x^2+2x}\right]$;

(i) $P\left[\frac{x^4}{x\,(x-2)^2}\right]$;

(j) $P\left[\frac{8}{x\,(x^2+1)}\right]$.

12. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $P\left[\frac{x+\sqrt{x}}{x\,(1+\sqrt[3]{x})}\right]$;

(b) $P\left[\frac{\sqrt{x-1}-\ln x}{(x-1)^2}\right]$;

(c) $P\left[e^x \ln\left(e^{2x}-4e^x+3\right)\right]$;

(d) $P\left[\operatorname{sen}^3 x \cos^5 x\right]$;

(e) $P\left[x \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$;

(f) $P\left[\frac{x+(\arccos(3x))^2}{\sqrt{1-9x^2}}\right]$;

(g) $P\left[x\,(\operatorname{arctg} x)^2\right]$;

(h) $P\left[\frac{3}{(2x+3)\sqrt{2-2\ln^2(2x+3)}}\right]$;

(i) $P\left[\frac{1}{(x+1)^2\,(x+2)}\right]$;

(j) $P\left[\frac{-2}{(x+1)\,(x^2+1)}\right]$;

(k) $P\left[\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}\right]$;

(l) $P\left[\dfrac{x}{\cos^2 x}\right]$;

(m) $P\left[\dfrac{e^{2x}+e^x}{e^x+4e^{-x}}\right]$;

(n) $P\left[\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)\right]$;

(o) $P\left[x^3 e^{x^2}\right]$;

(p) $P\left[\dfrac{x^2}{1+3x^6}\right]$;

(q) $P\left[(2x+3)\ln(x+1)\right]$;

(r) $P\left[(e^x+1)^2\right]$;

(s) $P\left[\dfrac{x^2-x+3}{(x+1)(x^2-2x+1)}\right]$.

13. Determine uma função $f(x)$ tal que, com $f'(1)=-1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ se tem

$$f''(x)=\frac{8}{(x+1)^3}.$$

14. Sem calcular o integral, mostre que:

(a) $\int_0^1 \sqrt{x}dx \geq \int_0^1 x^3 dx$;

(b) $0 \leq \int_1^5 \ln x dx \leq 4\ln 5$;

(c) $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x dx \leq \frac{\pi}{2}$.

15. Sem calcular o integral, determine o sinal do integral $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x dx$.

16. Considere a função definida por

$$f(x)=2-|x|.$$

(a) Esboce uma região cuja área seja dada pelo integral $\int_{-2}^{2}(2-|x|)dx$ e calcule o seu valor.

(b) Determine o valor médio da função f no intervalo $[-2,2]$.

(c) Determine, se possível, o ponto do intervalo onde a função atinge o seu valor médio.

17. Considere a função definida por

$$f(x)=2x+5.$$

(a) Esboce uma região cuja área seja dada pelo integral $\int_{-1}^{1}(2x+5)dx$ e calcule o seu valor.

(b) Determine o valor médio da função f no intervalo $[-1,1]$.

(c) Determine, se possível, o(s) ponto(s) do intervalo onde a função atinge o seu valor médio.

18. Considere a função definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & , \text{ se } 0\leq x\leq 2 \\ \\ x & , \text{ se } 2<x\leq 3 \end{cases}.$$

(a) Esboce a região cuja área é dada pelo integral $\int_0^3 f(x)\,dx$ e calcule o seu valor.

(b) Determine o valor médio da função f no intervalo $[0,3]$.

(c) Mostre que não existe $c\in[0,3]$ tal que $f(c)$ seja igual ao valor médio obtido na alínea anterior. Confirme graficamente a partir do gráfico da alínea a).

(d) Explique porque razão a alínea anterior não contradiz o Teorema da Média.

19. Determine, se possível, o ou os pontos do intervalo de integração $[0,2]$ onde as funções atingem os respectivos valores médios:

(a) $f(x)=x^2$;

(b) $f(x)=\begin{cases} x^3 & , \text{ se } x<1 \\ -2 & , \text{ se } x\geq 1 \end{cases}.$

20. Determine, se possível, os pontos do intervalo $[0,2]$ onde a função

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ,x<1 \\ \\ 4-x & ,x\geq 1 \end{cases}$$

atinge o seu valor médio.

21. Considere a função g definida por:

$$g(x)=\begin{cases} 1+e^{2x-2} & ,x\leq 1 \\ \\ \frac{2}{1+\ln x} & ,x>1 \end{cases}$$

Justifique que existe um ponto no intervalo $[-1,3]$ onde a função atinge o seu valor médio.

22. Calcule os seguintes integrais:

(a) $\int_1^2 (x^2-2x+3)\,dx$;

(b) $\int_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

(c) $\int_1^3 |2-x|\,dx$;

(d) $\int_0^2 f(x)\,dx$ com $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{se } \ 0\leq x\leq 1 \\ \frac{x+3}{2} & \text{se } \ 1\leq x\leq 2 \end{cases}$;

(e) $\int_0^2 (x+1)^3 dx$;

(f) $\int_0^2 |2x-3|\,dx$;

(g) $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \dfrac{e^x}{e^x+4}dx$;

(h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{x+|x|}{x-|x|+2}dx$;

(i) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\sqrt[3]{1-x^2}dx$;

(j) $\int_{-1}^{2} |x^2 - x|\, dx$;

(k) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(2x)\, dx$.

23. Considere a função g, definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = x^3 + |x-2|.$$

(a) Determine a expressão de $G(x) = \int_{-1}^{x} g(t)\, dt$.

(b) Determine o valor médio da função g no intervalo $[-1, 3]$.

24. Determine a expressão analítica da função $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, em que

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & , \quad 1 \le x < 2 \\ (2-x)^2 & , \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}.$$

25. Considere a função definida por $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, com $f(x) = 2x + 1$.

(a) Determine a expressão da função $F(x)$ e, para $x > 0$, interprete-a geometricamente.

(b) Comprove que $F'(x) = f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

26. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad -1 \le x \le 0 \\ \\ e^x - 1 & , \quad 0 < x \le \ln 2 \end{cases}.$$

Determine a expressão de $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$.

27. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 1 + 2|x|$.

(a) Determine a expressão analítica de $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$;

(b) Calcule o valor médio da função f no intervalo $[-1, 1]$.

28. Mostre que $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$ é constante em $]0, +\infty[$ e determine o valor de $F(1)$.

29. Determine os extremos da função $F(x) = \int_0^x t(1-t^2)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

30. Considere a função H definida em $\mathbb{R}$ por

$$H(x) = \int_0^{x^3 - 12x} e^{t^2} dt.$$

(a) Calcule, justificando, a função H'.

(b) Estude a monotonia da função H.

31. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_e^{e+3x^2} \frac{1}{\ln t} dt.$$

(a) Calcule, justificando, a função F'.

(b) Estude a monotonia e os extremos da função F.

32. Calcule, justificando, as derivadas das funções definidas por:

(a) $\int_1^{x^2} \frac{\text{sen}\,(t^2)}{t^4+2} dt$;

(b) $\int_{\frac{1}{x}}^{x} \cos(t^2)\, dt, x \neq 0$;

(c) $\int_1^{2x^2} \frac{1}{1+t^4} dt$;

(d) $\int_{e^{2x}}^{4x} \cos(t^3) dt$.

33. Considere a função H definida em $\mathbb{R}$ por

$$H(x) = \int_{x^3}^{x} e^{\sqrt[3]{t}} dt.$$

Indique o valor de $H(1)$ e determine, justificando, a expressão de H'.

34. Determine, sem calcular o integral,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \text{sen}\,(t^3)\ dt}{x^4}.$$

35. Calcule os seguintes integrais:

(a) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$;

(b) $\int_1^2 \ln(x^2+1)\, dx$;

(c) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2} dx$;

(d) $\int_1^2 \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}} dx$;

(e) $\int_1^2 2x \ln x dx$;

(f) $\int_{\frac{1}{16}}^{1} \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt{x^3}} dx$;

(g) $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx$;

(h) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} 9x^2 \ln(3x)\, dx$;

(i) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-e^{-x}}dx$;

(j) $\int_1^6 \dfrac{3+x}{\sqrt{3+x}-1}dx$;

(k) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$;

(l) $\int_1^e x^{-2}\ln x dx$;

(m) $\int_1^8 \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+x}dx$;

(n) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \operatorname{sen}(3x))\, dx$;

(o) $\int_{\ln 2}^{\ln(2e)} \dfrac{1}{e^x+4e^{-x}}dx$;

(p) $\int_1^{64} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$;

(q) $\int_1^e (-3x\ln x)\, dx$;

(r) $\int_{-1}^6 \dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$;

(s) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \operatorname{sen} x)\, dx$;

(t) $\int_1^2 \dfrac{1}{x+5\sqrt{x}+4}dx$.

36. O integral $\int_a^b f(x)\, dx$ é transformado, pela mudança de variável $x = \operatorname{sen} t$ no integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 t}{1+\cos t}dt$. Determine a, b e $f(x)$.

37. Seja f uma função contínua no intervalo $[-a, a]$.

(a) Mostre que $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx$;

(b) Conclua que:

i. Se f é uma função ímpar, então $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$;

ii. Se f é uma função par, então $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

(c) Aplique a alínea anterior para calcular:

i. $\int_{-1}^1 |x|\, dx$;

ii. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) dx$;

iii. $\int_{-2}^2 \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x^8}dx$.

38. Seja f é uma função ímpar. Demonstre que a função h definida por $h(x) = \int_0^x f(t)dt$ é par.

39. Calcule a área das seguintes regiões do plano:

(a) região limitada pelas curvas $y = \frac{1}{x}$, $x = 0$, $y = 1$ e $y = e$;

(b) região definida pelas condições $y \geq x^2 - \frac{\pi^2}{4}$, $y \leq \cos x$ e $x \geq 0$.

40. Determine a área da região do plano, limitada pelas curvas $x = y^2$ e $y = x - 2$.

41. Determine a área da região do plano, limitada pelas linhas $y - 1 = x^2$ e $y + x = 1$.

42. Calcule a área da região do plano limitada pelas linhas $y = e^x, y = -x + e + 1, x = 0$ e $y = 0$.

43. Calcule a área das seguintes regiões do plano:

    (a) região limitada pelas condiçõs $y \geq x^2, y \geq -x + 2, y \leq x + 2$;

    (b) região limitada pelas curvas $y = x - 3, y = 0$ e $y = -\frac{1}{4}x^2$.

44. Calcule a área limitada pelas linhas:

    (a) $y = x^2$, $y = x + 6$, $y = 0$;

    (b) $y^2 + x^2 = 2x$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y = 0$;

    (c) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$;

    (d) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

45. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da região do plano limitada pelas seguintes curvas:

$$y = x^2 \qquad \text{e} \qquad y = x^3,$$

    (a) em torno do eixo dos xx;

    (b) em torno do eixo dos yy.

46. Considere a região do plano limitada pelas curvas $x = 1 - y^2, x = 2 + y^2, y = -1$ e $y = 1$.

    (a) Calcule o volume do sólido obtido por rotação da região definida anteriormente em torno do eixo dos xx.

    (b) Calcule o volume do sólido obtido por rotação da região definida anteriormente, apenas situada no 1^o quadrante, em torno do eixo dos yy.

47. Seja V o volume do sólido obtido pela revolução em torno do eixo dos xx da região do plano limitada pelas curvas

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = b, \qquad \text{onde } 0 < b < 2.$$

    Determine para que valor b o volume do sólido é igual a 3.

48. Considere a região do plano limitada pelas linhas: $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{2x}$ e $x = 0$. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da região definida anteriormente em torno do:

    (a) eixo dos xx;

    (b) eixo dos yy.

49. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da região limitada pelas linhas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e $x = \ln 2$.

50. Determine:

  (a) a área da região plana limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x^2 = -8y$;
  (b) o volume do sólido obtido pela rotação da região referida em a) em torno:
    i. do eixo dos xx;
    ii. do eixo dos yy.

51. Calcule o comprimento da curva $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ entre os pontos de abcissas $x = \frac{1}{2}$ e $x = 2$.

52. Calcule o comprimento da curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ entre os pontos de abcissas $x = 0$ e $x = 1$.

53. Calcule o comprimento da curva $y = 3 + \sqrt[3]{x^2}$ entre os pontos de abcissas $x = 1$ e $x = 8$.

54. Calcule o comprimento da curva $y = \frac{x-3}{3}\sqrt{x}$ entre os pontos de abcissas $x = 1$ e $x = 2$.

55. Calcule os seguintes integrais impróprios:

  (a) $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2} dx$;
  (b) $\int_2^4 \dfrac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} dx$;
  (c) $\int_e^{+\infty} \dfrac{1}{x \ln x} dx$;
  (d) $\int_{-\infty}^{-3} \dfrac{x}{(x^2-4)^{\frac{6}{5}}} dx$;
  (e) $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;
  (f) $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$;
  (g) $\int_0^{+\infty} \dfrac{4}{3+x^2} dx$;
  (h) $\int_0^8 \dfrac{1}{\sqrt[3]{8-x}} dx$;
  (i) $\int_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} dx$;
  (j) $\int_{-\infty}^0 xe^{2x} dx$.

56. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

  (a) Determine a área da região plana entre a curva $y = f(x)$ e o eixo dos xx, considerando $x \geq 1$.
  (b) Calcule o volume do sólido obtido pela revolução em torno do eixo dos xx da região plana da alínea anterior.

57. Determine a área da região infinita limitada pela curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, pela parábola $y = \frac{x^2}{2}$ e pelo eixo dos xx.

58. Estude a natureza dos seguintes integrais:

   (a) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} dx$;
   (b) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$;
   (c) $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+2x^2+3x^4} dx$;
   (d) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos x}{1+x^2} dx$;
   (e) $\int_0^{1} \dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{\sqrt{1-x}} dx$;
   (f) $\int_0^{+\infty} \sqrt{1+x^3} dx$;
   (g) $\int_0^{+\infty} \dfrac{2}{(x+1)\left(x^4+1\right)} dx$;
   (h) $\int_0^{1} \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$.

Exercícios Complementares

59. Calcule as primitivas imediatas das seguintes funções:

   (a) $\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9-x^2}}$;
   (b) $\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$;
   (c) $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}$;
   (d) $\frac{1}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)}$.

60. Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de primitivação por partes:

   (a) $\frac{x^2}{x^2+1} \operatorname{arctg} x$;
   (b) $3^x \operatorname{sen}(2x)$.

61. Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de primitivação por substituição:

   (a) $\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+x}$;
   (b) $\frac{e^{2x}}{e^{2x}-e^{-x}}$.

62. Calcule as primitivas das seguintes funções:

   (a) $\frac{\sqrt[3]{\ln(2x+3)}}{2x+3} + \frac{\operatorname{sen} x}{2+3\cos x}$;
   (b) $\operatorname{tg}^4 x$;

(c) $\cos(2x)\cos(3x)$;
(d) $\frac{x^4}{x^3+1}$;
(e) $x \operatorname{sen} x \cos x$;
(f) $\frac{x^4+x-1}{x^2-x}$;
(g) $\frac{e^x}{4+9e^{2x}}$;
(h) $\frac{3e^x}{e^{2x}-2e^x-3}$;
(i) $\frac{3x+4}{(x-5)^2+3}$.

63. Considere a função $f(x) = \frac{3x^2+7}{(x^2+4)(x^2-1)}$ definida em $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Obtenha a primitiva de f que satisfaz as condições seguintes :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$;
(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$;
(c) $F(0) = 1$.

64. Considere a função $f''(x)$ definida por $f''(x) = \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}$.

(a) Determine a expressão geral das funções $f(x)$ que admitem $f''(x)$ como 2^a derivada.
(b) Das funções da alinea anterior, determine aquela que verifica $f'(1) = f(1) = 0$.

65. Determine a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = \ln^2 x$ e $f(1) = 4$.

66. Determine a primitiva da função $f(x) = x^2e^x$, que toma o valor 1 para $x = 0$.

67. Calcule os integrais:

(a) $\int_2^6 \sqrt{x-2}dx$;
(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}dx$;
(c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-5x+6}dx$;
(d) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$;
(e) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(2-x^2)^3}}dx$;
(f) $\int_0^1 \frac{1}{(4+2x)(1+x^2)}dx$;
(g) $\int_9^{25} \frac{\sqrt{x}-3}{x\left(\sqrt{x}-2\right)}dx$.

68. Prove que são iguais os integrais

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx.$$

69. Demonstre que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$.

70. Calcule a derivada, para $x > 0$, da função:

$$\phi(x) = \int_1^{x^3} \ln t dt.$$

71. Sendo $f(x) = \int_{x^2}^{k \ln x} e^{-t^2} dt$, determine o valor da constante k de modo que $f'(1) = 0$.

72. Seja f uma função positiva e contínua em $\mathbb{R}$, e g a função definida por: $g(x) = \int_0^{\ln x} f(t)\, dt$.

    (a) Determine o domínio de g.

    (b) Calcule a derivada de g.

    (c) Estude a monotonia de g.

73. Determine, sem calcular o integral,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^{x^2}} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

74. Determine os extremos da função $\int_{\frac{1}{2}}^{x} t^2 \ln t \; dt$, $x \geq \frac{1}{2}$.

75. Seja $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \int_2^{x^2+x} \frac{\ln t}{\sqrt{t+2}} dt$. Prove que $\frac{2}{3} g'(1) = \ln 2$.

76. Seja f uma função com derivada contínua em $\mathbb{R}$ tal que para qualquer $x \geq 0$, $\int_0^{3x} f'(t)\, dt = x^4 + 3x^2$ e $f(0) = 2$. Determine a expressão analítica de f.

77. Seja $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \int_2^{x^3+1} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t+1}} dt$. Prove que $\frac{1}{\sqrt{3}} g'(1) = \operatorname{sen} 2$.

78. Calcule a área limitada pelas linhas:

    (a) $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo dos xx;

    (b) $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ $(p \in \mathbb{R})$.

79. Calcule o valor positivo de m, para que a área da região do primeiro quadrante limitada por $y = 2x^3$ e a recta $y = mx$ seja 32.

80. Considere o segmento de curva $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$.

    (a) Determine a área limitada por este segmento de curva e o eixo dos xx.

    (b) Determine o volume do sólido de revolução gerado pela região definida na alínea anterior numa rotação em torno do eixo dos xx.

81. Determine o volume do toro gerado pela rotação da região limitada pela circunferência de equação $(x-2)^2 + y^2 = 1$ em torno do eixo dos yy.

82. Seja A a região do plano definida por:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{1}{4} \wedge y \geq (x-1)^2 \wedge y \leq \ln x \right\}.$$

    (a) Calcule a área de A.

    (b) Calcule o comprimento da linha dada pela equação $y = \ln\left(e^{x+\alpha}\right)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $-2 \leq x \leq 2$.

83. Seja A a região do plano definida por:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x \wedge y \leq 0 \wedge y \geq (x+1)^2 - 4 \right\}.$$

    (a) Calcule a área de A.

(b) Determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da parte de A que se encontra no 3^o quadrante.

84. Determine a área do subconjunto de $\mathbb{R}^2$ constituído pelos pontos que verificam as condições: $y \leq \frac{3}{x} \wedge y \leq x+2 \wedge y \geq 1$.

85. Seja D a região do plano limitada pelas curvas de equações $y \geq x^2$, $y \leq -x+2$ e $y \leq 2$.

    (a) Calcule a área de D.

    (b) Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região D em torno do eixo dos xx.

86. Determine o comprimento da curva de equação $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ entre os pontos de coordenadas $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ e $\left(1 - \ln\sqrt{2}, 2\right)$.

87. Calcule os seguintes integrais impróprios:

    (a) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$;

    (b) $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2-6x+8} dx$;

    (c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} dx$;

    (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} dx$;

    (e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

88. Calcule o seguinte integral impróprio $\int_0^2 \frac{a}{\sqrt{16-4x^2}} dx$, com $a \neq 0$, e indique a sua natureza.

89. Estude a natureza dos seguintes integrais:

    (a) $\int_0^1 \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{x} dx$;

    (b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$;

    (c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}}$;

    (d) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}} dx$;

    (e) $\int_0^{+\infty} \frac{2x+6}{x^2+x+6} dx$;

    (f) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}} dx$;

    (g) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^3}+1} dx$.

90. Prove que $\int_0^{+\infty} \frac{2t+3}{4t^3+3} \operatorname{sen} t \, dt$ é absolutamente convergente.

Fim dos exercícios

Soluções

1a: $3x+C$; **1b:** $\frac{5x^2}{2}+C$; **1c:** x^4+C; **1d:** $-\frac{1}{x^2}+C$; **1e:** $\cos x+C$.
2a: Verdadeira**;** **2b:** Falsa; **2c:** Verdadeira.
3: $2\operatorname{sen}\sqrt{x}$.
4: $f(x)=\frac{1}{8-16x^4}+1$.
5a: $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(-2x+\pi)+C$; **5b:** $x^3+\frac{x^2}{2}+2\ln|x|+C$; **5c:** $\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+C$; **5d:** $\frac{\ln^2(x^2)}{2}+C$; **5e:** $\frac{1}{3}\operatorname{sen}(e^{3x})+C$; **5f:** $\frac{5}{4}(x^2+3)^{\frac{2}{3}}+C$; **5g:** $\frac{1}{2}\ln(x^2+25)-\frac{3}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{5}\right)+C$; **5h:** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$; **5i:** $\frac{1}{9}\ln|\operatorname{sen}(e^{3x})|+C$; **5j:** $\frac{1}{3}x^3+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$; **5k:** $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3(x^2-1)+C$; **5l:** $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$; **5m:** $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}+\frac{e^{2x}}{2}+C$; **5n:** $x-\frac{x^3}{3}+C$; **5o:** $-\frac{2}{9}\sqrt{(4-3x)^3}+C$; **5p:** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+C$; **5q:** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; **5r:** $3\ln|x|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{3}x\right)+C$; **5s:** $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}+C$; **5t:** $-\cos(\ln x)+C$; **5u:** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+C$; **5v:** $-\frac{1}{5}\cos(5x)+\frac{1}{15}\cos^3(5x)+C$.
6a: $\frac{3}{4}x^4+C$; **6b:** $\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+C$; **6c:** $\frac{(x+3)^3}{3}-3\sqrt[3]{x^4}+C$; **6d:** $\frac{x}{2}+\sqrt{x}+C$; **6e:** $\frac{\sqrt{(x^2+2)^3}}{3}+C$; **6f:** $-\frac{5}{3}\sqrt[5]{(1-x)^6}+C$; **6g:** $\frac{e^{x^4}}{4}+C$**;** **6h:** $\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x)+C$; **6i:** $-2\cos(\sqrt{x})+C$**;** **6j:** $\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)-\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3(3x)+C$; **6k:** $-\frac{1}{2}\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)+C$; **6l:** $\frac{1}{3}\operatorname{sen}(\ln(x^3))+C$; **6m:** $x+\operatorname{sen}^2 x+C$; **6n:** $\ln|\ln x|+C$; **6o:** $\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$; **6p:** $-2\operatorname{sen}\left(\sqrt{1-e^x}\right)+C$; **6q:** $\frac{1}{6}\ln(1+x^6)+C$; **6r:** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)+C$; **6s:** $\frac{\ln^3 x}{3}+C$; **6t:** $\frac{\ln^2 x}{2}+C$; **6u:** $-\frac{1}{12}\cos^4(3x)+C$; **6v:** $\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)+C$; **6w:** $\operatorname{arcsen}(e^x)+C$; **6x:** $-2\sqrt{1-e^x}+C$; **6y:** $\frac{3}{8}x+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{32}+C$**.**
7: 48 metros.
8: 28.5 metros..
9a: xe^x-e^x+C; **9b:** $x\ln x-x+C$; **9c:** $x^2\operatorname{sen}x+2x\cos x-2\operatorname{sen}x+C$; **9d:** $\frac{e^x\operatorname{sen}x-e^x\cos x}{2}+C$; **9e:** $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$; **9f:** $-\frac{x^2}{2}\cos(2x)+\frac{x}{2}\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+C$; **9g:** $\frac{-e^{-x}\left(\cos(-x)-e^{-x}\operatorname{sen}(-x)\right)}{2}+C$; **9h:** $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; **9i:** $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$; **9j:** $x\ln(2x-1)-x-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$**;** **9k:** $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\times(3x+2)+\frac{3}{4}\cos(2x)+C$; **9l:** $\frac{x\cos(\ln x)+x\operatorname{sen}(\ln x)}{2}+C$**;** **9m:** $x\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}+C$**;** **9n:** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}x^2-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$**;** **9o:** $(x^2+5x)\ln(x+5)-\frac{x^2}{2}+C$**;** **9p:** $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$**;** **9q:** $\frac{3}{10}e^{3x}\operatorname{sen}x-\frac{1}{10}e^{3x}\cos x+C$.
10a: $\operatorname{arctg}(e^x)+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$; **10b:** $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$; **10c:** $\frac{3}{4}\sqrt[6]{x^8}+C$; **10d:** $\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C$; **10e:** $\frac{x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x}{2}+C$; **10f:** $-x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)+C$**;** **10g:** $4\sqrt[4]{x}-4\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{x}\right)+C$; **10h:** $-e^x+2\operatorname{arctg}(e^x)+C$; ; **10i:** $\ln x-\frac{1}{2}\ln|2\ln x+1|+C$; **10j:** $\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)+C$; **10k:** $\frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}-2\sqrt{x+1}+C$; **10l:** $\frac{4}{3}\ln\left(\sqrt[4]{(3+x)^3}+1\right)+C$; **10m:** $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^x-1}\right)+C$; **10n:** $e^x-\ln(e^x)+C$; **10o:** $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\right)+C$; **10p:** $-2e^x+3\ln|1+e^x|+C$; **10q:** $-\ln x+\ln|1+\ln x|+C$; **10r:** $\frac{-x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x}{2}+C$.
11a: $\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C$; **11b:** $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+\operatorname{arctg}x+C$; **11c:** $\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{5}\ln|x-1|-\frac{2}{5}\ln|x^2+2x+2|+\frac{12}{5}\operatorname{arctg}(x+1)+C$; **11d:** $\frac{3}{5}\ln|x-2|+\frac{7}{5}\ln|x+3|+C$; **11e:** $x+\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$; **11f:** $-\frac{1}{4}\ln|1-x|+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$; **11g:** $\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg}x+C$; **11h:** $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{5}{4}\ln(x^2+2x+2)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x+1)+C$; **11i:** $\frac{x^2}{2}+4x+12\ln|x-2|-\frac{8}{x-2}+C$; **11j:** $8\ln|x|-4\ln(x^2+1)+C$.
12a: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln(1+\sqrt[3]{x})-6\operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x})+C$; **12b:** $-\frac{2}{\sqrt{x-1}}+\frac{\ln x}{x-1}+\ln|x|-\ln|x-1|+C$; **12c:** $e^x\ln(e^{2x}-4e^x+3)-2e^x-3\ln|e^x-3|-\ln|e^x-1|+C$; **12d:** $-\frac{1}{6}\cos^6 x+\frac{1}{8}\cos^8 x+C$; **12e:** $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$; **12f:** $-\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2}-\frac{1}{9}(\arccos(3x))^3+C$; **12g:** $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}^2 x-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$; **12h:** $\frac{3\sqrt{2}}{4}\operatorname{arcsen}(\ln(2x+3))+C$; **12i:** $\ln|x+2|-\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$; **12j:** $-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\operatorname{arctg}x+C$; **12k:** $\frac{x^2}{2}+3x-\ln|x-1|+8\ln|x-2|+C$; **12l:** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$; **12m:** $e^x+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+4)-2\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x}{2}\right)+C$; **12n:** $-2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x})+2\operatorname{sen}(\sqrt{x})+C$; **12o:** $\frac{x^2e^{x^2}}{2}-\frac{e^{x^2}}{2}+C$; **12p:** $\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}x^3\right)+C$; **12q:** $(x^2+3x)\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}-2x+2\ln|x+1|+C$; **12r:** $\frac{e^{2x}}{2}+2e^x+x+C$; **12s:** $\frac{5}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{3}{2(x-1)}+C$.

13: $f(x) = \frac{4}{1+x} + 1.$
14a: - ; **14b:** - ; **14b:** - .
15: - .
16a: 4; **16b:** 1; **16c:** $x = \pm 1.$
17a: 10; **17b:** 5; **17c:** $x = 0.$
18a: 4.5; **18b:** 1.5; **18c: - ; 18d:** A função f não é continua em $[0, 3]$.
19a: $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$; **19b:** Não existe.
20: Não existe.
21: - .
22a: $\frac{7}{3}$; **22b:** $\frac{100}{3}$; **22c:** 1; **22d:** $\frac{43}{12}$; **22e:** 20; **22f:** $\frac{5}{2}$; **22g:** $\ln\left(\frac{21}{13}\right)$; **22h:** $\frac{1}{2}$; **22i:** $\frac{9}{32}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$; **22j:** $\frac{11}{6}$; **22k:** $\frac{\pi}{8}$.
23a: $G(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{9}{4} & , -1 \leq x < 2 \\ \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{25}{4} & , x \geq 2 \end{cases}$; **23b:** $\frac{25}{4}$.
24: $F(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(2-x)^3 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$
25a: $F(x) = x^2 + x$; **25b:** - .
26: $F(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4} & , -1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{5}{4} + e^x - x & , 0 < x \leq \ln 2 \end{cases}$.
27a: $F(x) = \begin{cases} x - x^2 + 2 & , -1 \leq x < 0 \\ x + x^2 + 2 & , x \geq 0 \end{cases}$; **27b:** 2.
28: $\frac{\pi}{4}$.
29: Mínimo: $F(0) = 0$; máximo: $F(-1) = F(1) = \frac{1}{4}$.
30a: $H'(x) = e^{\left(x^3-12x\right)^2}(3x^2 - 12)$; **30b:** Monótona crescente para $x \in \left]-\infty, -2\right[$ e para $x \in \left]2, +\infty\right[$e decrescente para $x \in \left]-2, 2\right[$.
31a: $F'(x) = \frac{6x}{\ln(e+3x^2)}$; **31b:** Monótona decrescente para $x \in \mathbb{R}^-$ e crescente para $x \in \mathbb{R}^+$, com mínimo absoluto em $F(0) = 0$.
32a: $\frac{2x\,\mathrm{sen}\left(x^4\right)}{x^8+2}$; **32b :** $\cos(x^2) + \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$; **32c:** $\frac{4x}{1+16x^8}$; **32d:** $4\cos\left((4x)^3\right) - 2e^{2x}\cos(e^{6x})$.
33: $H(1) = 0$ e $H'(x) = e^{\sqrt[3]{x}} - 3x^2e^x$.
34: $\frac{1}{4}$.
35a: $-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$; **35b:** $2\ln 5 - \ln 2 - 2 + 2\,\mathrm{arctg}\,2 - \frac{\pi}{2}$; **35c:** $\frac{9\pi}{2}$; **35d:** $\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt[3]{4}}{2}\right)$; **35e:** $4\ln 2 - \frac{3}{2}$; **35f:** $4\ln 2$; **35g:** $\frac{\pi+6-3\sqrt{3}}{6}$; **35h:** $\frac{2e^3+1}{27}$; **35i:** $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{26}{7}\right)$; **35j:** $\frac{59}{3} + 2\ln 2$; **35k:** $\frac{11}{160}\sqrt{3}$; **35l:** $-\frac{2}{e} + 1$; **35m:** $3 + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) - 3\,\mathrm{arctg}\,2 + \frac{3\pi}{4}$; **35n:** $-\frac{1}{9}$; **35o:** $\frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\,e - \frac{\pi}{4}\right)$; **35p:** $\frac{17}{2}$; **35q:** $-\frac{3e^2}{4} - \frac{3}{4}$; **35r:** $3\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$; **35s:** 1; **35t:** $\frac{8}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+4}{5}\right) - \frac{2}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$.
36: $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.
37a: Sugestão: utilize a mudança de variável $x = -t$; **37b:** - ; **37ci):** 1; **37cii):** 0; **37ciii):** 0.
38: - .
39a: 1; **39b:** $1 + \frac{\pi^3}{12}$.
40: $\frac{9}{2}$.
41: $\frac{1}{6}$.
42: $\frac{e^2}{2} + e - 1$.
43a: $\frac{13}{6}$; **43b:** $\frac{7}{6}$.
44a: $\frac{32}{3}$; **44b:** $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$; **44c:** $3 - e$; **44d:** $\frac{1}{3}$.
45a: $\frac{2\pi}{35}$; **45b:** $\frac{\pi}{10}$.
46a: 2π; **46b:** 10π.
47: $b = \frac{2\pi}{6+\pi}$.
48a: $\frac{\pi}{2}$; **48b:** $\frac{8\pi-4\sqrt{2}\pi}{15}$.
49: $\frac{9}{8}\pi$.
50a: $\frac{8}{3}$; **50bi):** $\frac{24}{5}\pi$; **50bii):** $\frac{48}{5}\pi$.

51: $\frac{99}{48}$.
52: $\frac{\pi}{2}$.
53: $\frac{40\sqrt{4}-13\sqrt{13}}{27}$.
54: $\frac{5\sqrt{2}-4}{3}$.
55a: $\frac{1}{2e}$; **55b:** $3\sqrt[3]{2}$; **55c:** $+\infty$; **55d:** $-\frac{5}{2\sqrt[5]{5}}$. **55e:** $+\infty$; **55f:** $+\infty$; **55g:** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; **55h:** 6; **55i:** 2**; 55j:** $-\frac{1}{4}$.
56a: $+\infty$**; 56b:** π.
57: $\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}$.
58a: Divergente; **58b:** Convergente; **58c:** Convergente; **58d:** Absolutamente convergente; **58e:** Convergente**; 58f:** Divergente**; 58g:** Convergente**; 58h:** Convergente.
59a: $2\sqrt{3+x}+C$; **59b:** $-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$; **59c:** $-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}+C$; **59d:** $\ln|1+\operatorname{tg}x|+C$.
60a: $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2x+C$; **60b:** $\frac{1}{1+\frac{1}{4}\ln^2 3}\left[-\frac{3^x}{2}\cos(2x)+\frac{\ln 3}{4}3^x\operatorname{sen}(2x)\right]+C$.
61a: $3\sqrt[3]{x}+\frac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)-3\operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{x}\right)+C$; **61b:** $\frac{1}{3}\ln\left|e^{3x}-1\right|+C$.
62a: $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\ln(2x+3)\right)^4}-\frac{1}{3}\ln|2+3\cos x|+C$; **62b:** $x-\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+C$; **62c:** $\frac{1}{10}\operatorname{sen}5x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+C$; **62d:** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]-\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+C$; **62e:** $-\frac{1}{4}x\cos(2x)+\frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x)+C$; **62f:** $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x|-\ln|x-1|+C$; **62g:** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}e^x\right)+C$; **62h:** $\frac{3}{4}\ln\left|\frac{e^x-3}{e^x+1}\right|+C$; **62i:** $\frac{3}{2}\ln\left[\frac{(x-5)^2+3}{3}\right]+\frac{19\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-5}{\sqrt{3}}\right)+C$.
63a: $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{\pi}{4}$; **63b:** $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{\pi}{4}$; **63c:** $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+1$.
64a: $f(x)=-\frac{1}{2}x\cos(\ln x)-\frac{1}{2}x\operatorname{sen}(\ln x)+Cx+D$; **64b:** $f(x)=-\frac{1}{2}x\cos(\ln x)-\frac{1}{2}x\operatorname{sen}(\ln x)+x-\frac{1}{2}$.
65: $f(x)=x\ln^2x-2x\ln x+2x+2$.
66: $F(x)=x^2e^x-2xe^x+2e^x-1$.
67a: $\frac{16}{3}$; **67b:** 0; **67c:** $\log\frac{3}{2}$; **67d:** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$; **67e:** $\frac{1}{2}$; **67f:** $\frac{1}{10}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{20}\ln 2+\frac{\pi}{20}$; **67g:** $3\ln\frac{5}{3}-\ln 3$.
68: Sugestão: fazer a mudança de variável $x=\frac{\pi}{4}-t$.
69: Sugestão: fazer a mudança de variável $x=a+b-t$.
70: $\phi'(x)=3x^2\ln x^3$.
71: $k=\frac{2}{e}$.
72a: $D_g=\mathbb{R}^+$;**72b:** $g'(x)=\frac{1}{x}f(\ln x)$; **72c:** Monótona crescente**.**
73: -1.
74: $f(1)$ é mínimo.
75: -.
76: $f(x)=\frac{1}{81}x^4+\frac{1}{3}x^2+2$.
77: -.
78a: 8; **78b:** $\frac{4}{3}p^2$.
79: $m=16$.
80a: $A=2$; **.80b:** $V=\frac{\pi^2}{2}$.
81: $4\pi^2$.
82a: $\frac{4}{3}-e^{\frac{1}{4}}$; **82b:** $4\sqrt{2}$.
83a: $2\sqrt{3}+\frac{5}{3}$; **83b:** $\left(\frac{24\sqrt{3}}{5}+9\right)\pi$.
84: $3\ln 3$.
85a: $\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{7}{6}$; **85b:** $\frac{32}{15}\pi$.
86: $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.
87a: $+\infty$; **87b:** $\frac{1}{2}\ln 3$; **87c:** $\ln 2$; **87d:** $+\infty$. **87e:** $+\infty$.
88: $\frac{\pi}{4}a$, convergente.
89a: Divergente**; 89b:** Convergente**; 89c:** Divergente; **89d:** Convergente; **89e:** Divergente; **89f:** Absolutamente convergente; **89g:** Absolutamente convergente**.**
90: -.