Exercícios Resolvidos Semana 7: 27/IV/2020 até 30/IV/2020

Exercício 2.49

`Encontrar, se existe, uma decomposição de Cholesky de:`

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 25 & 10 \\ 2 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Queremos U matriz triangular superior que satisfaz $U^t \cdot U = A$.

Se observamos a primeira linha da matriz U temos:

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & b \\ 0 & \bar{U} \end{bmatrix}$$

, onde $b \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ e $\bar{U} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é triangular superior. A condição $U^t \cdot U = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ b^t & \bar{U}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & b \\ 0 & \bar{U} \end{bmatrix} = A$, ao estudar a primeira linha, leva às seguintes condições:

$$\alpha^2 = 4, \qquad \alpha \cdot b = [8\,2]$$

Tomamos $\alpha = \sqrt{4} = 2$, e deduzimos que $b = \frac{1}{2} \cdot [8\,2] = [4\,1]$. Podemos então escrever:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 25 & 10 \\ 2 & 10 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Repetimos o processo para $\bar{A} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ e obtemos $\sqrt{9} = 3$; $\frac{1}{3} \cdot [6] = [2]$, logo:

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora $sqrt1 = 1$. Portanto $[1] = [1] \cdot [1]$.

Deduzimos que $A = U^t \cdot U$ sendo:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz é definido-positiva, e tem decomposição de Cholesky $A = U^t \cdot U$ sendo U a matriz acima indicada.

Exercício 2.50

`Encontre uma decomposição de Cholesky para a matriz de coeficientes dos seguintes sistemas, e use a decomposição para resolver o sistema de equações.`

1. $\begin{cases} 4x + 2y - 4z = -2 \\ 2x + 10y + 4z = 5 \\ -4x + 4y + 9z = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases}$

•(1)• O sistema, em forma matricial, pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ é simétrica ($A^t = A$). Procuremos a decomposição de Cholesky $A = U^t \cdot U$, pedida no enunciado.

Se chamamos $[\alpha\, b]$ a primeira linha da matriz U, temos:

$$\alpha^2 = 4, \quad \alpha \cdot b = [2\ -4] \Rightarrow \alpha = \sqrt{4} = 2,\ b = \frac{1}{2} \cdot [2\ -4] = [1\ -2]$$

Temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Repetimos o processo para $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ e temos $\alpha = \sqrt{9} = 3$, $b = \frac{1}{3} \cdot [6] = [2]$, logo:

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A*X=B

X=A^(-1) *B

U*F= Id

inv(A)=inv(U)*inv(U')

inv(U')=(inv(U))'

Finalmente temos [1] = [1] · [1] e portanto:

$$A = U^t \cdot U, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolver $U^t \cdot U \cdot X = B$ exige aplicar substituição direta na equação $\boxed{U^t \cdot Y = B,}$ para determinar Y, e depois substituição inversa na equação $U \cdot X = Y$, para encontrar X.

2 0 0 y1 -2
1 3 0 y2 = 5
-2 2 1 y3 0

Primeiro calculamos Y, solução de $U^t \cdot Y = B$, por substituição direta (a matriz U^t é triangular inferior). Chamemos y_1, y_2, y_3 as três entradas da matriz Y:

$$\left\{ \begin{aligned} 2y_1 &= -2 \\ y_1 + 3y_2 &= 5 \\ -2y_1 + 2y_2 + y_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} y_1 &= \boxed{-1} \\ 3y_2 &= 6 \\ 2y_2 + y_3 &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} y_1 &= \boxed{-1} \\ y_2 &= \boxed{2} \\ y_3 &= -6 \end{aligned} \right\}$$

E agora calculamos X, solução de $U \cdot X = Y$, por substituição direta (a matriz U é triangular superior)

$$\left\{ \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_3 &= -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -13 \\ 3x_2 &= 14 \\ x_3 &= \boxed{-6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2x_1 &= -53/3 \\ x_2 &= \boxed{14/3} \\ x_3 &= \boxed{-6} \end{aligned} \right\}$$

Encontramos a solução $x_1 = -53/6$, $x_2 = 14/3$, $x_3 = -6$

•(2)• O sistema, em forma matricial, pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ é simétrica ($A^t = A$). Procuremos a decomposição de Cholesky $A = U^t \cdot U$, pedida no enunciado.

Se chamamos $[\alpha\, b]$ a primeira linha da matriz U, temos:

$$\alpha^2 = 2 \quad \alpha \cdot b = [-1\ -1] \Rightarrow \alpha = \sqrt{2},\ b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot [-1\ -\ -1] = [\frac{-\sqrt{2}}{2}\ \frac{-\sqrt{2}}{2}]$$

Temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 11/2 \end{bmatrix}$$

Repetimos o processo para $\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 11/2 \end{bmatrix}$ e temos $\alpha = \sqrt{3/2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $b = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot [1/2] = [\frac{1}{\sqrt{6}}] = [\frac{\sqrt{6}}{6}]$, logo:

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 11/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16/3 \end{bmatrix}$$

Finalmente temos $\sqrt{16/3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ e portanto:

$$A = U^t \cdot U, \quad U = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Resolver $U^t \cdot U \cdot X = B$ exige aplicar substituição direta na equação $U^t \cdot Y = B$, para determinar Y, e depois substituição inversa na equação $U \cdot X = Y$, para encontrar X.

Primeiro calculamos Y, solução de $U^t \cdot Y = B$, por substituição direta (a matriz U^t é triangular inferior). Chamemos y_1, y_2, y_3 as três entradas da matriz Y:

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{2}y_1 &= -4 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}y_2 &= 7 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}y_2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}y_3 &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} y_1 &= \boxed{-2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}}{2}y_2 &= 5 \\ \frac{\sqrt{6}}{6}y_2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}y_3 &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} y_1 &= \boxed{-2\sqrt{2}} \\ y_2 &= \boxed{\frac{5\sqrt{6}}{3}} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3}y_3 &= -14/3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} y_1 &= \boxed{-2\sqrt{2}} \\ y_2 &= \boxed{\frac{5\sqrt{6}}{3}} \\ y_3 &= \boxed{\frac{-7\sqrt{3}}{6}} \end{aligned} \right\}$$

Agora calculamos X, solução de $U \cdot X = Y$, por substituição direta (a matriz U é triangular superior)

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{2}x_1 + \frac{-\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{-\sqrt{2}}{2}x_3 &= -2\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{6}}{6}x_3 &= \frac{5\sqrt{6}}{3} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3}x_3 &= \frac{-7\sqrt{3}}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \sqrt{2}x_1 + \frac{-\sqrt{2}}{2}x_2 &= \frac{-39\sqrt{2}}{16} \\ \frac{\sqrt{6}}{2}x_2 &= \frac{29\sqrt{6}}{16} \\ x_3 &= \boxed{\frac{-7}{8}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \sqrt{2}x_1 = \dfrac{-5\sqrt{2}}{8} \\ \cancel{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}x_2 = \boxed{\dfrac{29}{8}} \\ x_3 = \boxed{\dfrac{-7}{8}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x_1 = \boxed{\dfrac{-5}{8}} \\ \cancel{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}x_2 = \boxed{\dfrac{29}{8}} \\ x_3 = \boxed{\dfrac{-7}{8}} \end{array} \right\}$$

Encontramos a solução $x_1 = -5/8$, $x_2 = 29/8$, $x_3 = -7/8$

Exercício 2.51

`Determine uma decomposição de Cholesky da matriz` $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix}$

Queremos uma decomposição $A = U^t \cdot U$ com U triangular superior, com diagonal positiva.

Determinamos a primeira linha de U, com entradas $[\alpha\, b]$ que satisfazem $\alpha^2 = 1$, $b = [1\,1]$. Portanto temos $\alpha = \sqrt{1}$, $b = [1\,1]$. Temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

Na segunda linha de U temos $[\alpha\, b]$ onde $\alpha^2 = 4$, $\alpha \cdot b = [4]$, portanto $\alpha = \sqrt{4} = 2$; $b = \frac{1}{2} \cdot [4] = [2]$. Temos assim:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Finalmente na última linha de U temos $\alpha = \sqrt{9} = 3$. Deduzimos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Temos a decomposição de Cholesky pedida.

Exercício 2.52

`Considere a seguinte matriz (com` $a \neq 0$`):`

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+a & 0 \\ 1-a & 1 & a^2 \\ 0 & a^2 & a^2-1 \end{bmatrix}$$

1. `Calcule uma decomposição LU da matriz` A.
2. `Use a decomposição para calcular a inversa da matriz` A.

Para determinar uma decomposição LU aplicamos o algoritmo de eliminação gaussiana na matriz $[A\,\mathrm{Id}]$, com escolha de pivô imediata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-a & 1 & a^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2-1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1+a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2-1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, se $a^2 = 0$, esta entrada da diagonal não poderia ser usada como pivô, e não iria existir a decomposição LU de Doolittle. Segundo o enunciado consideramos só o caso $a \neq 0$, e continuamos com o algoritmo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2-1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1+a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Deduzimos assim

$$\overline{L} \cdot A = U, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1+a & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \overline{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ 1-a & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se queremos a decomposição LU ainda temos que identificar a inversa de $\overline{L}$. Para isto podemos aplicar o algoritmo de gauss em $[\overline{L}\,\mathrm{Id}]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1-a & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & a-1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Deduzimos:

$$A = L \cdot U, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1+a & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é simples comprovar este produto

$$A = L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 1+a & 0 \\ 1-a & 1 & a^2 \\ 0 & a^2 & a^2-1 \end{bmatrix}$$

inv(A)=inv(L*U)=inv(U)*inv(L)

Para calcular agora a inversa de A, basta usar $\overline{L} \cdot A = U$, o qual implica que $\overline{L} = U \cdot A^{-1}$, portanto devemos encontrar a solução da equação matricial $U \cdot X = \overline{L}$. Como esta equação é triangular, a solução pode ser obtida por substituição inversa:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad , \quad U \cdot X = \overline{L} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 + (1+a)x_2 &= [1\,0\,0] \\ a^2 x_2 + a^2 x_3 &= [(a-1)\,1\,0] \\ -x_3 &= [(1-a)\ -1\,1] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + (1+a)x_2 &= [1\,0\,0] \\ a^2 x_2 &= [(a-1+a^2-a^3)\,(1-a^2)\,a^2] \\ x_3 &= \boxed{[(a-1)\,1\ -1]} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a^2}[(1-a^2+a^4)\,(a^3+a^2-a-1)\,(-a^3-a^2)] \\ x_2 &= \boxed{\left[\frac{a-1+a^2-a^3}{a^2}\ \frac{1-a^2}{a^2}\ 1\right]} \\ x_3 &= \boxed{[(a-1)\,1\ -1]} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Concluímos portanto, que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-a^2+a^4}{a^2} & \frac{a^3+a^2-a-1}{a^2} & (-a-1) \\ \frac{a-1+a^2-a^3}{a^2} & \frac{1-a^2}{a^2} & 1 \\ (a-1) & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Outro método para calcular a inversa seria usar $A = L \cdot U \Rightarrow A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$. Sabemos que $L^{-1} = \overline{L}$ já foi calculado. Podemos calcular U^{-1} por substituição inversa aplicada na equação $U \cdot X = \text{Id}$, e finalmente obtemos A^{-1} como produto destas duas inversas.