Algumas substituições aconselhadas

Seja f uma função racional dos argumentos indicados:

Primitiva	**Substituição**	**Exemplo**
$P\left[f\left(e^x\right)\right]$	$e^x = t$	$P\left[\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right]$
$P\left[f\left(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, ...\right)\right]$	$x = t^m$, com $m = m.m.c.\left(q, s, ...\right)$	$P\left[\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[4]{x^3}}\right]$
$P\left[f\left(x, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, (ax+b)^{\frac{r}{s}}, ...\right)\right]$	$ax+b = t^m$, com $m = m.m.c.\left(q, s, ...\right)$	$P\left[\frac{x}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}\right]$
$P\left[\sqrt{a^2-b^2x^2}\right]$	$bx = a\,\mathrm{sen}\,(t)$	$P\left[\sqrt{4-x^2}\right]$

Exemplos para estas substituições aconselhadas

- $Pf\left(e^x\right)$

  $P\left[\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right]$: $e^x = t$, então $x = \ln(t)$; primitiva intermédia $P\left[\frac{t}{t+1}\right]$.

  Solução: $e^x - \ln\left(e^x+1\right) + C$.

- $Pf\left(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, ...\right) \rightarrow$ substituição $x = t^m$, $m =$ m.m.c.$(q, s, ...)$

  $P\left[\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[4]{x^3}}\right]$: $x = t^4$, pois $4 = m.m.c.\,(2,4)$; primitiva intermédia $P\left[\frac{4t^2}{t+1}\right]$.

  Solução: $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right) + C$.

- $Pf\left(x, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, (ax+b)^{\frac{r}{s}}, ...\right) \rightarrow$ subst. $ax+b = t^m$, $m =$ m.m.c.$(q, s, ...)$

  $P\left[\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}-1}\right]$: $x - 1 = t^6$ pois $6 = m.m.c.\,(2,3)$; primitiva intermédia $6P\left[\frac{t^8}{t^2-1}\right]$.

  Solução: $\frac{6}{7}(x-1)^{\frac{7}{6}} + \frac{6}{5}(x-1)^{\frac{5}{6}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + 6(x-1)^{\frac{1}{6}} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x-1}-1}{\sqrt[6]{x-1}+1}\right| + C$.

- $P\sqrt{a^2-b^2x^2} \rightarrow$ substituição $bx = a\,\mathrm{sen}\,(t)$

  $P\left[\sqrt{4-x^2}\right]$: $\frac{x}{2} = \mathrm{sen}\,(t)$, então $x = 2\,\mathrm{sen}\,(t)$; primitiva intermédia $4P\left[\cos^2(t)\right]$.

  Observação: Recorde que

  $$\boxed{\cos^2(t) = \tfrac{1}{2}\left(1+\cos(2t)\right), \quad \mathrm{sen}^2(t) = \tfrac{1}{2}\left(1-\cos(2t)\right), \quad \mathrm{sen}\,(2t) = 2\,\mathrm{sen}\,(t)\cos(t)}$$

  Solução: $2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C$.

(Ana Matos - versão de 5 Jan 2017)