DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA I

IPS Instituto Politécnico de Setúbal

Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

1^o SEMESTRE 2017/2018

1^o Teste

2 de Dezembro de 2017 Duração: **2 horas**

Instruções:

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- Não pode responder a diferentes questões numa mesma folha de resposta.
- O abandono da sala só poderá efectuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É permitida a consulta de uma folha A4 manuscrita pelo aluno.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de equipamentos electrónicos durante a prova.
- Justifique convenientemente todas as respostas.

Nos exercícios 1, 2 e 4 não poderá ser utilizada a Regra de Cauchy no cálculo de limites.

1. Calcule os seguintes limites:

[1.5] (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{\sqrt{9x^2-5x}}$.

[1.0] (b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^3-1\right)\cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

2. Considere a função real de variável real definida por,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1-2x}{x}, & x<0 \\ -\ln(x+1), & x>0 \end{cases}.$$

[1.5] (a) Determine o domínio de f e estude a continuidade da função.

[2.0] (b) Verifique se f é prolongável por continuidade a $x=0$ e, em caso afirmativo, indique esse prolongamento.

[1.0] (c) Indique o significado e diga se é verdadeiro ou falso que

$$\forall L>0\ \exists M>0\ \forall x\in D_f:\ x>M \Longrightarrow f(x)>L.$$

3. Considere a função real de variável real definida por,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \arccos(2 - x).$$

[2.0] (a) Caracterize a função inversa de f.

[1.0] (b) Resolva a equação $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

4. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{(x-2)^2} \operatorname{sen}\left((x-2)^3\right) & , \ x < 2 \\ x - 2 & , x \geq 2 \end{cases}.$$

[2.0] (a) Determine, caso exista, o valor de k para o qual a função f é diferenciável em $x = 2$.

[1.5] (b) Considerando $k = 1$, determine, justificando, a derivada da função f.

5. Considere a seguinte função real de variável real

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}.$$

[1.5] (a) Justifique a diferenciabilidade desta função e calcule a sua derivada.

[1.5] (b) Determine a aproximação linear em torno de 1 e use-a para calcular uma estimativa do número $\frac{1}{\sqrt[3]{-0.9}}$.

6. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 - 12}{\ln(5 - x^2)}$.

[1.5] (a) Calcule, justificando, $\lim_{x \to 2} f(x)$.

[2.0] (b) Justifique, sem calcular, que existe um valor no intervalo de $]-1, 1[$ onde o gráfico de f tem uma recta tangente horizontal.

Fim do Teste