INSTITUTO POLITÉCNICO DE SETÚBAL
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios sobre Equações Não Lineares

1. Considere a equação $f(x) = e^{-x} - \text{sen}(7x) = 0$.

   (a) Represente graficamente as curvas $y = e^{-x}$ e $y = \text{sen}(7x)$ e localize a menor raiz positiva da equação. Indique, justificando, qual o número total de raízes de f.

   (b) Aplique o método da bissecção para obter uma aproximação para a raiz β mais próxima de 1 da equação dada com erro absoluto inferior a 0.5×10^{-6}.

   (c) Aplique o método da falsa posição para obter uma aproximação de β nas condições da alínea anterior.

2. Para uma certa função f, ao utilizar o método da falsa posição, obtiveram-se os seguintes resultados: $f(0) = -2$, $f(2) = 2$, $x_1 = 1$ e $f(x_1) = -\dfrac{2}{9}$. Obtenha a 2ª iterada.

3. Considere a seguinte função $f(x) = e^{-x} + 2x - 2$.

   (a) Por análise gráfica, determine quantas raizes tem a equação $f(x) = 0$? Determine um intervalo, com a amplitude de uma décima, que contenha a maior raiz.

   (b) Utilizando o método da falsa posição no cálculo da raiz localizada no intervalo $[-2, -1]$, obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\begin{array}{ll} f(-2) = 1.389056 & f(-1) = -1.281718 \\ x_1 = -1.479905 & f(x_1) = -0.567281. \end{array}$$

   Determine a 2ª iterada e indique um majorante do erro.

4. Utilize os métodos da bisseção e da falsa posição para, em 5 iterações, aproximar a única raiz positiva da função $f(x) = x^{10} - 1$, tomando para aproximações iniciais $a_0 = 0$ e $b_0 = 1.3$. Recorrendo ao gráfico de f, explique porque é que o método da falsa posição converge tão lentamente.

5. Usando o método da falsa posição encontre uma aproximação $\bar{x}$ para a menor raiz positiva da equação $x^2 \, |\text{sen}\, x| = 5$ de modo que $|f(\bar{x})| < 0.01$.

6. Considere a equação $f(x) = x^2 - 2 = 0$. Obtenha uma aproximação da raiz positiva, usando o método do ponto fixo até à 5ª iterada.

7. Considere a função $h(x) = x^2 + 10 \cos x$.

   (a) Localize graficamente todos os zeros de h.

   (b) Usando convenientemente o método do ponto fixo, obtenha uma aproximação do único zero da função em $\left[\frac{\pi}{2}, 2\right]$, com um erro não superior a 10^{-4}.

8. Considere $f(x) = e^x + x - 2$ e $g(x) = \dfrac{x - e^x + 2}{2}$.

   (a) Verifique que a sucessão gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, converge para um único zero de f em $[0.1, 0.6]$.

   (b) A partir do valor inicial 0.35 obtenha uma aproximação da raiz de f em 3 iterações. Indique um majorante do erro absoluto cometido.

9. Considere a sucessão definida pela seguinte fórmula de recorrência $x_{n+1} = 1 + \operatorname{sen} x_n$.

   (a) Mostre que esta sucessão converge, qualquer que seja $x_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\right]$, e que o seu limite se encontra neste intervalo. A sucessão será monótona?

   (b) Seja z é o limite da sucessão considerada. Partindo da aproximação inicial $x_0 = 2$, execute duas iterações e determine um majorante de $|z - x_2|$.

10. Considere um número $N \in \mathbb{N}$.

    (a) Deduza uma fórmula iterativa de Newton que permita calcular $\sqrt[3]{N}$.

    (b) Calcule, com 4 algarismos significativos , $\sqrt[3]{4}$.

11. Deduza uma fórmula iterativa baseada no método de Newton que permita obter uma aproximação de $\dfrac{1}{a}$, sendo $a > 1$. Aplique essa fórmula para $a = 18$ e obtenha uma aproximação de $\dfrac{1}{18}$ com erro absoluto inferior a 0.5×10^{-8}.

12. Considere a equação $x^2 - \ln x - 4 = 0$.

    (a) Indique um intervalo, com a amplitude de uma décima, que contenha a raiz α da equação mais próxima de 2.

    (b) No cálculo da raiz α, e por aplicação do método de Newton, que extremo do intervalo se deve tomar como aproximação inicial?

    (c) Determine uma aproximação da raiz α até que $|x_{i+1} - x_i| \leqslant 10^{-4}$.

    (d) Indique um majorante do erro do valor aproximado da raiz α.

13. Calcule uma aproximação x_k do menor zero positivo da função $f(x) = \cos(x^3) - \ln x$, utilizando o método de Newton, tal que $|f(x_k)| < 10^{-13}$.

14. Considere a equação $x \operatorname{tg} x = 1$. Aplicando o método da secante, obtenha as duas primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo $[0.8, 0.9]$.

15. Considere a equação $x^2 - 1 - \ln(x + 1) = 0$.

    (a) Localize graficamente as raízes reais da equação dada e mostre, analiticamente, que no intervalo $[1, 2]$ a equação tem só uma raiz.

    (b) Usando o intervalo da alínea anterior, calcule a 3ª iterada pelo método da falsa posição.

    (c) Partindo das aproximações iniciais $x_0 = 1.5$ e $x_1 = 2$, aproxime agora essa raiz usando o método da secante em duas iterações.

    (d) Compare as aproximações a que chegou nas alíneas anteriores, determinando um majorante do erro absoluto de cada uma dessas aproximações.

16. Considere a equação $x^3 = 5x - 1$.

   (a) Verifique graficamente que as três raízes da equação estão perto de -2.35, 0.20 e 2.10.
   (b) Encontre, para cada raiz, uma função g que torne o método do ponto fixo convergente. Justifique.
   (c) Considere $x_0 = 2.10$. Execute 10 iterações pelo método do ponto fixo e analise os resultados.

17. Considere a função
$$h(x) = \cos\left(\frac{\pi(x+1)}{8}\right) + 0.418x - 0.9062.$$

   (a) Mostre que a equação $h(x) = 0$ tem uma raiz β no intervalo $]-1, 0[$.
   (b) Obtenha uma aproximação $\bar{\beta}$ da raiz β usando convenientemente o método ponto fixo de modo que $|h(\bar{\beta})| < 10^{-8}$.

18. Considere a função $f(x) = x - \cos x$ que tem uma raiz α no intervalo $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (a) Aplicando o método da bissecção, determine uma aproximação $\bar{\alpha}$ de α tal que $|\alpha - \bar{\alpha}| \leq \frac{\pi}{2^4}$.
   (b) Obtenha um intervalo $I_\alpha \subset I$ tal que o método de Newton convirja para α em I_α.

19. Em alguns computadores o cálculo de $\sqrt[n]{a}$, $a > 0$, é realizado pelo método de Newton.

   (a) Verifique que a equação $x^n - a = 0$, $a > 0$, tem apenas uma raiz real positiva.
   (b) Aplicando o método de Newton à equação anterior obtenha a fórmula iterativa
$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}\right]$$
   e averigue em que condições é garantida a sua convergência para $\sqrt[n]{a}$, com $a > 0$.

20. Considere a equação $\left[\cos(x) - \frac{x}{2}\right]^2 = 0$.

   (a) Quantas raízes distintas tem a equação? Indique-as e/ou localize-as.
   (b) Partindo de $x_0 = 1.5$ aplique o método de Newton para, em 6 iterações, determinar uma aproximação da raiz mais próxima de 1.

21. Num reactor o máximo rendimento global de produto é obtido quando o tempo de reacção t satisfaz a relação $vt = \ln(1 + vt + vt_p)$, onde v é a velocidade específica da reacção e t_p é o tempo perdido devido ao resfriamento do produto, descarga, limpeza, carga e outros possíveis factores. Pretende-se determinar o tempo de reacção α, quando $v = 10\ m/s$ e $t_p = 0.01\ s$, utilizando o método do ponto fixo.

   (a) Obtenha uma função $g(t)$ que admita α como único ponto fixo em $[0, 0.5]$ e que torne o método do ponto fixo $t_{k+1} = g(t_k)$ convergente para α qualquer que seja a aproximação inicial $t_0 \in [0, 0.5]$.

   (b) Seja $t_k = \bar{\alpha}$ um valor aproximado de α. Determine $\bar{\alpha}$ tal que $|\alpha - \bar{\alpha}| \leq 0.5 \times 10^{-8}$, utilizando o método definido em (a).

   (c) Usando o método de Newton determine uma aproximação de α que satisfaça o erro especificado em (b) e compare a rapidez de convergência dos dois métodos.