Ficha de Primitivas e Integrais

Ex. 1: Primitive as seguintes funções:

a. $x\,(1+3x)^{\frac{1}{2}}$; **b.** $\frac{1}{e^x+1}$; **c.** $\frac{x}{\sqrt{2-4x^2}}$;

d. $\frac{1}{\sqrt{2-4x^2}}$; **e.** $\frac{x+1}{\sqrt{2-4x^2}}$; **f.** $\frac{x^2+1}{\sqrt{2-4x^2}}$;

g. $e^{3x}\text{sen }x$; **h.** $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1+x}}$; **i.** $\sqrt{x}\ln^2 x$;

j. $\frac{\cos x}{sen^3 x}$; **k.** $\frac{1}{(x+1)\sqrt{1+\ln(3x+3)}}$; **l.** $\frac{tgx}{1+sen^2 x}$;

m. $\frac{x-x\text{arcsen}\left(2x^2\right)}{\sqrt{1-4x^4}}$; **n.** $\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}$; **o.** $\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$;

p. $\frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2-x+2}$; **q.** $\frac{1}{x^3+4x^2+4x}$; **r.** $\frac{3x^2+2x+5}{3x^3+2x^2+5x}$;

s. $\frac{3x^2+2x+5}{x^3+2x^2+5x}$.

Ex. 2: Justifique que

$$\int_1^2 x^3 e^{\sqrt{x}+x^2}dx \geq \int_1^2 e^{x^2}dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^2 e^{x^2}dx \geq e^2 - e.$$

(Sugestão: nem pense em calcular estes integrais!!!)

Ex. 3: Considere a função $f:[-1,2]\to R$, definida por :

$$f(x) = x^2 + 3x.$$

a. Justifique que f é integrável.
b. Mostre que o valor médio de f (neste intervalo) é $\frac{15}{6}$.
c. Justifique (sem o calcular) que a equação $x^2+3x-\frac{15}{6}$ tem um zero neste intervalo.

Ex. 4: Considere a função definida por

$$f(x) = \int_{x^3}^{x^2} \left(1+t^4\right)^{-\frac{3}{2}} dt.$$

a. Justifique f é derivável em $\mathbb{R}$ e calcule a sua derivada.
b. Mostre que:

- 0 e 1 são zeros de f;
- $f(x) \leq 0$ em $[1,+\infty[$ e $f(x) \geq 0$ em $]-\infty,1[$.

Ex. 5: Calcule, justificando, o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x sen\ t^5 dt}{\int_0^{x^2} sen\ t^2 dt}.$$

Ex. 6: Determine os seguintes integrais:

a. $\int_{\pi}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; **b.** $\int_{-1}^{1} x\,(2x+5)^4\, dx$; **c.** $\int_{\frac{e}{2}}^{\frac{e^2}{2}} \frac{\ln 2x}{x\ \ln 4x} dx$;

d. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$; **e.** $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{arcsen} x$; **f.** $\int_0^3 |5x-10|\, dx$.

Ex. 7:

a. Justifique que a seguinte função é ímpar:

$$f\,(x) = x^3\ \left|sen\left(x^5+x\right)\right|\ e^{x^2+|x|}.$$

b. Indique o valor de $\int_{-2}^{2} f\,(x)\, dx$.

Ex. 8: Mostre que, se f é uma função contínua no intervalo $[0,T]$ e a uma constante real não nula, então

$$\int_0^T f\,(at)\, dt = \frac{1}{a}\int_0^{aT} f\,(t)\, dt.$$

Ex. 9: Determine as áreas das regiões limitadas pelas curvas:
a. $y = x^2$ e $y = \sqrt{|x|}$;
b. $x = y^2 - 4$ e $x = 2 - y^2$;
c. $y = x^3 - x$ e $y = 0$.

Ex. 10: Determine o volume dos sólidos de revolução gerados pela rotação da região limitada pelas curvas

$$y = x^2,\ y = 2 \text{ e } x = 2,$$

em torno dos eixos dos xx e em torno dos eixos dos yy.

Ex. 11: Determine o comprimento de linha da curva $y = \ln x$, entre os pontos $(1,0)$ e $(3, \ln 3)$.

(Sugestão: no integral faça a mudança de variável $t = \sqrt{x^2+1}$.)

Soluções da ficha de Primitivas e Integrais

Ex. 1:

a. $\frac{2}{9}x\,(1+3x)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{135}x\,(1+3x)^{\frac{5}{2}}+C$; **b.** $-\ln(1+e^{-x})+C=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C$;

c. $-\frac{1}{4}\sqrt{2-4x^2}+C$; **d.** $\frac{1}{2}arcsen\left(\sqrt{2}\,x\right)+C$;

e. $-\frac{1}{4}\sqrt{2-4x^2}+\frac{1}{2}arcsen\left(\sqrt{2}\,x\right)+C$;

f. $\frac{5}{8}arcsen\left(\sqrt{2}\,x\right)-\frac{1}{8}x\sqrt{2-4x^2}+C$;

g. $-\frac{1}{10}e^{3x}\cos x+\frac{3}{10}e^{3x}senx+C$;

h. $2\sqrt{1+x}-3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}-6\ln\left(\sqrt[6]{1+x}+1\right)+C$;

i. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln^2 x-\frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x+\frac{16}{27}x\sqrt{x}+C$; **j.** $-\mathrm{cosec}^2x+C$;

k. $2\sqrt{1+\ln(3x+3)}+C$; **l.** $\ln\left(\sqrt[4]{1+2\,\mathrm{tg}^2\,x}\right)+C=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+sen^2x}{1-sen^2x}\right)+C$;

m. $\frac{1}{4}\arcsin(2x^2)-\frac{1}{8}\arcsin^2(2x^2)+C$;

n. $\sqrt{e^{2x}+1}+C$; **o.** $\frac{2}{3}e^x\sqrt{e^x+1}-\frac{4}{3}\sqrt{e^x+1}+C$;

p. $-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-2|+C=\ln\left(\frac{\sqrt[3]{|x-2|^5}}{\sqrt{|x-1|}\,\sqrt[6]{|x+1|}}\right)+C$;

q. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+\frac{1}{2x+4}+C$; **r.** $\ln|x|+C$;

s. $\ln|x|+\ln(x^2+2x+5)-\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$.

Ex. 2 a **4**: -

Ex. 5: $\frac{1}{2}$.

Ex. 6: **a.** $-2\sin\sqrt{\pi}$; **b.** $\frac{7^5}{24}+\frac{3^5}{8}=\frac{2192}{3}$; **c.** $1-\ln 2.\ln\left(\frac{\ln 2+2}{\ln 2+1}\right)$;
d. $\frac{7}{4}$; **e.** $\frac{1}{8}\sqrt{2}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$; **f.** $\frac{25}{2}$.

Ex. 7: a. -; **b.** 0.

Ex. 8: -

Ex. 9: a. $\frac{2}{3}$; **b.** $8\sqrt{3}$; **c.** $\frac{1}{2}$.

Ex. 10: em torno dos eixos dos xx: $\frac{32}{5}\pi$;
em torno dos eixos dos yy: 8π .

Ex. 11: $\sqrt{10}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\,\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=\sqrt{10}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(11-2\sqrt{10}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}{9}\right)$.