DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA I

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

1^o SEMESTRE 2018/2019

1^o Teste - Tópicos de Resolução

24 de Novembro de 2018 Duração: **2 Horas**

Nos exercícios 1, 2 e 4 não poderá ser utilizada a Regra de Cauchy no cálculo de limites.

1. Calcule os seguintes limites e escreva-os segundo a definição de Cauchy:

[1.5] a) **Resolução:** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x-4}=0$

$\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0\Leftrightarrow\forall_{\delta>0}\exists_{\varepsilon>0}\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{3,4\}}:|x-3|<\varepsilon\Rightarrow|f(x)|<\delta$

[2.0] b) **Resolução:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1-e^{\frac{1}{x-1}}\right)(x^2-1)}{\sqrt{3x^2+2}}\overset{\left(\frac{0\times\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1-e^{\frac{1}{x-1}}\right)(x-1)(x+1)}{\sqrt{3x^2+2}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-e^{\frac{1}{x-1}}\right)(x-1)\right]\times\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{x-1}}\times\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+2}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}\times\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}\times\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}-\underbrace{\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}}_{\text{limite notável}}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}=$$

$$=-1\times\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\forall_{\delta>0}\exists_{M>0}\forall_{x\in\mathbb{R}}:x>M\Rightarrow\left|f(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}\right|<\delta$

---

2. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x)=\begin{cases}k+x^2e^{4-x^2} & ,\ x>0\\ x\ln\left(-\frac{1}{x}\right) & ,\ x<0\end{cases}\qquad(\text{com } k\in\mathbb{R}).$$

[1.0] **a)** Justifique que f é contínua em todo o seu domínio.

Resolução: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:x>0\vee\left(x>0\wedge-\frac{1}{x}>0\wedge x\neq 0\right)\right\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

- $x>0$: $f(x)=k+x^2e^{4-x^2}\longrightarrow f$ é contínua para $x>0$ pois é a soma, produto e composta entre funções contínuas no seu domínio (função constante, função polinomial e composta entre função polinomial e exponencial)

- $x < 0$: $f(x) = x \ln\left(-\frac{1}{x}\right) \longrightarrow f$ é contínua para $x < 0$ pois é o produto e composta entre funções contínuas no seu domínio, onde o denominador não se anula (função linear e composta entre função logarítmica e função racional)

Então f é uma função contínua em todo o seu domínio.

[1.5] **b)** Determine, caso exista, o valor de k para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto de abcissa $x = 0$.

Resolução: $x = 0 \notin D_f$ mas $x = 0$ é um ponto de acumulação de D_f.

$\lim\limits_{h\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} \left(k + x^2 e^{4-x^2}\right) = k + 0 \times e^4 = k$

$\lim\limits_{h\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0^-} x \ln\left(-\frac{1}{x}\right) = -\underbrace{\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\ln\left(-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}}}_{\text{limite notável}} = 0$

Para f ser prolongável por continuidade tem de existir e ser finito $\lim\limits_{h\to 0} f(x)$, isto é, $\lim\limits_{h\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0^-} f(x)$ logo tem de ter-se $k = 0$.

[1.0] **c)** Mostre que f tem pelo menos um zero no intervalo $\left]-2, -\frac{1}{2}\right[$.

Resolução: Provou-se em a) que f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ logo é contínua em $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.

$f(-2) = -2\ln\left(-\frac{1}{-2}\right) = -2\underbrace{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}_{<0} > 0$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\underbrace{\ln(2)}_{>0} < 0$

Como $f(-2) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ então, por um Corolário do Teorema de Bolzano, prova-se que $\exists c \in \left]-2, -\frac{1}{2}\right[: f(x) = 0$, isto é, existe pelo menos um zero neste intervalo.

---

3. Considere a função g definida por

$$g(x) = \frac{\pi - \operatorname{arcsen}(2x-1)}{3}.$$

[2.0] **a)** Caracterize a função inversa de g.

Resolução:

$$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{\pi - \operatorname{arcsen}(2x-1)}{3} = y \Leftrightarrow \pi - \operatorname{arcsen}(2x-1) = 3y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arcsen}(2x-1) = \pi - 3y \Leftrightarrow (2x-1) = \operatorname{sen}(\pi - 3y) \Leftrightarrow x = \frac{1 + \operatorname{sen}(\pi - 3y)}{2}$$

$$\text{logo,} \quad g^{-1}(x) = \frac{1 + \operatorname{sen}(\pi - 3x)}{2}$$

$$D_{g^{-1}}: \quad -\frac{\pi}{2} \le \pi - 3x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\pi - \frac{\pi}{2} \le -3x \le -\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} \le -3x \le -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \ge x \ge \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$$D_{g^{-1}} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$CD_{g^{-1}}: \quad -1 \le \operatorname{sen}(\pi - 3x) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1 + \operatorname{sen}(\pi - 3x) \le 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{1 + \operatorname{sen}(\pi - 3x)}{2} \le 1$$
$$CD_{g^{-1}} = [0, 1]$$

[1.0] **b)** Determine, caso exista, $g^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Resolução: Como $x = \frac{\pi}{3} \in D_{g^{-1}}$, então $g^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ existe:

$$g^{-1}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 + \operatorname{sen}\left(\pi - 3 \times \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{1 + \operatorname{sen}(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

---

4. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) \arctan\left(\dfrac{1}{2x}\right) & , \quad x > 0 \\ \\ \dfrac{x^3}{1 + x^2} & , \quad x \le 0 \end{cases}.$$

[2.0] **a)** Estude a função quanto à diferenciabilidade no ponto de abcissa $x = 0$.

Resolução: f é diferenciável em $x = 0$ sse f tem derivada finita em 0, isto é sse $f'_e(0) = f'_d(0)$ e são finitas.

$$f'_e(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{h^3}{1+h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2}{1 + h^2} = \frac{0}{1} = 0$$
$$f'_d(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sin(h) \arctan\left(\frac{1}{2h}\right) - 0}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0^+} \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{LN \to 1} \times \lim_{h \to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{2h}\right) = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Como $f'_e(0) \neq f'_d(0)$ conclui-se que f não é diferenciável em $x = 0$.

[2.0] **b)** Determine, justificando, a derivada da função f.

Resolução:

- $x < 0$: f é diferenciável pois é o quociente (em que o denominador não se anula) de funções diferenciáveis (polinomiais); logo,

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{1 + x^2}\right)' = \frac{3x^2(1 + x^2) - x^3 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{3x^2 + 3x^4 - 2x^4}{(1 + x^2)^2} = \frac{3x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2}$$

- $x > 0$: f é diferenciável pois é o produto,o quociente (em que o denominador não se anula), a composta e a inversa de funções diferenciáveis (trigonométricas e polinomiais); logo,

$$f'(x) = \left(\sin(x) \arctan\left(\frac{1}{2x}\right)\right)' = \cos(x) \arctan\left(\frac{1}{2x}\right) + \sin(x) \frac{\left(\frac{1}{2x}\right)'}{1 + \left(\left(\frac{1}{2x}\right)\right)^2} =$$
$$= \cos(x) \arctan\left(\frac{1}{2x}\right) - \frac{2\sin(x)}{4x^2 + 1}$$

. $x = 0$ conclui-se da alínea a) que f não é diferenciável.
Então:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x)\arctan\left(\dfrac{1}{2x}\right) - \dfrac{2\sin(x)}{4x^2+1} & , \quad x > 0 \\ \\ \dfrac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} & , \quad x < 0 \end{cases}.$$

[1.0] **c)** Determine a equação da recta normal ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$.

Resolução:

$$y = f(-1) - \frac{1}{f'(-1)}(x+1).$$

$f(-1) = \dfrac{(-1)^3}{1+(-1)^2} = \dfrac{-1}{2}$

$f'(-1) = \dfrac{3(-1)^2 + (-1)^4}{\left(1+(-1)^2\right)^2} = \dfrac{3+1}{2^2} = 1$

Portanto, a recta normal é definida por $y = -\frac{1}{2} - (x+1) \Leftrightarrow y = -x - \frac{3}{2}$.

[1.5] **d)** Determine a aproximação linear em torno de -1 e use-a para calcular uma estimativa de $f(-1.01)$.

Resolução:

A aproximação linear de f em torno de $c = -1$ é a aproximação de f associada à recta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, f(-1))$, que é dada por:

$$y = f(-1) + f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} + (x+1) \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}.$$

Portanto, a aproximação linear de f, para valores de x próximos de -1, é dada por:

$$f(x) \approx x + \frac{1}{2}.$$

Resta calcular a estimativa de $f(-1.01)$:

$$f(-1.01) \approx -1.01 + \frac{1}{2} = -1.01 + 0.5 = -0.51$$

---

5 Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \ln(1+e^{3x})$.

[1.5] **a)** Mostre que existe pelo menos um ponto do intervalo $]0, \ln 2[$ onde a recta tangente ao gráfico de f tem declive $\frac{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}{\ln 2}$.

Resolução: O domínio da função f é $\mathbb{R}$. No seu domínio a função é diferenciável pois é a composição e a soma de funções diferenciávies (exponencial, logaritmo e constante).

Se a função é diferenciável é contínua e em particular é contínua no intervalo $[0, \ln 2]$ e diferenciável em $]0, \ln 2[$. Assim, pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in\,]0, \ln 2[$ tal que

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(2) - f(0)}{\ln 2 - 0} \\ &= \frac{\ln\left(1 + e^{3\ln 2}\right) - \ln\left(1 + e^{0}\right)}{\ln 2} \\ &= \frac{\ln(9) - \ln 2}{\ln 2} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Como a derivada da função num ponto, é o declive da recta tangente, tem-se que existe um $c \in\,]0, \ln 2[$ cujo declive da recta tangente a esse ponto é $\frac{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}{\ln 2}$.

[2.0] **b)** Calcule, justificando, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x+4}$.

Resolução: O limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+e^{3x}\right)}{x+4}$$

é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

A função f é diferenciável em $\mathbb{R}$ (ver alínea a.) e a função $g(x) = x$ é diferenciável pois é um polinómio. Note-se que

$$f'(x) = \frac{\left(1+e^{3x}\right)'}{1+e^{3x}} = \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}$$

e

$$g'(x) = (x+4)' = 1 \neq 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}}{1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\frac{1}{e^{3x}} + 1} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Como o limite das derivadas existe, então, pela Regra de Cauchy, conclui-se que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 3.$$

Fim da resolução do teste