Exercícios Resolvidos Semana 8: 4/V/2020 até /V/2020

Exercício 2.54

`Considere a equação:`

$$\begin{aligned} x+3y+z&=-1\\ 2x-y+2z&=1\\ 3x+2y+z&=4 \end{aligned}$$

`Se partimos do ponto inicial` $x_0=(1,2,1)$`, decidir qual é o ponto seguinte pelos métodos de Richardson, de Jacobi e de Gauss-Seidel.`

Matricialmente temos o sistema:

$$\begin{bmatrix}1&3&1\\2&-1&2\\3&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}$$

Estes métodos iterativos decompõem A como soma $A=\Omega+(A-\Omega)$ onde Ω tenha inversa simples de calcular. Neste caso:

$$AX=B\Leftrightarrow\Omega^{-1}AX=\Omega^{-1}B\Leftrightarrow X=\Omega^{-1}(\Omega-A)X+\Omega^{-1}B\Leftrightarrow X=X+\Omega^{-1}\cdot(B-AX)$$

- O método de Richardson usa $\Omega=\mathrm{Id}_3$. A função de iteração é portanto

$$G(X)=X+(B-AX)$$

Temos assim:

$$X(1)=G(X_0)=X_0+(B-AX_0)=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&3&1\\2&-1&2\\3&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\1\\-3\end{bmatrix}$$

- O método de Jacobi usa $\Omega=D$ a componente diagonal de A. A função de iteração é portanto

$$G(X)=X+D^{-1}\cdot(B-AX)$$

Temos assim:

$$X(1) = G(X_0) = X_0 + D^{-1}(B - AX_0) =$$
$$= \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\2 & -1 & 2\\3 & 2 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right) =$$
$$= \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-9\\-1\\-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8\\3\\-3\end{bmatrix}$$

• O método de Gauss-Seidel usa $\Omega = D + L$ a componente triangular inferior de A. A função de iteração é portanto

$$G(X) = X + (D + L)^{-1} \cdot (B - AX)$$

A inversa da componente triangular inferior pode ser calculada por substituição direta:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & 0\\3 & 2 & 1\end{bmatrix} \cdot X = \mathrm{Id}_3 \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= [1\,0\,0]\\ 2x_1 - x_2 &= [0\,1\,0]\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= [0\,0\,1]\end{aligned}\right\} \Rightarrow (D{+}L)^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & 0\\-7 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Temos assim:

$$X(1) = G(X_0) = X_0 + (D + L)^{-1}(B - AX_0) =$$
$$= \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & 0\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\2 & -1 & 2\\3 & 2 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right) =$$
$$= \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & 0\\-7 & 2 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-9\\-1\\-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8\\-15\\58\end{bmatrix}$$

Exercício 2.60

Considere a equação matricial $A \cdot x = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Prove que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel são convergentes, qualquer que seja a aproximação inicial x_0 considerada.
2. Tome $x_0 = [3\,-1\,8]^t$ e obtenha o valor $x(1)$ efetuando uma iteração pelo método de Jacobi.
3. A partir de $x(1)$ efetue uma nova iteração e use o resultado para dar um majorante do erro cometido por $x(1)$.

Na matriz A temos diagonal estritamente dominante por linhas:

$$2 > 0 + 1 \qquad |-3| > 2 + 0 \qquad |-2| > 0 + 1$$

Portanto podemos afirmar que a função de iteração de Jacobi é uma contração (se usamos a norma-infinito) e a função de iteração de Gauss-Seidel é uma contração, para alguma norma. Iterar qualquer uma destas funções a partir de qualquer ponto inicial determina uma sucessão convergente, sendo o limite uma solução da equação $A \cdot x = b$.

Se consideramos $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ a componente diagonal de A, a sua inversa é $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$ e a função de iteração de Jacobi está dada por:

$$G(X) = D^{-1} \cdot (D - A)X + D^{-1}B =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} -9/2 \\ -11/3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Claramente vemos que a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ que multiplica com X tem norma menor do que 1 (com a norma-infinito), e que portanto G é uma contração, como já tínhamos afirmado, sendo o seu coeficiente de contração $c = \|M\|_\infty = 2/3$

Aplicamos uma vez a iteração e temos:

$$X(1) = G(X_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9/2 \\ -11/3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17/2 \\ -5/3 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

Se aplicamos uma segunda vez a iteração temos:

$$X(2) = G(X(1)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -17/2 \\ -5/3 \\ -3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9/2 \\ -11/3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15/4 \\ -28/3 \\ -11/6 \end{bmatrix}$$

Temos então:

$$X(2) - X(1) = \begin{bmatrix} 19/4 \\ -23/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

As fórmulas de propagação do erro permitem afirmar que, se $\overline{X}$ representa a solução do sistema (ponto fixo de G) temos:

$$\|X(2) - \overline{X}\|_\infty \leq \frac{c}{1-c} \cdot \|X(2) - X(1)\|_\infty$$

$$\|X(1) - \overline{X}\|_\infty \leq \frac{1}{1-c} \cdot \|X(2) - X(1)\|_\infty$$

Neste caso perguntam pelo erro de $X(1)$ e devemos afirmar:

$$\|X(1) - \overline{X}\|_\infty \leq \frac{1}{1-2/3} \cdot \frac{23}{3} = 23$$

a aproximação obtida é ainda bastante imprecisa, o erro pode ser grande.

Exercício 2.62

`Considere o sistema:`

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

1. `Tome a matriz nula como aproximação inicial e efetue duas iterações de Gauss-Seidel. Se necessário, reescreva o sistema no enunciado de modo a garantir a convergência.`
2. `Obtenha uma solução aproximada do sistema pelo método de Jacobi, com uma iteração que garanta um erro (em norma-`∞`) inferior a `10^{-1}`.`
3. `Determine a solução exata e comprove se a solução anterior respeita o majorante do erro indicado.`

Matricialmente o sistema pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que na matriz de coeficientes algumas entradas da diagonal são nulas. Para esta matriz não resulta possível construir a função de iteração de Jacobi nem a de Gauss-Seidel.

Se as incógnitas estivessem noutra ordem, no entanto, a matriz de coeficientes teria sido simétrica com diagonal não nula:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Náo se pergunta no enunciado, mas é fácil comprovar que a matriz de coeficientes tem diagonal estritamente dominante por linhas.O método de Gauss-Seidel é portanto convergente para este sistema, se usamos as incógnitas na ordem (x_3, x_2, x_1).

Consideramos então a função de iteração de Gauss-Seidel:

$$G(X) = (D + L)^{-1} \cdot (D + L - A)X + (D + L)^{-1}B$$

Calculamos a inversa da matriz diagonal inferior associada com A:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 2x_1 &= [1\,0\,0] \\ x_1 + 5x_2 &= [0\,1\,0] \\ -x_2 + 2x_3 &= [0\,0\,1] \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow (D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/10 & 1/5 & 0 \\ -1/20 & 1/10 & 1/2 \end{bmatrix}$$

A função de iteração de Gauss-Seidel portanto seria:

$$G(X) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/10 & 1/5 & 0 \\ -1/20 & 1/10 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/10 & 1/5 & 0 \\ -1/20 & 1/10 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/10 & 1/5 \\ 0 & 1/20 & 1/10 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 5/4 \end{bmatrix}$$

Aplicamos duas iterações:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X(1) = G(X_0) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 5/4 \end{bmatrix} \Rightarrow X(2) = G(X(1)) = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 4/5 \\ 7/5 \end{bmatrix}$$

Atenção, a solução aproximada seria $x_3 = 1/4$, $x_2 = 4/5$, $x_1 = 7/5$ (lembremos que X representa a matriz incógnita, com entradas (x_3, x_2, x_1) nesta ordem)

Se agora queremos aplicar o método de Jacobi, não podemos usar o sistema origina (tinha zeros na diagonal). Devemos usar o sistema com as incógnitas reordenadas. A função de iteração neste caso é:

$$G(X) = D^{-1} \cdot (D - A)X + D^{-1}B$$

A matriz diagonal D tem uma inversa simples: D^{-1} é uma matriz diagonal onde as entradas são os inversos dos números na diagonal de D.

$$G(X) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1/5 \\ -0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1/5 \\ -0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ que multiplica tem $\|M\|_\infty = 1/2$. A função G é uma contração com coeficiente $c = 1/2$.

Sabemos que $\|X(k) - \overline{X}\| \leq \frac{c}{1-c} \cdot \|X(k) - X(k-1)\|$. Como neste caso $c = 1/2$, se em algum momento temos $\|X(k) - X(k-1)\| < 1/10$, podemos também garantir que $\|X(k) - \overline{X}\| < 1/10$.

Ao iterarmos a função de Jacobi temos:

$$X(1) = G(X_0) = \begin{bmatrix}1/2 & 3/5 & 1\end{bmatrix}^t$$

$$X(2) = G(X(1)) = \begin{bmatrix}1/5 & 7/10 & 13/10\end{bmatrix}^t$$

$$X(3) = G(X(2)) = \begin{bmatrix}3/20 & 41/50 & 27/20\end{bmatrix}^t$$

$$X(4) = G(X(3)) = \begin{bmatrix}9/100 & 21/25 & 141/100\end{bmatrix}^t$$

Observamos

$$X(4) - X(3) = \begin{bmatrix}-3/50 & 21/50 & 3/50\end{bmatrix}^t$$

Todas as entradas inferiores (em valor absoluto) a 1/10. Portanto temos $\|X(4) - X(3)\|_\infty < 1/10$ e como sabemos que o coeficiente de contração c satisfaz $c/(1-c) = 1$, concluímos que $\|X(4) - \overline{X}\|_\infty < 1/10$, o ponto $X(4)$ aproxima a solução com erro inferior a 1/10.

Solução aproximada: $x_3 = 0.09$, $x_2 = 0.84$, $x_1 = 1.41$

Para calcular a solução exata podemos, por exemplo, aplicar o algoritmo de eliminação gaussiana seguido de substituição inversa, no sistema de equações original. Se mantemos a ordem das incógnitas do enunciado, temos o sistema em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Aplicamos eliminação gaussiana na matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ \boxed{-1} & 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ \boxed{-1} & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-9) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ \boxed{-1} & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-16} & -1 \end{bmatrix}$$

Sistema triangular:

$$\left\{\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 &= 3 \\ -16x_3 &= -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_2 &= 7/8 \\ -x_1 + 5x_2 &= 47/16 \\ x_3 &= \boxed{1/16} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_2 &= \boxed{7/8} \\ -x_1 &= -23/16 \\ x_3 &= \boxed{1/16} \end{aligned}\right\}$$

Temos $x_3 = 1/16 = 0.0625$, $x_2 = 7/8 = 0.875$, $x_1 = 23/16 = 1.4375$. Observamos que em nenhuma das entradas cometemos erro superior a 0.1 (com a norma-infinito, o erro é inferior a 1/10).

Exercício 2.63

`Considere o sistema de equações lineares` $A \cdot x = b$ `sendo`

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & a & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & a \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. `Identifique condições no valor` $a \in \mathbb{R}$ `que permitam garantir a convergência do método iterativo de Jacobi.`
2. `Identifique condições no valor` $a \in \mathbb{R}$ `que permitam garantir a convergência do método iterativo de Gauss-Seidel.`
3. `Para` $a = 2$`, efetue 3 iterações de Gauss-Seidel, com a matriz nula como aproximação inicial. Indique um majorante do erro da última solução aproximada obtida.`

A função de iteração de Jacobi é uma contração para a norma-infinito se a diagonal for estritamente dominante por linhas na matriz A.

Para ser dominante por linhas, devemos ter:

$$1 > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \quad |a| > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad |a| > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Assim quando $a > \frac{3}{4}$ e quando $a < \frac{3}{4}$ poderemos garantir a convergência do método iterativo de Jacobi.

Outro critério é a matriz ter diagonal estritamente dominante por colunas (a função de iteração seria contração para a norma-1). Neste caso, como a matriz é simétrica e as linhas coincidem com as colunas, iríamos obter a mesma resposta.

Para a função de iteração de Gauss-Seidel, a função de iteração é contração para uma determinada norma se sabemos que a matriz é estritamente dominante por linhas ou por colunas (portanto quando $|a| > 3/4$), Neste caso, como a matriz é simétrica, temos mais um critério. Se sabemos que é simétrica definido-positiva, a função de iteração será contração para uma determinada norma. Estudemos quando é A definido-positiva.

$A = U^t U$ para alguma matriz triangular superior? Se for, a primeira linha de U será $[\alpha\, b]$ com $\alpha^2 = 1$, $\alpha b = [(1/2)\,(1/3)]$. Temos assim a primeira linha de U e podemos estudar a matriz restante:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & a & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4}-\frac{1}{6} & a-\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Continuamos agora com a decomposição deste resto

$$\begin{bmatrix} a-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{1}{6} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{6} & a-\frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-\frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & a-\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Para que seja definido positivo é necessário $a-\frac{1}{4} > 0$, portanto $a > \frac{1}{4}$. Neste caso, ao resolvermos $\alpha^2 = a - \frac{1}{4}$ temos $\alpha = \sqrt{a-1/4} = \sqrt{4a-1}/2$. Assim $\alpha b = [1/12]$ leva a $b = [1/(6\sqrt{4a-1})] = [\sqrt{4a-1}/(24a-6)]$. Calculamos novamente o resto:

$$\begin{bmatrix} a-\frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & a-\frac{1}{9} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{4a-1}/2 & 0 \\ \sqrt{4a-1}/(24a-6) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{4a-1}/2 & \sqrt{4a-1}/(24a-6) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{(9a-1)(4a-1)}{9(24a-6)^2} \end{bmatrix}$$

Este último bloco $[\frac{(9a-1)(4a-1)}{9(24a-6)^2}]$ é positivo definido se $(9a-1)(4a-1) > 0$, portanto quando $a > 1/9$, e quando $a < -1/4$. Combinado com a condição já exigida de ser $a > 1/4$, temos que a matriz será definido positiva exatamente se $a > 1/4$.

O método iterativo de Gauss-Seidel será convergente se $a > 1/4$.

Vamos agora considerar o caso $a = 2$ portanto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A componente triangular inferior de A e a correspondente inversa podem ser calculadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \mathrm{Id}_3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} x_1 & = [1\,0\,0] \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 & = [0\,1\,0] \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 & = [0\,0\,1] \end{array} \right\}$$

Resolvemos e temos:

$$(D+L) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 2 \end{bmatrix} \qquad (D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ -13/96 & -1/16 & 1/2 \end{bmatrix}$$

A função de iteração de Gauss-Seidel neste caso será:

$$G(X) = (D+L)^{-1}\cdot(D+L-A)X + (D+L)^{-1}b =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ -13/96 & -1/16 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & a \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ -13/96 & -1/16 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/3 \\ -0 & 1/8 & -1/24 \\ -0 & 13/192 & 35/576 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1 \\ -1/4 \\ 35/96 \end{bmatrix}$$

A matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/3 \\ -0 & 1/8 & -1/24 \\ -0 & 13/192 & 35/576 \end{bmatrix}$ que multiplica X tem norma-∞ simples de calcular: $\|M\|_\infty = \max(1/2+1/3, 1/8+1/24, 13/192, 35/576) = 5/6$. Portanto se usamos a norma-infinito, a função de iteração de Gauss-Seidel é uma contração com coeficiente $c = 5/6$.

Ao iterarmos 4 vezes desde $X_0 = [0\,0\,0]^t$ temos:

$$X(1) = G(X_0) = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 35/96 \end{bmatrix}^t$$

$$X(2) = G(X(1)) = \begin{bmatrix} 289/288 & -683/2304 & 2663/7201 \end{bmatrix}^t$$

$$X(3) = G(X(2)) = \begin{bmatrix} 4149/4048 & -356/1177 & 967/2635 \end{bmatrix}^t \simeq \begin{bmatrix} 1.02495 & -0.30246 & 0.36698 \end{bmatrix}^t$$

Observamos a distância (com a norma-infinito) entre os dois últimos termos calculados:

$$X(3) - X(2) = [496/23093 \; -31/5147 \; -69/24409]^t$$

$$\|X(3) - X(2)\|_\infty = 496/23093 \simeq 0.0214784$$

Através das fórmulas do erro deduzimos um majorante do erro entre $X^* = X(3)$ e a solução exata $\overline{X}$:

$$\|X(3) - \overline{X}\|_\infty \le \frac{c}{1-c}\|X(3) - X(2)\|_\infty = \frac{5/6}{1/6} \cdot 0.0214784 = 0.10739$$

O erro cometido não é superior a 0.1074 em nenhuma das componentes. Podemos comprovar que este resultado é correto se comparamos $X^* = X(3) = \begin{bmatrix} 1.02495 & -0.30246 & 0.36698 \end{bmatrix}^t$ com a solução exata, que é $\overline{X} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.02947 & -0.30316 & 0.36632 \end{bmatrix}^t$