Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA I

1^o SEMESTRE 2018/2019

Exame - Época de Recurso - Tópicos de Resolução

18 de Fevereiro de 2019 Duração: **2h30**

[2.0] 1. Considerando a restrição principal do coseno, caracterize a função inversa de

$$f(x) = -1 + 3\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Resolução: Considerando a restrição principal do coseno tem-se que,

$$\cos x : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \qquad D_{f^{-1}} = CD_f \qquad CD_{f^{-1}} = D_f$$

D_f :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq -\frac{x}{2} \leq \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq -\frac{x}{2} \leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \geq x \geq -\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $D_f = \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

CD_f : para $x \in D_f$ tem-se que

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -1 - 3 \leq -1 + 3\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \leq -1 + 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4 \leq f(x) \leq 2 \end{aligned}$$

Portanto, $CD_f = [-4, 2]$.
Assim, $D_{f^{-1}} = [-4, 2]$ e $CD_{f^{-1}} = \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

f^{-1} :

$$\begin{aligned} f(x) &= y \Leftrightarrow -1 + 3\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = y \Leftrightarrow 3\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = y + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{y+1}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \arccos\left(\frac{y+1}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{y+1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2\arccos\left(\frac{y+1}{3}\right). \end{aligned}$$

Assim, $f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - 2\arccos\left(\frac{x+1}{3}\right)$.
Portanto,

$$\begin{aligned} f^{-1} : \quad [-4, 2] &\longrightarrow \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\arccos\left(\frac{x+1}{3}\right) \end{aligned}$$

2. Considere k um número real e f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & , x \leq -1 \\ \arcsin x & , -1 < x < 1 \\ k \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & , x > 1 \end{cases} .$$

[1.5] (a) Indique o domínio e estude a função quanto à continuidade.

Resolução: $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup D_{f_3} = \mathbb{R} \backslash \{1\}$

1.º Ramo	2.º Ramo	3.º Ramo
$x \leq -1$	$-1 \leq x \leq 1 \wedge -1 < x < 1$	$x > 1$
$x \leq -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$

Estudo da contínuidade

- $x < -1$: $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\longrightarrow$ função constante logo contínua em $\mathbb{R}$ e portanto contínua para $x < -1$
- $x = -1$: $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

  $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \arcsin x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

  Como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$ então f é contínua em $x = -1$.
- $-1 < x < 1$: $f(x) = \arcsin x$ $\longrightarrow$ função trigonométrica inversa logo contínua em todo o seu domínio, $[-1, 1]$, portanto contínua para $-1 < x < 1$.
- $x > 1$: $f(x) = k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ $\longrightarrow$ produto e composta de funções contínuas em $\mathbb{R}$ logo contínua para $x > 1$ (produto de função constante pela composta entre função trigonométrica e função linear).

Conclusão: f é contínua em todo o seu domínio, $\mathbb{R} \backslash \{1\}$.

[1.5] (b) Determine o valor de k de forma a que f seja prolongável por continuidade a $\mathbb{R}$.

Resolução: f é prolongável por continuidade a $\mathbb{R}$ se e só se,

$x = 1$ for ponto de acumulação de D_f e existir e for finito $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

$x = 1$ é ponto de acumulação de D_f;

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \arcsin x = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = k\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} = k$

Assim, se $k = \frac{\pi}{2}$ tem-se que f é prolongável por continuidade a $x = 1$ logo a $\mathbb{R}$.

[1.5] (c) Calcule o valor médio de f no intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Resolução: O valor médio de f em $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ é dado por,

$$f_{VM\left[0,\frac{1}{2}\right]}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\operatorname{arcsen}x dx}{\frac{1}{2}-0}=2\int_0^{\frac{1}{2}}\operatorname{arcsen}x dx\underbrace{=}_{*}2\left[x\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2$$

* Primitivação por partes:

$$\begin{aligned}
P[1] &= x \qquad \text{e} \qquad (\operatorname{arcsen}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
P[1\times\operatorname{arcsen}x] &= x\operatorname{arcsen}x-P\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]=x\operatorname{arcsen}x+\frac{1}{2}P\left[-2x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=\\
&= x\operatorname{arcsen}x+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}}+C
\end{aligned}$$

3. Seja g uma função contínua em $\mathbb{R}$ com $g(0)=2$ e seja f uma função definida por

$$f(x)=1+xg(x), \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

[1.5] (a) Usando a definição de derivada, prove que $f'(0)=2$.

Resolução: Por definição, a derivada de f no ponto $x=c$ pode ser dada por

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Desta forma,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Por outro lado,

$$f(x)=1+xg(x) \qquad e \qquad f(0)=1+0g(0)=1+0\times 2=1.$$

Assim,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1+xg(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xg(x)}{x}=\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)=2.$$

[1.0] (b) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,f(0))$.

Resolução: A equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(c,f(c))$, é dada por

$$y=f(c)+f'(c)(x-c).$$

Pela alínea anterior, f é diferenciável no ponto $x=0$. Sabe-se ainda que, $f(0)=1$ e $f'(0)=2$, assim

$$y=1+2(x-0)\Leftrightarrow y=2x+1.$$

[2.0] 4. Utilize o polinómio de Mac-Laurin de ordem 2 para calcular um valor aproximado de $\sqrt[10]{e}$.

Resolução: Considerando que $\sqrt[10]{e} = e^{\frac{1}{10}}$ e que vamos usar o polinómio de Mac-Laurin é adequado usar a função $f(x) = e^x$; como a função exponencial é n vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, então:

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \qquad \longrightarrow f'(0) = e^0 = 1.$$
$$f''(x) = (e^x)' = e^x \qquad \longrightarrow f''(0) = e^0 = 1$$

e $\quad f(0) = e^0 = 1.$

O polinómio de Mac-Laurin de ordem 2 é dado por:

$$P_2(x) = f\ (0) + f'(0)\ x + \frac{f''(0)}{2!}\ x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

Deste modo tem-se que, nas proximidades de $x = 0$

$$\begin{array}{l} f(x) \approx P_2(x) \\ e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

Para obter uma aproximação de $\sqrt[10]{e} = e^{\frac{1}{10}}$, considerando a função $f(x) = e^x$, faz-se $x = \frac{1}{10} = 0.1$ (está próximo de $x = 0$) pelo que,

$$\sqrt[10]{e} = e^{\frac{1}{10}} \approx 1 + 0.1 + \frac{1}{2} \times (0.1)^2 = 1 + 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.01 = 1.1 + 0.005 = 1.105$$

5. Calcule:

[1.0] (a) $P\left[(3x + 3\cos(2x))\, e^{x^2+\operatorname{sen}(2x)}\right]$;

Resolução: Como $\left(e^{x^2+\operatorname{sen}(2x)}\right)' = (x^2 + \operatorname{sen}(2x))'\, e^{x^2+\operatorname{sen}(2x)} = (2x + 2\cos(2x))'\, e^{x^2+\operatorname{sen}(2x)}$, então

$$\begin{aligned} P\left[(3x + 3\cos(2x))\, e^{x^2+\operatorname{sen}(2x)}\right] &= \frac{3}{2}P\left[(2x + 2\cos(2x))\, e^{x^2+\operatorname{sen}(2x)}\right] = \\ &= \frac{3}{2}e^{x^2+\operatorname{sen}(2x)} + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

[2.0] (b) $P\left[\dfrac{3x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2(1 + 2x^2)}\right]$;

Resolução: Temos uma primitiva por decomposição:

$$\begin{aligned} \frac{3x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2(1 + 2x^2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{1 + 2x^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = Ax\left(1 + 2x^2\right) + B\left(1 + 2x^2\right) + (Cx + D)\, x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = (2A + C)\, x^3 + (2B + D)\, x^2 + Ax + B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2A + C = 3 \\ 2B + D = 2 \\ A = -1 \\ B = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 5 \\ D = 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P\left[\frac{3x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2(1 + 2x^2)}\right] &= P\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{5x}{1 + 2x^2}\right] = \\ &= -P\left[\frac{1}{x}\right] + P\left[x^{-2}\right] + \frac{5}{4}P\left[\frac{4x}{1 + 2x^2}\right] = \\ &= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{5}{4}\ln\left(1 + 2x^2\right) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

[2.0] (c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x+x\ln^2 x}dx.$

Resolução:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x+x\ln^2 x}dx &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\frac{1}{x}}{\left(1+(\ln x)^2\right)}dx = \\ &= \left[\operatorname{arctg}(\ln x)\right]_{\frac{1}{e}}^{e} = \operatorname{arctg}(\ln e) - \operatorname{arctg}\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right) = \\ &= \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

6. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \le 0 \\ \operatorname{sen} x & , x > 0 \end{cases}.$$

[1.5] (a) Determine a expressão de $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt.$

Resolução: Como a função f é definida por ramos temos de considerar o caso em que $x < 0$:

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} x^2 dt == \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$$

e o caso em que $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{0} x^2 dt + \int_{0}^{x} \operatorname{sen}(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{3} + \left[-\cos(t)\right]_0^x = \frac{4}{3} - \cos x.\end{aligned}$$

Assim a função tem a seguinte expressão analítica

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} & , \quad -1 \le x < 0 \\ \frac{4}{3} - \cos x & , \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

[1.0] (b) Considere a restrição de f para $x > 0$ e a função H definida por

$$H(x) = \int_{x^2-1}^{2} e^{f(t)}dt.$$

Calcule, justificando, $H'(1)$.

Resolução: Note-se que a função f é contínua e como tal a função e^f também é contínua pois é a composição de funções contínuas (a função exponencial e a função f). Além disso, a função $x^2 - 1$ é diferenciável (é um polinómio). Estamos nas condições do Teorema fundamental do cálculo integral e ao aplicar-se com a derivada função composta, obtém-se

$$H'(x) = \left(-\int_2^{x^2-1} e^{f(t)} dt\right)' = -e^{f\left(x^2-1\right)}\left(x^2-1\right)' = 2xe^{f\left(x^2-1\right)}.$$

Logo,

$$H'(1) = -2e^{f(0)} = -2e^0 = -2.$$

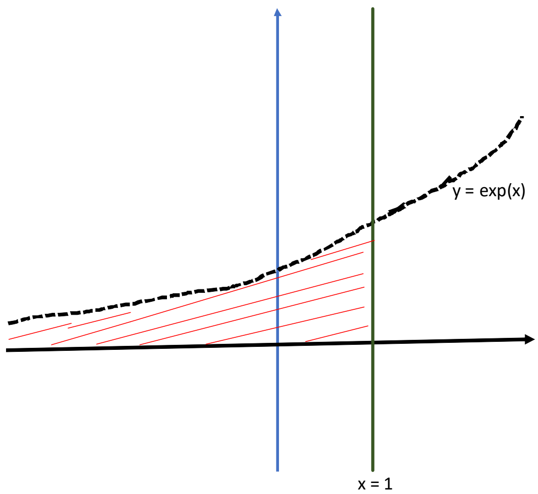
[1.5] 7. Considere a região do plano definida pelas seguintes condições:

$$y \leq e^x, \quad y \geq 0 \ \text{ e } \ x \leq 1.$$

Faça o esboço da região e calcule o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno do eixo dos xx.

Resolução:

- Esboço da região:



- Cálculo do volume:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\infty}^{1} \left[(e^x)^2 - (0)^2\right] dx = \pi \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{1} e^{2x} dx = \pi \lim_{\alpha \to -\infty} \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_{\alpha}^{1} = \\ &= \pi \lim_{\alpha \to -\infty} \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{2\alpha}\right) = \frac{\pi e^2}{2} \end{aligned}$$

Fim do exame