Машинное обучение

Лекция 6. Проверка статистических гипотез и A/B тестирование.

1 февраля 2018

Краткое содержание

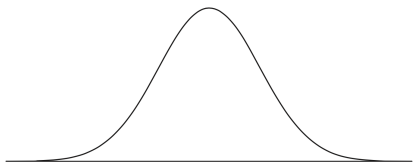
Математический аппарат
- Проверка гипотез
- Статистические критерии
- Интерпретация результата

Примеры критериев
- Параметрические критерии
- Непараметрические критерии

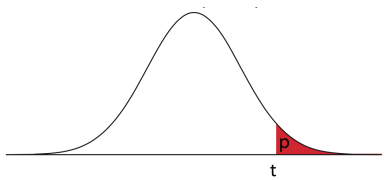
Применение критериев на практике
- Разбиение на тестовые группы
- Измерение эффекта
- Подводные камни

Проверка гипотез

выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$, $X \sim P \in \Omega$
нулевая гипотеза H_0: $P \in \omega$, $\omega \subset \Omega$
альтернатива H_1: $P \notin \omega$
статистика: $T(X^n)$, $T(X^n) \sim F(x)$ при $P \in \omega$, $T(X^n) \nsim F(x)$ при $P \notin \omega$



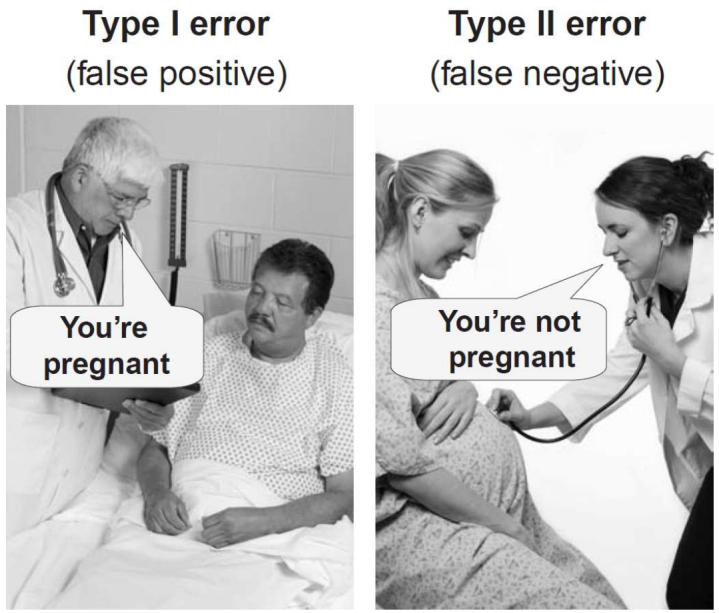
реализация выборки: $x^n = (x_1, \ldots, x_n)$
реализация статистики: $t = T(x^n)$
достигаемый уровень значимости: $p(x^n)$ — вероятность при H_0
получить $T(X^n) = t$ или ещё более экстремальное



$p(x^n) = P(T \geqslant t \mid H_0)$ — обычно это значение называют p-value
Гипотеза отвергается при $p(x^n) \leqslant \alpha$, α — уровень значимости

Ошибки первого и второго рода

	H_0 верна	H_0 неверна
H_0 принимается	H_0 верно принята	Ошибка второго рода (False negative)
H_0 отвергается	Ошибка первого рода (False positive)	H_0 верно отвергнута



Ошибки первого и второго рода

Задача проверки гипотез несмметрична. Поэтому есть два параметра оценки критерия:

Корректность критерия: $\mathrm{P}(\mathrm{p}(\mathrm{T}) \leqslant \alpha \mid \mathrm{H}_0) \leqslant \alpha$
Мощность критерия: $\mathrm{pow} = \mathrm{P}(\mathrm{p}(\mathrm{T}) \leqslant \alpha \mid \mathrm{H}_1) \to \mathsf{max}$

Интерпретация результата

Если величина p достаточно мала, то данные свидетельствуют против нулевой гиптезы в пользу альтернативы.

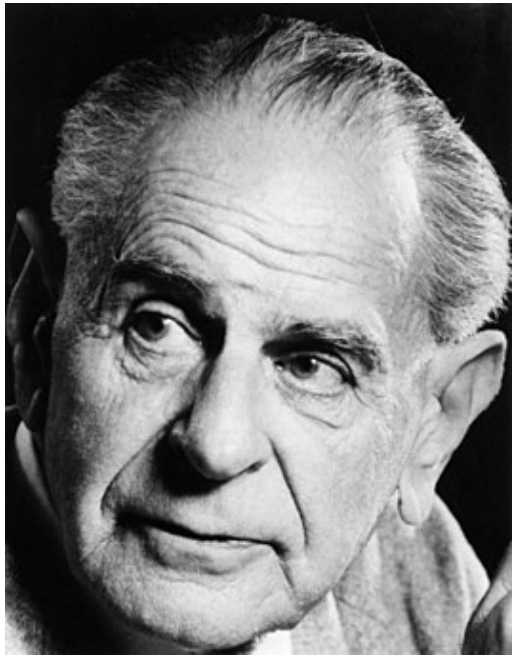
Интерпретация результата

Если величина p достаточно мала, то данные свидетельствуют против нулевой гиптезы в пользу альтернативы.

Если величина p не достаточно мала, то данные не свидетельствуют против нулевой гипотезы в пользу альтернативы.

Интерпретация результата

При помощи инструмента проверки гипотез нельзя доказать справедливость нулевой гипотезы. В философии подобные рассуждения встречаются в критерии научности Карла Поппера.



Отсутствие доказательств $\neq$ доказательство отсутствия.

Уровень значимости

Достигаемый уровень значимости нельзя интерпретировать как вероятность справедливости нулевой гипотезы!

$$p = P(T \geqslant t \mid H_0) \neq P(H_0 \mid T \geqslant t)$$

Однако, отсутствие свидетельств = свидетельство отсутствия.

Мощность

$\mathrm{pow} = \mathrm{P}(\mathrm{p}(\mathrm{T}) \leqslant \alpha \mid \mathrm{H}_1)$ — вероятность отвергнуть H_0, если верна альтернатива

Мощность критерия зависит от следующих факторов:

- размер выборки;
- размер отклонения от нулевой гипотезы;
- чувствительность статистики критерия;
- тип альтернативы.

Размер выборки

Обеспечение требуемой мощности: размеры выборки подбирается так, чтобы при размере отклонения от нулевой гипотезы не меньше заданного мощность была не меньше заданного порога.

Руководствуясь этим правилом, оценивается время A/B тестирования. Например, вы хотите показать увеличение конверсии с 0.51 до 0.53.

$$\mathrm{P}(\mathrm{pvalue(T)} \leqslant 0.05 \mid \text{конверсия больше } 0.53) \geqslant 0.85$$

Статистическая и практическая значимости

Либо ты умираешь героем, либо живёшь до тех пор, пока не становишься негодяем.

(Харви Дент)

Статистическая и практическая значимости

> Либо ты умираешь героем, либо живёшь до тех пор, пока не становишься негодяем.
>
> (Харви Дент)

На практике вероятность отвергнуть нулевую гипотезу зависит не только от того, насколько она отличается от истины, но и от размера выборки.

Статистическая и практическая значимости

- (Lee et al, 2010): за три года женщины, упражнявшиеся не меньше часа в день, набрали значимо меньше веса, чем женщины, упражнявшиеся меньше 20 минут в день ($p < 0.001$). Разница в набранном весе составила 150 г.
- (Ellis, 2010, гл. 2): в 2002 году клинические испытания гормонального препарата Премарин, облегчающего симптомы менопаузы, были досрочно прерваны. Было обнаружено, что его приём ведёт к значимому увеличению риска развития рака груди на 0.08%, риска инсульта на 0.08% и инфаркта на 0.07%.
- (Kirk, 1996): если при испытании гипотетического лекарства, позволяющего замедлить прогресс ослабления интеллекта больных Альцгеймером, оказывается, что разница в IQ контрольной и тестовой групп составляет 13 пунктов, что статистически незначимо.

Параметрические критерии

Параметрические критерии проверки гипотез допускают дополнительное знание о распределении выборок, что позволяет составлять более мощные критерии.

К сожалению, реальные данные очень редко распределены как табличные распределения. Но есть ряд популярных случаев, когда это так, их и разберём.

Z-критерий меток для доли

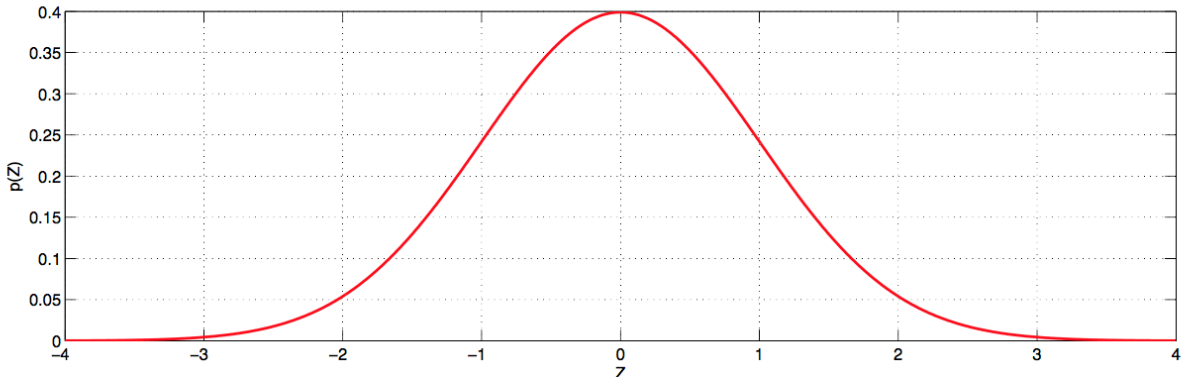
выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n), X \sim Ber(p)$

нулевая гипотеза: $H_0 : p = p_0$

альтернатива: $H_1 : p <\neq> p_0$

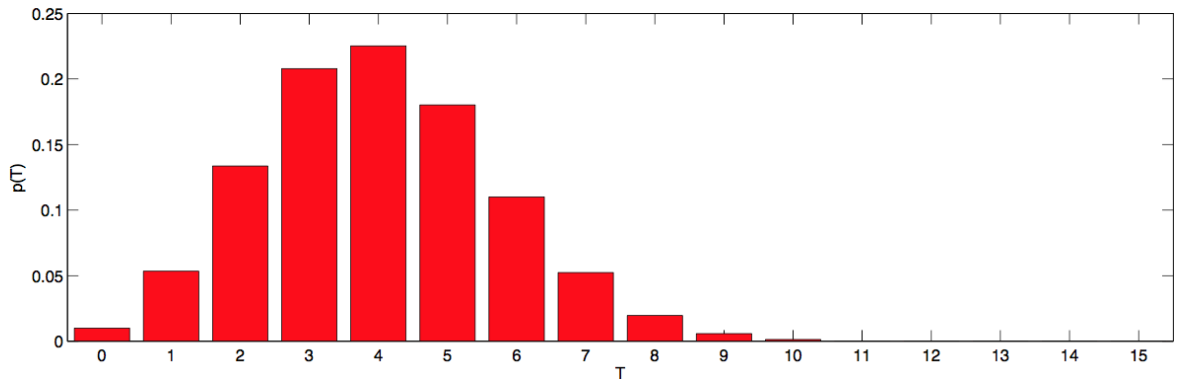
статистика: $Z_S(X^n) = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

нулевое распределение: $N(0,1)$



Биномиальный критерий

выборка:	$X^n = (X_1, \ldots, X_n), X \sim Ber(p)$
нулевая гипотеза:	$H_0 : p = p_0$
альтернатива:	$H_1 : p <\neq> p_0$
статистика:	$T(X^n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$
нулевое распределение:	$Bin(n, p_0)$



Z-критерий разности долей, независимые выборки

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1}), X_1 \sim Ber(p_1)$
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \ldots, X_{2n_2}), X_2 \sim Ber(p_2)$
выборки независимы

Исход \ Выборка	$X_1^{n_1}$	$X_2^{n_2}$
1	a	b
0	c	d
$\sum$	n_1	n_2

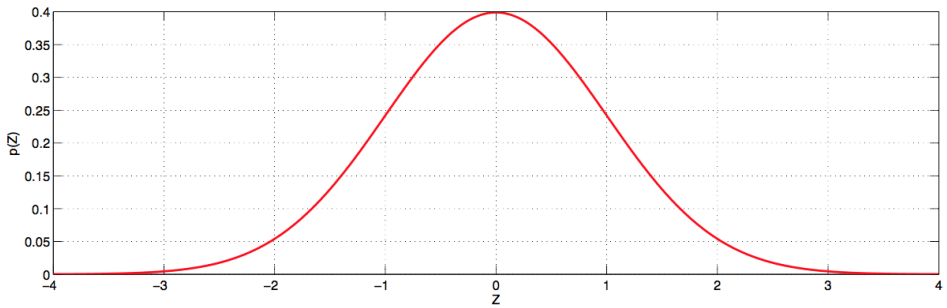
нулевая гипотеза: $H_0 : p_1 = p_2$

альтернатива: $H_1 : p_1 <\neq> p_2$

статистика: $Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$

$P = \dfrac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1 + n_2}$, $\hat{p}_1 = \dfrac{a}{n_1}$, $\hat{p}_2 = \dfrac{b}{n_2}$

нулевое распределение: $N(0,1)$



Z-критерий разности долей, связанные выборки

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \ldots, X_{1n}), X_1 \sim Ber(p_1)$
$X_2^n = (X_{21}, \ldots, X_{2n}), X_2 \sim Ber(p_2)$

выборки связанные

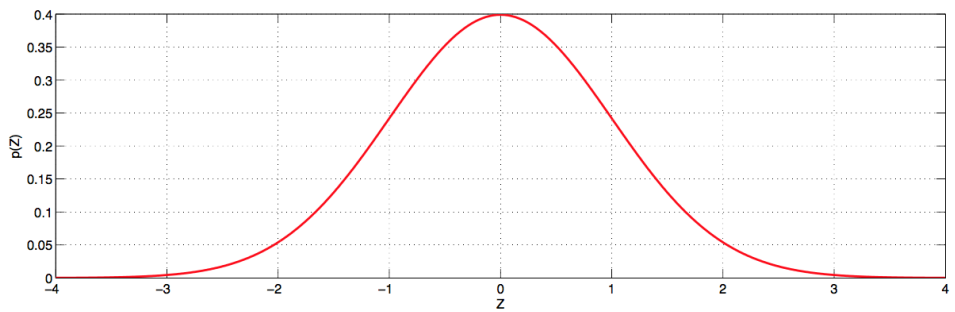
X_1^n \ X_2^n	1	0
1	e	f
0	g	h

нулевая гипотеза: $H_0 : p_1 = p_2$

альтернатива: $H_1 : p_1 <\neq> p_2$

статистика: $Z(X_1^n, X_2^n) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{f+g}{n^2} - \frac{(f-g)^2}{n^3}}} = \frac{f-g}{\sqrt{f+g-\frac{(f-g)^2}{n}}}$

нулевое распределение: $N(0,1)$



Z-критерий

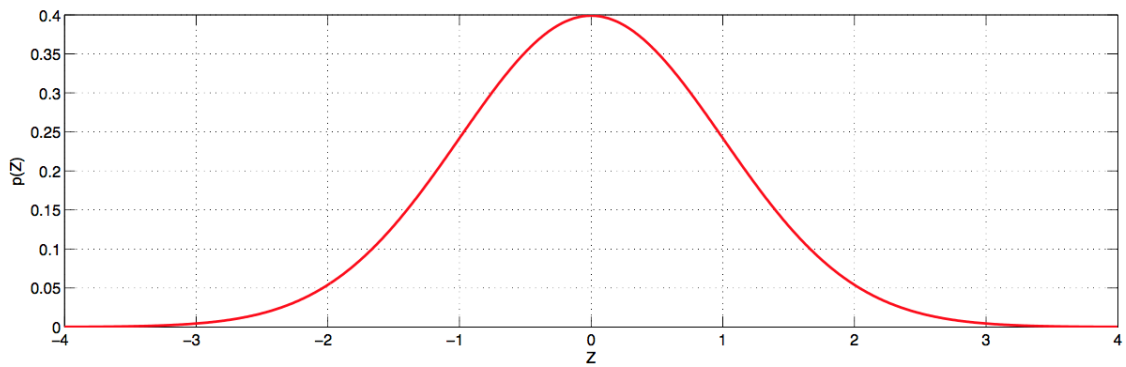
выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1}), X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \ldots, X_{2n_2}), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
σ_1, σ_2 известны

нулевая гипотеза: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

альтернатива: $H_1 : \mu_1 <\neq> \mu_2$

статистика: $Z(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

нулевое распределение: $N(0,1)$



t-критерий Стьюдента

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1}), X_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \ldots, X_{2n_2}), X_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$
σ_1, σ_2 неизвестны

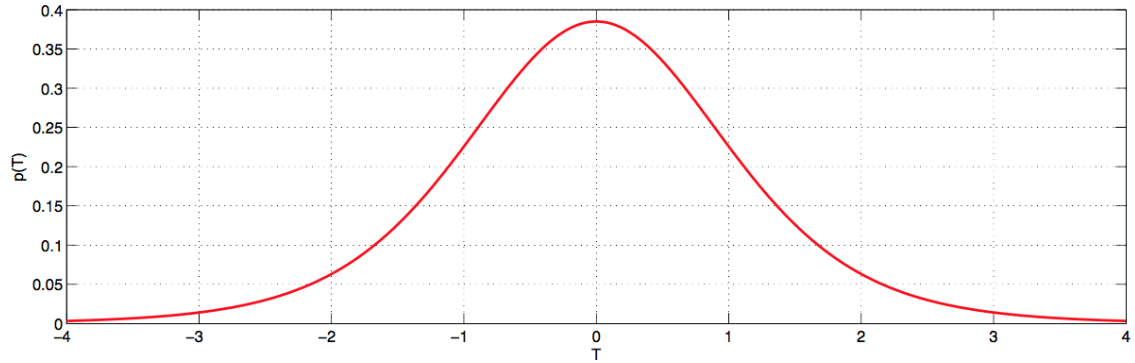
нулевая гипотеза: $H_0 \colon \mu_1 = \mu_2$

альтернатива: $H_1 \colon \mu_1 <\neq> \mu_2$

статистика: $T\left(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}\right) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{S_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{S_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$$

нулевое распределение: $\approx St(\nu)$



Приближение достаточно точно при $n_1 = n_2$ или $[n_1 > n_2] = [\sigma_1 > \sigma_2]$.

Достойны упоминания

1. Доверительные интервалы Вальда, Уилсона — доверительные интервалы для Z-тестов
2. Критерий Харке-Бера, критерий согласия Пирсона — проверка данных на нормальность

Непараметрические критерии

Существует специальный набор критериев, которые можно применять, не зная точного распределения выборки.

Критерий Мана-Уитни

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1})$
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \ldots, X_{2n_2})$
выборки независимые

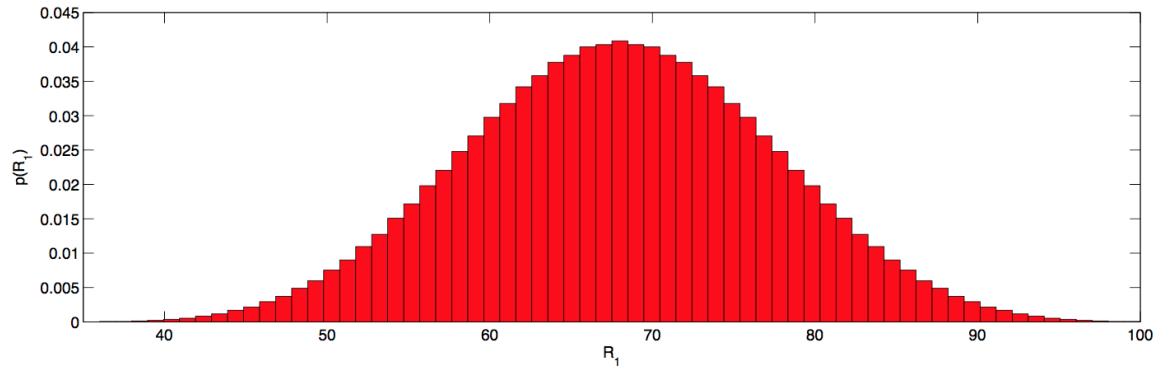
нулевая гипотеза: $H_0 \colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$

альтернатива: $H_1 \colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x + \Delta), \Delta <\neq> 0$

статистика: $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n_1+n_2)}$ — вариационный ряд объединённой выборки $X = X_1^{n_1} \bigcup X_2^{n_2}$

$$R_1(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \sum_{i=1}^{n_1} \operatorname{rank}(X_{1i})$$

нулевое распределение: табличное



Критерии согласия

выборки: $X_1^{n_1} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1})$
$X_2^{n_2} = (X_{21}, \ldots, X_{2n_2})$
выборки независимые
нулевая гипотеза: $H_0 \colon F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$
альтернатива: $H_1 \colon H_0$ неверна

Критерий Смирнова
статистика: $D(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \sup\limits_{-\infty<x<\infty} |F_{n_1 X_1}(x) - F_{n_2 X_2}(x)|$

Критерий Андерсона (модификация критерия Смирнова-Крамера-фон Мизеса)

статистика: $$T(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}) = \frac{1}{n_1 n_2 (n_1+n_2)} \left(n_1 \sum_{i=1}^{n_1} (\operatorname{rank}(X_{1i}) - i)^2 + n_2 \sum_{j=1}^{n_1} (\operatorname{rank}(X_{2j}) - j)^2 \right) - \frac{4n_1 n_2 - 1}{6(n_1+n_2)}$$

Статистики имеют табличные распределения при H_0.

Разбиение на тестовые группы

Множество объектов разбивается на две тестовые группы.
Что нужно проверить при валидации:

- Статические фичи распределены одинаково
- Статистики по историческим признкам неотличимы
- AA-тест

Измерение эффекта

Вы делаете рекламу аксессуаров к заказу в интернет магазине. Вам требуется проверить наличие и оценить экономический эффект от использования вашей модели.

Прежде всего нужно ответить на следующие вопросы:

1. Что является целевой метрикой?
2. На какое увеличение мы рассчитываем?
3. Как проверять статистическую значимость результата?
4. Как оценить эффект?
5. Как долго должен идти AB тест?

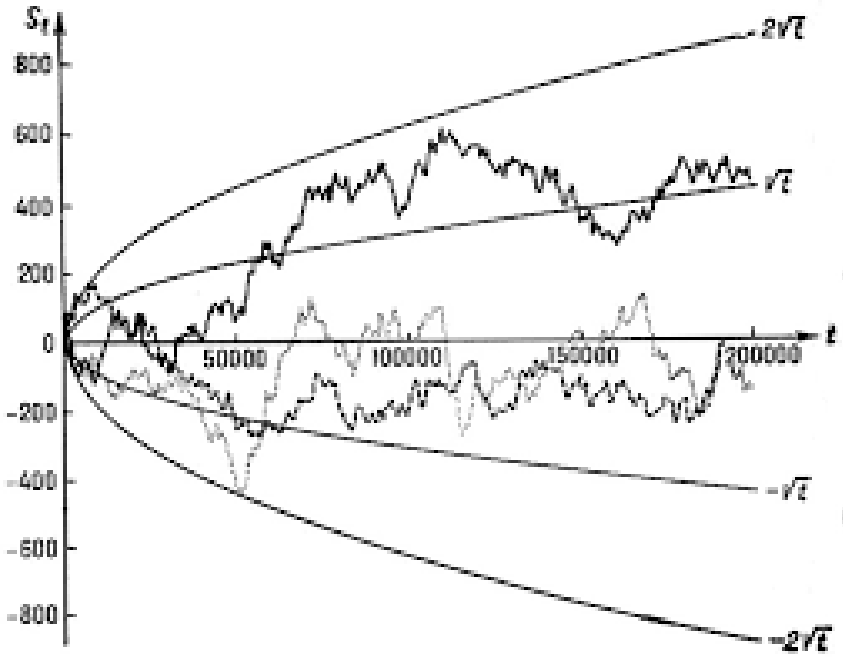
Подводные камни

В статистике очень легко самообмануться. Поэтому надо всегда понимать формально какую гипотезу мы проверяем и какими предположениями пользуемся.

Последовательный анализ

Вы распланировали АБ тест. По вашим оценкам(вы использовали биномиальный тест) за 81 день отклонение изменяемой величины на 1 процент является значимым. Вы ежедневно мониторили результаты теста и через 9 дней обнаружили отклонение в 5 процентов, что является значимым для теста длиной 9 дней. Можно в этом случае досрочно завершить АБ тест?

Последовательный анализ



Как с этим жить: Нужно применять Статистический последовательный анализ (Sequential analysis). Он даёт, во-первых, корректные, а во-вторых, более мощные критерии, пользуясь дополнительным знанием о потоковости данных.

Множественная проверка гипотез

Допустим, что вы проверяете средний чек, среднее число товаров в чеке, среднее число аксессуаров в чеке. Для каждой из этих величин вы составили свой критерий для проверки гипотезы о наличие эффекта. Каков уровень значимости для такой одновременной проверки гипотез?

Множественная проверка гипотез

Поскольку величина чека, число товаров в нём и число аксессуаров в нём — зависимые величины, то нельзя в точности найти уровень значимости, но можно его оценить:

$$\alpha \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{p}_1 \leqslant \alpha \text{ or } \mathrm{p}_2 \leqslant \alpha \text{ or } \mathrm{p}_3 \leqslant \alpha \mid \mathrm{H}_0) \leqslant \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{P}(\mathrm{p}_\mathrm{i} \leqslant \alpha \mid \mathrm{H}_0) = 3\alpha$$

Множественная проверка гипотез

Ошибка первого рода вызвана не особенностью данных, а тем, что мы несколько раз её проверяем.

Как с этим жить: Нужно применять методы Множественной проверки гипотез (Multiple comparisons problem). Самый простой способ — уменьшить α в число гипотез раз, но есть и более сложные подходы. Есть хорошая реализация в Python — statsmodels.sandbox.stats.multicomp.multipletests.

Итоги

1. Существует концепция проверски статистических гипотез.
2. Для проверки гипотез прииняются различные статистические критерии.
3. Бывают параметрические и непараметрические критерии.
4. На практике машинного обучения это всё применяют для AB и AA тестирования.
5. Существуют разные подводные камни.

Полезные ссылки (они кликабельны)

1. Лекции ВШЭ по прикладной статистике. Презентация основана на этих материалах. Здесь есть технические подробности всего, о чём рассказывалось.
2. Лагутин наглядная математическая статистика. Если заинтересуетесь статистикой.