Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**
**MATEMÁTICA I**

$1^o$ SEMESTRE 2017/2018
Exame de Época Normal

8 de Fevereiro de 2018 Duração: **2h30**

---

**Instruções:**

- É obrigatória a apresentação de um documento de identificação.
- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
- Não pode responder a diferentes questões numa mesma folha de resposta.
- O abandono da sala só poderá efectuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
- É permitida a consulta de uma folha A4 manuscrita pelo aluno.
- Não é permitido o manuseamento ou exibição de equipamentos electrónicos durante a prova.
- **Justifique convenientemente todas as respostas**.

---

[2.0] 1. Caracterize a função inversa da função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{4}\right).$$

2. Considere a função real de variável real definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2+x} & , \ x < 0 \\ 1 + xe^{-\frac{1}{x}} & , \ 0 < x < 2 \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) & , \ x \geq 2 \end{cases}.$$

[2.0] (a) Determine o domínio de $h$ e estude a continuidade da função no seu domínio.

[1.5] (b) Verifique se $h$ é prolongável por continuidade a $x = 0$ e, em caso afirmativo, indique esse prolongamento.

[0.5] (c) Justifique que a função $h$ não é diferenciável em $x = 2$.

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = e^{-x}(x+1)^2.$$

[2.0] (a) Determine o polinómio de Mac-Laurin de $f$ de ordem 2 e use-o para calcular um valor aproximado do número $\frac{9}{4\sqrt{e}}$.

[1.5] (b) Estude os intervalos de monotonia e os extremos relativos da função $f$.

4. Calcule:

[1.5] (a) $P\left[x^{-2}\ln x\right]$.

[2.0] (b) $P\left[\dfrac{2x-1}{x^3+x}\right]$.

[2.0] 5. Determine $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-e^{-x}}dx$.

6. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3+\cos(\pi x) & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}.$$

[2.0] (a) Determine a expressão de $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

[1.5] (b) Calcule o valor médio de $f$ no intervalo $[0,2]$. Justifique que existe um ponto nesse intervalo onde a função $f$ atinge o valor médio.

[1.5] 7. Considere a região do plano limitada pelas curvas $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 4-x$ e $y = 0$. Faça um esboço da região e calcule a sua área.

Fim do exame