Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA I

1º SEMESTRE 2018/2019

Exame de Época Normal - Tópicos de Resolução

4 de Fevereiro de 2019 Duração: **2h30**

No exercício 1 não poderá ser utilizada a Regra de Cauchy no cálculo de limites.

1. Considere a função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x^2)}{x} & , \ x < 0 \\ \\ -\operatorname{sen}(x) & , \ x \geqslant 0 \end{cases}.$$

[2.0] (a) Indique o domínio e estude a continuidade de f.

Resolução: O Domínio da função é

$$\begin{aligned} D &= \left\{x \in \mathbb{R} : \left(x < 0 \wedge 1 - x^2 > 0 \wedge x \neq 0\right) \vee x \geqslant 0\right\} = \\ &= \left]-1, +\infty\right[\end{aligned}$$

Para $x < 0$, f é contínua pois é definida à custa da composição e a divisão de funções contínuas (logaritmo e polinómios). Para $x > 0$, f é contínua pois é definida à custa de um produto de uma constante pela função seno. Para $x = 0$, tem de se estudar os limites laterais bem como o valor da função em 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-x^2)}{x} = \\ &= -\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+(-x^2))}{-x^2} x = \\ &= -1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -\operatorname{sen}(x) = 0$$

$$f(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$$

Como os limites laterais e o valor da função são iguais, f é contínua em 0 e logo é contínua em todo o seu domínio.

[2.0] (b) Justifique que f é diferenciável no seu domínio e determine f'.

Resolução: Para $x < 0$, f é diferenciável pois é definida à custa da composição e a divisão de funções diferenciáveis (logaritmo e polinómios). A derivada neste ramo é dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-2x}{1-x^2} x - \ln(1-x^2) \times 1}{x^2} = \\ &= \frac{1}{1-x^2} - \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}. \end{aligned}$$

Para $x > 0$, f é diferenciável pois é definida à custa de um produto de uma constante pela função seno. A derivada neste ramo é definida por

$$f'(x) = -\cos(x).$$

Para $x = 0$, tem de se estudar as deriadas laterais:

$$\begin{aligned} f'_e(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{\ln\left(1-h^2\right)}{h} - \operatorname{sen}(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} -\frac{\ln(1-h^2)}{-h^2} = -1 \end{aligned}$$

$$f'_d(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(h) - 0}{h} = -1$$

Como as derivadas laterais em zero são iguais, conclui-se que $f'(0) = -1$. Logo,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x^2} - \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} & , \ x < 0 \\ \\ -\cos(x) & , \ x \geqslant 0 \end{cases}.$$

[1.0] (c) Sabendo que $f'(0) = -1$, determine o polinómio de Mac-Laurin de ordem 1 da função f e use-o para calcular uma estimativa do número $-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}\right)$.

Resolução: O polinómio de Mac-Laurin é

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + f'(0)\,x \\ &= 0 - 1x = -x. \end{aligned}$$

A aproximação é dada por

$$-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}\right) = f\left(\frac{1}{5}\right) \approx P_1\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}.$$

[2.0] 2. Caracterize a função inversa de

$$g(x) = 5\pi + 3\arccos\left(\frac{1-x}{3}\right).$$

Resolução:

$$\arccos x : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi], \qquad D_{g^{-1}} = CD_g \qquad CD_{g^{-1}} = D_g$$

D_g :

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{1-x}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 1-x \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq -x \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 \geq x \geq -2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

Portanto, $D_g = [-2, 4]$.

CD_g: para $x \in D_g$ tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \arccos\left(\frac{1-x}{3}\right) \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 3\arccos\left(\frac{1-x}{3}\right) \leq 3\pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5\pi \leq 5\pi + 3\arccos\left(\frac{1-x}{3}\right) \leq 5\pi + 3\pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5\pi \leq g(x) \leq 8\pi \end{aligned}$$

Portanto, $CD_g = [5\pi, 8\pi]$.

Assim, $D_{g^{-1}} = [5\pi, 8\pi]$ e $CD_{g^{-1}} = [-2, 4]$.

g^{-1} :

$$\begin{aligned} y &= g(x) \Leftrightarrow y = 5\pi + 3\arccos\left(\frac{1-x}{3}\right) \Leftrightarrow y - 5\pi = 3\arccos\left(\frac{1-x}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{y-5\pi}{3} = \arccos\left(\frac{1-x}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{y-5\pi}{3}\right) = \frac{1-x}{3} \Leftrightarrow 3\cos\left(\frac{y-5\pi}{3}\right) = 1 - x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -1 + 3\cos\left(\frac{y-5\pi}{3}\right) = -x \Leftrightarrow 1 - 3\cos\left(\frac{y-5\pi}{3}\right) = x \end{aligned}$$

Assim, $g^{-1}(x) = 1 - 3\cos\left(\frac{x-5\pi}{3}\right)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} g^{-1}: \quad [5\pi, 8\pi] &\longrightarrow [-2, 4] \\ x &\longrightarrow 1 - 3\cos\left(\tfrac{x-5\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

3. Mostre que:

[1.5] (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} = \dfrac{1}{2}$.

Resolução: Comecemos por verificar que estamos nas condições de poder utilizar a Regra de Cauchy.

- $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$, trata-se de um indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$
- Seja $f(x) = e^x - 1$, f é diferenciável em $\mathbb{R}$ por se tratar da diferença entre duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, exponencial e constante; seja $g(x) = e^x + xe^x - 1$, g é diferenciável em $\mathbb{R}$ por se tratar da soma, produto e diferença de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$,exponencial e polinómio
- $g'(x) = (e^x + xe^x - 1)' = (e^x(x+1) - 1)' = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2) \neq 0$ numa vizinhança de 0

Calculemos então

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(e^x + xe^x - 1)'} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(x+2)} = \frac{1}{2}$$

e podemos concluir ,pela regra de Cauchy, que $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1} = \frac{1}{2}$

Outra resolução alternativa:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{e^x+xe^x-1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{e^x-1}{x} + e^x} = \frac{1}{2}$$

porque $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

[1.5] (b) A equação $e^x = 10 - x$ tem uma só solução em $\mathbb{R}$.

Resolução: Comecemos por mostrar que a equação $e^x = 10 - x$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$:

(1) Consideremos a função $f(x) = e^x + x - 10$ e tomemos, por exemplo, o intervalo $[0, 10]$.

$$f(0) = -9 \quad \text{e} \quad f(10) = e^{10} \quad \text{donde} \quad f(0) \times f(10) < 0$$

e como f é contínua em $\mathbb{R}$ (logo é contínua em$[0, 10]$) por ser a soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$,exponencial e polinómio, temos pelo Corolário do Teorema de Bolzano que $\exists c \in \,]0, 10[: f(c) = 0$ ou seja que a equação $e^x = 10 - x$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$.

(2) Suponhamos que a equação $e^x = 10 - x$ tem duas soluções em $\mathbb{R}$ ou seja que a função $f(x) = e^x + x - 10$ tem dois zeros. Atendendo a que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, por ser a soma de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ (exponencial e polinómio) e a que $f'(x) = e^x + 1$ não tem zeros reais podemos concluir através do Corolário do Teorema de Rolle que f não pode ter dois zeros.(porque entre dois zeros da função existe pelo menos um zero da derivada).

Outra resolução alternativa: como $f'(x) = e^x+1 > 0$ para todo o x sendo f diferenciável em $\mathbb{R}$ então f é estritamente crescente, pelo Corolário Teorema de Lagrange, logo f não pode ter dois zeros (para mostrar a unicidade da solução). Juntando este resultado a (1) conclui-se que f tem um e um só zero real o que é o mesmo que dizer que a equação $e^x = 10 - x$ tem uma só solução em $\mathbb{R}$.

[2.0] 4. Determine a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x) = \frac{x-4}{x(x^2+1)} \qquad \text{e} \qquad f(1) = \ln 4.$$

Resolução: $f(x) = P[f'(x)] = P\left[\frac{x-4}{x(x^2+1)}\right] \quad \longrightarrow \quad$ Primitiva por decomposição

$\frac{x-4}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Leftrightarrow x - 4 = A(x^2+1) + (Bx + C)x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = 4 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P\left[\frac{x-4}{x(x^2+1)}\right] &= P\left[\frac{-4}{x} + \frac{4x+1}{x^2+1}\right] = \\ &= -4P\left[\frac{1}{x}\right] + 2P\left[\frac{2x}{x^2+1}\right] + P\left[\frac{1}{x^2+1}\right] = \\ &= -4\ln|x| + 2\ln(x^2+1) + \arctan x + C \end{aligned}$$

tem-se então que,

$f(x) = -4\ln|x| + 2\ln(x^2+1) + \arctan x + C \qquad C \in \mathbb{R}$

Sabendo que $f(1) = \ln 4$, vem

$-4\underbrace{\ln 1}_{0} + \underbrace{2\ln 2}_{\ln 4} + \underbrace{\arctan 1}_{\frac{\pi}{4}} + C = \ln 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = -\frac{\pi}{4}$

Conclusão: $f(x) = -4\ln|x| + 2\ln(x^2+1) + \arctan x - \frac{\pi}{4}$.

5. Calcule:

[2.0] (a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{-x}dx;$

Resolução: Integrando por partes:

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & x \rightarrow g'(x) = 1 \\ f'(x) & = & e^{-x} \rightarrow f(x) = P\left[e^{-x}\right] = -e^{-x} \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} xe^{-x}dx &= \left[-e^{-x}x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\left(-e^{-x}\times 1\right)dx = \\ &= \left(-e^{0}\times 0 - \left(-e^{-(-1)}\times(-1)\right)\right) - \left[e^{-x}\right]_{-1}^{0} = \\ &= -e - \left(e^{0} - e^{-(-1)}\right) = -e - 1 + e = -1 \end{aligned}$$

[2.0] (b) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{2}} \frac{4x}{\sqrt[3]{2+4x}}dx.$

Resolução: Integrando por substituição:

$$\begin{array}{rcl} 2+4x & = & t^{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{t^{3}-2}{4} = \varphi(t) \\ \varphi'(t) & = & \dfrac{3}{4}t^{2} \\ \varphi(\alpha) & = & -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^{3}-2}{4} = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^{3} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \\ \varphi(\beta) & = & \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\beta^{3}-2}{4} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \beta^{3} = 8 \Leftrightarrow \beta = 2 \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{2}} \frac{4x}{\sqrt[3]{2+4x}}dx &= \int_{1}^{2} \frac{4\times\frac{t^{3}-2}{4}}{\sqrt[3]{t^{3}}}\times\frac{3}{4}t^{2}dx = \int_{1}^{2}\frac{t^{3}-2}{t}\times\frac{3}{4}t^{2}dx = \\ &= \frac{3}{4}\int_{1}^{2}\left(t^{4}-2t\right)dx = \frac{3}{4}\left[\frac{t^{5}}{5}-t^{2}\right]_{1}^{2} = \\ &= \frac{3}{2^{2}}\left[\frac{2^{5}}{5} - 2^{2} - \left(\frac{1^{5}}{5} - 1^{2}\right)\right] = \\ &= 3\times\frac{8}{5} - 3 - \frac{3}{20} + \frac{3}{4} = \frac{29}{5} - \frac{63}{20} = \\ &= \frac{116-63}{20} = \frac{53}{20} \end{aligned}$$

6. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^{2}-1, & x < 1 \\ \operatorname{sen}^{2}(\pi x), & x \geqslant 1 \end{cases}.$$

[1.5] (a) Determine a expressão de $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Resolução: Como $F(x = \int\limits_0^x f(t)dt$ e a função f muda de expressão em $x = 1$, tem de se considerar dois casos:

- Se $x < 1$,

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_0^x \left(t^2 - 1\right) dt = \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_0^x = \frac{x^3}{3} - x$$

- Se $x \geq 1$,como um dos extremos de integração é menor que 1 e o outro maior ou igual a 1, a função f muda de expressão no intervalo de integração e o integral terá de ser subdividido:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_0^1 f(t)dt + \int\limits_1^x f(t)dt = \int\limits_0^1 \left(t^2 - 1\right) dt + \int\limits_1^x \sin^2(\pi t)dt = \\
&= \int\limits_0^1 \left(t^2 - 1\right) dt + \int\limits_1^x \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\pi t)\right) dt = \\
&= \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int\limits_1^x 1dt - \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^x \cos(2\pi t)dt = \\
&= -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}[t]_1^x - \frac{1}{4\pi}[\sin(2\pi t)]_1^x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4\pi}\left(\sin(2\pi x) - \sin(2\pi)\right) = \\
&= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi x) = -\frac{7}{6} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi x)
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x & ,x < 1 \\ \frac{7}{6} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi x) & ,x \geq 1 \end{cases}$$

[1.0] (b) Calcule $\int_{-\infty}^{-1} \frac{f(x)}{x^4}dx$.

Resolução: Trata-se de um integraçl impróprio de 1^a espécie. Assim,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{f(x)}{x^4}dx &= \lim_{\beta\to-\infty}\int\limits_\beta^{-1} \frac{x^2-1}{x^4}dx = \lim_{\beta\to-\infty}\int\limits_\beta^{-1}\left(\frac{x^2}{x^4} - \frac{1}{x^4}\right)dx = \lim_{\beta\to-\infty}\int\limits_\beta^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)dx = \\
&= \lim_{\beta\to-\infty}\int\limits_\beta^{-1}\left(x^{-2} - x^{-4}\right)dx = \lim_{\beta\to-\infty}\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \frac{x^{-4+1}}{-4+1}\right]_\beta^{-1} = \\
&= \lim_{\beta\to-\infty}\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3}\right]_\beta^{-1} = \lim_{\beta\to-\infty}\left[\left(-\frac{1}{-1} + \frac{1}{3(-1)^3}\right) - \left(-\frac{1}{\beta} + \frac{1}{3\beta^3}\right)\right] = \\
&= 1 - \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

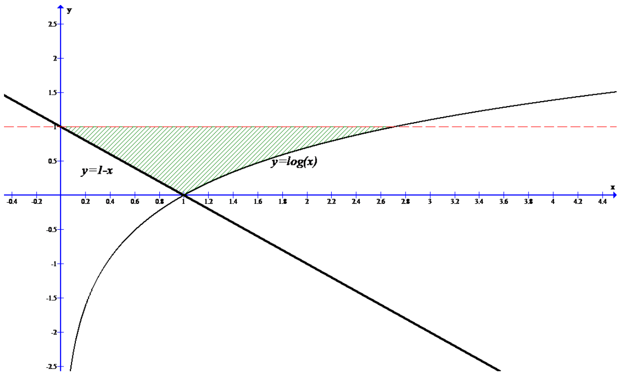
[1.5] 7. Considere a região do plano limitada pelas curvas

$$y = \ln x,\ y = 1 - x,\ y = 1.$$

Faça o esboço da região e calcule o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno do eixo dos yy.

Resolução:

- Esboço da região:



- Cálculo do volume:

$$V = \pi \int_0^1 \left[(e^y)^2 - (1-y)^2 \right] dy = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2y} + \frac{(1-y)^3}{3} \right]_0^1 =$$
$$= \pi \left(\frac{1}{2} e^2 + 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{5}{6} \right)$$

Fim do exame