

4 de Fevereiro de 2019

Duração: **2h30**

Instruções:

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- Não pode responder a diferentes questões numa mesma folha de resposta.
- O abandono da sala só poderá efectuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É permitida a consulta de uma folha A4 manuscrita pelo aluno.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de equipamentos electrónicos durante a prova.
- Justifique convenientemente todas as respostas.

No exercício 1 não poderá ser utilizada a Regra de Cauchy no cálculo de limites.

1. Considere a função f , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x^2)}{x} & , x < 0 \\ -\sin(x) & , x \geq 0 \end{cases}.$$

[2.0] (a) Indique o domínio e estude a continuidade de f .

[2.0] (b) Justifique que f é diferenciável no seu domínio e determine f' .

[1.0] (c) Sabendo que $f'(0) = -1$, determine o polinómio de Mac-Laurin de ordem 1 da função f e use-o para calcular uma estimativa do número $-\sin\left(\frac{1}{5}\right)$.

[2.0] 2. Caracterize a função inversa de

$$g(x) = 5\pi + 3 \arccos\left(\frac{1-x}{3}\right).$$

3. Mostre que:

$$[1.5] \text{ (a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} = \frac{1}{2}.$$

[1.5] (b) A equação $e^x = 10 - x$ tem uma só solução em \mathbb{R} .

[2.0] 4. Determine a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x) = \frac{x-4}{x(x^2+1)} \quad \text{e} \quad f(1) = \ln 4.$$

5. Calcule:

$$[2.0] \text{ (a) } \int_{-1}^0 xe^{-x} dx;$$

$$[2.0] \text{ (b) } \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{2}} \frac{4x}{\sqrt[3]{2+4x}} dx.$$

6. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ \sin^2(\pi x), & x \geq 1 \end{cases}.$$

[1.5] (a) Determine a expressão de $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

[1.0] (b) Calcule $\int_{-\infty}^{-1} \frac{f(x)}{x^4} dx$.

[1.5] 7. Considere a região do plano limitada pelas curvas

$$y = \ln x, \quad y = 1 - x, \quad y = 1.$$

Faça o esboço da região e calcule o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno do eixo dos yy .

Fim do exame