
Exercícios adicionais sobre a definição de limite.

Questões:

1. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & , x \leq 3 \\ \frac{4}{(x+3)^2} & , x > 3 \end{cases}.$$

Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes proposições (ou seja, se a afirmação em causa é verdadeira ou falsa):

- (a) $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x \in D_f \setminus \{2\} : (|x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - \frac{2}{3}| < \delta)$;
- (b) $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x \in D_f \setminus \{3\} : (0 < x - 3 < \varepsilon \Rightarrow |f(x) + \frac{1}{9}| < \delta)$;
- (c) $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x \in D_f \setminus \{3\} : (|x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - \frac{3}{4}| < \delta)$;
- (d) $\forall M > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x \in D_f \setminus \{0\} : (|x| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > M)$;
- (e) $\forall \delta > 0 \exists M > 0 \forall x \in D_f : (x > M \Rightarrow |f(x)| < \delta)$.
2. Interprete cada uma das seguintes expressões e dê um exemplo de uma função real de variável real, f , nas condições referidas:
- (a) $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x \in D_f \setminus \{4\} : (|x - 4| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) + 1| < \delta)$;
- (b) $\forall L > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x \in D_f \setminus \{-1\} : (|x + 1| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > L)$;
- (c) $\forall L > 0 \exists M < 0 \forall x \in D_f : (x < M \Rightarrow f(x) > L)$;
- (d) $\forall N < 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x \in D_f \setminus \{5\} : (-\varepsilon < x - 5 < 0 \Rightarrow f(x) < N)$.

Fim da Ficha