Exemplo

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

As linhas têm norma-1 *dada por* $S_1 = |1| + |-2| + |5| = 8$, $S_2 = |-2| + |-1| + 8 = 11$, *portanto* $\|A\|_\infty = \max(8, 11) = 11$

As colunas têm norma-1 *dada por* $S_1 = |1| + |-2| = 3$, $S_2 = |-2| + |-1| = 3$, $S_3 = |5| + |8| = 13$, *portanto* $\|A\|_1 = 13$

Nota 2.24. O produto de matrizes pode estar mal condicionado. Pensemos no seguinte exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 & -9 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 604 \\ 121 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad x^* = \begin{bmatrix} 605 \\ 120 \\ 25 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x - x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

As matrizes x^*, x escolhidas são bastante similares. O erro relativo de x^* comparado com x é simples de calcular se usamos a norma-∞:

$$\delta(x^*, x) = \frac{\|x^* - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{604}$$

No entanto o produto $A \cdot x$ resulta ser muito diferente de $A \cdot x^*$:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A \cdot x^* = \begin{bmatrix} 24 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad A \cdot x^* - A \cdot x = \begin{bmatrix} 23 \\ 6 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Sendo x^* muito similar a x, os produtos com A resultam muito diferentes um do outro. Medido o erro relativo com a norma-∞ temos:

$$\delta(A \cdot x^*, A \cdot x) = \frac{\|A \cdot x^* - A \cdot x\|_\infty}{\|A \cdot x\|_\infty} = \frac{23}{1}$$

Apesar de que x^* tem um erro relativo pequeno com respeito de x (erro relativo $1/604$), a matriz $A \cdot x^*$ tem um erro relativo grande com respeito de $A \cdot x$ (erro relativo 23), o erro relativo do dado de entrada fica multiplicado com 23×604, quase catorze mil vezes o erro relativo original.

As matrizes que têm esta caraterística, puderem ampliar de maneira forte o erro relativo dos dados de entrada, são chamada **matrizes mal condicionadas**. Nestas matrizes muitos cálculos arredondados podem introduzir grandes erros devidos aos arredondamentos de ponto flutuante. Aprenderemos mais sobre estas matrizes nas próximas secções.

Este não é um problema que nos deva preocupar se trabalhamos com valores exatos.

2.2 Resolução de Sistemas de Equações lineares: Métodos diretos

Dar uma equação exige indicar uma aplicação $f\colon X \to Y$ e um ponto $b \in Y$ do conjunto de destino. A equação determinada por esta aplicação f e ponto b é o problema de determinar os elementos $x \in X$ no conjunto inicial cuja imagem por f é o elemento b fixado.

Assim falaremos da equação $f(x) = b$, onde b é o que chamamos **termo independente da equação** e f é o que chamamos **função que define a equação**, função que se aplica em elementos do conjunto X, representados através duma **variável**, normalmente denotada x e chamada **variável incógnita** da equação.

Uma solução da equação $f(x) = b$ é qualquer ponto $x \in X$ cuja imagem por f seja o elemento $b \in Y$

No caso específico $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos uma função real de variável real, e a escolha dum termo independente $b \in \mathbb{R}$ determina o que chamamos uma **equação escalar numa variável real**.

Se o conjunto imagem Y for $\mathbb{R}^m$, o termo independente tem m componentes $b = (b_1, \ldots, b_m)$, e cada valor $f(x) \in \mathbb{R}^m$ tem m componentes $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$. Resolver a equação $f(x) = b$ é o mesmo que encontrar se existem soluções ao mesmo tempo de todas as equações escalares $f_1(x) = b_1$, $f_2(x) = b_2$, $\ldots$ $f_m(x) = b_m$. Uma equação onde o conjunto de chegada é $\mathbb{R}^m$ é por isto chamada um **sistema de m equações** na incógnita $x \in X$. Resolver sistemas de equações numa variável real x fica assim reduzido a determinar as soluções de cada uma destas m equações, por separado, e encontrar que pontos $x \in \mathbb{R}$ são solução comum a todas elas.

Uma dificuldade maior surge quando não temos uma simples variável real, quando $X \neq \mathbb{R}$. Se a função f está definida em $\mathbb{R}^n$, a equação $f(x) = b$ diremos que é uma **equação com incógnita vetorial**.

Determinar uma solução $x = (x_1, \ldots, x_n)$ exige determinar todas as n componentes, portanto podemos pensar em n incógnitas reais representadas pelas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e escrever a equação na forma:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = b$$

uma equação com incógnita vetorial é também chamada equação em n variáveis independentes

Entre as funções mais simples que podemos imaginar em $\mathbb{R}^n$ estão as **funções lineares**, as funções que se podem escrever como $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n$ para uma determinada sequência de constantes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Neste caso o vetor $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é chamado **vetor de coeficientes associado à função linear f**. As funções lineares podem ser representadas então com ajuda do produto escalar de vetores:

Definição 2.25. *Para qualquer vetor $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, chamamos **função linear com vetor a de coeficientes** a função definida em $\mathbb{R}^n$ por:*

$$f(x) = a \cdot x$$

onde $\cdot$ representa o produto escalar de vetores, portanto:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n$$

*Chamamos **equação linear em n incógnitas** qualquer equação determinada por uma função linear em $\mathbb{R}^n$*

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$$

Definição 2.26. *Chamamos **sistema de m equações lineares** em n incógnitas qualquer equação $f(x) = b$ definida por uma função $f: X \to Y$ e um termo independente b, onde $X = \mathbb{R}^n$ $b \in Y = \mathbb{R}^m$ e onde todas as componentes $f_1, \ldots, f_m$ associadas a f sejam funções lineares em $\mathbb{R}^n$*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots &= \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

Podemos já observar que um sistema de equações lineares pode ser escrito como uma equação matricial, uma igualdade $A \cdot x = b$ onde A, b são matrizes conhecidas e x é uma matriz coluna incógnita.

Definição 2.27. *Consideremos um sistema de equações lineares em n incógnitas:*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots &= \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

As seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$$

são chamadas, respetivamente, ***matriz de coeficientes, matriz (ou vetor) de incógnitas, e matriz (ou vetor) dos termos independentes*** *associadas ao sistema.*

*Podemos observar que a igualdade de matrizes (**equação matricial**) $A \cdot x = b$ é satisfeita se e só se $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução do sistema de equações lineares.*

*A equação $A \cdot x = b$ é chamada a **forma matricial** do sistema de equações lineares.*

Nota 2.28. Num sistema de equações lineares $A\cdot x = b$, se alguma linha da matriz de coeficientes for nula, esta linha determina uma equação linear:

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b_i$$

Resulta imediato que, se o termo independente for não nulo, esta equação não tem nenhuma solução (diremos que o sistema é **impossível**). Pelo contrário se o termo independente for nulo, qualquer ponto $(x_1, \ldots, x_n)$ é solução da equação, e podemos retirar esta linha do sistema sem que o conjunto de soluções se altere.

Portanto, assumimos que na matriz de coeficientes não existe nenhuma linha nula. Se existir, estaríamos numa de duas situações:

- o sistema seria impossível, sem soluções (caso que o termo independente fosse não nulo)
- ou eliminar a equação não alteraria o conjunto de soluções (caso que o termo independente fosse nulo)

Exemplos de sistemas simples são os **sistemas triangulares superiores**, sistemas de n equações com n incógnitas onde a matriz de coeficientes é **triangular superior com diagonal não nula**:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots &= \cdots \\ a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a_{ii} \neq 0,\ \forall i \\ a_{ij} = 0,\ \forall i > j \end{pmatrix}$$

Os coeficientes a_{ij} são zero sempre que $i > j$ e não nulos quando $i = j$.

Estes sistemas têm uma única solução que pode ser determinada se resolvemos de baixo para cima, ou seja: $x_n = b_n/a_{nn}$, $x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1n}x_n)/a_{n-1n-1}$, ..., $x_1 = (b_1 - \sum_{j\geq 2} a_{1j}x_j)/a_{11}$. Este método de resolução é conhecido por **método de substituição inversa**:

$$x_k = \left(b_k - \sum_{j\geq k+1} a_{kj}x_j \right) \Big/ a_{kk}, \qquad k = n, n-1, \ldots, 1$$

Exemplo

Podemos resolver o sistema seguinte pelo método de substituição inversa:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 8 \\ -2y + z &= 4 \\ 4z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

A última equação indica $z = 1/4$

Ao substituirmos este valor, a penúltima equação diz $-2y + (1/4) = 4$, *portanto* $-2y = 15/4$ *e temos* $y = -15/8$

Finalmente ao substituirmos estes valores na primeira equação temos $2x + (45/8) + (4/4) = 8$, *logo* $2x = (64 - 45 - 8)/8 = 11/8$ *e obtemos* $x = 11/16$

A única solução do sistema é $(x, y, z) = (11/16, -15/8, 1/4)$

Às vezes ser triangular superior ou não só depende da ordem em que são escritas as equações e as incógnitas. Para evitar este problema e podermos considerar as equações reordenadas (na ordem $i_1, i_2, \ldots, i_k$) e as incógnitas reordenadas (na ordem $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}$) definimos:

Definição 2.29. *Diremos que um sistema de* m *equações com* n *incógnitas* ***tem forma triangular geral*** *para o conjunto ordenado equações* $i_1, \ldots, i_k$ *e de variáveis* $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}$ *se satisfaz:*

$$\begin{aligned} a_{i_1 j_1} &\neq 0, & a_{i j_1} &= 0\, \forall i \neq i_1 \\ a_{i_2 j_2} &\neq 0, & a_{i j_2} &= 0\, \forall i \neq i_1, i_2 \\ &\ldots & &\ldots \\ a_{i_k j_k} &\neq 0, & a_{i j_k} &= 0\, \forall i \neq i_1, \ldots, i_k \\ & & a_{ij} &= 0\, \forall i \neq i_1, \ldots, i_k \end{aligned}$$

os valores $a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \ldots, a_{i_k j_k}$ *indicados são chamados* ***pivôs*** *do sistema*

Nota 2.30. Num sistema com forma triangular geral, os pivôs não podem partilhar a mesma linha, nem podem partilhar a mesma coluna.

Exemplo

Qualquer sistema que tenha matriz de coeficientes A *indicadas a seguir, tem forma triangular geral (com os pivôs indicados).*

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{5} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

No entanto, se a matriz de coeficientes for alguma das seguintes, não tem forma triangular geral

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Normalmente, falar em forma triangular geral sem indicar o lugar dos pivôs, deixa implicitamente fixado que os pivôs são a primeira entrada não nula em cada linha.

Existem matrizes com forma triangular geral, com os pivôs ordenados em forma arbitrária, assim quando temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 6 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{4} & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

podemos afirmar que tem forma triangular geral, para o conjunto ordenado de equações $(2, 1, 3)$ *e variáveis* x_4, x_1, x_2, *indicando que os pivôs aparecem na ordem* $(i_1, j_1) = (2, 4)$, $(i_2, j_2) = (1, 1)$, $(i_3, j_3) = (3, 2)$. *A matriz, depois de reordenar linhas e colunas, seria:*

$$\begin{bmatrix} a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 3 \end{bmatrix}$$

onde a forma triangular das linhas e colunas com pivô resulta já evidente.

Exemplo

*Se um sistema de equações lineares $A \cdot x = b$ tem matriz de coeficientes **triangular inferior com diagonal não nula**, então é um sistema com forma triangular geral, para o conjunto ordenado de equações $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$ e o conjunto de incógnitas $(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1)$.*

Num sistema com forma triangular geral, se temos alguma equação sem pivô ($i \neq i_1, \ldots, i_k$) mas com termo independente diferente de zero ($b_i \neq 0$), as soluções da equação i iriam satisfazer $0x_1 + \ldots + 0x_n = b_i \neq 0$, condição impossível. Diremos que **o sistema é impossível**, e não tem soluções.

Caso contrário, podemos retirar as equações sem pivô $0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$ e resolver só o sistema de k equações $i_1, \ldots, i_k$. Admitiremos assim que há pivô em cada linha (caso $k = m$) Nestes sistemas, se damos valores arbitrários a cada x_j com $j \neq j_1, \ldots, j_m$, passamos estas expressões ao membro direito da igualdade, e escrevemos as equações na ordem $i_1, \ldots, i_m$ e as incógnitas na ordem $j_1, \ldots, j_m$, temos um sistema triangular superior.

Estes sistemas podem ser resolvidos pelo método de substituição inversa, depois de reordenar as equações. Portanto a solução implica admitir os valores x_j ($j \neq j_1, \ldots, j_m$) como arbitrários e começar por resolver a equação i_m em ordem à variável x_{j_m}, e seguir em ordem inverso, com a equação i_{k-1}, até chegar à resolução da equação i_1 em ordem à variável x_{j_1}, aplicando em cada passo a substituição dos valores encontrados, antes de resolver a equação seguinte. Estes sistemas vão ter solução única só se não existem incógnitas x_j que tomem valores arbitrários, isto é, só se há pivôs em todas as colunas.

Para sistemas com forma triangular geral temos:

- Se há uma linha sem pivô mas com termo independente diferente de zero, o sistema é impossível.
- Caso contrário, é possível, e pode ser resolvido com o algoritmo de substituição inversa aplicado nas equações $i_1, \ldots, i_m$, e nas variáveis $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$
- Quando todas as variáveis são associadas a um pivô, a solução é única (**sistema possível determinado**). Caso contrário, há infinitas soluções (**sistema possível indeterminado**)

Nota 2.31. Quando não se indica a sucessão de linhas e colunas e dizemos que um sistema tem forma triangular geral, entendemos que é forma triangular geral com as linhas ordenadas $1, 2, \ldots, k$, e as colunas $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ por ordem crescente, estando cada pivô da linha i portanto na primeira entrada não nula $a_{ij_i} \neq 0$ da linha i. Por exemplo qualquer sistema que use a matriz de coeficientes seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

será um sistema com forma triangular geral (nas linhas $(1, 2, 3)$ e nas colunas $(1, 3, 4)$)

Exemplo

O sistema de equações lineares com 5 incógnitas seguinte tem forma triangular geral se consideramos o conjunto ordenado de variáveis (x_3, x_2, x_4, x_1) e a lista ordenada de equações $(4, 2, 3, 1)$:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_5 &= 6 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_4 - x_5 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_3 - 2x_2 + 5x_4 + 3x_1 &= 1 + x_5 \\ x_2 + 6x_4 + 4x_1 &= 2 - 3x_5 \\ 2x_4 + 3x_1 &= 5 + x_5 \\ 3x_1 &= 6 - x_5 \end{aligned}\right\}$$

Se agora admitimos x_5 valor real arbitrário, resolvemos primeiro a última equação em ordem a x_1, e continuamos em sentido inverso, com as correspondentes substituições:

$$x_1 = 2 - x_5/3$$

$$2x_4 = 5 + x_5 - 3(2 - x_5/3) = -1 + 2x_5 \Rightarrow x_4 = -1/2 + x_5$$

$$x_2 = 2 - 3x_5 - 6(-1/2 + x_5) - 4(2 - x_5/3) = -3 - 23x_5/3$$

$$x_3 = 1 + x_5 + 2(-3 - 23/3x_5) - 5(-1/2 + x_5) - 3(2 - x_5/3) = -1/2 - 55x_5/3$$

Soluções são portanto $(2-a/3, -3-23a/3, -1/2-55a/3, -1/2+a, a)$ com $a \in \mathbb{R}$ arbitrário.

O método de substituição inversa pode ser aplicado em sistemas de equações lineares (onde a incógnita é uma matriz coluna), mas também em equações matriciais lineares $A \cdot X = B$ (onde a incógnita é uma matriz). Para isto basta com considerar incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ que não são números reais, senão linhas. Se A tem forma triangular geral, para um lista de equações $(i_1, \ldots, i_k)$ e uma lista de incógnitas $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$, pode ser resolvido por substituição inversa.

Nota 2.32. O algoritmo de substituição inversa usado para resolver sistemas de equações lineares $A \cdot x = b$ (onde x, b são vetores coluna), funciona exatamente igual para resolver equações matriciais lineares $A \cdot X = B$. Para isto basta pensar que X é uma coluna formada por blocos $x_1, \ldots, x_n$ (cada uma destas incógnitas x_i na realidade seria um vetor linha), e que B é outra coluna formada por blocos $b_1, \ldots, b_m$ (cada um destes termos independentes na realidade seria um vetor linha).

Exemplo

Usemos o método de substituição inversa para resolver a equação $A \cdot X = \mathrm{Id}$, isto é, para encontrar a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pensemos a matriz incógnita como $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ onde x_1, x_2, x_3 não são três escalares senão três linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos a última equação

$$5x_3 = [0\ 0\ 1] \Rightarrow x_3 = [0\ 0\ 1/5]$$

Consideramos a penúltima equação, onde substituímos x_3 e temos

$$2x_2 + 4 \cdot [0\ 0\ 1/5] = [0\ 1\ 0] \Rightarrow x_2 = (1/2) \cdot [0\ 1\ {-4/5}] = [0\ 1/2\ {-2/5}]$$

Finalmente consideramos a primeira equação, onde substituímos x_2, x_3 e temos:

$$x_1 + 5 \cdot [0\ 1/2\ {-2/5}] + 3 \cdot [0\ 0\ 1/5] = [1\ 0\ 0] \Rightarrow x_1 = [1\ {-5/2}\ 7/5]$$

Portanto $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5/2 & 7/5 \\ 0 & 1/2 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$.

Portanto, se A é uma matriz triangular superior podemos usar o método de substituição inversa para resolver o sistema $A \cdot X = \mathrm{Id}$ e se A é triangular inferior podemos usar o método de substituição direta para resolver o sistema $A \cdot X = \mathrm{Id}$. A solução será a matriz A^{-1}, que é fácil de calcular se A é triangular superior ou se A é triangular inferior.

No geral, no entanto, os sistemas não costumam ter forma triangular geral, e a resolução exige mais ferramentas.

Redução Gaussiana

Chamamos métodos diretos de resolução aqueles métodos numéricos que permitem transformar um sistema de equações noutro sistema simples, com as mesmas soluções, e que pode ser resolvido em forma simples, obtendo os valores de uma variável após outra. A base destes métodos é a aplicação do método de substituição inversa. Este método pode ser usado também para resolver equações lineares matriciais $A \cdot X = B$ onde A tem forma triangular geral, para alguma escolha de linhas e colunas.

Definição 2.33. *Chamamos equação matricial linear dada por uma* **matriz ampliada** $M \in M_{m\times(n+k)}$ *e uma variável incógnita* $X \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ *a equação matricial linear* $A \cdot X = B$ *que tem* X *como incógnita, as primeiras* n *colunas de* M *como matriz de coeficientes* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, *e as últimas* k *colunas de* M *como matriz de termos independentes* $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$

Lembramos que os sistemas de m equações lineares com n incógnitas podem ser escritos em forma matricial como $A \cdot x = b$, e que portanto vão ter uma **matriz ampliada**, a matriz $M = [A\, b] \in M_{m(n+1)}(\mathbb{R})$. Na matriz ampliada podemos distinguir o bloco dos coeficientes, e o bloco dos termos independentes. Muitas vezes a matriz escreve-se com um traço vertical para separar estes blocos.

Se uma equação matricial linear $A \cdot X = B$ tem matriz ampliada $M = [A\, B]$ **com forma triangular geral, correspondendo todos os pivôs a colunas do bloco** A, esta equação pode ser resolvida pelo **método de substituição inversa**, se indicamos que na solução X as linhas x_j com $j \neq j_1, \ldots, j_k$ são arbitrárias, e que as restantes linhas, a começar por x_{j_k}, são obtidas ao resolver as equações, a começar pela situada na linha i_k, e terminando por resolver em ordem a x_{j_1}, na equação situada na linha i_1.

Um problema é que nem todas as equações matriciais $A \cdot X = B$ têm matriz ampliada $M = [A\, B]$ com forma triangular geral e pivôs nas colunas do bloco A. Será possível dar equações equivalentes (equações com as mesmas soluções) onde a matriz ampliada tenha a forma indicada?

Proposição 2.34. *Consideremos a matriz ampliada* $M = [A\, B]$ *duma equação matricial linear* $A \cdot X = B$. *Para qualquer matriz invertível* C *o sistema definido pela nova matriz ampliada* $\overline{M} = C \cdot M = C \cdot [A\, B] = [(CA)\ (CB)]$ *determina uma equação matricial linear com as mesmas soluções do que* M

Demonstração. Se X é solução da equação matricial linear definida por M, temos $A \cdot X = B$ e portanto $C \cdot (A \cdot X) = C \cdot B$. Deduzimos que $(CA) \cdot X = (CB)$, a matriz é solução da equação matricial linear definida por $\overline{M}$

Reciprocamente, se X é solução da equação matricial linear definida por $\overline{M}$, então $(CA) \cdot X = (CB)$ e ao multiplicar com C^{-1} deduzimos $C^{-1} \cdot C \cdot A \cdot X = C^{-1} \cdot C \cdot B$. Tendo em conta que $C^{-1} \cdot C = \mathrm{Id}$ e que esta matriz é a unidade, temos $A \cdot X = B$. A matriz X seria solução da equação matricial linear definida por M. □

Definição 2.35. *Diremos que duas matrizes* M, $\overline{M}$ **são equivalentes** *se existe uma matriz invertível* C *para a qual* $\overline{M} = C \cdot M$. *Escrevemos* $\overline{M} \sim M$ *(não confundir o significado deste símbolo, não estamos a afirmar que sejam iguais nem aproximadamente iguais)*

As matrizes equivalentes definem equações matriciais com as mesmas soluções. Há uma maneira "básica" para encontrar matrizes equivalentes a uma dada, a aplicação duma "transformação elementar":

Definição 2.36. *Dados dois inteiros* $1 \leq i \neq j \leq n$, *chamamos* **matriz elementar** E^{ij}_{λ} *a matriz:*

$$E_\lambda^{ij} = \begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & & \underline{j} & & \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ | \, i \\ | \, j \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

Isto é, à matriz que tem entradas todas 1 na diagonal principal, e todas 0 fora da diagonal principal, com a exceção da posição (i, j), onde a entrada é λ.

Temos três propriedades relevantes:

- Para qualquer matriz M o produto $E_\lambda^{ij} \cdot M$ é uma nova matriz com as mesmas linhas que M, salvo a linha i que é soma da linha i de M com λ vezes a linha j de M.
- A matriz E_λ^{ij} é invertível, com inversa $E_{-\lambda}^{ij}$
- Se $i > j$, a matriz E_λ^{ij} é triangular inferior, com entradas 1 na diagonal.

Definição 2.37. *Chamamos* ***transformação elementar básica*** *nas linhas duma matriz M a transformação duma linha em M por ela somada com um múltiplo duma linha* ***anterior*** *de M. Quando uma matriz $\overline{M}$ é obtida a partir de M pela aplicação duma ou várias transformações elementares, temos certeza que $\overline{M}$ é* ***equivalente*** *a M e escrevemos $\overline{M} \sim M$*

Propriedades importantes da definição dada são:

- Se $\overline{M}$ é obtido a partir de M através de sucessivas transformações elementares básicas, então $\overline{M} = L \cdot M$ para uma matriz L triangular inferior ("lower triangular") com entradas 1 na diagonal.
- O conceito de "linha anterior" pode ser alterado se consideramos uma ordem $(i_1, \ldots, i_m)$ diferente da natural para indicar quando uma linha é anterior e quando é posterior. Neste caso, a matriz L indicada é triangular para uma reordenação das linhas na ordem $(i_1, \ldots, i_m)$.
- Se $\overline{M}$ é obtido a partir de M através de sucessivas transformações elementares básicas, então a equação matricial linear (numa incógnita matricial X) definida por M tem as mesmas soluções que a equação matricial linear definida por $\overline{M}$.

A ideia fundamental no algoritmo de redução Gaussiana é usar transformações elementares básicas para reduzir uma equação matricial $A \cdot X = B$ a outra equivalente $\overline{A} \cdot X = \overline{B}$ cuja matriz ampliada tenha forma triangular geral.

Consideremos a matriz $M = [A\,B] \in M_{m(n+k)}(\mathbb{R})$ e a incógnita $X \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$. Se nas linhas $I = (i_1, \ldots, i_s)$ a matriz M tem forma triangular geral (para uma lista ordenada de colunas $J = (j_1, \ldots, j_s)$) então o seguinte algoritmo determina uma nova linha e coluna i_{s+1}, j_{s+1} e uma matriz $\overline{M}$ equivalente a M, sendo que nas linhas $\overline{I} = (i_1, \ldots, i_{s+1})$ a matriz tem forma triangular geral para a lista ordenada de linhas $(i_1, \ldots, i_s, i_{s+1})$ e colunas $(j_1, \ldots, j_s, j_{s+1})$

Algoritmo de redução Gaussiana: Partimos de $M = [A\,B]$ matriz que, restringida às $(i_1, \ldots, i_s)$, tem forma triangular geral com pivôs nas linhas $(i_1, \ldots, i_s)$, e colunas $(j_1, \ldots, j_s)$ do bloco A.

1. **Identificar linhas e colunas com pivô**.
2. **Escolher novo pivô**: Numa linha e coluna sem pivô do bloco A, identificar uma entrada não nula (digamos na linha i_{s+1}, coluna j_{s+1}). Marcar esta entrada como novo pivô.
3. **Eliminar entradas**: Transformar cada linha $i \neq i_1, \ldots, i_s, i_{s+1}$ de M nela própria somada com um múltiplo da linha i_{s+1} onde está o pivô. O múltiplo é $-a_{ij_{s+1}}/a_{i_{s+1}j_{s+1}}$, escolhido de maneira que a entrada (i, j_{s+1}) se transforme em 0 (eliminação Gaussiana)
4. Nas linhas $\overline{I} = (i_1, \ldots, i_{s+1})$ a matriz $\overline{M}$ resultante irá ter forma triangular geral para a lista ordenada de linhas $(i_1, \ldots, i_{s+1})$, e colunas $(j_1, \ldots, j_{s+1})$

A escolha de novo pivô em (2.) é feita sempre nas colunas associadas ao bloco A. Se não houver escolhas possíveis, é porque as linhas $i \neq i_1, \ldots, i_s$ de A são linhas nulas.

Nota 2.38. Existem vários critérios para escolher o novo pivô. As seguintes são as opções mais frequentes para **pesquisa de novo pivô**:

- O de menor custo computacional escolhe a primeira linha e primeira coluna de A sem pivô (**escolha de pivô imediata**).
  Nem sempre é possível esta escolha, porque podemos estar a escolher uma entrada nula. Nestes casos tentaríamos fazer a escolha por outro critério.
- O seguinte de menor custo computacional é a escolha da primeira coluna de A sem pivô, e nesta coluna a entrada maior em valor absoluto. Esta é chamada **escolha parcial de pivô**.
  Nem sempre é possível esta escolha, porque podemos ter entradas todas nulas na coluna indicada, em linhas sem pivô. Se for este o caso devemos fazer a escolha pelo critério total.
- O critério de maior custo computacional é a escolha da maior entrada (em valor absoluto) situado em linhas e colunas de A sem pivô. Esta é chamada **escolha total de pivô**.
- Como no passo de eliminar entradas temos que dividir entre o pivô, quando trabalhamos com matrizes inteiras os cálculos se simplificam se optamos pela **escolha de pivô inteiro invertível** (portanto uma entrada ± 1)

Consideremos a forma matricial $A \cdot x = b$ dum sistema de equações lineares. Aplicar o algoritmo de redução Gaussiana na matriz ampliada $M = [A|b]$ passo após passo levará a uma escolha de linhas e colunas $i_1, \ldots, i_k$, $j_1, \ldots, j_k$ do bloco A, e uma matriz $\overline{M}$ equivalente a M. O correspondente sistema de equações lineares será triangular com respeito duma ordenação apropriada das equações e das incógnitas, podendo então ser resolvido o sistema por substituição inversa.

Nota 2.39. As transformações elementares usadas (somar múltiplos de outra linha para obter zeros) podem estar mal condicionadas, nomeadamente estamos a fazer somas de elementos que são opostos um do outro. Isto irá dar exatamente zero no pivô, mas poderá dar valores próximos de zero também em outras entradas. Os valores obtidos podem então conter erros relativos maiores do que os originais, sendo que estes erros vão se propagar.

Para fugir a propagação de erros relativos, a análise de erro provou que os melhores pivôs que podemos escolher são aqueles com maior valor absoluto. Por isto as escolhas de pivô mais "preguiçosas" podem ter custos devido aos erros de arredondamento que não conseguiremos controlar. Num sistema de cálculo numérico convém usar escolhas de pivô mais específicas, como a parcial ou a total.

Exemplo

Vamos resolver o seguinte sistema através do método de eliminação de Gauss:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+t&=4\\ 2x+4y+z+3t&=7\\ x+2y-z+2t&=3\\ 2x+y-3t&=7 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&4&1&3\\1&2&-1&2\\2&1&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\7\\3\\7\end{bmatrix}$$

A matriz $M=[A|B]$ *neste caso é* $\begin{bmatrix}1&2&0&1&4\\2&4&1&3&7\\1&2&-1&2&3\\2&1&0&-3&7\end{bmatrix}$. *Aplicamos o método de Gauss. Obtemos então:*

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&0&1&4\\2&4&1&3&7\\1&2&-1&2&3\\2&1&0&-3&7\end{bmatrix} \quad \cdot(-2)\quad \cdot(-1)\quad \cdot(-2) \quad \sim \begin{bmatrix}\boxed{1}&2&0&1&4\\0&0&1&1&-1\\0&0&-1&1&-1\\0&-3&0&-5&-1\end{bmatrix}$$

agora, para executar o segundo passo, não temos $\bar{a}_{22}\neq 0$. *Não podemos optar pela escolha imediata do segundo pivô. Podemos usar a escolha parcial, que usa a segunda coluna e a primeira entrada não nula nesta coluna, em linha sem pivô:*

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&0&1&4\\0&0&1&1&-1\\0&0&-1&1&-1\\0&\boxed{-3}&0&-5&-1\end{bmatrix}$$

As transformações elementares básicas com este pivô implicam somar na segunda e terceira linha zero vezes a linha do pivô (portanto neste caso não é necessário somar nada). Escolhemos o seguinte pivô, primeira entrada não nula na seguinte linha e coluna sem pivôs

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&0&1&4\\0&0&\boxed{1}&1&-1\\0&0&-1&1&-1\\0&\boxed{-3}&0&-5&-1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}\boxed{1}&2&0&1&4\\0&0&\boxed{1}&1&-1\\0&0&0&\boxed{2}&-2\\0&\boxed{-3}&0&-5&-1\end{bmatrix}$$

O sistema original é então equivalente ao sistema com forma triangular geral (com respeito das escolhas apropriadas de linhas e colunas):

$$\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&2\\0&-3&0&-5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\-2\\-1\end{bmatrix}$$

que é resolvido por substituição inversa: $t=-2/2=-1$, *então* $z+t=-1\Rightarrow z=-1-t=0$, *depois* $-3y-5t=-1\Rightarrow y=(-1+5t)/(-3)=2$, *e finalmente* $x+2y+t=4\Rightarrow x=4-2y-t=1$.

A solução é única $(x,y,z,t)=(1,2,0,-1)$

Exemplo

Pensemos no sistema de equações

$$3\sqrt{5}x+\sqrt{3}y+z=5$$
$$5\sqrt{3}x+\sqrt{5}y+z=5$$
$$\sqrt{5}x+\sqrt{3}y+3z=5$$

que sabemos que tem como solução $x=\sqrt{5}\simeq 2.236$, $y=-5\sqrt{3}\simeq -8.66$, $z=5$.

Se tratamos de resolver o sistema sem escolher pivôs na forma apropriada (pensemos numa máquina com 4 algarismos decimais de precisão):

$$\left.\begin{aligned} 6.708x + 1.732y + z = 5 \\ 8.66x + 2.236y + z = 5 \\ 2.236x + 1.732y + 3z = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6.708 & 1.732 & 1 \\ 8.66 & 2.236 & 1 \\ 2.236 & 1.732 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A matriz $M = [A|B]$ associada a este sistema é:

$$\begin{bmatrix} 6.708 & 1.732 & 1 & 5 \\ 8.66 & 2.236 & 1 & 5 \\ 2.236 & 1.732 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Se fizéssemos eliminação Gaussiana sem boas escolha do pivô (tomamos primeiro a posição $(1,1)$ e logo a $(2,2)$), teríamos:

$$\begin{bmatrix} 6.708 & 1.732 & 1 & 5 \\ 8.66 & 2.236 & 1 & 5 \\ 2.236 & 1.732 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-8.66/6.708) \\ + \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 6.708 & 1.732 & 1 & 5 \\ 0 & -4.77\cdot 10^{-6} & -0.291 & -1.455 \\ 0 & 1.155 & 2.667 & 3.333 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(1.155/4.77)10^{6} \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 6.708 & 1.732 & 1 & 5 \\ 0 & -4.77\cdot 10^{-6} & -0.291 & -1.455 \\ 0 & 0 & -7.046\cdot 10^{4} & -3.523\cdot 10^{5} \end{bmatrix}$$

Se resolvemos por substituição, temos primeiro $z = \frac{-3.523\cdot 10^{5}}{-7.046\cdot 10^{4}} = 5.$, a seguir podemos pôr $y = (-1.455+0.291\cdot 5.)/(-4.77\cdot 10^{-6}) = 4.655\cdot 10^{-11}$, e finalmente $x = (5-1\cdot z-1.732\cdot y)/6.708 = -1.202\cdot 10^{-11}$. A solução contém erros devido aos arredondamentos feitos (arredondamentos que numa máquina com 17 algarismos de precisão levam a erros menores, mas ainda excessivos). Os valores de x e y assim obtidos são duma ordem de grandeza que nada tem a ver com a da autêntica solução ($4.655\cdot 10^{-11} \neq -8.66$, $-1.202\cdot 10^{-11} \neq 2.236$).

Segundo o método de escolha total do pivô, devíamos ter escolhido como pivô o valor 8.66. Se fazemos eliminação com este pivô, devemos substituir a primeira linha por ela menos $6.708/8.66$ vezes a segunda e a terceira linha por ela menos $2.236/8.66$ vezes a segunda:

$$\begin{bmatrix} 6.708 & 1.732 & 1 & 5 \\ \boxed{8.66} & 2.236 & 1 & 5 \\ 2.236 & 1.732 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-6.708/8.66) \quad \cdot(-2.236/8.66) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 3.695\cdot 10^{-6} & 0.225 & 1.127 \\ \boxed{8.66} & 2.236 & 1 & 5 \\ 0 & 1.155 & 2.742 & 3.71 \end{bmatrix}$$

Excluída já a segunda linha, o seguinte pivô deve ser o maior entre os coeficientes restantes (não se devem considerar os termos independentes, que estão na última coluna): $3.695\cdot 10^{-6}$, 0.225, 1.155, 2.742. O maior deles é 2.742 da terceira linha, que utilizamos como pivô. Agora já só temos que substituir a linha restante por ela menos $0.225/2.742$ vezes a terceira:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3.695\cdot 10^{-6} & 0.225 & 1.127 \\ \boxed{8.66} & 2.236 & 1 & 5 \\ 0 & 1.155 & \boxed{2.742} & 3.71 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \cdot(-0.225/2.742) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -0.0948 & 0 & 0.823 \\ 8.66 & 2.236 & 1 & 5 \\ 0 & 1.155 & 2.742 & 3.71 \end{bmatrix}$$

a matriz e escolha de pivôs resultante é $\begin{bmatrix} 0 & \boxed{-0.0948} & 0 & 0.823 \\ \boxed{8.66} & 2.236 & 1 & 5 \\ 0 & 1.155 & \boxed{2.742} & 3.71 \end{bmatrix}$*, e o sistema original é equivalente a:*

$$\left.\begin{aligned} -9.48\cdot 10^{-2}y = 0.823 \\ 8.66x + 2.236y + z = 5 \\ 1.155y + 2.742z = 3.71 \end{aligned}\right\}$$

Neste caso, obtemos $y = 0.823/(-0.0948) = -8.681$, *substituindo na seguinte equação:* $z = (3.71 - 1.155 \cdot (-8.681))/2.742$, *obtemos* $z = 5.01$ *e finalmente substituindo na seguinte temos* $x = 2.24$. *As respostas obtidas estão muito mais perto da autêntica solução, e com uma máquina com 17 algarismos de precisão, chegaríamos a uma resposta com um erro aceitável.*

Estivemos a simular uma máquina com 4 algarismos decimais. De facto, com cálculos feitos com 17 algarismos decimais de precisão, obtemos as seguintes respostas:

Solução exata:	(2.236067977499790	−8.660254037844386	5.)
Escolha arbitrária de pivô:	(2.2862997682665003	−8.854800926934017	4.999999999999972)
Com escolha total de pivô:	(2.236067977499782	−8.660254037844348	4.999999999999984)

Podemos pensar que é um erro aceitável, mas tendo em conta que o sistema poderia ter sido de maior tamanho e que este erro para três variáveis poderia propagar-se ao resolver em ordem a novas variáveis, temos motivos para programar o algoritmo com escolha de pivô não imediata, senão mais elaborada.

2.2.1 Decomposição LU de Doolittle e U^tU de Cholesky

O algoritmo de redução Gaussiana com escolha de pivô imediata, quando for possível, permite resolver muitas questões:

- Aplicado com **escolha de pivô imediata (se for possível)** numa matriz $[A\,\mathrm{Id}]$ produz $[U\,\bar{L}]$ onde U tem forma triangular geral e $\bar{L}$ é uma matriz triangular inferior com entradas 1 na diagonal. Estas matrizes satisfazem:
$$[A\,\mathrm{Id}] \sim [U\,\bar{L}] \qquad \bar{L} \cdot A = U$$
- Aplicado com escolha de pivô imediata (se for possível) numa matriz $[\bar{L}\,\mathrm{Id}]$ onde $\bar{L}$ é triangular inferior com 1 na diagonal, produz $[\mathrm{Id}\,L]$ onde L é triangular inferior com 1 na diagonal, inversa de $\bar{L}$
$$[\bar{L}\,\mathrm{Id}] \sim [\mathrm{Id}\,L] \qquad \bar{L} = L^{-1}$$

Combinando ambos resultados temos:

$$A = L \cdot U, \qquad \bar{L} \cdot A = U$$

Conhecer $\bar{L}, U$ é útil na resolução de equações onde aparece A. Nomeadamente:

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow \bar{L}A \cdot x = \bar{L} \cdot b \Leftrightarrow U \cdot x = \bar{L} \cdot b$$

Assim se conhecemos $U, \bar{L}$ resolver um sistema com matriz de coeficientes A implica resolver um sistema com forma triangular geral $U \cdot x = \bar{b}$, onde $\bar{b}$ é calculada com um simples produto de matrizes $\bar{b} = \bar{L} \cdot b$

Resulta útil então trabalhar com as matrizes L, U em lugar de usar a matriz A.

Para recuperar A usaríamos $A = \bar{L}^{-1}U = LU$, onde a matriz L é a inversa de $\bar{L}$, simples de obter novamente através do algoritmo de Gauss com transformações elementares básicas:

$$[\bar{L}\,\mathrm{Id}] \sim [\mathrm{Id}\,L] \qquad L \cdot \bar{L} = \mathrm{Id}$$

Esta matriz L triangular inferior com diagonal 1, e a matriz U com forma triangular geral satisfazem $A = L \cdot U$ e é chamada uma **decomposição LU de Doolittle** para a matriz A.

Se vamos multiplicar com A ou resolver equações onde A é a matriz de coeficientes uma ideia é então guardar as matrizes U, L ou guardar as matrizes $U, \bar{L}$ em lugar de guardar A.

Nota 2.40. Há diferentes vantagens em guardar uma matriz através da sua decomposição e não através das entradas da matriz. Em particular, o cálculo da inversa de A é muito mais rápido se conhecemos a decomposição LU. Temos $A = L \cdot U \Rightarrow A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$, onde as inversas de matrizes triangulares só exigem aplicar substituição direta ou inversa. Por outra