Exercícios Resolvidos Semana 4 6/IV/2020 até 8/IV/2020

Exercício 2.2

`Considere as seguintes matrizes:`

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

`Calcule, se possível:`

1. $B - 2 \cdot A$
2. $A \cdot C - C \cdot A$
3. $B \cdot C - C \cdot B$
4. $A^t \cdot B$
5. $3 \cdot B \cdot D - 6 \cdot D$
6. $3\,\mathrm{Id}_2 - C$

•(1)•

$$(-2) \cdot A = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -2 & 10 & -8 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$B - 2 \cdot A \text{ impossível porque } B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad (-2) \cdot A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

Não existe a soma por ser matrizes de tamanhos diferentes.

•(2)•

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -10 & 7 \\ -1 & -15 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C \textbf{ impossível porque } A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

É impossível fazer o produto $A \cdot C$, porque as linhas de A têm 3 entradas, e as colunas de B têm duas entradas. (Deveríamos fazer o produto escalar de cada linha de A com cada coluna de B, mas estes produtos escalares não existem)

Portanto $A \cdot C - C \cdot A$ não existe (o primeiro termo não existe)

•(3)•

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 19 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -13 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot C - C \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 19 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -13 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Observamos que $B \cdot C - C \cdot B$ não é a matriz nula. Na realidade $B \cdot C \neq C \cdot B$ (lembrança de que o produto de matrizes não é comutativo)

•(4)•

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 5 & -10 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$$

•(5)•

$$3 \cdot B \cdot D = 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -24 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot B \cdot D - 6 \cdot D = \begin{bmatrix} 3 \\ -24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Observação: $3 \cdot B \cdot D - 6 \cdot D = (3 \cdot B - 6\,\mathrm{Id}_2) \cdot D$

$$3 \cdot B - 6\,\mathrm{Id}_2 = 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 6 \cdot 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3 \cdot B - 6\,\mathrm{Id}_2) \cdot D = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -6 \end{bmatrix}$$

•(6)•

$$3\,\mathrm{Id}_2 - C = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.6

Dadas as matrizes A, B e os vetores coluna v, w:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calcule $A + 2B$, $2v - 5w$, $A \cdot v$, $B \cdot w$, $A \cdot B^t$.
2. Calcule $C = v \cdot w$ e comprove se $C^t = v^t \cdot w^t$.
3. Calcule C^8.

- •(1)•

$$A + 2 \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 & 19 & -5 \\ -1 & 6 & 9 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

- $2v - 5w$ impossível por terem tamanho diferente

$v \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$, $w \in M_{1\times 4}(\mathbb{R})$

-
$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- $B \cdot w$ impossível

$B \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $w \in M_{1\times 4}(\mathbb{R})$, as linhas de B têm 4 entradas e as colunas de w uma entrada. Não existe o produto duma linha de B com uma coluna de w.

•

$$A \cdot B^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 1 & -12 \\ 18 & 8 & 5 \\ 35 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

•(2)•

$$C = v \cdot w = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -12 & 0 & 8 \\ 2 & -6 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$v^t \cdot w^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [-10]$$

•(3)•

$$C^2 = C{\cdot}C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -40 & -20 & -10 \\ 0 & 120 & 60 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -80 & -40 & -20 \end{bmatrix}$$

$$C^4 = C^2{\cdot}C^2 = 10{\cdot} \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & -2 \end{bmatrix} {\cdot}10{\cdot} \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & -2 \end{bmatrix} = 100{\cdot} \begin{bmatrix} 0 & -40 & -20 & -10 \\ 0 & 120 & 60 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -80 & -40 & -20 \end{bmatrix}$$

$$C^8 = C^4 \cdot C^4 = 1000 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot 1000 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -40 & -20 & -10 \\ 0 & 120 & 60 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -80 & -40 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -40000000 & -20000000 & -10000000 \\ 0 & 120000000 & 60000000 & 30000000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -80000000 & -40000000 & -20000000 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.8

Dizemos que uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma raiz quadrada de uma matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se $A \cdot A = B$. Encontrar 6 raízes quadradas diferentes da matriz $\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 12.5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 12.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

...e muitas mais soluções.

Exercício 2.9

Decidir qual das seguintes afirmações é certa para qualquer par de matrizes quadradas do mesmo tamanho:

1. $(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$
2. $(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2$
3. $(A-B)^2 = A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2$
4. $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$
5. Se A e B são invertíveis, então $A \cdot B$ é invertível e a inversa é $A^{-1} \cdot B^{-1}$.
6. Se A e B são invertíveis, então $A+B$ é invertível e a inversa é $A^{-1} + B^{-1}$.
7. Se A é invertível e $A \cdot B = 0_{n \times n}$, então $B = 0_{n \times n}$.
8. Se $A \cdot B = 0_{n \times n}$, então $A = 0_{n \times n}$ ou $B = 0_{n \times n}$.

•(1)• Ao aplicarmos as propriedades da soma e produto podemos concluir:

$$(A+B) \cdot (A+B) = A \cdot (A+B) + B \cdot (A+B) = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B$$

Se soubéssemos $A \cdot B = B \cdot A$ poderíamos então escrever

$$A \cdot B + B \cdot A = A \cdot B + A \cdot B = (1+1) \cdot A \cdot B = 2 \cdot A \cdot B$$

Mas já foram estudadas matrizes onde $A \cdot B$, $B \cdot A$ são diferentes. Por exemplo as matrizes chamadas B, C no exercício 2.2. Se usamos estas temos:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

e já vimos que não comutam:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 19 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -13 & 0 \end{bmatrix} = B \cdot A$$

Portanto deveriam ser diferentes $(A+B)^2$ e $A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$:

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 55 \\ -33 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 = \begin{bmatrix} 22 & 21 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 19 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 67 \\ -25 & 14 \end{bmatrix}$$

Comprovamos $(A+B)^2 \neq A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$

•(2)• Se aplicamos a propriedade associativa do produto temos

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B) = A \cdot (B \cdot A) \cdot B$$

$$(A \cdot A) \cdot (B \cdot B) = A \cdot (A \cdot B) \cdot B$$

Novamente se soubéssemos $A \cdot B = B \cdot A$ teríamos $(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2$.

As matrizes A, B antes vistas não comutam, e portanto não temos motivos para pensar que nestas matrizes seja $(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2$. Comprovamos:

$$(A \cdot B)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 19 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 19 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -94 & 57 \\ -15 & -79 \end{bmatrix}$$

$$A^2 \cdot B^2 = \begin{bmatrix} 22 & 21 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -234 & 281 \\ 13 & -51 \end{bmatrix}$$

Observamos que, realmente, temos $(A \cdot B)^2 \neq A^2 \cdot B^2$ para estas matrizes.

•(3)• Para o quadrado da diferença, se usamos as propriedades distributivas

$$\begin{aligned} (A-B) \cdot (A-B) &= (A + (-1) \cdot B) \cdot (A + (-1) \cdot B) = \\ &= A \cdot (A + (-1) \cdot B) + (-1) \cdot B \cdot (A + (-1) \cdot B) = \\ &= A \cdot A + (-1) \cdot A \cdot B + (-1) \cdot B \cdot A + (-1) \cdot B \cdot (-1) \cdot B = \\ &= A \cdot A - A \cdot B - B \cdot A + (-1)^2 \cdot B \cdot B = A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2 \end{aligned}$$

Se tivéssemos $A \cdot B = B \cdot A$ poderíamos escrever $((-1)+(-1)) \cdot A \cdot B = -2 \cdot A \cdot B$ em lugar de $-A \cdot B - B \cdot A$ e a fórmula continuaria a ser correta.

Tal como está dada, a fórmula não tem problema, é válida seja qual for A, B (a prova foi geral, sem importar se as matrizes comutam ou não)

Com o mesmo exemplo que estamos a usar:

$$(A-B)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2 = \begin{bmatrix} 22 & 21 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 19 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -13 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

•(4)• Agora estudamos o produto de soma com diferença. Novamente a propriedade distributiva diz:

$$\begin{aligned}(A+B)\cdot(A-B) &= A\cdot(A+(-1)\cdot B)+B\cdot(A+(-1)\cdot B) = \\ &= A\cdot A+(-1)\cdot A\cdot B+B\cdot A+(-1)\cdot B\cdot B = A\cdot A-B\cdot B+B\cdot A-A\cdot B\end{aligned}$$

Se soubéssemos $B\cdot A-A\cdot B$ matriz nula, iríamos concluir a igualdade no enunciado. No entanto como regra geral $A\cdot B$ é diferente de $B\cdot A$. Para as matrizes consideradas aqui temos:

$$(A+B)\cdot(A-B) = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 1 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$$

Enquanto a diferença de quadrados é:

$$A^2-B^2 = \begin{bmatrix} 22 & 21 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 13 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

•(5)•

Saber que A^{-1} é inversa de A garante que $A\cdot A^{-1}=\mathrm{Id}$, $A^{-1}\cdot A=\mathrm{Id}$.

Saber que B^{-1} é inversa de B garante que $B\cdot B^{-1}=\mathrm{Id}$, $B^{-1}\cdot B=\mathrm{Id}$.

No entanto com estas propriedades não é possível deduzir que $(A\cdot B)\cdot(A^{-1}\cdot B^{-1})=\mathrm{Id}$. Podemos sim provar que esta matriz é inversa de $B\cdot A$:

$$(B\cdot A)\cdot(A^{-1}\cdot B^{-1}) = B\cdot(A\cdot A^{-1})\cdot B^{-1} = B\cdot\mathrm{Id}\cdot B^{-1} = B\cdot B^{-1} = \mathrm{Id}$$

$$(A^{-1}\cdot B^{-1})\cdot(B\cdot A) = A^{-1}\cdot(B^{-1}\cdot B)\cdot A = A^{-1}\cdot\mathrm{Id}\cdot A = A^{-1}\cdot A = \mathrm{Id}$$

Como regra geral, o máximo que conseguimos provar é que $A^{-1}\cdot B^{-1}$ é inversa de $B\cdot A$

Só se sabemos que $A\cdot B=B\cdot A$ (se as matrizes comutam), poderíamos garantir que $A^{-1}\cdot B^{-1}$ é inversa de $A\cdot B$.

O exemplo antes visto não ajuda muito neste caso, porque não conhecemos inversas destas matrizes. No entanto, podemos comprovar o resultado com as seguintes matrizes, cuja inversa é simples de identificar:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se usamos a propriedade $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & (-A^{-1}BC^{-1}) \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$ temos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Claramente não são uma inversa da outra:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

•(6)• Esta propriedade nem sequer é válida para números reais, menos ainda para matrizes: $\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Como exemplo, podemos usar matrizes 1×1, onde a soma e produto são a soma e produto de valores reais:

$$A = [1], \quad B = [2], \quad A^{-1} = [1], \quad B^{-1} = [1/2]$$

$$A + B = [3], \quad (A+B)^{-1} = [1/3], \quad A^{-1} + B^{-1} = [1] + [1/2] = [3/2] \neq [1/3]$$

Assim vemos que $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

•(7)• Se sabemos A invertível e $A \cdot B = \mathbf{0}_{n\times n}$, basta multiplicar pela esquerda com A^{-1} e temos:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot \mathbf{0}_{n\times n} = \mathbf{0}$$

Se agora aplicamos a propriedade associativa:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = \mathrm{Id}_2 \cdot B = B$$

deduzimos que, realmente $B = \mathbf{0}_{n\times n}$, como se pedia.

•(8)• É simples encontrar matrizes cujo produto é zero, sem que nenhuma delas seja a matriz nula:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.13

`Se usamos a norma matricial associada à norma-1 para medir erros, determine qual é o erro relativo se usamos` A^* `como aproximação de` A:

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2 & 1/7 \\ 1 & 1/5 & 2 \\ 2/3 & 4 & 1/6 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 0.3 & 2 & 0.1 \\ 1 & 0.2 & 2 \\ 0.7 & 4 & 0.1 \end{bmatrix}$$

O erro relativo está definido como

$$\delta(A^*, A) = \frac{\|A^* - A\|}{\|A\|}$$

Se usamos a norma-1 temos:

$$\|A\|_1 = 31/5$$

porque $1/3 + 1 + 2/3 = 6/3 = 2$ ou $1/7 + 2 + 1/6 = 55/42$ são menores que $2 + 1/5 + 4 = 31/5$

Calculamos agora a diferença:

$$A^* - A = \begin{bmatrix} -1/30 & 0 & -3/70 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/30 & 0 & -1/15 \end{bmatrix} \Rightarrow \|A^* - A\|_1 = 23/210$$

porque $1/30 + 0 + 1/30 = 1/15$ é menor que $3/70 + 0 + 1/15 = 23/210$

Concluímos finalmente:

$$\delta(A^*, A) = \frac{23/210}{31/5} = \frac{23}{1302} \simeq 0.017665$$