Matrizes

Aula Prática 5

Análise Numérica - 2^{o} Semestre

14 Abril 2020

Plano da Aula

Resolução dos exercícios

- 2.1
- 2.3
- 2.4
- 2.10
- 2.11
- 2.12
- 2.14

Definição

Chama-se **matriz de ordem $m \times n$** (lê-se m por n) a qualquer quadro com $m \times n$ números dispostos em m linhas e em n colunas.

$$A_{mn} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Para representar matrizes usamos sempre uma letra maiúscula, A, e para representar um elemento de matriz usamos letra minúscula, a_{ij}, acompanhada de um índice com duas letras, i e j. A primeira letra, i, representa a linha do elemento, e a segunda, j, representa a coluna do elemento.

Matriz Quadrada

Definição

Uma **matriz A** diz-se **quadrada** se $m = n$, ou seja, o número de linhas é igual ao número de colunas.

$$A_n = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & \cdots & \underline{a_{1n}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{a_{n1}} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \boxed{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Numa matriz quadrada os elementos da forma a_{ij} com $i = j$ formam a **diagonal principal** enquanto que os elementos da forma a_{ij} com $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**.

Matriz rectangular

Definição

Uma **matriz A** diz-se **rectangular** se $m \neq n$, ou seja, o número de linhas e o número de colunas são diferentes.

Uma **matriz linha** ou **matriz coluna** são matrizes que possuem apenas uma linha ou apenas uma coluna.

– toda matriz de tipo $1 \times n$ é denominada matriz linha

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

– toda matriz de tipo $m \times 1$ é denominada matriz coluna.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_m \end{bmatrix}$$

Adição de matrizes

Definição

- Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ de ordem $m \times n$, denomina-se de matriz soma, $A + B$, à matriz obtida adicionando-se os elementos correspondentes de A e B.

$$C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

- **Propriedades da adição de matrizes**. A, B, C matrizes de ordem $m \times n$ e O_{mn} matriz nula de ordem $m \times n$

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + O_{mn} = O_{mn} + A = A$$

Multiplicação de matrizes

Definição

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$ e $B = [b_{ij}]$ uma matriz de ordem $n \times p$, denomina-se de matriz produto $A \times B$, à matriz C, de ordem $m \times p$

$$C = A \times B = [c_{ij}]$$

obtida da seguinte forma

$$c_{ij} = L_i^A \bullet C_j^B$$

onde $\bullet$ representa o produto interno entre a linha i da matriz A, $\left(L_i^A\right)$ e a coluna j da matriz B, $\left(C_j^B\right)$.

Multiplicação de matrizes - Propriedades

Nota

- Para que seja possível calcular o produto entre duas matrizes, é óbrigatório que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz.
- A multiplicação de matrizes, em geral, não é comutativa, $A \times B \neq B \times A$
- O produto é associativo, $A\left(BC\right) = \left(AB\right)C$
- Propriedade distributiva à esquerda, $A\left(B + C\right) = AB + AC$
- Propriedade distributiva à direita, $\left(A + B\right)C = AC + BC$
- Se A for uma matriz de ordem $m \times n$, $AI_n = I_m A = A$
- $\left(kA\right)B = k\left(AB\right) = A\left(kB\right),\ k \in \mathbb{R}$

Matriz Transposta

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Chama-se **matriz transposta de A**, e representa-se por A^T, à matriz obtida através da permuta de linhas por colunas, ou colunas por linhas, da matriz A. A nova matriz obtida é de ordem $n \times m$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz Transposta - Propriedades

Nota

Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e seja C uma matriz de ordem $n \times p$.

$$\rightarrow \left(A^T\right)^T = A$$

$$\rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$\rightarrow (kA)^T = kA^T,\ k \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow (AC)^T = C^T A^T$$

Exercício 2.1 a)

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
- $3A + 4B$
- Matrizes de ordem 2×3, é possível efectuar a soma

$$\begin{aligned}
3A+4B &= 3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 & -12 \\ -4 & -4 & 12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3+16 & -3+0 & 6-12 \\ 0-4 & 9-4 & 12+12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 19 & -3 & -6 \\ -4 & 5 & 24 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Exercício 2.1 b)

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
- $A \times B$
- $A \times B \longrightarrow$ não é possível efectuar o produto porque o número de colunas da matriz A não é igual ao número de linhas da matriz B.

Exercício 2.1 c)

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
- $D \times A$
- $D \times A \longrightarrow$ é possível efectuar o produto porque o número de colunas da matriz D é igual ao número de linhas da matriz A
- $$D \times A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
- $$= \begin{bmatrix} (1,3) \bullet (1,0) & (1,3) \bullet (-1,3) & (1,3) \bullet (2,4) \\ (-1,2) \bullet (1,0) & (-1,2) \bullet (-1,3) & (-1,2) \bullet (2,4) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 8 & 14 \\ -1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.1 d)

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $C^T A^T$
- A^T, C^T
-

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ C^T &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercício 2.1 d)
Continuação

- $C^T \times A^T \longrightarrow$ é possível efectuar o produto porque o número de colunas da matriz C^T é igual ao número de linhas da matriz A^T

$$
\begin{aligned}
C^T \times A^T &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (2,-1,3) \bullet (1,-1,2) & (2,-1,3) \bullet (0,3,4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9 & 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Exercício 2.3

- Para as matrizes A e B sabemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } A \times B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz B.

- Determinação da ordem da matriz B

$$\underbrace{A}_{2\times\boxed{2}} \times \underbrace{B}_{\boxed{2}\times\underline{3}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}}_{2\times\underline{3}}$$

- B é uma matriz de ordem 2×3

Exercício 2.3
Continuação

- Seja

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

- $$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a-2d & b-2e & c-2f \\ 5d-2a & 5e-2b & 5f-2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.3
Continuação

- O sistema que permite achar as incógnitas é

$$\begin{cases} a - 2d = -1 \\ b - 2e = 2 \\ c - 2f = -1 \\ 5d - 2a = 6 \\ 5e - 2b = -9 \\ 5f - 2c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2d = -1 \\ 5d - 2a = 6 \\ 5f - 2c = 3 \\ c - 2f = -1 \\ b - 2e = 2 \\ 5e - 2b = -9 \end{cases}$$

- Podemos agrupar as 6 equações duas a duas e resolver os sistemas pelo método de eliminação.

$$\begin{cases} a - 2d = -1 & \rightarrow 2L_1 \\ 5d - 2a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 4d = -2 & \rightarrow L_1 + L_2 \\ 5d - 2a = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 + d = 4 \\ 2a = -6 + 5d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ 2a = -6 + 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ a = 7 \end{cases}$$

Exercício 2.3
Continuação

- Sistema para determinar c e f

$$\begin{cases} 5f - 2c = 3 \\ c - 2f = -1 \quad \rightarrow 2L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5f - 2c = 3 \\ 2c - 4f = -2 \quad \rightarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2c = 3 \\ f = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ f = 1 \end{cases}$$

Exercício 2.3
Continuação

- Sistema para determinar b e e

$$\begin{cases} b - 2e = 2 & \longrightarrow 2L_1 \\ \\ 5e - 2b = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 4e = 4 & \longrightarrow L_1 + L_2 \\ \\ 5e - 2b = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e = -5 \\ \\ -25 - 2b = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = -5 \\ \\ b = -8 \end{cases}$$

- A matriz B é igual a

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.4

- Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre a matriz $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ que verifica $3X - A^T = B^T$
- $$\begin{aligned} 3X - A^T &= B^T \\ &\Leftrightarrow 3X = A^T + B^T \\ &\Leftrightarrow 3X = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow 3X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $$3\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 2 \\ 3x_2 = 4 \\ 3x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{4}{3} \\ x_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$
- A matriz X é
$$X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Definição

Seja A uma matriz (quadrada) de ordem n. Chama-se **matriz inversa de A**, e representa-se por A^{-1}, à matriz de ordem n que verifica

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Nota: I_n é a matriz identidade de ordem n (matriz quadrada com $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$)

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota

Sejam A e B matrizes de ordem n invertíveis (existe A^{-1} e existe B^{-1}). Então

$$\rightarrow \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$$\rightarrow \left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$$

$$\rightarrow (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1},\ k \neq 0$$

$$\rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Exercício 2.10

- Sabendo que $\left(A^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, determine a matriz A.
- Sabemos que

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

- A matriz A^{-1} é a matriz inversa de A se e só se

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$$

- Seja

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

- Então

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x - 3y & 4x \\ 2z - 3w & 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.10

Continuação

- Passando a sistema

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x = 0 \\ 2z - 3w = 0 \\ 4z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = 0 \\ w = \frac{2}{3}z = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$$

- A matriz A é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

- Vamos confirmar que $A^{-1}A$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4\times\frac{1}{4} & -\frac{2}{3}+\frac{4}{6} \\ 0+0 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.11

- Para qualquer matriz 2×2, $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mostrar que se verifica:
$$X^2 + (ad - bc)\, I_2 = (a + d)\, X$$
- Deduzir que para $ad - bc \neq 0$, a matriz X tem inversa.

Exercício 2.11
Continuação

- Cálculo de $X^2 + (ad - bc)\, I_2$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad - bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 + bc + ad - bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 + ad - bc \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + dc & d^2 + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,(a + d) & b\,(a + d) \\ c\,(a + d) & d\,(d + a) \end{bmatrix} \\
&= (a + d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a + d)\, X
\end{aligned}
$$

Exercício 2.11
Continuação

- Deduzir que para $ad - bc \neq 0$, a matriz X tem inversa.

- A matriz X tem inversa se e só se existe uma matriz A de ordem 2 que verifica

$$AX = XA = I_2$$

- Sabemos que

$$X^2 + (ad - bc)\, I_2 = (a + d)\, X$$

$$\Leftrightarrow X^2 - (a + d)\, X = -\,(ad - bc)\, I_2 \qquad (1)$$

- Dividindo (1) por $ad - bc \neq 0a$

$$\frac{1}{ad - bc} X^2 - \frac{a + d}{ad - bc} X = -I_2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{ad - bc} X^2 + \frac{a + d}{ad - bc} X = I_2 \qquad (2)$$

Exercício 2.11
Continuação

- Colocando a matriz X em evidência à direita em (2) obtemos

$$\underbrace{-\frac{1}{ad-bc}\left[X-(a+d)\,I_2\right]}_{A}X = I_2 \tag{3}$$

- Colocando a matriz X em evidência à esquerda em (2) obtemos

$$X\underbrace{\left[X-(a+d)\,I_2\right]\frac{-1}{ad-bc}}_{A} = I_2 \tag{4}$$

Das equações (3) e (4) concluímos que a matriz inversa de X, com $ad - bc \neq 0$, é dada pela matriz

$$
\begin{aligned}
X^{-1} &= \left[X - (a+d)\, I_2\right] \frac{-1}{ad-bc} \\
&= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ & a+d \end{bmatrix} \right) \frac{-1}{ad-bc} \\
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{-1}{ad-bc} \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Norma de uma Matriz

Definição

$\|A\|_1 \longrightarrow$ norma do máximo das somas por colunas (soma os valores absolutos das entradas em cada coluna e escolhe a maior)

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$\|A\|_\infty \longrightarrow$ norma do máximo das somas por linhas (soma os valores absolutos das entradas em cada linha e escolhe a maior)

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Número de Condição

Definição

$\longrightarrow$ A norma da matriz , $\|A\|_p$ serve como número de condição associado à matriz A para erros absolutos.

$\longrightarrow$ Se a matriz A for invertível, $\|A\|_p \times \left\|A^{-1}\right\|_p$ é o número de condição associado à matriz A para erros relativos.

Exercício 2.12

Determine o número de condição, com a norma infinito, das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 53 & 0 \\ 0 & 216 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- $\|A\|_\infty = \max\{|53| + |0|, |0| + |216|\} = \max\{53, 216\} = 216$
- $\|B\|_\infty = \max\{|9| + |0|, |0| + |0.1|\} = \max\{9, 0.1\} = 9$
- $\|C\|_\infty = \max\{|3| + |4|, |5| + |6|\} = \max\{7, 11\} = 11$

Exercício 2.14

A população de rãs num ecossistema evolui a cada ano que passa. Se observarmos o número de ovos, girinos e rãs no início do ano, podemos obter o número no ano seguinte. As médias observadas foram as seguintes:

- Cada 100 ovos no início do ano vai aportar no fim do ano 4 novos girinos, 2 novas rãs e 50 novos ovos.
- Cada 100 girinos no início do ano vai aportar no fim do ano 10 novas rãs e 500 novos ovos.
- Cada 100 rãs no início do ano vai aportar no fim do ano 1200 novos ovos, 10 novos girinos e 1 nova rã.

Exercício 2.14

- Se chamarmos o, g, r o número de ovos, girinos e rãs presentes no início dum ano dado, o número que haverá no ano seguinte $(\overline{o}, \overline{g}, \overline{r})$ pode ser determinado através duma fórmula

$$\begin{bmatrix} \overline{o} \\ \overline{g} \\ \overline{r} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} o \\ g \\ r \end{bmatrix}$$

  Determine qual é a matriz M na situação acima descrita. Se introduzirmos uma população de 200 rãs num ecossistema sem girinos nem ovos, calcule qual será a situação que vamos encontrar após 8 anos. E se tivessemos introduzido 200 ovos?

Exercício 2.14
Continuação

A evolução da população de rãs é definida por

$$X_1 = \begin{bmatrix} \frac{50}{100} & \frac{500}{100} & \frac{1200}{100} \\ \frac{4}{100} & 0 & \frac{10}{100} \\ \frac{2}{100} & \frac{10}{100} & \frac{1}{100} \end{bmatrix} X_0$$

onde X_0 é a matriz onde se encontra o número de ovos, girinos e rãs no início dum ano e X_1 a matriz onde se encontra o número de ovos, girinos e rãs passado um ano.

Nota: $X_0 = \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 \end{bmatrix}^T$

$$X_1 = \begin{bmatrix} \frac{50}{100} & \frac{500}{100} & \frac{1200}{100} \\ \frac{4}{100} & 0 & \frac{10}{100} \\ \frac{2}{100} & \frac{10}{100} & \frac{1}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1750 \\ 14 \\ 13 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \sum \text{ovos} \\ \rightarrow \sum \text{girinos} \\ \rightarrow \sum \text{rãs} \end{array}$$

Exercício 2.14
Continuação

- Se introduzirmos uma população de 200 rãs num ecossistema sem girinos nem ovos, calcule qual será a situação que vamos encontrar após 8 anos. Seja X_i a matriz onde se encontra o número de ovos, girinos e rãs passados i anos

$$\begin{aligned} X_2 &= MX_1 = MMX_0 = M^2X_0 \\ X_3 &= MX_2 = MM^2X_0 = M^3X_0 \\ &\vdots \\ X_8 &= M^8X_0 \end{aligned}$$

- Após 8 anos, $X_8 = M^8X_0$

$$X_8 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 12 \\ \frac{1}{25} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{10} & \frac{1}{100} \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.14
Continuação

- E se tivessemos introduzido 200 ovos?

$$X_8 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 & 12 \\ \frac{1}{25} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{50} & \frac{1}{10} & \frac{1}{100} \end{bmatrix}^8 \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$