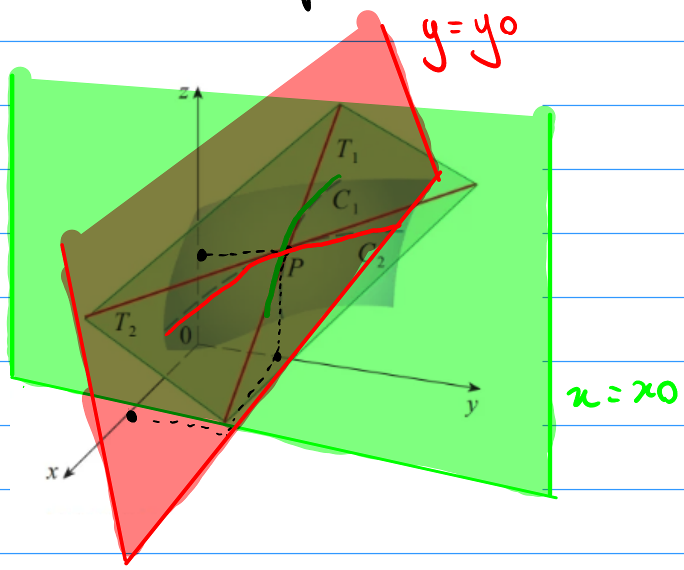
Um plano tangente à uma superfície S formada pelos pontes $(x,y,z) \mid z = f(x,y)$ no ponto $P=(x_0,y_0,z_0)$ é aquele que possui as tangentes às curvas obtidas pela intersecção de S com os planos verticais $x=x_0$ e $y=y_0$.



Sabemos que a equação do plano passando por $P=(x_0,y_0,z_0)$ é:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \quad , A,B,C \text{ constantes}$$

Segue que $z - z_0 = -\frac{A}{C}(x-x_0) - \frac{B}{C}(y-y_0)$

e $z - z_0 = \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0)$.

No entanto, $y=y_0 \Rightarrow z - z_0 = \alpha(x-x_0)$. Isso é uma reta de inclinação α. Como o plano é tangente, $\alpha = f_x(x_0,y_0)$.

O mesmo caso para $x = x_0$: $\beta = f_y(x,y)$. Logo, a equação do plano tangente é:

$$\boxed{z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)}$$

Aproximação pelo plano tangente:

Podemos aproximar valores da função pelo seu plano tangente. Ou seja se (x,y) está próximo de (x_0,y_0):

$$\boxed{f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - y_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)}$$

Contudo, f_x e f_y devem ser contínuas

Se $z = f(x,y)$, então f é diferenciável em (a,b) se

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \\ \text{com } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0 \text{ quando } (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).\end{gathered}}$$

Portanto se $\exists f_x(a,b), f_y(a,b)$ perto de (a,b) e forem contínuas em (a,b), então f é diferenciável em (a,b)

Além disso, podemos combinar com a aproximação de derivadas.

Diferenciais

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$