Sistemas de Equações Lineares

Análise Numérica

Artur M. C. Brito da Cruz

Escola Superior de Tecnologia
Instituto Politécnico de Setúbal
2015/2016 [1]

[1] versão 20 de Setembro de 2017

Conteúdo

1 Matrizes 3
2 Operações com Matrizes 4
3 Determinantes e Matriz Inversa 7
4 Sistemas de Equações Lineares 11
5 Método de Eliminação de Gauss 12
6 Factorização LU 14
7 Avaliação do Esforço Computacional 17
8 Pesquisa de Redutor 18
8.1 Pesquisa Parcial de Redutor 19
8.2 Pesquisa Total de Redutor 21
9 Métodos Compactos 21
9.1 Método de Doolittle 21
9.2 Método de Cholesky 25
10 Métodos Iterativos 28
10.1 Método de Jacobi 29
10.2 Método de Gauss-Seidel 31
10.3 Convergência dos Métodos Iterativos 32
10.3.1 Aplicação ao Método de Jacobi 34
10.3.2 Aplicação ao Método de Gauss-Seidel 35

1 Matrizes

Uma **matriz** real A de tipo $m \times n$ (lê-se m por n) é uma representação de número reais em m linhas e n colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Por exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz de tipo 2×3.

O conjunto de todas as matrizes reais de tipo $m \times n$ representa-se por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Uma **matriz linha** é uma matriz de tipo $1 \times n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix},$$

uma **matriz coluna** é uma matriz de tipo $m \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

e uma **matriz quadrada**, ou de ordem n, é uma matriz de tipo $n \times n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Uma **matriz diagonal** é uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ em que

$$a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j,$$

isto é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Um exemplo de uma matriz diagonal é a **matriz identidade de ordem** n

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma **matriz triangular superior** é uma matriz quadrada em que

$$a_{ij} = 0 \text{ para } i > j,$$

isto é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e uma **matriz triangular inferior** é uma matriz quadrada em que

$$a_{ij} = 0 \text{ para } i < j,$$

isto é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

A **matriz nula** de tipo $m \times n$ é a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} = [0]_{m \times n}.$$

Uma **matriz simétrica** é uma matriz quadrada $A = [a_{i,j}]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ em que

$$a_{ij} = a_{ji},$$

isto é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Duas **matrizes** A e B do mesmo tipo $m \times n$ são **iguais**, e escreve-se $A = B$, se

$$a_{ij} = b_{ij}, \text{ para todo o } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ e para todo o } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

2 Operações com Matrizes

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ do mesmo tipo $m \times n$, define-se **soma** de A com B como sendo a matriz de tipo $m \times n$

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

para todo o $i \in \{1, \ldots, m\}$ e para todo o $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Analogamente define-se a subtracção de matrizes.

O **produto escalar** de $k \in \mathbb{R}$ por uma matriz $A = [a_{ij}]$ de tipo $m \times n$ define-se como sendo a matriz de tipo $m \times n$

$$kA = [ka_{ij}]$$

para todo o $i \in \{1, \ldots, m\}$ e para todo o $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por exemplo,

$$2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Teorema. *Sejam A,B e C matrizes de tipo $m \times n$, α,β números reais. Então:*

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $A + [0]_{m \times n} = A$;
4. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$;
5. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$;
6. $(\alpha\beta) A = \alpha (\beta A)$;
7. $1A = A$ *e* $0A = [0]_{m \times n}$.

Duas matrizes A e B dizem-se **encadeadas** se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Por exemplo, as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

são encadeadas mas as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

não são encadeadas.

Sejam A uma matriz de tipo $m \times p$ e B uma matriz de tipo $p \times n$, ou seja A e B são matrizes encadeadas. O **produto** das matrizes A e B é a matriz AB de tipo $m \times n$ definida por

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

ou seja, cada entrada i, j é obtida pela soma de todos os produtos dos elementos da linha i da matriz A pelos correspondentes elementos da coluna j da matriz B. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \boxed{2 \quad -2 \quad 1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 3} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}_{4\times 2}.$$

Teorema. *Sejam A,B e C matrizes tais que as operações abaixo descritas estejam bem definidas e seja $k \in \mathbb{R}$. Então,*

1. $A(BC) = (AB)C$;
2. $A(B+C) = AB + AC$;
3. $(A+B)C = AC + BC$;
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;
5. $[0]_{m\times n} A_{n\times p} = [0]_{m\times p}$;
6. $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$.

Note-se que o produto de matrizes não é uma operação comutativa pois, por exemplo, o produto de uma matriz A de tipo 2×3 por uma matriz B de tipo 3×4 está bem definido mas não faz sentido em falar do produto da matriz B pela matriz A.

Seja A uma matriz de tipo $m \times n$. A **matriz transposta** de A é a matriz de ordem $n \times m$, que se denota por A^T, e é definida por

$$A^T = [a_{ji}].$$

Por exemplo, a matriz transposta de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema. *Sejam A e B matrizes tais que as operações abaixo descritas estejam bem definidas e seja $k \in \mathbb{R}$. Então,*

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $(kA)^T = kA^T$;
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

3 Determinantes e Matriz Inversa

Dada uma matriz A quadrada de ordem n, representa-se por A_{ij} a matriz que se obtém da matriz A eliminando a linha i e coluna j e que se denomina como **matriz menor**. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

então

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

O **determinante** de uma matriz é uma função que associa a cada matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ um número real, que se representa por $\det A$ ou $|A|$, ou seja

$$\begin{array}{rcl} \det : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det A. \end{array}$$

O determinante de uma matriz de ordem 1

$$A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$$

é definido por

$$\det A = a.$$

O determinante de uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n \geqslant 2$ é definido para uma qualquer linha $i \in \{1.\dots, n\}$ por

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \\ &= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \ldots + a_{in}\Delta_{in} \end{aligned}$$

em que

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

se designa por **complemento algébrico**.

Por exemplo, o determinante de uma matriz de ordem 2 pode ser calculado utilizando a 1ª linha da matriz. Assim,

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= a \times (-1)^{1+1} \times \det \begin{bmatrix} d \end{bmatrix} + b \times (-1)^{1+2} \times \det \begin{bmatrix} c \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\det A = ad - bc.$$

Calcule-se um determinante de uma matriz de ordem 3 pela primeira linha

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\left(-1\right)^{1+1}\det A_{11} + a_{12}\left(-1\right)^{1+2}\det A_{12} + a_{13}\left(-1\right)^{1+3}\det A_{13} \\
&= \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (45-0) - 2\,(36-42) + 3\,(0-35) \\
&= -48.
\end{aligned}$$

Note-se que esta definição está bem definida e não depende da escolha da linha i. O cálculo do determinante desta forma denomina-se por desenvolvimento ao longo da linha i. De facto, esta definição também pode ser introduzida pelo desenvolvimento ao longo da coluna j, ou seja,

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \\
&= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \ldots + a_{nj}\Delta_{nj}.
\end{aligned}$$

Ao repetir-se o exercício anterior aplicado ao longo da coluna 2

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} \\
&= \left(-1\right)^{1+2} a_{12}\det A_{11} + \left(-1\right)^{2+2} a_{22}\det A_{12} + \left(-1\right)^{3+2} a_{13}\det A_{32} \\
&= -2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 0 \\
&= -2\,(36-42) + 5\,(9-21) \\
&= -48.
\end{aligned}$$

Esta não é única forma de calcular um determinante e denomina-se de fórmula de Laplace.

Um outro método muito utilizado no cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3 é a regra de Sarrus:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right) - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}\right).
\end{aligned}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1+3+0)-(-2+0+12) \\ &= -6.\end{aligned}$$

Teorema. *Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então*

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
2. $\det\left(A^T\right) = \det(A)$;
3. $\det I_n = 1$;
4. *O determinante de uma matriz diagonal é igual ao produto dos elementos da* ***diagonal principal*** *(o produto dos elementos a_{ii} com $i \in \{1, \ldots, n\}$);*
5. *O determinante de uma matriz triangular (superior ou inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.*

Note-se que, em geral, $\det(A+B) \neq \det A + \det B$. Por exemplo, se $A = B = I_2$, então

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

mas

$$\det A + \det B = 2.$$

Dada uma matriz A quadrada de ordem n, A diz-se uma matriz **invertível** se existe uma outra matriz de ordem n, que se representa por A^{-1}, tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

A matriz A^{-1} tem o nome de **matriz inversa** de A. Uma matriz que não é invertível diz-se **singular**.

Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível pois

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Teorema.

1. *Se uma matriz for invertível, a sua inversa é única;*

2. *A é uma matriz invertível se e só se* $\det A \neq 0$.

Para calcular a matriz inversa poder-se-á recorrer à matriz adjunta.

Seja A uma matriz de ordem n. Define-se a **matriz adjunta** de A como sendo a matriz transposta dos complementos algébricos, ou seja

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}^T.$$

A matriz adjunta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(A) &= \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ -\det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Teorema. *Seja A uma matriz de ordem n tal que* $\det A \neq 0$. *Então,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A).$$

Por exemplo, dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

pois $\det A = 2$.

Teorema. *Sejam A e B matrizes de ordem n invertíveis. Então:*

1. *AB é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

2. $(I_n)^{-1} = I_n$;

3. $(A^{-1})^{-1} = A$*;*

4. $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$*;*

5. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

4 Sistemas de Equações Lineares

Um sistema de n equações lineares e n **incógnitas** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pode ser representado na forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

onde a_{ij} e b_i $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$ são números reais conhecidos. O elemento a_{ij} é o **coeficiente da incógnita** x_j na equação de ordem i e b_i é o **termo independente** da mesma equação.

Matricialmente, o sistema anterior pode representar-se por

$$AX = B,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}], \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_i] \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [b_i],$$

são, respectivamente, a **matriz dos coeficientes**, a **matriz das incógnitas** e a **matriz dos termos independentes**. Usar-se-á a notação vectorial $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para representar uma matriz coluna X com n elementos e define-se **matriz ampliada do sistema** como

$$A|B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

A partir daqui e até ao final deste capítulo considerar-se-á apenas a **resolução de sistemas de equações lineares em que a matriz dos coeficientes é quadrada e invertível** o que na prática quer dizer que estes sistemas terão apenas uma única solução.

No ensino secundário ensina-se a resolver estes sistemas com recurso à técnica de substituição. Por exemplo

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1 + 3x_2 - 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 3x_2 - 2x_3 \\ (-1 + 3x_2 - 2x_3) - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2(-1 + 3x_2 - 2x_3) - 4x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1 + 3x_2 - 2x_3 \\ x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 3x_2 - 2x_3 \\ x_2 = 6 + x_3 \\ 2(6 + x_3) + 2x_3 = 8 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1 + 3x_2 - 2x_3 \\ x_2 = 6 + x_3 \\ 4x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Este sistema, possível e determinado, é representado na forma matricial

$$AX = B$$

e pode ser resolvido com recurso à matriz inversa, pois

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow I_nX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} -1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow X &= \begin{bmatrix} 16 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note-se que a resolução deste sistema por estes métodos é vagaroso e trabalhoso. Em análise numérica pretende-se encontrar métodos eficientes para a resolução de sistemas de equações lineares de qualquer dimensão e que possam ser implementados num computador (o Google para o PageRank usa matrizes de ordem de milhares de milhões).

Tais métodos de resolução podem ser classificados em **métodos directos** e **métodos iterativos**.

Nos métodos directos a solução é obtida após a realização de um número finito de operações aritméticas durantes as quais podem ocorrer erros (devido a arrendondamentos) que se propagam ao longo do algoritmo numérico usado.

Nos métodos iterativos, a partir de uma aproximação inicial, vão-se calculando sucessivamente novas aproximações da solução exacta do sistema. Cada iteração consiste em obter uma nova aproximação (ou iterada) a partir das anteriores. Os métodos iterativos produzem melhores soluções como será visto daqui em diante.

5 Método de Eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss é um método directo baseado na transformação de um sistema dado $AX = B$ num sistema equivalente $UX = Y$, em que U é uma matriz triangular superior (também chamada matriz em escada). Se $A|B$ é a matriz ampliada de $AX = B$, a transformação pode ser efectuada através da execução repetida de operações elementares sobre as linhas de $A|B$. As operações elementares são:

OE1 *Troca entre si de 2 linhas da matriz.*

OE2 *Multiplicação dos elementos de uma linha por uma constante diferente de zero.*

OE3 *Subtracção a uma linha de outra linha multiplicada por uma constante.*

Qualquer uma destas operações sobre $A|B$ substitui o sistema inicial por outro equivalente, isto é, com as mesmas soluções. Ao realizar estas operações de forma sistemática é possível, a partir do sistema inicial, determinar um sistema equivalente $UX = Y$, com U uma matriz triangular superior, cuja solução é facilmente obtida.

Use-se o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema de equações do exemplo anterior:

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases}.$$

Tem-se então que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada deste sistema é dada por

$$A|B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & | & -2 \\ 1 & -2 & 1 & | & 5 \\ 2 & -4 & 6 & | & 6 \end{bmatrix}.$$

Para transformar esta matriz efectuam-se, sucessivamente, as seguintes operações sobre linhas:

1. Dado que $a_{11} = 2 \neq 0$, podemos usar este elemento para anular os restantes elementos da 1ª coluna ($a_{21} = 1$ e $a_{31} = 2$). Para tal, subtraímos aos elementos das 2ª e 3ª linhas o produto da linha 1 pelos multiplicadores

   $$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 1,$$

   respectivamente.

   $$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -6 & 4 & | & -2 \\ 1 & -2 & 1 & | & 5 \\ 2 & -4 & 6 & | & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{OE3}} \\ L_2 - \frac{1}{2}L_1 \left(m_{21} = \frac{1}{2}\right) \\ L_3 - L_1 \left(m_{31} = 1\right) \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & | & -2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 6 \\ 0 & 2 & 2 & | & 8 \end{bmatrix}$$

   O elemento $a_{11} = 2$, designa-se por **redutor** (ou **pivot**).

2. Continuando a designar por a_{ij} os elementos da matriz ampliada obtida, tomando $a_{22} = 1 \neq 0$ como redutor, podemos anular o elemento abaixo ($a_{32} = 2$) utilizando de novo a operação OE3. Ao efectuar a subtracção entre a 3ª linha e o produto da 2ª linha pelo multiplicador

   $$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{2}{1} = 2,$$

e obtém-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right] \underset{L_3 - 2L_2\,(m_{32}=2)}{\xrightarrow{\text{OE3}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right].$$

Designando a matriz ampliada obtida por $U|Y$, verifica-se que

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz triangular superior, pelo que o sistema correspondente $UX = Y$, isto é,

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_2 - x_3 = 6 \\ 4x_3 = -4, \end{cases}$$

pode ser facilmente resolvido por **retrosubstituição**. Começando pela resolução da 3ª equação obtém-se a solução do sistema utilizando substituição de forma ascendente

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{4}{4} = -1 \\ x_2 = 6 + x_3 = 5 \\ x_1 = \frac{1}{2}(-2 + 6x_2 - 4x_3) = 16. \end{cases}$$

Como

$$AX = B \Leftrightarrow UX = Y,$$

então

$$\begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

é solução do sistema inicial.

Observação. *O método de eliminação de Gauss pode ser aplicado a qualquer sistema, nomeadamente a sistemas possíveis e inderteminados e impossíveis.*

6 Factorização LU

Teorema. *Se ao longo do processo de eliminação de Gauss não se efectuar troca de linhas, então a matriz A admite a factorização*

$$A = LU$$

em que L é uma matriz triangular inferior de diagonal unitária e U é a matriz triangular superior obtida no final daquele processo.

Repare-se que longo da resolução de um sistema $AX = B$ pelo método de eliminação de Gauss são calculados os multiplicadores m_{ij}. Ao construir-se uma matriz triangular inferior

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

consegue-se obter a factorização $A = LU$ descrita no teorema.

No sistema do exemplo anterior tem-se,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

e verifica-se que

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} = A.$$

O resultado deste teorema garante que

$$AX = B \Leftrightarrow (LU)\,X = B \Leftrightarrow L\,(UX) = B.$$

Considerando $UX = Y$, conclui-se que o método de eliminação de Gauss equivale à factorização $A = LU$ seguida da resolução de dois sistemas:

1. $LY = B$ para obter Y;

2. $UX = Y$ para obter X.

As soluções Y e X calculam-se facilmente visto que L e U são matrizes triangulares. Por isso, se houver a necessidade de determinar a solução X do sistema $AX = B'$, em que B' é diferente de B, bastará resolver $LY = B'$ e seguidamente $UX = Y$. Trata-se, com efeito, de uma vantagem significativa da factorização LU visto que, uma vez realizada, pode ser empregue para resolver sistemas que tenham em comum a mesma matriz de coeficientes.

Outra vantagem proporcionada pela factorização LU é a possibilidade de calcular de uma forma muito simples o determinante de A. Se $A = LU$, resulta das propriedades do determinante que

$$\det A = \det L \times \det U.$$

Como o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal, tem-se $\det L = 1$ e $\det U = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$, pelo que

$$\det A = \det U = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}.$$

Como hipótese necessária à validade do teorema admitiu-se que, ao longo do método de eliminação de Gauss, **não se efectuou troca de linhas**.

Exemplo. *Considere-se o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 6. \end{cases}$$

Como o primeiro elemento da primeira linha da matriz dos coeficientes do sistema é nulo, torna-se necessário efectuar uma troca de linhas para escolher o redutor da primeira coluna da matriz. O sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases}$$

é equivalente ao primeiro, ao qual já se pode aplicar o método de Gauss e obter a factorização $A = LU$*.*

$$\left[\begin{array}{ccccr} 1 & -2 & 1 & | & 5 \\ 0 & -1 & 4 & | & -2 \\ 1 & -4 & 6 & | & 6 \end{array}\right] \underset{L_3 - L_1 (m_{31}=1)}{\overset{OE3}{\longrightarrow} \atop (m_{21}=0)} \left[\begin{array}{ccccr} 1 & -2 & 1 & | & 5 \\ 0 & -1 & 4 & | & -2 \\ 0 & -2 & 5 & | & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 - 2L_2 (m_{32}=2)}{\overset{OE3}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccccr} 1 & -2 & 1 & | & 5 \\ 0 & -1 & 4 & | & -2 \\ 0 & 0 & -3 & | & 5 \end{array}\right].$$

Conclui-se assim que

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

tais que $A = LU$*.*

Se for necessário trocar linhas, bastará realizar essas trocas na matriz $A|B$ ***antes de iniciar o método de eliminação de Gauss.***

Exercício. *Considere o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 = -7 \end{cases}.$$

1. *Utilize o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema;*
2. *Obtenha a factorização LU da matriz dos coeficientes do sistema e aproveite-a para calcular o determinante dessa matriz (Note que se trocarmos duas linhas num determinante, mudamos o sinal ao determinante);*
3. *Utilize a alínea anterior para resolver o sistema tomando para 2º membro o vector* $(0, -2, -3, 49)$*.*

7 Avaliação do Esforço Computacional

O esforço computacional realizado por um algoritmo é habitualmente medido pelo número de operações aritméticas elementares (adições, subtracções, multiplicações ou divisões) efectuadas, ou seja o número de "*flops*"efectuados (o termo *flops* abrevia a expressão inglesa *floating point operations per second*).

O objectivo que temos agora em vista é a contagem do número de *flops* necessários para resolver um sistema $AX = B$ pelo método de eliminação de Gauss. Vamos considerar separadamente a criação das matrizes L e U a partir de A, depois a transformação de B no vector Y e finalmente a resolução de $UX = Y$ utilizando a substituição ascendente.

1. Cálculo de L e U

   No método de eliminação de Gauss, para obter a matriz $A^{(2)}$, a matriz resultante após anulamento dos termos a_{i1} para $i \in \{2, \ldots, n\}$, são necessárias $n-1$ divisões para calcular os multiplicadores m_{i1}, $i = 2, \ldots, n$. A obtenção dos elementos $a_{ij}^{(2)}$ requer, por outro lado, a realização de $(n-1)^2$ multiplicações e $(n-1)^2$ subtracções. Utilizando o mesmo raciocínio podemos proceder à contagem das operações realizadas na obtenção de cada matriz $A^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$; a tabela seguinte resume estas contagens.

Obtenção de $A^{(i)}$	Adições/Subtracções	Multiplicações	Divisões
$A^{(2)}$	$(n-1)^2$	$(n-1)^2$	$n-1$
$A^{(3)}$	$(n-2)^2$	$(n-2)^2$	$n-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A^{(n)} = U$	1	1	1
Total	$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$	$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$	$\frac{n(n-1)}{2}$

   O valor total em cada coluna foi obtido usando as igualdades

   $$\sum_{j=1}^{p} j = \frac{p(p-1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{p} j^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}, \quad p \geq 1.$$

   Estas igualdades irão ser provadas na Unidade Curricular de Matemática Discreta. Para a factorização LU, temos assim que o número total de *flops* é

   $$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6}$$

2. Transformação de B no vector Y

   Neste caso temos o seguinte quadro:

Obtenção de $B^{(i)}$	Adições/Subtracções	Multiplicações
$B^{(2)}$	$n-1$	$n-1$
$B^{(3)}$	$n-2$	$n-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$B^{(n)} = Y$	1	1
Total	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$

O número total de *flops* é

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2-n.$$

3. Resolução de $UX=Y$

   Neste caso tem-se

Obtenção de x_i	Adições/Subtracções	Multiplicações	Divisões
x_n	0	0	1
x_{n-1}	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_1	$n-1$	$n-1$	1
Total	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	n

   Assim, o número total de *flops* é

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+n=n^2.$$

Dos pontos 1., 2. e 3. conclui-se que o número total de *flops* necessários para resolver $AX=B$ é

$$\left(\frac{2n^3}{3}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}\right)+\left(n^2-n\right)+n^2=\frac{2}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{6}n\approx\frac{2}{3}n^3.$$

A estimativa de $2n^3/3$ apontada para o número total de *flops* é válida para grandes valores de n. De notar que a potência n^3 só aparece no cálculo do número de *flops* da factorização LU. Deste modo, o cálculo de L e U constitui o maior esforço computacional do processo de eliminação de Gauss. Uma vez obtidas estas matrizes, são somente necessários $2n^2-n\approx 2n^2$ *flops* para resolver $AX=B$. Conclui-se, portanto, que é relativamente económico resolver outros sistemas com a mesma matriz dos coeficientes, desde que a factorização LU tenha sido guardada.

8 Pesquisa de Redutor

Note-se que os redutores utilizados no método de eliminação de Gauss são não nulos. No entanto, as operações em ponto flutuante podem tornar não nulo um redutor que seria nulo caso os cálculos fossem realizados em aritmética exacta e, deste modo, poder-se-á introduzir erros grosseiros na solução final do sistema. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} 0.003x+59.140y=59.170 \\ 5.291x-6.130y=46.780 \end{cases}$$

tem solução exacta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

No entanto, se resolvermos este sistema pelo método de eliminação de Gauss em $FP\,(10, 4, -99, 99, A)$, tem-se que

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array}\right] \quad \underset{L_2 - m_{21}L_1}{\overset{\text{OE3}}{\longrightarrow}} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right]$$

onde $m_{21} = \frac{5.291}{0.003} = 1764$ e a solução aproximada que se obtém é

$$\left[\begin{array}{c} \bar{x} \\ \bar{y} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{-10} \\ 1.001 \end{array}\right].$$

O erro tão grande obtido deve-se ao facto de se ter escolhido um redutor com um valor absoluto muito próximo de zero. Pode-se evitar este problema com recurso aos métodos de **pesquisa parcial de redutor** e de **pesquisa total de redutor**.

8.1 Pesquisa Parcial de Redutor

Seja

$$A^{(k)}|B^{(k)} = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1k}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} & b_1^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \cdots & a_{2k}^{(k)} & \cdots & a_{2n}^{(k)} & b_2^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

a matriz ampliada no início do passo $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ do método de eliminação de Gauss. Considere-se

$$c_k = \max_{k \leqslant i \leqslant n} |a_{ik}^{(k)}|,$$

isto é, o maior dos valores absolutos dos elementos $a_{kk}^{(k)}, \ldots, a_{nk}^{(k)}$ da coluna k a partir da diagonal principal de $A^{(k)}$. Se este máximo é atingido no elemento $a_{rk}^{(k)}$ que se encontra na linha $r \in \{k, \ldots, n\}$, isto é, $c_k = |a_{rk}^{(k)}|$, então trocam-se as linhas r e k da matriz $A^{(k)}|B^{(k)}$ e prossegue-se com o passo k do processo de eliminação de Gauss. Note-se que este procedimento garante que os multiplicadores m_{ik}, $i = k+1, \ldots n$, verificam $|m_{ik}| \leqslant 1$ o que evita uma grande variação dos elementos de $A^{(k)}|B^{(k)}$ e, possivelmente, erros propagados de grande magnitude.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array}\right] \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 0.003 & 59.14 & 59.17 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_2 - m_{21}L_1}{\overset{\text{OE3}}{\longrightarrow}} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 0 & 59.14 & 59.14 \end{array}\right],$$

onde $m_{21} = \frac{0.003}{5.291} = 0.000567$ e a solução aproximada é

$$\left[\begin{array}{c} \bar{x} \\ \bar{y} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 10 \\ 1 \end{array}\right]$$

que coincide com a solução exacta.

Exemplo. *Arredonde-se os resultados dos cálculos para 4 dígitos, e resolva-se o sistema*

$$\begin{cases} 0.005x + 0.81y = 0.7842 \\ 2.333x + 1.52y = 1.225 \end{cases}$$

sem pesquisa de redutor e com pesquisa parcial de redutor. A solução do sistema com 4 algarismos exactos é

$$x = -0.1061 \quad e \quad y = 0.9688.$$

1. *Resolução sem pesquisa de redutor*

   A transformação da matriz ampliada numa matriz triangular representa-se por

$$\begin{bmatrix} 0.005 & 0.81 & | & 0.7842 \\ 2.333 & 1.52 & | & 1.225 \end{bmatrix}$$
$$\underset{L_2 - m_{21}L_1}{\overset{OE3}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 0.005 & 0.81 & | & 0.7842 \\ 0 & -376.4 & | & -364.7 \end{bmatrix},$$

   onde $m_{21} = \frac{2.333}{0.005} = 466.6$*. Logo, a solução obtida por substituição ascendente é*

$$\begin{cases} y = \frac{-364.7}{-376.6} = 0.9689 \\ x = \frac{0.7842 - 0.81 \times 0.9689}{0.005} = -0.1218 \end{cases}$$

2. *Resolução com pesquisa de redutor*

   Neste caso teremos de começar por trocar as 1ª e 2ª linhas da matriz ampliada visto que

$$c_1 = \max\{|0.005|, |2.333|\} = 2.333.$$

   A transformação da matriz ampliada numa matriz triangular representa-se por

$$\begin{bmatrix} 0.005 & 0.81 & | & 0.7842 \\ 2.333 & 1.52 & | & 1.225 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 2.333 & 1.52 & | & 1.225 \\ 0.005 & 0.81 & | & 0.7842 \end{bmatrix}$$
$$\underset{L_2 - m_{21}L_1}{\overset{OE3}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 2.333 & 1.52 & | & 1.225 \\ 0 & 0.8067 & | & 0.7816 \end{bmatrix},$$

   onde $m_{21} = \frac{0.005}{2.333} = 0.002143$*. Logo, a solução obtida por retrosubstituição ascendente é*

$$\begin{cases} y = \frac{0.7816}{0.8067} = 0.9689 \\ \\ x = \frac{1.225 - 1.52 \times 0.9689}{2.333} = -0.1062 \end{cases}$$

Vê-se assim que sem a escolha parcial do redutor a percentagem de erro de y *é de cerca de* 0.01% *mas a percentagem de erro de* x *é de cerca de* 14.8%*. Por outro lado com a escolha parcial do redutor foi obtida uma solução do sistema com percentagem de erro total de* 0.01%*. Isto ilustra o efeito positivo da pesquisa parcial de redutor no método de eliminação de Gauss.*

8.2 Pesquisa Total de Redutor

Este procedimento consiste em calcular, no passo k da eliminação de Gauss, o elemento

$$c_k = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}^{(k)}|.$$

Trata-se do maior dos valores absolutos dos elementos da submatriz que se obtém eliminando as primeiras $n-k$ linhas e colunas de $A^{(k)}$:

$$\begin{bmatrix} a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Uma vez calculado c_k procede-se à troca das linhas de $A^{(k)}|B^{(k)}$ e das colunas de $A^{(k)}$ de modo a trazer para a posição do redutor o elemento para o qual se obteve o valor de c_k. De notar que a troca de colunas deve levar a que se troquem igualmente as correspondentes variáveis na matriz das incógnitas.

A pesquisa total do redutor é o procedimento que melhor permite minorar os efeitos decorrentes da propagação dos erros de arredondamento. No entato, o número de *flops* que requer é muito superior ao número exigido pela pesquisa parcial de redutor. Acresce ainda que, na generalidade dos casos, a precisão permitida pela pesquisa parcial de redutor é muito próxima da fornecida pela pesquisa total. Por estes motivos, a pesquisa parcial de redutor é o procedimento mais utilizado no método de eliminação de Gauss para controlar os erros de arredondamento.

9 Métodos Compactos

O método de eliminação de Gauss permite obter a factorização LU da matriz dos coeficientes dum sistema $AX = B$. E, tal como aí foi referido, uma vez obtidas as matrizes L e U, a solução do sistema $AX = B$ pode ser determinada resolvendo sucessivamente os sistemas triangulares $LY = B$ e $UX = Y$. Acontece que as matrizes L e U podem ser calculadas directamente, sem recorrer ao método de eliminação de Gauss, utilizando os chamados **métodos compactos**. Esta designação deve-se ao facto dos elementos de L e U serem calculados de uma só vez através de fórmulas explícitas, ao contrário do que acontece na eliminação de Gauss onde aqueles elementos são obtidos por etapas à medida que o processo avança. Apresenta-se em seguida o **método de Doolittle**que procede à factorização LU da matriz A de uma forma compacta. Finaliza-se esta secção com um outro método compacto, o **método de Cholesky**, que se baseia numa factorização da matriz A distinta da factorização LU.

9.1 Método de Doolittle

Utiliza-se o método de Doolittle para factorizar uma matriz A em LU em que a diagonal da matriz L só tem 1's.

Por exemplo, a factorização LU da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

pode ser obtida da seguinte forma

$$A = [a_{ij}] = LU \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Multiplicando as matrizes que se encontram à direita da última igualdade obtém-se

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ m_{21}u_{11} & u_{22} + m_{21}u_{12} & u_{23} + m_{21}u_{13} \\ m_{31}u_{11} & m_{31}u_{12} + m_{32}u_{22} & u_{33} + m_{31}u_{13} + m_{32}u_{23} \end{bmatrix}.$$

Ao igualar os elementos homólogos da 1ª coluna, conclui-se que

$$1^{\text{a}} \text{ coluna} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u_{11} = a_{11} = 2 \\ m_{21}u_{11} = a_{21} = 1 \Rightarrow m_{21} = \frac{1}{2} \\ m_{31}u_{11} = a_{31} = 2 \Rightarrow m_{31} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

De seguida, iguala-se os elementos homólogos das colunas seguintes e obtém-se

$$2^{\text{a}} \text{ coluna} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u_{12} = a_{12} = -6 \\ u_{22} + m_{21}u_{12} = a_{22} = -2 \Rightarrow u_{22} = -2 - \frac{1}{2}(-6) = 1 \\ m_{31}u_{12} + m_{32}u_{22} = a_{32} = -4 \Rightarrow m_{32} = \frac{-4-1(-6)}{1} = 2 \end{cases}$$

$$3^{\text{a}} \text{ coluna} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u_{13} = a_{13} = 4 \\ u_{23} + m_{21}u_{13} = a_{23} = 1 \Rightarrow u_{23} = 1 - \frac{1}{2} \cdot 4 = -1 \\ u_{33} + m_{31}u_{13} + m_{32}u_{23} = a_{33} = 6 \Rightarrow u_{33} = 6 - 1 \cdot 4 - 2(-1) = 4. \end{cases}$$

A factorização $A = LU$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para resolver o sistema $AX = B$ com

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

resolve-se primeiro o sistema $LY = B$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

e, finalmente, determina-se a solução de $UX = Y$,

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Na determinação das matrizes L e U no exemplo anterior, calculou-se os elementos da matriz

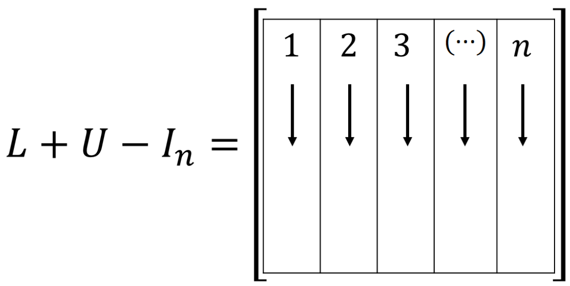
$$L + U - I_3 = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ m_{21} & u_{22} & u_{23} \\ m_{31} & m_{32} & u_{33} \end{bmatrix}$$

e em que os elementos foram calculados por ordem crescente das colunas e em cada coluna, por ordem crescente das linhas.

Este procedimento pode ser generalizado a qualquer matriz A não singular de ordem n e o cálculo dos elementos m_{ij} e u_{ij} da matriz $L + U - I_n$ pode fazer-se mediante as seguintes fórmulas:

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j} & j = 1, \ldots, n \\ u_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{s=1}^{i-1} m_{is} u_{sj} & j = i, \ldots, n; \quad i \geq 2 \\ m_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} & i = 2, \ldots, n \\ m_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum\limits_{s=1}^{j-1} m_{is} u_{sj} \right) & i = j+1, \ldots, n; \quad j \geq 2 \end{cases}.$$

Apresenta-se a ordem pela qual os elementos de $L + U - I_n$ podem ser calculados no esquema seguinte:



Note-se que os elementos u_{jj} têm de ser não nulos, o que pode sempre ser conseguido por troca de linhas.

Tem-se, portanto, que a aplicação do método de Doolittle à resolução de um sistema $AX = B$ consiste na factorização de A, seguida da determinação das soluções dos sistemas triangulares $LY = B$ e $UX = Y$ por substituição descendente e ascendente, respectivamente.

Exemplo. *Resolva-se pelo método de Doolittle o sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}.$$

A matriz dos coeficientes do sistema é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que

$$1 \quad \to \quad \begin{cases} u_{11} = a_{11} = 2 \\ m_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{3}{2} \\ m_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$2 \quad \to \quad \begin{cases} u_{12} = a_{12} = 1 \\ u_{22} = a_{22} - \sum\limits_{s=1}^{1} m_{2s}u_{s2} = a_{22} - m_{21}u_{12} = 2 - \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \\ m_{32} = \frac{1}{u_{22}} \left(a_{32} - \sum\limits_{s=1}^{1} m_{3s}u_{s2} \right) = \frac{a_{32} - m_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{2-1\cdot 1}{1/2} = 2 \end{cases}$$

$$3 \quad \to \quad \begin{cases} u_{13} = a_{13} = 3 \\ u_{23} = a_{23} - \sum\limits_{s=1}^{1} m_{2s}u_{s3} = a_{23} - m_{21}u_{13} = 4 - \frac{3}{2} \cdot 3 = -\frac{1}{2} \\ u_{33} = a_{33} - \sum\limits_{s=1}^{2} m_{3s}u_{s3} = a_{33} - m_{31}u_{13} - m_{32}u_{23} = 1 - 3 + 1 = -1. \end{cases}$$

Assim,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolve-se agora $LY = B$, em que B é o 2º membro do sistema dado, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 - \frac{3}{2}y_1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ y_3 = 3 - y_1 - 2y_2 = 3 - 1 - 1 = 1 \end{cases}.$$

Finalmente, determina-se a solução de $UX = Y$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde sai que

$$\begin{cases} x_3 = -1 \\ \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 \Rightarrow x_2 = 1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 = 1 - x_2 - 3x_3 \Rightarrow 2x_1 = 1 + 3 \Rightarrow x_1 = 2 \end{cases}.$$

Portanto, a solução do sistema inicial é $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ e $x_3 = -1$.

9.2 Método de Cholesky

O **método de Cholesky** aplica-se a sistemas cuja matriz dos coeficientes é simétrica e definida positiva. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n diz-se **definida positiva** se

$$X^T AX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j > 0,$$

para toda a matriz coluna não nula $X = [x_i]$ com n elementos.

Teorema. *Seja A uma matriz de ordem n simétrica. Então A é definida positiva se e só se todas as submatrizes A_i formadas pelos elementos das primeiras i linhas e i colunas de A têm determinante positivo, isto é,* $\det A_i > 0$, *para* $i = 1, \ldots, n$.

Exemplo. *A matriz simétrica* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ *é definida positiva pois*

$$\det A_1 = \det [2] = 2 > 0$$
$$\det A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 > 0 \quad e$$
$$\det A_3 = \det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix} = 8 > 0.$$

Na resolução de sistemas $AX = B$ pelo método de Cholesky, qualquer matriz A simétrica e definida positiva é factorizada nas matrizes $L = [l_{ij}]$ (triangular inferior) e $L^T = [l_{ji}]$ tais que $l_{ii} > 0$ e $A = LL^T$. Assim, o sistema original $AX = B$ pode escrever-se na forma $\left(LL^T\right) X = B$, ou seja, $L\left(L^T X\right) = B$. Portanto, à semelhança do que foi visto para a decomposição LU, a solução de $AX = B$ obtém-se resolvendo sucessivamente os sistemas

$$LY = B \text{ e } L^T X = Y.$$

Em geral uma matriz A de ordem n, simétrica e definida positiva, factoriza-se na forma $LL^T = A$, isto é,

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Efectuando o produto da 1ª linha de L pela 1ª coluna de L^T obtém-se

$$l_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}.$$

Multiplicando seguidamente a 2ª linha de L pelas 1ª e 2ª colunas de L^T obtém-se, respectivamente,

$$l_{21}l_{11} = a_{12} \qquad \text{e} \qquad l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22},$$

pelo que

$$l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}} \qquad \text{e} \qquad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}.$$

Efectuando sucessivamente o procedimento anterior chegaríamos à etapa final que consiste em multiplicar a última linha de L por todas as colunas de L^T. Obter-se-ia então

$$l_{n1}l_{11} = a_{1n}, \quad l_{n1}l_{21} + l_{n2}l_{22} = a_{2n}, \ldots, l_{n1}^2 + l_{n2}^2 + \cdots + l_{nn}^2 = a_{nn},$$

pelo que

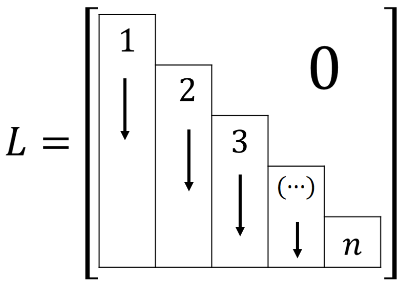
$$l_{n1} = \frac{a_{1n}}{l_{11}}, \quad l_{n2} = \frac{1}{l_{22}}\left(a_{2n} - \sum_{k=1}^{1} l_{nk}l_{2k}\right), \ldots, l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2}.$$

As fórmulas anteriores sugerem que os elementos l_{ij} da matriz triagular inferior L podem ser obtidos, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, mediante as igualdades

$$\begin{cases} l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}\right) & j = 1, \ldots, i-1 \\ \\ l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} & \end{cases}$$

onde se usa a convenção $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$.

Apresenta-se ordem pela qual os elementos de $L = [l_{ij}]$ podem ser calculados no esquema seguinte:



Exemplo. *Resolva-se pelo método de Cholesky o sistema de equações lineares $AX = B$, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 42 \end{bmatrix}.$$

Já foi visto que a matriz A é definida positiva. Então

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{2}, \\
l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0, \\
l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \\
l_{22} &= \sqrt{a_{22} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k}^2} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{1-0} = 1, \\
l_{32} &= \frac{a_{32} - \sum_{k=1}^{1} l_{3k} l_{2k}}{l_{22}} = \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} = \frac{2 - \sqrt{2} \times 0}{1} = 2 \\
l_{33} &= \sqrt{\left(a_{33} - \sum_{k=1}^{2} l_{3k}^2\right)} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{10-2-4} = 2.
\end{aligned}$$

A factorização $A = LL^T$ é então

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A partir daqui resolve-se $LY = B$,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 42 \end{bmatrix}$$

cuja solução é

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ 14 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, resolve-se $L^T X = Y$,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ 14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

cuja solução é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Refira-se que o método de Cholesky é estável mesmo sem escolha de redutor e exige metade das operações que são necessárias no método de Doolittle.

10 Métodos Iterativos

A solução de um sistema obtida por um qualquer método directo não é em geral exacta, devido a erros de arredondamento que se propagam nas operações efectuadas. No entanto, é possível melhorar a solução através de um método iterativo. Um método iterativo é um um conjunto de procedimentos que permite obter uma solução aproximada e melhorada do sistema a partir de outra solução aproximada.

Ao aplicar um método directo para resolver um sistema de equações lineares o utilizador conhece com antecedência o esforço computacional que vai ser dispendido. Pelo contrário, num método iterativo, não se consegue prever o número de soluções aproximadas que devem ser calculadas para se obter uma dada precisão, visto que esse número pode variar de sistema de equações para sistema de equações. Porquê então usar métodos iterativos? De facto, em muitas situações reais é necessário resolver sistemas de grande dimensão (isto é, com 1000 ou mais equações e variáveis) cuja matriz dos coeficientes é **esparsa** (isto é, o número de elementos não nulos é relativamente pequeno). Torna-se então impraticável utilizar um método directo para resolver estes sistemas, atendendo ao espaço de memória necessário para guardar todos os coeficientes nulos. Por isso, a utilização de métodos iterativos nestes casos tem sentido, sendo mesmo em muitos deles a única possibilidade que existe para obter uma solução do sistema.

Para resolver iterativamente $AX = B$, começa-se por decompor a matriz A (não singular) na soma de duas matrizes M e N, isto é,

$$A = M + N.$$

O sistema original escreve-se então na forma

$$(M + N)\, X = B$$

ou, equivalentemente,

$$MX = B - NX.$$

Esta igualdade sugere o processo iterativo

$$MX^{(k+1)} = B - N\,X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

em que $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ designa a solução aproximada da solução do sistema $AX = B$ obtida ao fim de k iterações. Escolhendo para M uma matriz invertível, a igualdade anterior escreve-se na forma

$$X^{(k+1)} = M^{-1}B - M^{-1}N\,X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Assim, a partir de uma solução aproximada inicial $X^{(0)}$, é gerada a sucessão de soluções iteradas

$$\begin{aligned}
X^{(1)} &= M^{-1}B - M^{-1}N\,X^{(0)} \\
X^{(2)} &= M^{-1}B - M^{-1}N\,X^{(1)} \\
&\vdots \\
X^{(k+1)} &= M^{-1}B - M^{-1}N\,X^{(k)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

que desejavelmente deve convergir para a solução de $AX = B$. Ver-se-á adiante condições que garantem a convergência desta sucessão. Antes, porém, ir-se-á descrever os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel que correspondem precisamente a duas diferentes escolhas da matriz M.

10.1 Método de Jacobi

Decomponha-se a matriz $A = [a_{ij}]$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$ do sistema $AX = B$ em

$$A = L + D + U, \tag{1}$$

onde

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-2)} & 0 & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{n(n-1)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são, respectivamente, as matrizes diagonal inferior, diagonal e diagonal superior em que podemos decompor a matriz A.

O método de Jacobi baseia-se na seguinte escolha das matrizes M e N da decomposição $A = M + N$:

$$M = D \quad \text{e} \quad N = L + U$$

e o processo iterativo assume então a forma

$$DX^{(k+1)} = B - (L + U)\ X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Admitindo que todos os $a_{ii} \neq 0$ (o que é sempre possível por meio de trocas de linhas e colunas desde que a matriz A seja não singular), esta igualdade é equivalente a

$$\boxed{X^{(k+1)} = D^{-1}B - D^{-1}(L + U)\ X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots}$$

ou ainda a

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots,$$

considerando $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$.

Exemplo. *Considere-se o sistema $AX = B$, com*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Tome-se $X^{(0)} = (0,0,0)$ e calculem-se três soluções aproximadas obtidas por iteração por aplicação do método de Jacobi.

Uma vez que

$$M = D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad N = L + U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$M^{-1} = D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

vem

$$\begin{aligned} X^{(k+1)} &= D^{-1}B - D^{-1}(L+U)X^{(k)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/10 \\ 2/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ 3/10 & 0 & 1/5 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots. \end{aligned}$$

Para $X^{(0)} = (0,0,0)$, obtém-se

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/10 \\ 2/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ 3/10 & 0 & 1/5 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ X^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/10 \\ 2/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ 3/10 & 0 & 1/5 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{23}{150} \\ -\frac{1}{30} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} \quad e \\ X^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/10 \\ 2/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ 3/10 & 0 & 1/5 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{23}{150} \\ -\frac{1}{30} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{15} \\ \frac{3}{500} \\ \frac{53}{75} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

isto é,

$$X^{(3)} \approx \begin{bmatrix} -0.1333 \\ 0.006 \\ 0.7067 \end{bmatrix}.$$

Note-se que a solução do sistema com quatro algarismos significativos é

$$X = (-0.1429, 0, 0.7143).$$

10.2 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel baseia-se na seguinte escolha

$$M = L + D \quad \text{e} \quad N = U$$

o processo iterativo escreve-se na forma

$$(L + D)\, X^{(k+1)} = B - U\, X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

e admitindo que $M = L + D$ é invertível (condição equivalente a $a_{ii} \neq 0$, $\forall i$),

$$\boxed{X^{(k+1)} = (L + D)^{-1} B - (L + D)^{-1} U\, X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots.}$$

Exemplo. *Aplique-se o método de Gauss-Seidel à resolução do sistema anterior $AX = B$, com*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que

$$M = L + D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad N = U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$M^{-1} = (L + D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{50} & \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{13}{150} & \frac{1}{30} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

vem

$$\begin{aligned} X^{(k+1)} &= (L + D)^{-1} B - (L + D)^{-1} U\, X^{(k)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{3}{50} & \frac{7}{50} \\ 0 & -\frac{13}{150} & -\frac{1}{50} \end{bmatrix} X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots. \end{aligned}$$

Tome-se $X^{(0)} = (0, 0, 0)$,

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{3}{50} & \frac{7}{50} \\ 0 & -\frac{13}{150} & -\frac{1}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} \\ X^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{3}{50} & \frac{7}{50} \\ 0 & -\frac{13}{150} & -\frac{1}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{25} \\ \frac{1}{125} \\ \frac{271}{375} \end{bmatrix} \quad e \\ X^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{3}{50} & \frac{7}{50} \\ 0 & -\frac{13}{150} & -\frac{1}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{25} \\ \frac{1}{125} \\ \frac{271}{375} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{274}{1875} \\ -\frac{13}{18\,750} \\ \frac{13\,409}{18\,750} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$X^{(3)} \approx \begin{bmatrix} -0.1461 \\ -0.0007 \\ 0.7152 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que $X^{(3)} = (-0.1461, -0.0007, 0.7152)$ está mais próxima da solução do sistema $X = (-0.1429, 0, 0.7143)$ do que a solução aproximada $X^{(3)} = (-0.1333, 0.006, 0.7067)$ obtida pelo método de Jacobi.

O processo de Gauss-Seidel resulta da seguinte decomposição

$$(L + D)\, X^{(k+1)} = B - U\, X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

ou seja

$$DX^{(k+1)} = B - LX^{(k+1)} - U\, X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Supondo que $a_{ii} \neq 0$, para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$, deduz-se que a fórmula iterativa do método de Gauss-Seidel pode ser escrita na forma

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(B - LX^{(k+1)} - U\, X^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Uma vez que $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, tem-se que

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots,$$

a qual evidencia uma importante característica do método de Gauss-Seidel: *cada componente* $x_i^{(k+1)}$ *da solução aproximada* $X^{(k+1)}$ *é calculada recorrendo às componentes* $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$ *obtidas anteriormente na mesma iteração.* Este facto não ocorre no método de Jacobi em que o cálculo da componentes de $X^{(k+1)}$ é feito unicamente com base nas componentes de $X^{(k)}$. Por esta razão o método de Jacobi é por vezes designado por método das *substituições simultâneas* enquanto o método de Gauss-Seidel é conhecido por método das *substituições sucessivas.*

O aproveitamento imediato da última componente calculada de $X^{(k+1)}$ no cálculo da componente seguinte, propicia, como ilustra o exemplo anterior, uma convergência mais rápida do método de Gauss-Seidel quando comparado com o método de Jacobi.

10.3 Convergência dos Métodos Iterativos

Definição. *Uma norma de* $\mathbb{R}^n$ *é uma aplicação que a cada vector* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *faz corresponder um número real* $||\vec{x}||$ *que verifica os seguintes axiomas:*

1. $||\vec{x}|| > 0$ *se* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *e* $||\vec{0}|| = 0$. *(Positividade)*
2. $||\vec{x} + \vec{y}|| \leqslant ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$, *para* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. *(Desigualdade triangular)*
3. $||\lambda\vec{x}|| = |\lambda|\, ||\vec{x}||$, *para* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *(Homogeneidade)*

Apresentam-se alguns exemplos de normas. A **norma euclidiana** em $\mathbb{R}^n$ é definida por

$$||\vec{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Para $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ou $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tem-se

$$||\vec{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{ou} \quad ||\vec{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n. A **norma do máximo das somas por coluna** é dada por

$$||A||_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

e a **norma do máximo das somas por linha** define-se por

$$||A||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, .$$

Calcule-se as normas $||A||_1$ e $||A||_\infty$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} ||A||_1 &= \max(2+1+2+0, 1+2+1+2, 2+1+2+0, 2+2+1+1) \\ &= \max(5,6,5,6) = 6 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ||A||_\infty &= \max(2+1+2+2, 1+2+1+2, 2+1+2+1, 0+2+0+1) \\ &= \max(7,6,6,3) = 7. \end{aligned}$$

A norma no estudo de matrizes e sistemas de equações lineares serve para medir a proximidade das soluções aproximadas e os respectivos erros obtidos por um qualquer método iterativo.

Recorde-se que a forma geral dos métodos iterativos é dada por

$$MX^{(k+1)} = B - N\,X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

ou seja,

$$X^{(k+1)} = M^{-1}B - M^{-1}N\,X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

supondo a invertibilidade de M. Assim, considerando $G = -M^{-1}N$ e $C = M^{-1}B$, o processo iterativo anterior pode escrever-se na forma

$$X^{(k+1)} = GX^{(k)} + C, \quad k = 0, 1, \ldots \, .$$

A matriz G designa-se por **matriz de iteração**.

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ tem **diagonal estritamente dominante por linhas** (SSD - strictly diagonally dominant) se

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \, , \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \, .$$

Teorema. *Se a matrix A do sistema $AX = B$ tem diagonal estritamente dominante por linhas, os métodos iterativos de Jacobi e de Gauss-Seidel são convergentes para a solução X, independentemente da aproximação inicial $X^{(0)}$ escolhida. Além disso, para $k = 0, 1, \ldots$ e $||G|| < 1$ é válida a seguinte estimativa da norma do erro da solução aproximada $X^{(k+1)}$:*

$$\left|\left|X - X^{(k+1)}\right|\right| \leqslant \frac{||G||}{1 - ||G||} \left|\left|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right|\right|.$$

Repare-se que neste teorema pode ser utilizada qualquer norma de matrizes. Em geral, utiliza-se as normas do máximo das somas por linha ou por coluna.

10.3.1 Aplicação ao Método de Jacobi

No método de Jacobi, tem-se que

$$\boxed{X^{(k+1)} = D^{-1}B - D^{-1}\left(L + U\right) X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots}$$

pelo que a matriz de iteração (designada por G_J) é dada por

$$G_J = D^{-1}(L + U).$$

Verifica-se que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

tem diagonal estritamente dominante por linhas. De facto,

$$\begin{aligned}
\text{Para } i &= 1, \sum_{j=1, j\neq 1}^{3} \left|a_{1j}\right| = |1| + |1| = 2 < 5 = \left|a_{11}\right|, \\
\text{para } i &= 2, \sum_{j=1, j\neq 2}^{3} \left|a_{2j}\right| = |3| + |2| = 5 < 10 = \left|a_{22}\right| \quad \text{e} \\
\text{para } i &= 3, \sum_{j=1, j\neq 3}^{3} \left|a_{3j}\right| = |1| + |-1| = 2 < 3 = \left|a_{33}\right|.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema anterior, o método de Jacobi converge para a solução do sistema. Além disso,

$$G_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ 3/10 & 0 & 1/5 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$||G_J||_\infty = \max\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} < 1.$$

Assim, tem-se a seguinte estimativa da norma do erro da solução aproximada $X^{(3)}$:

$$\begin{aligned}
\left\|X - X^{(3)}\right\|_\infty &\leqslant \frac{\|G_J\|_\infty}{1 - \|G_J\|_\infty} \left\|X^{(3)} - X^{(2)}\right\|_\infty \\
&= \frac{2/3}{1-2/3} \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{50} \\ \frac{59}{1500} \\ \frac{1}{150} \end{bmatrix} \right\|_\infty \\
&= 2 \times \frac{59}{1500} \approx 0.0787.
\end{aligned}$$

10.3.2 Aplicação ao Método de Gauss-Seidel

No método de Gauss-Seidel tem-se que

$$\boxed{X^{(k+1)} = (L+D)^{-1} B - (L+D)^{-1} U\, X^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots .}$$

pelo que a matriz de iteração (designada por G_{GS}) é dada por

$$G_{GS} = -\,(L+D)^{-1} U.$$

Já se viu que

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

tem diagonal estritamente dominante por linhas.
Além disso,

$$G_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{3}{50} & -\frac{7}{50} \\ 0 & \frac{13}{150} & \frac{1}{50} \end{bmatrix},$$

pelo que

$$\|G_{GS}\|_\infty = \max\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{8}{75}\right) = \frac{2}{5} < 1.$$

Assim, tem-se a seguinte estimativa da norma do erro da solução aproximada $X^{(3)}$ pelo método de Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned}
\left\|X - X^{(3)}\right\|_\infty &\leqslant \frac{\|G_{GS}\|_\infty}{1 - \|G_{GS}\|_\infty} \left\|X^{(3)} - X^{(2)}\right\|_\infty \\
&= \frac{2/5}{1-2/5} \left\| \begin{bmatrix} \frac{26}{1875} \\ -\frac{163}{18750} \\ -\frac{141}{18750} \end{bmatrix} \right\|_\infty \\
&= \frac{2}{3} \max\left(\frac{26}{1875}, \frac{163}{18750}, \frac{141}{18750}\right) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{26}{1875} \approx 0.0092.
\end{aligned}$$

Verifica-se assim que a estimativa da norma do erro obtida pelo método de Gauss-Seidel é muito inferior à estimativa homóloga calculada no método de Jacobi. Isto ilustra a maior velocidade de convergência que, em geral, o método de Gauss-Seidel revela quando comparado com o método de Jacobi.

Exemplo. *Considere o sistema de equações lineares $AX = B$ com*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & a & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & a \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

em que a é um parâmetro real.

1. *Enuncie, justificando, uma condição sobre os elementos de A que garanta que o método de Gauss-Seidel converge;*

2. *Para $a = 1$ determine duas soluções aproximadas tomando $X^{(0)} = M^{-1}B$ para aproximação inicial. Indique uma estimativa da norma do erro da última solução obtida.*

1. Para assegurar a convergência dos métodos iterativos indicados é necessário que a matriz A tenha diagonal estritamente dominante por linhas, isto é,

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{3} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Ora, para primeira linha,

$$\sum_{j=1, j\neq 1}^{3} |a_{1j}| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{5}{6} < |a_{11}|.$$

Resta garantir que

$$|a_{22}| = |a| > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad e \ |a_{33}| = |a| > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Assim, basta que

$$|a| > \frac{3}{4}$$

para que A tenha diagonal estritamente dominante por linha e, consequentemente, que o método de Gauss seja convergente.

2. Pelo método de Gauss-Seidel,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} = M + N$$

tal que

$$M = L + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = U = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -5/24 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$G_{GS} = -M^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/3 \\ 0 & 1/4 & -1/12 \\ 0 & 5/48 & 19/144 \end{bmatrix},$$

donde

$$||G_{GS}||_\infty = \max\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4} + \frac{1}{12}, \frac{5}{48} + \frac{19}{144}\right) = \frac{5}{6} < 1.$$

As respectivas soluções aproximadas são dadas por

$$\begin{aligned} X^{(k+1)} &= M^{-1}B - M^{-1}U\,X^{(k)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -5/24 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -5/24 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X^{(k)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 19/24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/4 & 1/12 \\ 0 & -5/48 & -19/144 \end{bmatrix} X^{(k)}. \end{aligned}$$

Tome-se $X^{(0)} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 19/24 \end{bmatrix}$. *Então,*

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 19/24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/4 & 1/12 \\ 0 & -5/48 & -19/144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 19/24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 71/72 \\ -199/288 \\ 2917/3456 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 19/24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/4 & 1/12 \\ 0 & -5/48 & -19/144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 71/72 \\ -199/288 \\ 2917/3456 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{11\,033}{10\,368} \\ -\frac{30\,817}{41\,472} \\ \frac{413\,587}{497\,664} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja, $X^{(2)} \approx (1.0641, -0.7431, 0.8311)$.

Logo, tem-se a seguinte estimativa da norma do erro da solução aproximada $X^{(2)}$*:*

$$\begin{aligned}
\left\|X - X^{(2)}\right\|_\infty &\leqslant \frac{\|G_{GS}\|_\infty}{1-\|G_{GS}\|_\infty}\left\|X^{(2)} - X^{(1)}\right\|_\infty \\
&= \frac{5/6}{1-5/6}\left\|\begin{bmatrix} \frac{809}{10368} \\ -\frac{2161}{41472} \\ -\frac{6461}{497664} \end{bmatrix}\right\|_\infty \\
&= 5 \times \max\left(\frac{809}{10368}, \frac{2161}{41472}, \frac{6461}{497664}\right) \\
&= 5 \times \frac{809}{10368} \approx 0.39.
\end{aligned}$$