Fundamentos de Matemática
Lista 7 - 15/06/2024

A consulta é livre, mas você deve entregar suas soluções escritas de próprio punho e mencionar as fontes de consulta.

146. Resolva as seguintes equações no universo dos números complexos.

(a) $x^2 - 3x + 5 = 0$
(b) $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 4 = 0$
(c) $2x^8 + 6x^7 + 9x^6 + 6x^5 - 6x^3 - 9x^2 - 6x - 2 = 0$
(d) $x^5 - 1 = 0$
(e) $x^4 + 1 = 0$
(f) $x^3 = 8$
(g) $x^4 = 81$

147. Calcule o valor de $i^{8n+3} + i^{4n+1}$, para n inteiro.

148. Calcule $(1+i)^{2011}, (1-i)^{2012}, (1+i)^{2013}$.

149. Prove que $|1 + iz| = |1 - iz|$ se, e somente se, z é um número real.

150. Prove que um paralelogramo com diagonais de mesmo comprimento é um retângulo, e que um paralelogramo com diagonais perpendiculares é um losango.

151. Se a, b e n são números inteiros e positivos, prove que existem inteiros x e y tais que $\left(a^2 + b^2\right)^n = x^2 + y^2$.

152. Nos itens a seguir, z denota um número complexo e i, a unidade imaginária ($i^2 = -1$).

a) Para quais valores de z se tem $\dfrac{z+i}{1+iz} = 2$?

b) Determine o conjunto dos valores de z para os quais $\dfrac{z+i}{1+iz}$ é um número real.

153. Escreva os seguintes números complexos na forma trigonométrica

(a) 2
(b) $3i$
(c) $1 + i$
(d) $1 + i\sqrt{3}$

154. Calcule $\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$.

155. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ números complexos tais que $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ e $|z_1| = |z_2| = 1$. Calcule $|z_1 - z_2|$.

156. Escreva as formas algébrica e trigonométrica da potência $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$.

157. Fatore as expressões

(a) $x^5 + x^4 + 1$
(b) $x^{10} + x^5 + 1$

158. Prove que $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2} = 0$.

159. Resolva a inequação $\cos x \geq \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, x + \sqrt{3}$ para $x \in \mathbb{R}$.

160. Constroem-se os triângulos equiláteros BCD, CAE e ABF, exteriormente ao triângulo ABC. Prove que o triângulo DEF é equilátero, qualquer que seja o triângulo ABC.

161. Calcule $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \binom{n}{3k}$ em função de n.

162. Se n é um inteiro positivo e tanto z como $z+1$ são raízes n-ésimas da unidade (ou seja, $z^n = 1$ e $(z+1)^n = 1$), prove que $z^3 = 1$ e que n é múltiplo de 6.

163. Prove que o polinômio

$$P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \cdots + x^{111} + 1$$

é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + \cdots + x + 1$.

164. Definimos *ordem* de uma raiz da unidade ω como o menor inteiro positivo n tal que $\omega^n = 1$. Determine a ordem das seguintes raízes da unidade:

(a) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{180} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{180}$, para $k = 27, 99, 137$;

(b) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{144} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{144}$, para $k = 10, 35, 60$.

165. Seja R_n o conjunto de todas as raízes n-ésimas da unidade. Calcule

(a) $\displaystyle\sum_{z\in R_n} z^k$, para k inteiro.

(b) $\displaystyle\sum_{z\in R_n} (x+z)^n$.

(c) $\displaystyle\sum_{1\le k\le n-1} kz^{k-1}$, para cada $z \in R_n$.

(d) $\displaystyle\sum_{1\le k\le n-1} k^2z^{k-1}$, para cada $z \in R_n$.

166. Se α, β, and γ são as raízes de $x^3 - x - 1 = 0$, calcule $\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} + \dfrac{1+\beta}{1-\beta} + \dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

167. Considere os polinômios $p(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$ e $q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$. Sabendo que z_1,z_2, z_3 e z_4 são as raízes de $q(x) = 0$, calcule $p(z_1) + p(z_2) + p(z_3) + p(z_4)$.