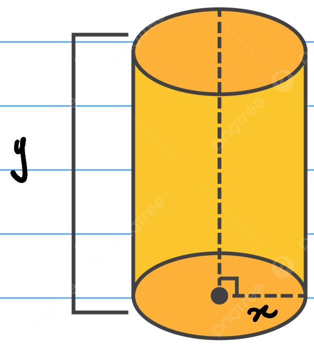
DERIVADAS PARCIAIS

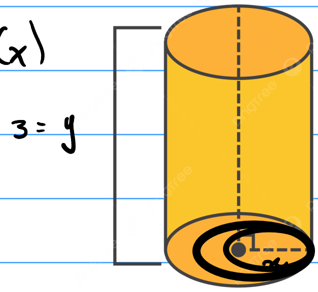
Tome um cilindro de raio x e altura y:



Se volume z é dado pela função de duas variáveis $z = f(x,y) = \pi x^2 y$.

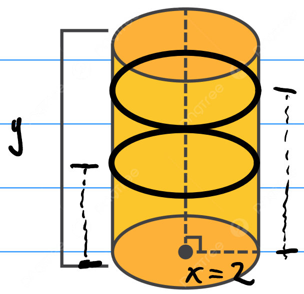
1) Fixando $y=3$: $f(x,3) = 3\pi x^2 = v(x)$

Mas $\dfrac{df(x,3)}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 6\pi x$.



2) Fixando $x=2$: $f(2,y) = 4\pi y = v(y)$

Mas $\dfrac{df(2,y)}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4\pi$



Logo, $v'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h} = \boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,3) - f(x,3)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{y=3}}$

e $v'(y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(y+h) - v(y)}{h} = \boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2,y+h) - f(2,y)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x=2}}$

Teorema de Clairaut-Schwarz-Young:

Seja $z = f(x,y)$. Se $f_{xy} = \dfrac{\partial z^2}{\partial x \partial y}$, $f_{yx} = \dfrac{\partial z^2}{\partial y \partial x}$

são contínuas em $(a,b) \in$ Domínio z, então
$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

Ex: Determine as derivadas parciais de primeira ordem:

1) $u(r,\theta) = \operatorname{sen}(r\cos\theta)$

$u_r = \cos(r\cos\theta) \cdot \cos\theta$

$u_\theta = \cos(r\cos\theta) \cdot (-r\operatorname{sen}\theta) = -r\operatorname{sen}\theta\cos(\cos\theta).$

2) $F(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{t^3+1}\,dt = \int_\beta^\alpha -\sqrt{t^3+1}\,dt$

$F_\alpha = -\sqrt{\alpha^3+1}.$

$F_\beta = \sqrt{\beta^3+1}.$

Pelo Teorema fundamental do cálculo: $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$g'(x) = f(x).$

3) $w = f(x,y,z) = \dfrac{3x^2y}{z^2}$

$f_x = \boxed{\dfrac{6xy}{z^2}}$

$f_y = \boxed{\dfrac{3x^2}{z^2}}$

$f_z = 3x^2y \cdot (-2) \cdot z^{-3} = \boxed{\dfrac{-6x^2y}{z^3}}.$

Obs: Podemos usar a definição de derivada parcial também:

$$z = f(x,y) \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

Obs: Também podemos fazer isso para obter informações sobre curvas de nível.