Funções Reais de Variável Real

Matemática I

2018-2019

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

Generalidades sobre Funções Reais de Variável Real

Linguagem matemática

- $\in$ "pertence a"
- $\subseteq$ "está contido em ou igual a"

- negação: $\sim$ "não" ou "não é verdade"
- conjunção: $\wedge$ "e"
- disjunção: $\vee$ "ou"
- implicação: $\Rightarrow$ "implica" ou "se ... então ..."
- equivalência: $\Leftrightarrow$ "equivale a" ou "se e só se"

- quantificador universal: $\forall$ "qualquer que seja"
- quantificador existêncial: $\exists$ "existe pelo menos um"
- quantificador de existência e unicidade: $\exists^1$ "existe um e um só"

Definição de Função

Uma função f de um conjunto A para um conjunto B é uma correspondência que a cada elemento x de A associa um único elemento y de B. Simbolicamente escreve-se

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \rightarrow & B \\ & x & \rightarrow & y = f(x) \end{array}$$

- Ao conjunto A chama-se **domínio** da função f e representa-se por D_f.
- Ao conjunto B chama-se **conjunto de chegada**.
- A cada elemento $x \in A$ designa-se por **objeto**.
- Se a um elemento $x \in A$ estiver associado um elemento $y \in B$, diz-se que y é **imagem** de x e representa-se por $y = f(x)$.
- Ao conjunto das imagens chama-se **contradomínio** da função f e representa-se por CD_f.

Definição de Função Real de Variável Real

Uma função que tem por domínio e contradomínio subconjuntos do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, diz-se uma função real de variável real (f.r.v.r.). Simbolicamente escreve-se

$$\begin{array}{rccc} f: & D_f \subseteq \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & y = f(x) \end{array}$$

onde $CD_f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D_f,\ y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}$.

Representação Gráfica de uma função real de variável real

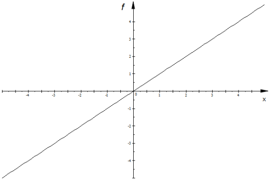
Seja f uma função real de variável real, chama-se gráfico de f a

$$G_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f \wedge y = f(x)\right\}.$$

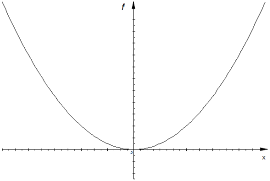
Observação:

- No eixo do x lê-se o domínio de f;
- No eixo do y lê-se o contradomínio de f.

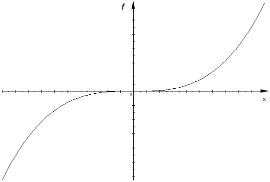
Algumas representações gráficas de funções básicas importantes:



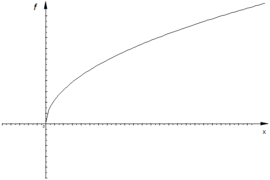
$$f(x) = x$$



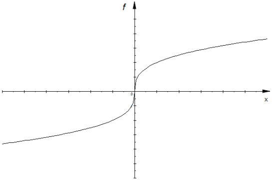
$$f(x) = x^2$$



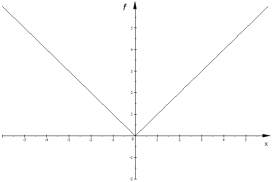
$$f(x) = x^3$$



$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

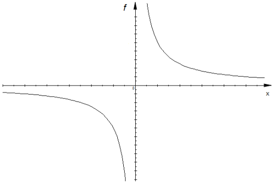


$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

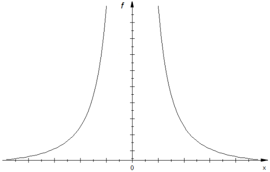


$$f(x) = |x|$$

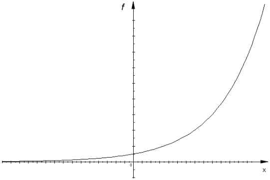
Algumas representações gráficas de funções básicas importantes:



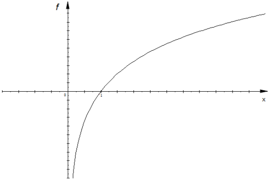
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$



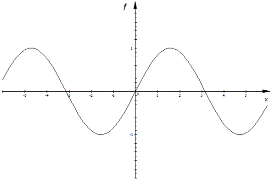
$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$



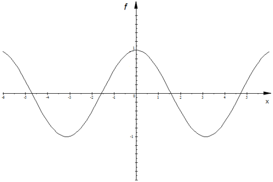
$f(x) = e^x$



$f(x) = lnx$



$f(x) = senx$



$f(x) = cosx$

Algumas transformações nas representações gráficas:

- $y = f(x-c)$, com $c > 0 \longrightarrow$ deslocamento para a direita;
- $y = f(x+c)$, com $c > 0 \longrightarrow$ deslocamento para a esquerda;

- $y = f(x) - c$, com $c > 0 \longrightarrow$ deslocamento para baixo;
- $y = f(x) + c$, com $c > 0 \longrightarrow$ deslocamento para cima;

- $y = -f(x) \longrightarrow$ reflexão em torno do eixo do x;
- $y = f(-x) \longrightarrow$ reflexão em torno do eixo do y;
- $y = -f(-x) \longrightarrow$ reflexão relativamente à origem.

Zeros

x é **zero ou raiz** de f sse $f(x) = 0$.

Sinal

- f é **positiva** em $A \subseteq D_f$ sse $\forall x \in A,\ f(x) > 0$
- f é **negativa** em $A \subseteq D_f$ sse $\forall x \in A,\ f(x) < 0$
- f é **nula** em $A \subseteq D_f$ sse $\forall x \in A,\ f(x) = 0$ (isto é, x é zero de f)

Paridade

- f é **par** sse $\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$
  (o gráfico é simétrico em relação ao eixo dos yy)
- f é **ímpar** sse $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$
  (o gráfico é simétrico em relação à origem do referencial)
- f não tem paridade se não é par nem ímpar.

Bijetividade

- f é **injetiva** sse $\forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
(a objetos diferentes correspondem imagens diferentes)
- f é **sobrejetiva** sse $\forall y \in \mathbb{R}\, \exists x \in D_f,\ y = f(x)$
(o contradomínio coincide com o conjunto de chegada)
No caso das funções reais de variável real equivale a afirmar que
$$CD_f = \mathbb{R}$$
- f é **bijetiva** sse é injetiva e sobrejetiva, isto é
$$\forall y \in \mathbb{R}\, \exists^1 x \in D_f,\ y = f(x)$$

Monotonia

- f é **crescente** em $A \subseteq D_f$ sse

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- f é **estritamente crescente** em $A \subseteq D_f$ sse

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- f é **decrescente** em $A \subseteq D_f$ sse

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- f é **estritamente decrescente** em $A \subseteq D_f$ sse

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Monotonia

- f é **monótona** em $A \subseteq D_f$ sse f é crescente ou decrescente em A;
- f é **estritamente monótona** em $A \subseteq D_f$ sse f é estritamente crescente ou estritamente decrescente em A;
- f é **constante** em $A \subseteq D_f$ sse

$$\forall x \in A, \ f(x) = k \quad (k \in \mathbb{R}) .$$

Extremos

- $f(a)$ é um **máximo local ou relativo** de f sse existir um intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, com $\varepsilon > 0$, tal que
$$\forall x \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap D_f, \; f(x) \leq f(a);$$
- $f(b)$ é um **mínimo local ou relativo** de f sse existir um intervalo $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$, com $\varepsilon > 0$, tal que
$$\forall x \in \,]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\cap D_f, \; f(x) \geq f(b);$$
- $f(a)$ é um **máximo absoluto** de f sse $\forall x \in D_f, \; f(x) \leq f(a);$
- $f(b)$ é um **mínimo absoluto** de f sse $\forall x \in D_f, \; f(x) \geq f(b).$

Concavidades

- f tem a **concavidade virada para cima** se a curva de f é côncava. (Uma curva é côncava no intervalo $[a, b]$ onde tem apenas um mínimo, quando o gráfico da curva fica por baixo da corda que une as imagens de a e b.)
- f tem a **concavidade virada para baixo** se a curva de f é convexa. (Uma curva é convexa no intervalo $[a, b]$ onde tem apenas um máximo, quando o gráfico da curva fica por cima da corda que une as imagens de a e b.)
- O ponto onde ocorre uma mudança de concavidade de f diz-se um **ponto de inflexão**.

OBS: As retas não têm concavidades.

Majorada

f diz-se **majorada** em $A \subseteq D_f$ sse $\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in A,\ f(x) \leq M$

Minorada

f diz-se **minorada** em $A \subseteq D_f$ sse $\exists m \in \mathbb{R}\, \forall x \in A,\ f(x) \geq m$

Limitada

f diz-se **limitada** em $A \subseteq D_f$ sse é majorada e minorada em A, isto é

$$\exists m, M \in \mathbb{R}\, \forall x \in A,\ m \leq f(x) \leq M$$

ou de forma equivalente

$$\exists N > 0\, \forall x \in A,\ |f(x)| \leq N.$$

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real.

Soma de f e g

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad e \qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g.$$

Diferença de f e g

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad e \qquad D_{f-g} = D_f \cap D_g.$$

Produto de f e g

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \qquad e \qquad D_{f\times g} = D_f \cap D_g.$$

Quociente de f e g

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad e \qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}.$$

Raiz índice n de f

$$\sqrt[n]{f(x)} \quad e \quad D_{\sqrt[n]{f}} = \begin{cases} D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\} & , \text{ se } n \text{ é par} \\ D_f & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Logaritmo de f

$$\ln(f(x)) \quad e \quad D_{\ln f} = D_f \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$$

Função Módulo

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & , \text{ se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Função Composta de f por g

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] \quad e \quad D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

Se $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ as funções f e g dizem-se permutáveis.

Função Inversa de f

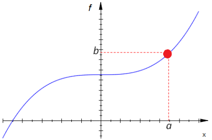
$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) \quad e \quad D_{f^{-1}} = CD_f \quad e \quad CD_{f^{-1}} = D_f.$$

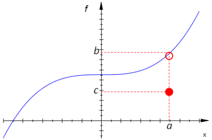
- Só as funções injetivas é que têm inversa.
- Os gráficos são simétricos em relação à equação $y = x$.
- $\left(f^{-1}\right)^{-1}(x) = f(x)$.
- Se f e g são bijetivas então $(f \circ g)^{-1}(x) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(x)$.

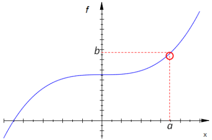
Limites

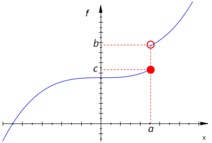
Noção de limite; limites laterais; propriedades e operações.

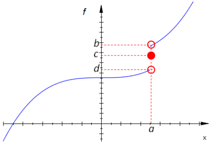
Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

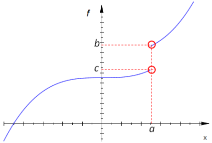












Ponto de acumulação

Sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.
Diz-se que a é um **ponto de acumulação** de A se, qualquer que seja o valor $\varepsilon > 0$, no intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ (**vizinhança de a com raio ε**) existe pelo menos um elemento de A diferente de a.

Intuitivamente,

a é um ponto de acumulação de A se,
tão próximo quanto quisermos de a,
existem sempre elementos de A, diferentes do próprio a.

Observações:

- Um ponto de acumulação tanto pode pertencer ao conjunto como não pertencer.
- O conjunto dos pontos de acumulação de A representa-se por A'.

Noção de limite em $\mathbb{R}$

Limite (finito) de uma função em $a \in \mathbb{R}$

Consideremos $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real (f.r.v.r.), a um ponto de acumulação de D_f e $b \in \mathbb{R}$.

Intuitivamente,

uma função f tende para b quando x tende para a
sse quando os objetos se aproximam muito de a,
as suas imagens por f aproximam-se muito de b.

Definição de Limite segundo Cauchy

Sejam a um ponto de acumulação de D_f e $b \in \mathbb{R}$.
Diz-se que f **tende para** $b \in \mathbb{R}$ **quando** x **tende para** a, isto é

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

sse

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in D_f \backslash \{a\} : (|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta)$$

sse

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in D_f \backslash \{a\} : (a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Rightarrow b - \delta < f(x) < b + \delta)$$

Intuitivamente,

as imagens dos pontos do domínio, diferentes de a,
estão tão próximas quanto quisermos de b
(*proximidade definida pelo* δ, $f(x) \in \,]b - \delta, b + \delta[\,$),
desde que nos aproximemos suficientemente de a
(*proximidade definida pelo* ε, $x \in \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\,$).

Limite lateral à direita (segundo Cauchy)

Seja a um ponto de acumulação de $D_f \cap \,]a, +\infty[$.
Diz-se que f **tende para** b **quando** x **tende para** a **por valores superiores** (ou **à direita de** a) e representa-se por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

sse

$$\forall \delta > 0 \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in D_f : \; (0 < x - a < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta)$$

sse

$$\forall \delta > 0 \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in D_f : \; (a < x < a + \varepsilon \Rightarrow b - \delta < f(x) < b + \delta)$$

Limite lateral à esquerda (segundo Cauchy)

Seja a um ponto de acumulação de $D_f \cap \,]-\infty, a[$.
Diz-se que f **tende para** b **quando** x **tende para** a **por valores inferiores** (ou **à esquerda de** a) e representa-se por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

sse

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in D_f : \ (-\varepsilon < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - b| < \delta)$$

sse

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in D_f : \ (a - \varepsilon < x < a \ \Rightarrow b - \delta < f(x) < b + \delta)$$

Proposição (Unicidade do Limite)

O limite de uma função num ponto, quando existe, é único.

Observações

- Se $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$, então não existe $\lim_{x\to a} f(x)$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = b$ sse $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b$.

Limites infinitos e no infinito

Pretende-se generalizar a noção de limite aos casos em que x tende para infinito e/ou limite da função é infinito.

Limite de f com $a = +\infty$ e $b \in \mathbb{R}$

Sejam f uma f.r.v.r., com D_f não limitado superiormente, e $b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \\ \text{sse} \\ \forall \delta > 0 \ \exists M > 0 \ \forall x \in D_f : (x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \delta). \end{array}}$$

Limite de f com $a = -\infty$ e $b \in \mathbb{R}$

Sejam f uma f.r.v.r., com D_f não limitado superiormente, e $b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \\ \text{sse} \\ \forall \delta > 0\ \exists N < 0\ \forall x \in D_f : (x < N \Rightarrow |f(x) - b| < \delta). \end{array}}$$

Limite de f com $a = +\infty$ e $b = +\infty$

Seja f uma f.r.v.r., com D_f não limitado superiormente:

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \text{sse} \\ \forall L > 0\ \exists M > 0\ \forall x \in D_f : (x > M \Rightarrow f(x) > L). \end{array}}$$

Limite de f com $a = -\infty$ e $b = -\infty$

Seja f uma f.r.v.r., com D_f não limitado inferiormente:

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \text{sse} \\ \forall R < 0 \ \exists N < 0 \ \forall x \in D_f : (x < N \Rightarrow f(x) < R). \end{array}}$$

Limite de f com $a = +\infty$ e $b = -\infty$

Seja f uma f.r.v.r., com D_f não limitado inferiormente:

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \text{sse} \\ \forall R < 0 \ \exists M > 0 \ \forall x \in D_f : (x > M \Rightarrow f(x) < R). \end{array}}$$

Limite de f com $a \in \mathbb{R}$ e $b = +\infty$

Sejam f uma f.r.v.r. e a um ponto de acumulação de D_f:

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \\ \text{sse} \\ \forall L > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in D_f \backslash \{a\} : (|x-a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > L).\end{array}}$$

Limite de f com $a \in \mathbb{R}$ e $b = -\infty$

Sejam f uma f.r.v.r. e a um ponto de acumulação de D_f:

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \\ \text{sse} \\ \forall R < 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in D_f \backslash \{a\} : (|x-a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < R).\end{array}}$$

Analogamente se definiriam os outros casos.

Observação:

- Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, f diz-se um **infinitamente grande positivo** quando x tende para a.

- Se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, f diz-se um **infinitamente grande negativo** quando x tende para a.

- Se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, f diz-se um **infinitamente grande sem sinal determinado** quando x tende para a.

Propriedades dos Limites

Proposição

- $\lim\limits_{x \to a} k = k$, com $k \in \mathbb{R}$.
- os polinómios, as raízes de índice n, as funções trigonométricas (seno, co-seno e tangente), a função exponencial e a função logaritmo têm limite, em qualquer valor de a dos respetivos domínios, igual ao valor da função em a.

Proposição (Propriedades dos Limites Finitos)

Se f, g são funções reais de variável real com limite no ponto a e $k \in \mathbb{R}$, então:

- as funções kf, $f+g$, $f-g$, $f \times g$, $|f|$, têm limite em a e
  - $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$,
  - $\lim\limits_{x \to a} \left[(f+g)(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$,
  - $\lim\limits_{x \to a} \left[(f-g)(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$,
  - $\lim\limits_{x \to a} \left[(f \times g)(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x)$,
  - $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \left| \lim\limits_{x \to a} f(x) \right|$

    (Obs: $|\, f \,|$ pode ter limite no ponto a e a função f não ter),
- se $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, então $\lim\limits_{x \to a} \left[\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$.

Proposição (Propriedades dos Limites Infinitos)

Sejam f, g funções reais de variável real e a finito ou infinito, então:

Para a soma:

- se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \left[(f+g)(x)\right] = +\infty$;
- se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \left[(f+g)(x)\right] = -\infty$;
- sendo $b \in \mathbb{R}$
  - se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim\limits_{x\to a} \left[(f+g)(x)\right] = +\infty$;
  - se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim\limits_{x\to a} \left[(f+g)(x)\right] = -\infty$.

Proposição (Propriedades dos Limites Infinitos)

Sejam f, g funções reais de variável real e a finito ou infinito, então:

Para o produto:

- sendo $b \in \mathbb{R}^+$,
  - se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim\limits_{x\to a} \left[(f \times g)(x)\right] = +\infty$;
  - se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim\limits_{x\to a} \left[(f \times g)(x)\right] = -\infty$;
- sendo $b \in \mathbb{R}^-$,
  - se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim\limits_{x\to a} \left[(f \times g)(x)\right] = -\infty$;
  - se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim\limits_{x\to a} \left[(f \times g)(x)\right] = +\infty$;
- se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \left[(f \times g)(x)\right] = +\infty$;
- se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \left[(f \times g)(x)\right] = -\infty$;
- se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \left[(f \times g)(x)\right] = +\infty$.

Proposição (Propriedades dos Limites Infinitos)

Sejam f, g funções reais de variável real e a finito ou infinito. Suponha que a função g é não nula numa vizinhança de a (exceto, eventualmente em a), então:

Para o inverso e o quociente:

- se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$;
- se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \infty$;
  - se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0^+$, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = +\infty$;
  - se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0^-$, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = -\infty$;
- se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é finito, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
- se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é infinito ou finito *e diferente de zero*, então $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Proposição

Sejam f e g funções reais de variável real, definidas num mesmo intervalo I e a um ponto interior de I. Se f e g são funções com limite no ponto a e se $f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in I$ então

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Teorema do Encaixe

Sejam f, g e h funções reais de variável real, definidas num mesmo intervalo I, e tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in I$. Sendo a um ponto interior de I, se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$$

então

$$\lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Infinitésimos

Diz-se que f é um **infinitésimo** quando x tende para a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Proposição

Se f é um infinitésimo quando x tende para a e g é uma função real de variável real limitada, então $f \times g$ é um infinitésimo quando x tende para a. Ou seja

O produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo.

Indeterminações

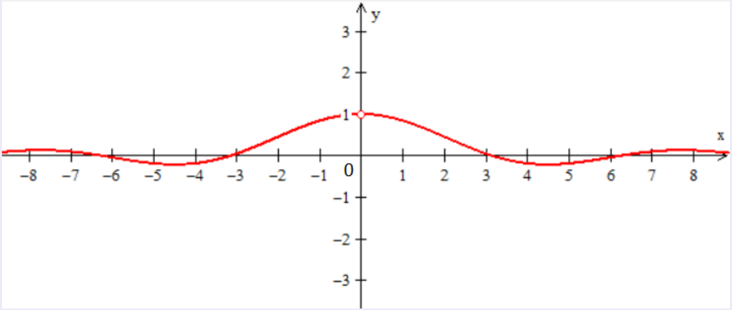
Os símbolos

$(+\infty)-(+\infty)$	$(+\infty)+(-\infty)$	
$0\times(+\infty)$	$0\times(-\infty)$	
$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	
1^{∞}	0^{0}	∞^{0}

são designados por **símbolos de indeterminação**. Isto quer dizer que, nas situações correspondentes, *o facto de existir ou não limite, bem como o seu valor, depende das funções envolvidas; não resulta imediatamente de uma propriedade das operações*.

Alguns resultados importantes:

Gráfico da função $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

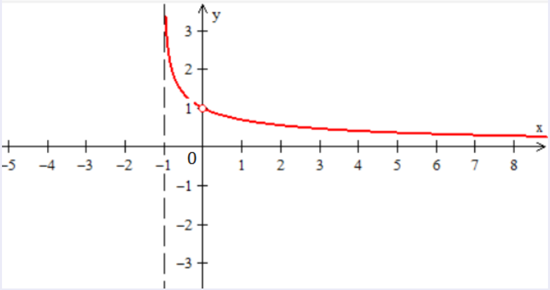


Resultado importante (limite de referência):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Alguns resultados importantes:

Gráfico da função $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

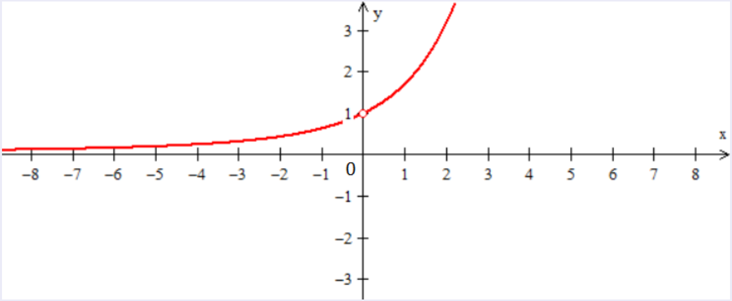


Resultado importante (limite de referência):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Alguns resultados importantes:

Gráfico da função $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

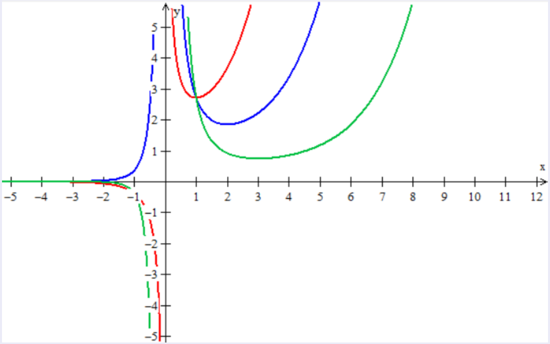


Resultado importante (limite de referência):

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Alguns resultados importantes:

Gráficos das funções: $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $h(x) = \frac{e^x}{x^3}$

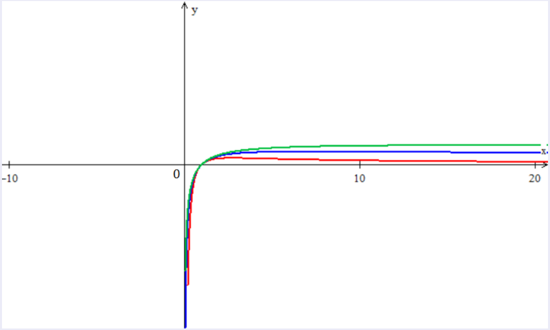


Resultado importante (limite de referência):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, \quad (p \in \mathbb{N})$$

Alguns resultados importantes:

Gráficos das funções: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $h(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$



Resultado importante (limite de referência):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[p]{x}} = 0, \quad (p \in \mathbb{N})$$

Resultados Importantes (limites de referência)

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1;$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1;$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$ mais geral: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[p]{x}} = 0, \quad (p \in \mathbb{N});$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$ mais geral: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, \quad (p \in \mathbb{N}).$

Continuidade

- funções contínuas, propriedades e prolongamento por continuidade;
- teoremas de Bolzano, Weierstrass e da continuidade da função inversa.

Continuidade de uma função

Considere $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e a um ponto de acumulação de D_f que pertence a D_f.

- Diz-se que f **é contínua em** a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Diz-se que f **é contínua à direita em** a se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Diz-se que f **é contínua à esquerda em** a se $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
- Diz-se que f **é contínua no intervalo** $[a, b]$ se f é contínua em $]a, b[$, é contínua à direita em a e é contínua à esquerda em b.
- Diz-se que a f **é contínua** se f é contínua em qualquer ponto do seu domínio.

Continuidade de uma função

Da definição de limite segundo Cauchy, resulta que

$$f \text{ **é contínua em** } a$$

sse

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

sse

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x : (x \in D_f \wedge |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta)$$

Propriedades das funções contínuas (relativamente às operações)

Proposição

Se f e g são funções contínuas em a e $k \in \mathbb{R}$, então:

- as funções kf, $f+g$, $f-g$, $f \times g$ e $|f|$ são contínuas em a;
- se $g(a) \neq 0$, as funções $\frac{1}{g}$ e $\frac{f}{g}$ são contínuas em a.

Proposição

Se f é uma função contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.

Observação

As seguintes funções são contínuas em todo o seu domínio:

- funções polinomiais;
- funções racionais;
- funções com raízes;
- funções trigonométricas;
- funções exponenciais;
- funções logarítmicas.

Prolongamento por continuidade

Sendo f e g duas funções com domínios D_f e D_g, diz-se que g **é um prolongamento de** f (ou que f **é uma restrição de** g) se

$$D_f \subsetneqq D_g \text{ e } \forall x \in D_f, \quad f(x) = g(x).$$

Diz-se que f **é prolongável por continuidade a** a, sendo a um ponto de acumulação de D_f que não pertence a D_f, se existe um prolongamento de f, com domínio $D_f \cup \{a\}$, contínuo em a.

Proposição

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D_f, com $a \notin D_f$.

f é prolongável por continuidade a a

sse

existe (e é finito) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Neste caso, **o prolongamento por continuidade de f a a** é a função

$$g : D_f \cup \{a\} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, se } \quad x \in D_f \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) & \text{, se } \quad x = a \end{cases}$$

Teorema de Bolzano (ou do Valor Intermédio)

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, com $a < b$. Então, para qualquer k estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.

Intuitivamente,

> *uma função contínua num intervalo não passa de um valor*
>
> *a outro sem assumir todos os valores intermédios.*

Corolário 1

Se f é contínua no intervalo $[a, b]$ e não se anula em algum ponto de $[a, b]$, então em todos os pontos de $[a, b]$ a função f tem o mesmo sinal.

Corolário 2

Se f é contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$ então f tem pelo menos um zero em $]a, b[$.

Teorema de Weierstrass

Qualquer função contínua num intervalo $[a,b]$ (fechado e limitado) tem máximo e mínimo nesse intervalo.

Observação: Em qualquer um destes resultados, as condições são apenas condições suficientes; não são condições necessárias.

Teorema (continuidade da função inversa)

Se $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e estritamente monótona em I, então:

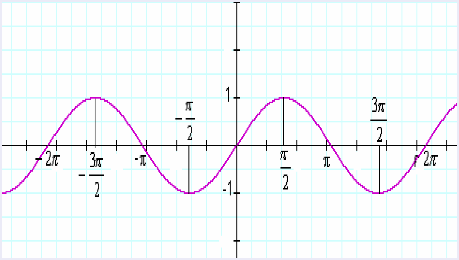
- f é invertível em I;
- f^{-1} é estritamente monótona;
- f^{-1} é contínua.

Observação: O facto de f ser estritamente monótona em I garante que f é injetiva em I.

Funções Trigonométricas Inversas

Função seno

A **<u>função seno</u>** tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-1,1]$, é periódica (com período 2π), é ímpar, anula-se em $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, não é injetiva nem sobrejetiva.

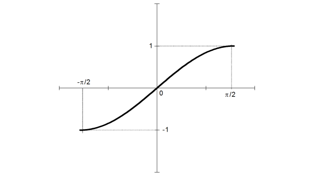


Restringindo a função seno a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, temos a **restrição principal do seno**, que é contínua e estritamente crescente em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, logo invertível.

Função seno e Função arco seno

Restrição principal do seno:

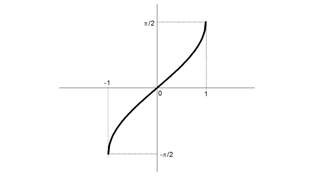
$$\begin{array}{rccc} f: & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ & x & \to & \operatorname{sen} x \end{array}$$



$\operatorname{sen} x$

Inversa do seno (arco seno):

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \to & \operatorname{arcsen} x \end{array}$$



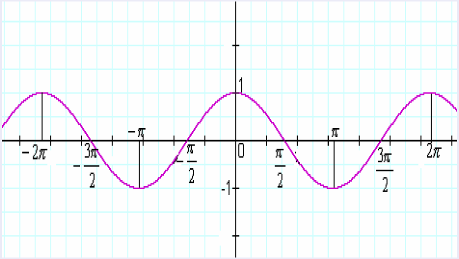
$\operatorname{arcsen} x$

$$y = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \operatorname{arcsen} y = x$$

A inversa da função seno, a função **arco seno**, é contínua, estritamente crescente em $[-1,1]$, ímpar e tem um zero em $x = 0$.

Função co-seno

A **função co-seno** tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-1, 1]$, é periódica (com período 2π), é par e anula-se para $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$, não é injetiva nem sobrejetiva.

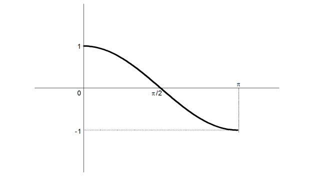


Restringindo a função co-seno a $[0, \pi]$, temos a **restrição principal do co-seno**, que é contínua e estritamente decrescente em $[0, \pi]$, logo é invertível.

Função co-seno e Função arco co-seno

Restrição principal do co-seno:

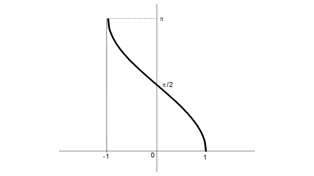
$$\begin{array}{cccc} f: & [0,\pi] & \rightarrow & [-1,1] \\ & x & \rightarrow & \cos x \end{array}$$



$\cos x$

Inversa do co-seno (arco co-seno):

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}: & [-1,1] & \rightarrow & [0,\pi] \\ & x & \rightarrow & \arccos x \end{array}$$



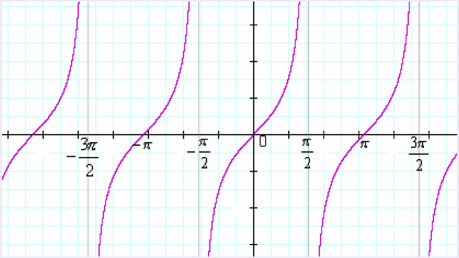
$\arccos x$

$$y = \cos x \Leftrightarrow \arccos y = x$$

A inversa da função co-seno, a função **arco co-seno**, é contínua, estritamente decrescente em $[-1, 1]$ e tem um zero em $x = 1$.

Função tangente

A **função tangente**, definida por $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, tem domínio $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ e contradomínio $\mathbb{R}$, é periódica (com período π), é ímpar e anula-se em $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, não é injetiva mas é sobrejetiva.

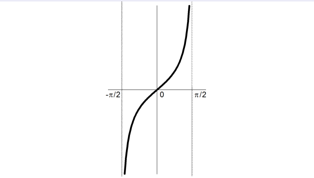


Restringindo a função tangente a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos a **restrição principal da tangente**, que é contínua e estritamente crescente em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, logo é invertível.

Função tangente e Função arco tangente

Restrição principal da tangente:

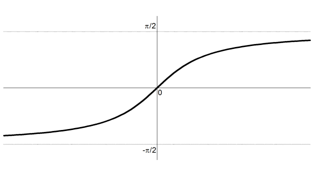
$$\begin{array}{rccc} f: & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \operatorname{tg} x \end{array}$$



$\operatorname{tg} x$

Inversa da tangente (arco tangente):

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \to & \operatorname{arctg} x \end{array}$$



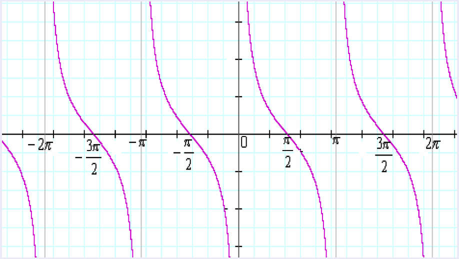
$\operatorname{arctg} x$

$$y = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \operatorname{arctg} y = x$$

A inversa da função tangente, a função **arco tangente**, é contínua, estritamente crescente em $\mathbb{R}$, ímpar e tem um zero em $x = 0$.

Função co-tangente

A **função co-tangente**, definida por $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ e contradomínio $\mathbb{R}$, é periódica (com período π), é ímpar anula-se em $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$, não é injetiva mas é sobrejetiva.

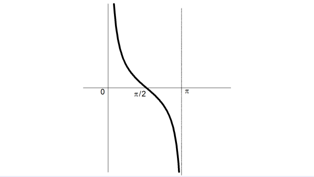


Restringindo a função co-tangente a $]0, \pi[$, obtemos a **restrição principal da co-tangente**, que é contínua e estritamente decrescente em $]0, \pi[$, logo é invertível.

Função co-tangente e Função arco co-tangente

Restrição principal da co-tangente:

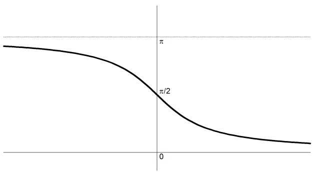
$$f: \;]0,\pi[\; \to \; \mathbb{R}$$
$$x \; \to \; \operatorname{cotg} x$$



$\operatorname{cotg} x$

Inversa da co-tangente (arco co-tangente):

$$f^{-1}: \; \mathbb{R} \; \to \;]0,\pi[$$
$$x \; \to \; \operatorname{arccotg} x$$



$\operatorname{arccotg} x$

$$y = \operatorname{cotg} x \Leftrightarrow \operatorname{arcoctg} y = x$$

A inversa da função co-tangente, a função **arco co-tangente**, é contínua, estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ e não tem zeros.

Outras Funções Trigonométricas

- Função secante

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

- Função co-secante

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Para trabalhar com estas funções basta trabalhar com as funções co-seno e seno.

Algumas Fórmulas Trigonométricas

- $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$
- $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$
- $\operatorname{tg}^2 \alpha = -1 + \sec^2 \alpha$
- $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$