Equações Não Lineares

Análise Numérica

Artur M. C. Brito da Cruz

Escola Superior de Tecnologia
Instituto Politécnico de Setúbal
2015/2016 [1]

[1] versão 20 de Setembro de 2017

Conteúdo

1 Introdução

O objectivo deste capítulo é o estudo de métodos numéricos para a resolução de equações não lineares. Uma equação do tipo

$$f(x) = 0$$

diz-se não linear se a função f não pode ser escrita como um polinómio de grau 1. Eis alguns exemplos de equações não lineares

$$\begin{aligned} x^6 - 45x - 2.3 &= 0 \\ \cos x - e^x &= 0 \\ 2^x - \sqrt{x} - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Existem equações não lineares que não se conseguem resolver aritmeticamente. Por exemplo, Galois provou que não existe uma fórmula resolvente geral para determinar os zeros de polinómios com grau superior a 4.

Seja f uma função real de variável real. Diz-se que $\alpha \in D_f$ é uma **raiz da equação** ou um **zero da equação**

$$f(x) = 0$$

se

$$f(\alpha) = 0,$$

ou seja, se α é zero ou raiz da função f.

Para determinar os zeros desta equação ir-se-á recorrer a métodos iterativos. Para definir um método iterativo ou é dada uma aproximação inicial x_0 de α (métodos dependentes de um só ponto) ou é dado um intervalo $[a, b]$ que contenha α (métodos intervalares), sendo que depois o método iterativo gera uma **sucessão de aproximações ou iteradas**

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

em que cada iterada é calculada recorrendo ao conhecimento de uma ou mais iteradas anteriores. Naturalmente pretende-se que esta sucessão de iteradas seja convergente para a raiz da equação α, ou seja

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha.$$

Chama-se **erro da iterada de ordem** n, e representa-se por e_n, a

$$e_n = \alpha - x_n,$$

donde

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} e_n = 0.$$

Para além de ser importante estabelecer a convergência de um método iterativo é também preciso ter uma ideia sobre a rapidez com que a sucessão de aproximações converge para α.

Definição. *Diz-se que p é a **ordem de convergência** ou **coeficiente assimptótico** de um método iterativo convergente se*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c$$

para algum $c > 0$. Se $p = 1$ a convergência diz-se linear e se $p > 1$ diz-se supralinear. No caso particular de $p = 2$ a convergência diz-se quadrática.

Quanto maior for a ordem de convergência, maior será, em princípio, a rapidez da convergência do método iterativo. No entanto, esta rapidez depende ainda do esforço computacional necessário em cada iteração.

Seja f uma função contínua em $I = [a, b]$ e tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Ao calcular a raiz $\alpha \in I$ num processo iterativo em que, sem perda de generalidade, $x_n < \alpha$, sendo x_n a n-ésima aproximação obtida pelo método iterativo, pelo Teorema de Lagrange, tem-se que existe $c \in]x_n, \alpha[$ tal que

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(\alpha) - f(x_n)}{\alpha - x_n} \\ \Leftrightarrow \quad \alpha - x_n &= \frac{f(x_n)}{f'(c)}. \end{aligned}$$

Logo, um majorante do erro absoluto para um qualquer método iterativo nestas condições é, com $n = 0, 1, \ldots$, é dado por

$$|e_n| = |\alpha - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}$$

onde

$$m = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

2 Método da Bissecção

Recorde-se o Teorema de Bolzano apresentando na unidade curricular Matemática 1.

Teorema. *Se f é contínua em $I = [a, b]$ tal que $f(a) f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz $\alpha \in I$ da equação $f(x) = 0$.*

Com base neste resultado, pode-se construir um processo iterativo para descobrir um zero de uma função contínua num intervalo I que contém apenas um zero nesse intervalo. Parte-se de um intervalo $I = [a, b]$ onde $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos. A primeira aproximação vai ser o ponto médio do intervalo, ou seja

$$x_1 = \frac{a + b}{2}.$$

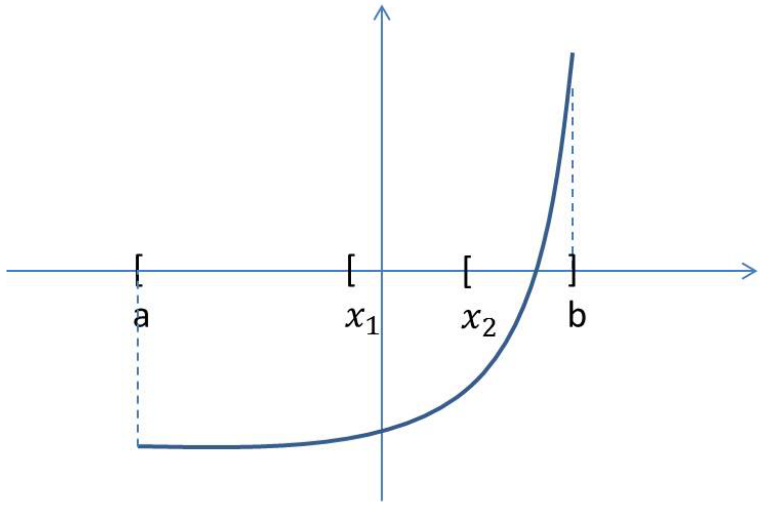
Após o cálculo de x_1 fica-se perante três possibilidades:

1. $f(a)$ e $f(x_1)$ têm sinais diferentes e conclui-se que $\alpha \in]a, x_1[$;

2. $f(x_1)$ e $f(b)$ têm sinais diferentes e conclui-se que $\alpha \in]x_1, b[$;

3. $f(x_1) = 0$, logo $\alpha = x_1$ e o processo termina.

Caso uma das duas primeiras possibilidades tenha ocorrido, descobre-se em qual dos subintervalos do intervalo I está o zero. Repete-se o processo com o novo subintervalo até que a amplitude[2] do intervalo onde se está a trabalhar seja tão pequena quanto se queira ou até que se tenha descoberto a raiz da equação. Chama-se a este processo, o **método da bissecção** pois em cada iterada obtemos um intervalo com metade do comprimento do intervalo anterior.



Note-se que o método só é aplicável quando existe um único zero no intervalo I. No entanto, se para além das condições do Teorema de Bolzano, f tem derivada contínua em $]a,b[$ tal que $f'(x) \neq 0$, para todo o $x \in \,]a,b[$, então pelo Teorema de Rolle α é o único zero de f no intervalo I.

Teorema. *Seja f uma função contínua em $[a,b]$, seja $\alpha \in [a,b]$ tal que $f(\alpha) = 0$ e defina-se por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ a sucessão dos pontos médios gerados pelo método da bissecção. Se $f(a) \times f(b) < 0$, então para $n \in \mathbb{N}$,*

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} x_n$$

e

$$|e_n| = |\alpha - x_n| \leqslant \frac{b-a}{2^n}.$$

Exemplo. *Calcule-se uma aproximação de $\sqrt{5}$ com um erro inferior a 0.01.*

Note-se que $\sqrt{5}$ é a raiz positiva de

$$f(x) = x^2 - 5.$$

Esta raiz é única no intervalo $[2,3]$ pois f é contínua e crescente neste intervalo e $f(2) \times f(3) < 0$.

A tabela seguinte tem os resultados obtidos com o método da bissecção.

[2] Chama-se amplitude de um intervalo [a,b] ao comprimento do intervalo: b-a.

n	a_n	b_n	x_{n+1}	*maj. de* $\|e_{n+1}\|$	*Sinal de* $f(a_n)f(x_{n+1})$
0	2	3	2.5	0.50	$-$
1	2	2.5	2.25	0.25	$-$
2	2	2.25	2.125	0.125	$+$
3	2.125	2.25	2.1875	0.0625	$+$
4	2.1875	2.25	2.21875	0.03125	$+$
5	2.21875	2.25	2.234375	0.0151625	$+$
6	2.234375	2.25	2.2421875	0.0078125	

A sétima iterada, $x_7 = 2.2421875$*, é a solução que se procurava.*

Exemplo. *Considere-se a equação*

$$\operatorname{sen} x = e^{-x}.$$

Para $f(x) = \operatorname{sen} x - e^{-x}$ *tem-se que*

$$\begin{aligned} f(0.5) &= \sin(0.5) - e^{-0.5} \approx -0.127 \\ f(0.7) &= \sin(0.7) - e^{-0.7} \approx 0.147. \end{aligned}$$

e

$$f'(x) = \cos x + e^{-x} > 0, \; \forall x \in [0.5, 0.7]$$

então f *tem uma e uma só raiz em* $[0.5, 0.7]$ *e pode-se aplicar o método da bisseção.*

Determine-se agora o número n *de iterações necessárias para garantir que*

$$|x_n - \alpha| < 10^{-6}.$$

Uma vez que

$$|e_n| \leqslant \frac{b-a}{2^n},$$

bastará garantir que

$$\frac{b-a}{2^n} < 10^{-6},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \frac{0.2}{2^n} < 10^{-6} \\ \Rightarrow\; & 10^5 < 2^{n-1} \\ \Rightarrow\; & n-1 > 5\log_2 10 \\ \Rightarrow\; & n-1 > \frac{5\ln 10}{\ln 2} \approx 16.61 \\ \Rightarrow\; & n \geqslant 18. \end{aligned}$$

Observação. *Note-se que o número mínimo de iterações* n *que garantem* $|e_n| < \varepsilon$ *é dado por*

$$n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}.$$

Exercício. *Indique uma aproximação da raiz real* α *de*

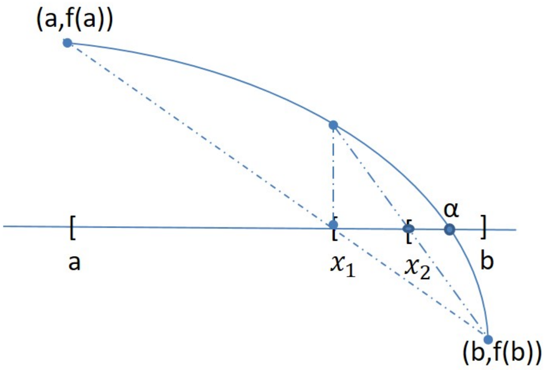
$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$$

com $\alpha \in [2, 3]$ *e tal que o erro absoluto seja inferior a uma milionésima.*

3 Método da Falsa Posição

O **método da falsa posição**, ou *regula falsi*, aplica-se a problemas nas mesmas condições que o método da bissecção e tem, em geral, uma velocidade de convergência maior que o método da bissecção.

Enquanto que no método da bissecção se usa o ponto médio do intervalo para descobrir uma nova iterada, neste método usa-se a recta secante que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e nova a iterada que se obtém é o ponto onde esta recta cruza o eixo dos xx.



O declive da recta secante é dado por

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

mas também pode ser obtido por

$$m = \frac{f(b) - 0}{b - x_1}.$$

Logo

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b)}{b - x_1},$$

donde se conclui que

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Após o cálculo de x_1 fica-se perante três possibilidades (que são as mesmas que as do método da bissecção):

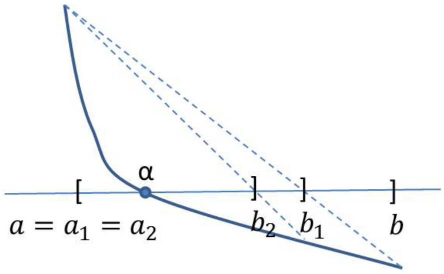
1. $f(a)$ e $f(x_1)$ têm sinais diferentes e conclui-se que $\alpha \in \left]a, x_1\right[$;
2. $f(x_1)$ e $f(b)$ têm sinais diferentes e conclui-se que $\alpha \in \left]x_1, b\right[$;
3. $f(x_1) = 0$ logo $\alpha = x_1$ e o processo termina.

Caso uma das duas primeiras possibilidades tenha ocorrido, descobre-se em qual dos subintervalos do intervalo I está o zero. Repete-se este processo até que a amplitude do intervalo onde se está a trabalhar seja tão pequena quanto se queira ou até se tenha descoberto a raiz da equação. Após cada passo, a aproximação que se obtém é dada por

$$x_n = b_n - \frac{f(b_n)}{f(b_n) - f(a_n)}(b_n - a_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

e prova-se que esta sucessão converge para a raiz α.

Note-se que, tal como a figura seguinte mostra,



apesar dos intervalos de cada iterada ficarem cada vez menores, é possível que não tendam para amplitude nula. Nestes casos, a partir de uma certa iterada n, um dos extremos do intervalo será a raiz que se procura.

Exemplo. *Considere-se a função $f(x) = e^{-x} + 2x - 2$. Vejamos que a função tem um único zero no intervalo $[-2, -1]$ e calculemos duas aproximações com o método da falsa posição.*

Como

$$f(-2) = 1.389056$$

e

$$f(-1) = -1.281718$$

têm sinais diferentes tais que

$$f'(x) = -e^{-x} + 2 < 0, \text{ para } x \in [-2, -1],$$

então a função tem um único zero neste intervalo. Logo

$$x_1 = -1 - \frac{f(-1)}{f(-1) - f(-2)}[-1 - (-2)] = -1.479905.$$

Como

$$f(-1.479905) \approx -0.567282 < 0,$$

então o novo intervalo que contém a raiz procurada será $]-2, -1.479905[$. A segunda aproximação será

$$\begin{aligned} x_2 &= -1.479905 - \frac{f(-1.479905)}{f(-1.479905) - f(-2)}[-1.47995 - (-2)] \\ &\approx -1.6307, \end{aligned}$$

tal que

$$f(x_2) \approx -0.153951.$$

Como f' é positiva e decrescente em $[-2,-1]$,

$$\min_{x\in[-2,-1]} |f'(x)| = f'(-1).$$

Assim, utilizando a fórmula geral do majorante do erro absoluto apresentada na secção 1, tem-se que

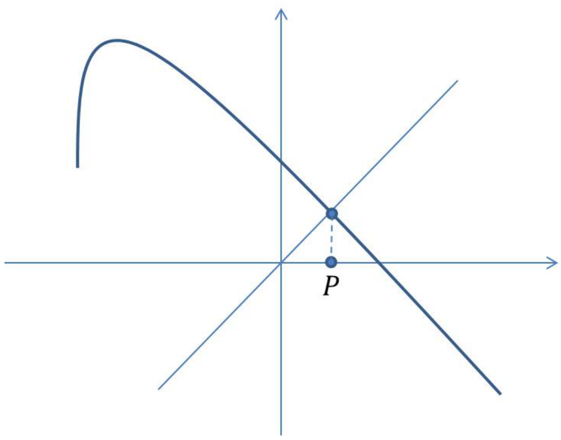
$$|e_2| = |\alpha - x_2| \leqslant \frac{|f(x_2)|}{f'(-1)} \approx 0.2143.$$

4 Método do Ponto Fixo

Um **ponto fixo** de uma função real g é um ponto $P \in D_g$ tal que

$$P = g(P).$$

Geometricamente, os pontos fixos da função g são os pontos de intersecção de $y = g(x)$ com $y = x$.



Seja f uma função que tem um zero $\alpha \in I$, ou seja tal que

$$f(\alpha) = 0.$$

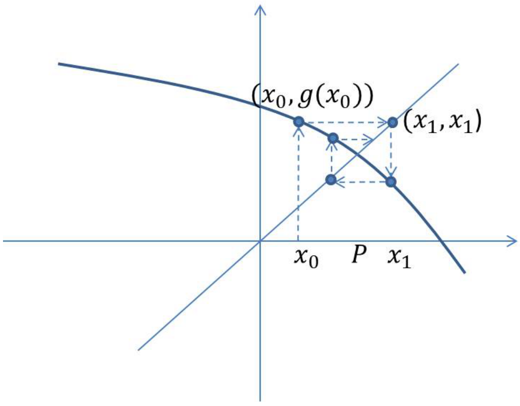
Se existir uma função g tal que

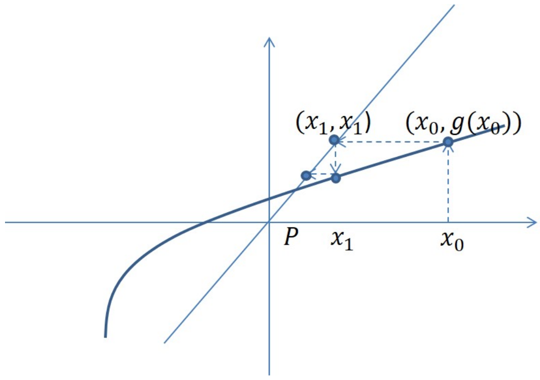
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$$

então α é um ponto fixo de g e o **método do ponto fixo** define-se por

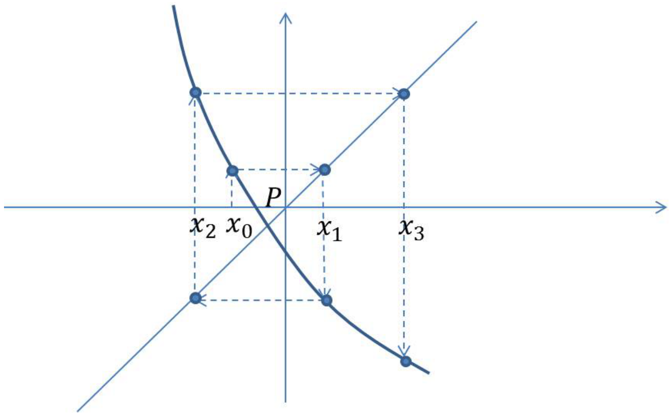
$$x_n = g(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots$$

As figuras seguintes ilustram a aplicação deste método:





No entanto, nem sempre o método do ponto fixo converge. A figura seguinte exemplifica essa situação:



O próximo resultado indica em que condições o método do ponto fixo converge.

Teorema. *Seja α o único zero de f em $I = [a, b]$ e sejam g e g' funções contínuas em I tal que $g(\alpha) = \alpha$. Se*

$$g(I) \subseteq I \text{ , i.e., } \forall x \in I, g(x) \in I$$

e

$$|g'(x)| \leqslant M < 1, \forall x \in [a, b],$$

então g tem um único ponto fixo α no intervalo I e a sucessão das aproximações $\{g(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ converge para α, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in I$.

Demonstração. Pelo Teorema de Lagrange, conclui-se que existe um c_n entre α e x_{n-1} tal que

$$g(\alpha) - g(x_{n-1}) = g'(c_n)(\alpha - x_{n-1}).$$

Como

$$\alpha \in I \text{ e } x_{n-1} \in I \Rightarrow c_n \in I \text{ e } |g'(c_n)| \leqslant M < 1.$$

Então,

$$\begin{aligned} & |\alpha - x_n| = |g'(c_n)| |\alpha - x_{n-1}| \leqslant M |\alpha - x_{n-1}| \\ \Rightarrow \quad & |\alpha - x_n| \leqslant M |\alpha - x_{n-1}| \leqslant M^2 |\alpha - x_{n-2}| \leqslant \ldots \leqslant M^n |\alpha - x_0|. \end{aligned}$$

Uma vez que $M < 1$, tem-se que

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} |\alpha - x_n| \leqslant |\alpha - x_0| \lim_{n\to+\infty} M^n = 0.$$

Pelo que

$$|\alpha - x_n| \to 0,$$

isto é,

$$x_n \to \alpha.$$

$\square$

De acordo com a demonstração anterior, deduz-se que

$$\frac{|\alpha - x_n|}{|\alpha - x_{n-1}|} = |g'(c_n)|$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\alpha - x_n|}{|\alpha - x_{n-1}|} = \lim_{n\to+\infty} |g'(c_n)| = g'\left(\lim_{n\to+\infty} c_n\right) = g'(\alpha)$$

Então,

$$|e_{n+1}| \leqslant M\,|e_n|\,,\ n = 0, 1, \ldots$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |g'(\alpha)|\,.$$

Como, $|g'(\alpha)| < 1$, este facto mostra que a ordem de convergência deste método (supondo α, uma raiz simples[3] de f) é linear com um coeficiente assimptótico $c = |g'(\alpha)|$.

Exemplo. *Calcule-se uma aproximação da raiz de $f(x) = x^2 + x - 1$ situada no intervalo $[0.5, 1]$ com um erro inferior a 0.01. Repare-se que como f é contínua e $f(0.5) \times f(1) < 0$, então existe uma raiz de f naquele intervalo. Uma vez que no intervalo dado f é crescente, logo a raiz é única.*

Note-se que a escolha mais óbvia, $g(x) = -x^2 + 1$, não funciona neste intervalo pois não tem derivada em módulo menor que 1.

Considere-se então

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$

pois

$$\frac{1}{1+x} = x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0.$$

Assim, g e g' são contínuas em $[0.5, 1]$. Além disso,

$$|g'(x)| \leqslant |g'(0,5)| = \frac{4}{9}, \forall x \in [0.5, 1]\,.$$

e

$$g([0.5, 1]) = [g(1), g(0.5)] = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subseteq [0.5, 1]\,,$$

[3] α diz-se uma raiz simples de f se $f'(\alpha) \neq 0$

ou seja, verificam-se as condições de convergência do método do ponto fixo. Escolhendo para x_0 o extremo maior do intervalo, o erro será inferior ou igual à amplitude do intervalo, ou seja,

$$|e_0| \leqslant 0.5.$$

Assim,

n	x_n	$x_{n+1} = g(x_n)$	*majorante de* $|e_{n+1}|$
0	1	0.5	$\frac{4}{9} \times 0.5$
1	0.5	0.66667	$\left(\frac{4}{9}\right)^2 \times 0.5$
2	0.66667	0.6	$\left(\frac{4}{9}\right)^3 \times 0.5$
3	0.6	0.625	$\left(\frac{4}{9}\right)^4 \times 0.5$
4	0.625	0.61538	$\left(\frac{4}{9}\right)^5 \times 0.5 \approx 0.009$

Logo, $x_5 = 0.61538$ é a aproximação pretendida.

Exemplo. *Considere-se a função $g(x) = \frac{\pi}{2} - 0.5 \operatorname{sen} x$ e encontre-se uma aproximação da raiz da equação $x + 0.5 \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{2} = 0$ no intervalo $I = [0, \pi]$ usando o método do ponto fixo em 3 iterações.*

Como $g'(x) = -0.5 \cos x$, então g e g' são funções contínuas em $[0, \pi]$. Além disso, $g([0, \pi]) \subseteq [0, \pi]$ pois

$$\max g = g(0) = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708 < \pi$$

e

$$\min g = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 0.5 \approx 1.0708 > 0.$$

Por outro lado,

$$|g'(x)| = |0.5 \cos x| \leqslant 0.5 < 1.$$

Estão assim asseguradas as condições suficientes de unicidade e existência do ponto fixo de g em I e, adicionalmente, de convergência do método do ponto fixo qualquer que seja x_0 escolhido em I.

Como

$$x + 0.5 \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow g(x) = x,$$

aplica-se o método do ponto fixo escolhendo para x_0 o ponto médio do intervalo I donde

$$|e_0| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

n	x_n	$x_{n+1} = g(x_n)$	*majorante de* $|e_{n+1}|$
0	$\frac{\pi}{2}$	1.070 8	$\frac{\pi}{2} \times 0.5$
1	1.070 8	1.132	$\frac{\pi}{2} \times 0.5^2$
2	1.132	1.118 2	$\frac{\pi}{2} \times 0.5^3$

Logo $x_3 = 1.118\,2$ com $|e_3| \leqslant \frac{\pi}{2} \times 0.5^3 \approx 0.196\,35$.

Exercício. *Considere a equação $x^4 - x + 0.1 = 0$.*

1. *Determine uma função g e um intervalo real tais que o método iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ convirja para a maior raiz real da equação dada.*

2. *Utilizando o método iterativo indicado, obtenha uma aproximação da maior raiz real da equação dada realizando três iterações.*

5 Método de Newton

Seja f uma função real. Sempre que f, f' e f'' são funções contínuas perto de uma raiz α, pode-se usar o **método de Newton**, também conhecido pelo **método das tangentes**, para construir uma sucessão $\{x_n : n \geq 0\}$ de aproximações de α que converge mais rapidamente para α que os métodos descritos nas secções anteriores.

Admita-se que f é uma função contínua, com derivada contínua e diferente de zero no intervalo $[a, b]$, tal que $f(a) \times f(b) < 0$.

Pretende-se achar um valor x que satisfaça a equação $f(x) = 0$. Suponha-se que x_1 é um valor próximo da raiz procurada pertencente ao intervalo em estudo. Pela fórmula de Taylor,

$$f(x) \approx f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1).$$

Logo,

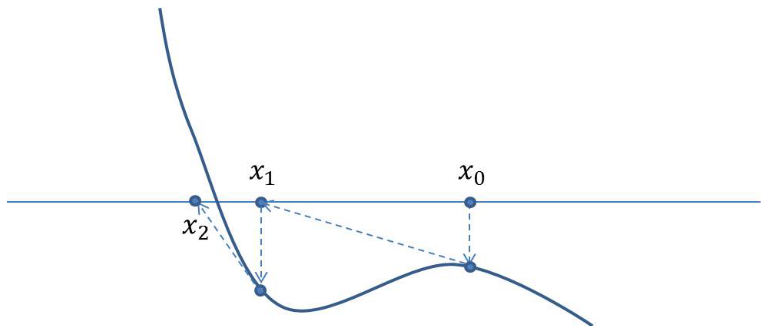
$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Rightarrow \quad & f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1) \approx 0 \\ \Rightarrow \quad & x \approx x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \end{aligned}$$

Assim, considerando x uma segunda aproximação da raiz de f em $[a, b]$,

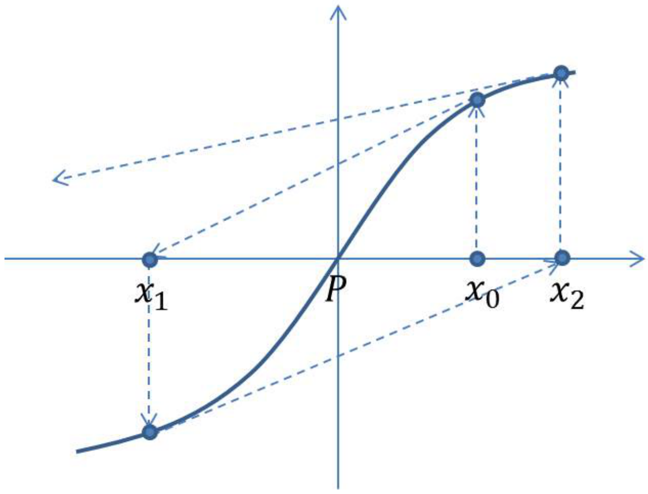
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

A repetição deste procedimento conduz-nos ao seguinte processo iterativo, conhecido por **método de Newton**,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$



Nem sempre a sucessão $\{x_n : n \geq 0\}$ gerada por este método converge para a raiz de f em $[a, b]$, como se pode ver na figura seguinte.



No entanto, se certas condições forem asseguradas este método não só converge, como o faz rapidamente. No resultado seguinte apresentam-se condições suficientes de convergência.

Teorema. *Seja* $I = [a, b]$ *uma vizinhança do zero* α *de uma função* $f \in C^2([a, b])$[4] *e suponha-se que se verificam as condições:*

1. $|f'(x)| \geqslant m_1 > 0, \forall x \in I$;
2. $|f''(x)| \leqslant m_2, \forall x \in I$;
3. $M(b-a) < 1$ *com* $M = \dfrac{m_2}{2m_1}$.

Escolhendo para x_0 *um dos extremos do intervalo* I *em que a função* f *tem o mesmo sinal que a sua segunda derivada, isto é,* $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$, *o método de Newton converge para a raiz* α *e o erro das iteradas consecutivas satisfaz a relação*

$$|e_{n+1}| \leqslant M |e_n|^2 .$$

Demonstração. As funções f' e f'' são contínuas e não mudam de sinal , por causa das condições 1. e 2, no intervalo I. Logo, o zero α de f é único.

Sem perda de generalidade, suponha-se que $f' > 0$ e $f'' > 0$ para todo o $x \in I$. Nestas circunstâncias $x_0 = b$ e $\alpha < x_0$.

Demonstre-se que o método de Newton gera uma sucessão

$$\alpha < \cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x_0 = b$$

decrescente e limitada inferiormente pela raiz α.

A fórmula de Taylor de f centrada $x = \alpha$ com resto de ordem 2 no ponto x_0 é

$$f(\alpha) = 0 = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(\alpha - x_0)^2 ,$$

[4] f diz-se de classe C^p, se $f, f', f'', \ldots, f^{(p)}$ são funções contínuas

para um certo c entre α e x_0. Desta última expressão deduz-se sucessivamente

$$\begin{aligned}\alpha &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(\alpha - x_0)^2 \\ &= x_1 - \frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(\alpha - x_0)^2 .\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\alpha - x_1 = -\frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(\alpha - x_0)^2 .$$

Como $f' > 0$ e $f'' > 0$, então

$$\alpha - x_1 < 0 \Rightarrow \alpha < x_1.$$

Por outro lado, tendo em conta

$$\begin{aligned}\left|\frac{\alpha - x_1}{\alpha - x_0}\right| &= \left|-\frac{f''(c)}{2f'(x_0)}\right| |\alpha - x_0| \\ &\leqslant \frac{m_2}{2m_1}|\alpha - x_0| = M|\alpha - x_0| \\ &< M(b-a) < 1.\end{aligned}$$

Isto é, x_1 está mais próximo da raiz do que x_0. Desta forma $\alpha < x_1 < x_0$. Analogamente, conclui-se que

$$\alpha < \cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x_0 = b.$$

Como a sucessão das iteradas é decrescente e limitada, então é convergente para um certo número β no intervalo em I. Mas repare-se que

$$\beta = \lim x_{n+1} = \lim\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \Rightarrow f(\beta) = 0.$$

Como a única raíz de f no intervalo I é α, logo $\beta = \alpha$, o que mostra que $\lim x_n = \alpha$, ou seja, o método de Newton converge para a raiz α.

Recorra-se novamente ao desenvolvimento de f em série de Taylor:

$$f(\alpha) = 0 = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(c_n)}{2}(\alpha - x_n)^2 ,$$

para certo c_n entre α e x_n. Logo,

$$\begin{aligned}|e_{n+1}| &= |\alpha - x_{n+1}| = \left|-\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2\right| \\ &\leq \frac{m_2}{2m_1}(\alpha - x_n)^2 = M|e_n|^2 ,\end{aligned}$$

tal como se pretendia demonstrar. □

Da demonstração deste Teorema, que se baseia no desenvolvimento de f em fórmula de Taylor com resto de ordem 2, conclui-se que

$$|e_{n+1}| = \left| -\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} (\alpha - x_n)^2 \right|,$$

onde c_n é o ponto garantido pelo Teorema de Lagrange e que está entre x_n e α. Logo,

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \left| \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right|,$$

donde,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right| = \left| \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \right| = c > 0.$$

Este facto mostra que o **método de Newton** tem uma **ordem de convergência quadrática** se a raiz α for simples (isto é, se $f'(\alpha) \neq 0$).

Exemplo. *Calcule-se um valor aproximado de* $\sqrt{5}$ *com um erro inferior a* 0.02.

Note-se que $\sqrt{5}$ *é a raiz positiva de* $f(x) = x^2 - 5$. *Além disso,* $\sqrt{5}$ *está no intervalo* $[2,3]$ *e é a única raiz no intervalo pois* f *é crescente e* $f(2) \times f(3) < 0$.

Verifiquem-se as condições do Teorema. A função $f \in C^2([2,3])$ *e*

1. $|f'(x)| = 2|x| \geqslant 4 = m_1 > 0, \forall x \in [2,3]$,
2. $|f''(x)| = 2 \leqslant m_2 = 2, \forall x \in [2,3]$,
3. $M(b-a) = \frac{m_2}{2m_1}(3-2) = \frac{2}{2\times 4} = 0.25 < 1.$

Escolha-se x_0 *de forma a assegurar que* $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$. *Como* $f''(x) > 0$ *a escolha recai sobre* $x_0 = 3$.

Logo, o método de Newton converge e é definido por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n} \right).$$

Note-se que

$$|e_{n+1}| \leqslant M |e_n|^2 \ \text{ com } M = \frac{m_2}{2m_1} = \frac{2}{2\times 4} = 0.25.$$

Como

n	x_n	$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$	*majorante de* $\lvert e_{n+1}\rvert$
0	3	7/3	0.25
1	7/3	2.2380	$0.25 \times 0.25^2 = 0.015625$

então, $x_2 = 2.238$ *é uma aproximação de* $\sqrt{5}$ *com um erro inferior a* 0.02.

Exemplo. *Considere-se a equação* $2x + \ln x = 1$.

Seja $f(x) = 2x + \ln x - 1$. *Note-se que os zeros de* f *são as raízes da equação dada. O domínio de* f *é* $]0, +\infty[$ *e* f *é contínua e diferenciável neste intervalo. Como*

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 < 0,$$

$$f(1) = 1 > 0,$$

e f *é estritamente crescente, pois*

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0,$$

então f *tem um único zero em* $]0, +\infty[$ *e este localiza-se em* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Verifiquem-se as condições do Teorema. A função $f \in C^2\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ *e*

1. $|f'(x)| = 2 + \dfrac{1}{x} \geqslant 3 = m_1 > 0, \forall x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$,
2. $|f''(x)| = \dfrac{1}{x^2} \leqslant m_2 = 4, \forall x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$,
3. $M(b-a) = \dfrac{m_2}{2m_1}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{2 \times 3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} < 1$.

Use-se o método de Newton para obter uma aproximação da raiz da equação dada com um erro absoluto não superior a uma décima.

Tem-se que

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{2x_n + \ln x_n - 1}{2 + \frac{1}{x_n}}. \end{aligned}$$

Como $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$ *e* $f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4 < 0$, *escolhe-se* $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

n	x_n	*majorante de* $\lvert e_n \rvert$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0.67329	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{3} \approx 0.166\,67$
2	0.68735	$0.166\,67^2 \times \frac{2}{3} \approx 1.8519 \times 10^{-2}$

então $x_2 = 0.6875$ *é uma aproximação da raiz da equação dada.*

6 Método da Secante

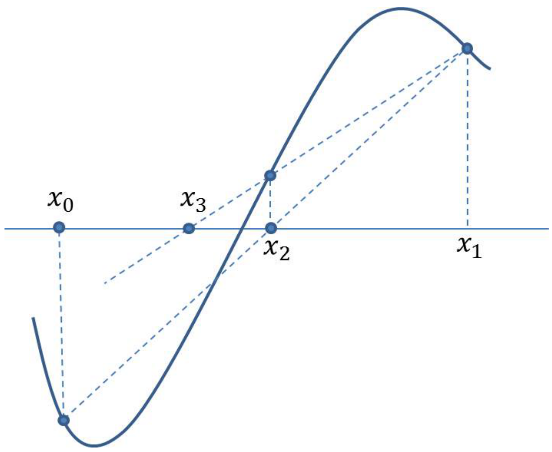
O método de Newton requer o cálculo das funções f e f' por cada iterada. Por vezes é desejável ter um método que convirja quase tão rapidamente quanto o de Newton mas que envolva apenas cálculos sobre a função f, sem recurso à sua derivada.

Tal como no método da falsa posição, no **método da secante** cada termo é a coordenada x_{n+1} que resulta da intersecção da recta secante que une os pontos $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ e $(x_n, f(x_n))$ com o eixo das abcissas. No entanto, neste método não se exige que $f(x_{n-1}) \times f(x_n) < 0$. Este método é definido por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}, \text{ com } n = 1, 2, \ldots$$

ou seja,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}), \text{ com } n = 1, 2, \ldots$$



No resultado seguinte apresentam-se as condições suficientes de convergência do método da secante.

Teorema. *Seja $I = [a, b]$ uma vizinhança do zero α de uma função $f \in C^2([a, b])$ e suponha-se que se verificam as condições:*

1. $|f'(x)| \geqslant m_1 > 0$, $\forall x \in I$;
2. $|f''(x)| \leqslant m_2$, $\forall x \in I$;
3. $M(b-a) < 1$ *com* $M = \dfrac{m_2}{2m_1}$.

Então, escolhendo para x_1 e x_0 dois pontos do intervalo I tais que,

$$f(x_1) \times f''(x_1) > 0 \text{ e } f(x_0) \times f''(x_0) > 0$$

o método da secante converge para a raiz α.

O resultado seguinte indica-nos como majorar o erro.

Teorema. *Se todas as iteradas resultantes da aplicação do processo estiverem contidas numa vizinhança* $[a,b]$ *suficientemente pequena da raiz* α *da função* $f \in C^2([a,b])$, *então o método da secante é convergente e o erro satisfaz a relação*

$$|e_{n+1}| \leq M\,|e_n|\,|e_{n-1}| \tag{1}$$

com $M = \dfrac{m_2}{2m_1}$, $|f'(x)| \geqslant m_1 > 0$ *e* $|f''(x)| \leqslant m_2$ *para todo* $x \in [a,b]$.

Se as aproximações estão suficientemente próximas da raiz, prova-se que a **ordem de convergência** do método da secante é

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618,$$

i.e., tem convergência supralinear.

Exemplo. *Calcule-se um valor aproximado de* $\sqrt{5}$ *com um erro inferior a* 0.01.

Já se viu no método de Newton que f *está nas condições do Teorema, com* $m_1 = 4$, $m_2 = 2$ *e* $M = 0.25$. *Pelo método da secante,*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{x_n^2 - x_{n-1}^2}\left(x_n - x_{n-1}\right) = \frac{x_n x_{n-1} + 5}{x_n + x_{n-1}}.$$

Para $x_0 = 3$ *e* $x_1 = 2.5$, *tem-se que*

n	x_{n+1}	x_n	x_{n-1}	*maj. de* $\lvert e_{n+1}\rvert$
1	2.2727	2.5	3	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 1 = 0.125$
2	2.2381	2.2727	2.5	$\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = 1.5625 \times 10^{-2}$
3	2.2361	2.2381	2.2727	$\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times 1.5625 \times 10^{-2} = 4.8828 \times 10^{-4}$

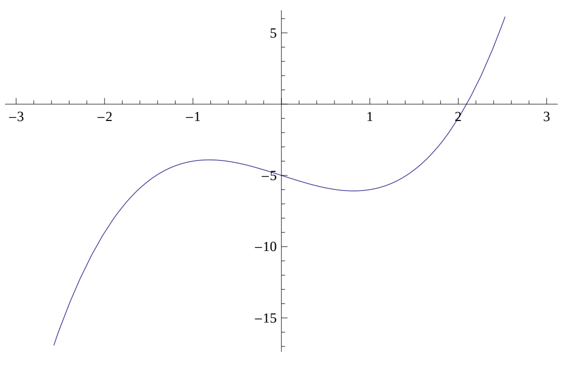
e $x_4 \approx 2.2361$ *é a resposta que se procura.*

7 Exemplo em Matlab

A função

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$

tem apenas um zero:



Utilize-se os diversos métodos iterativos para o cálculo da raiz real α de

$$f(x) = 0.$$

No quadro seguinte, comparam-se o número de iterações necessárias para se obter

$$\alpha = 2.09455$$

usando os diferentes métodos.

Método iterativo	Número de iterações	observações
Bissecção	17	$I = [2, 3]$
Falsa posição	9	$I = [2, 3]$
Ponto Fixo	7	$x_0 = 3$ e $g(x) = \sqrt[3]{2x + 5}$
Newton	3	$x_0 = 2$
Secante	4	$x_0 = 2$ e $x_1 = 3$

em seguida apresentam-se os comandos usados no Matlab para cada método iterativo.

7.1 Bissecção

```
function [x e] = biseccao(f,a,b,n)

format long
c = f(a); d = f(b);
if c*d > 0.0
    error('A funcao tem o mesmo sinal nos extremos do intervalo.')
end
disp('            x                        y')
for i = 1:n
    x = (a + b)/2;
    y = f(x);
    disp([    x      y])
    if y == 0.0
        e = 0;
        return
    end
    if c*y < 0
        b=x;
    else
        a=x;
    end
end
e = (b-a)/2
```

7.2 Falsa posição

```
function [c,err,yc]=falsap(f,a,b,delta,epsilon,max1)


ya=feval(f,a);
yb=feval(f,b);

if ya*yb>0
        disp('Nota: f(a)*f(b) >0'),
        return,
end

for k=1:max1
        dx=yb*(b-a)/(yb-ya);
        c=b-dx;
        ac=c-a;
        yc=feval(f,c);
        if yc==0,return;
        elseif yb*yc>0
                b=c;
                yb=yc;
        else
                a=c;
                ya=yc;
        end
        dx=min(abs(dx),ac);
        if abs(dx)<delta,return,end
        if abs(yc)<epsilon, return,end
end

c;
err=abs(b-a)/2;
yc=feval(f,c);
```

7.3 Ponto fixo

```
function [P] = pontofixo(g,p0,tol,max1)

P(1)= p0;

for k=2:max1+1
        P(k)=feval(g,P(k-1));
        err=abs(P(k)-P(k-1));
        relerr=err/(abs(P(k))+eps);
        p=P(k);
        if (err<tol) | (relerr<tol),return;end
```

```
end

P=p;
```

7.4 Newton

```
function [p0,err,k,y]=newton(f,df,p0,delta,epsilon,max1)


for k=1:max1
        p1=p0-feval(f,p0)/feval(df,p0);
        err=abs(p1-p0);
        relerr=2*err/(abs(p1)+delta);
        p0=p1;
        y=feval(f,p0);
        if (err<delta)|(relerr<delta)|(abs(y)<epsilon),return,end
end
```

7.5 Secante

```
function [p1,err,k,y]=secante(f,p0,p1,delta,epsilon,max1)

for k=1:max1
        p2=p1-feval(f,p1)*(p1-p0)/(feval(f,p1)-feval(f,p0));
        err=abs(p2-p1);
        relerr=2*err/(abs(p2)+delta);
        p0=p1;
        p1=p2;
        y=feval(f,p1);
        if (err<delta)|(relerr<delta)|(abs(y)<epsilon),return,end
end
```