FGV EMAp

Fundamentos de Matemática

Lista 2 – 21/03/2024

A consulta é livre, mas você deve entregar suas soluções escritas de próprio punho e mencionar as fontes de consulta.

27. Numa corrida com 2011 participantes, Dido chegou à frente do quádruplo do número de pessoas que chegaram à sua frente. Em que lugar chegou o Dido?

28. Esmeralda escolheu quatro números e, ao somar cada um deles à média aritmética dos outros três, achou os números 60, 64, 68 e 72. Qual é a média aritmética dos quatro números que ela escolheu no início?

29. Verifique se $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$ é divisível por:

a) $x-1$. b) $x+1$. c) $x+2$. d) $x-2$. e) $x+3$.

30. Determine o valor do inteiro positivo n para que o grau do monômio $5x^{n+1}y^{2n-1}$ seja 9 .

31. Determine o valor de k para que o produto $(kx-1)(2x+1)$ seja um polinômio cuja soma dos coeficientes é 3 .

32. Use a propriedade de distributividade da multiplicação e resolva os produtos:

a) $(x+a^n)(x-a^n)$. b) $\left(x+a^{2n}\right)\left(x+a^{2n}\right)$. c) $(x-2a)^2$.

33. Determine o quociente e o resto das divisões:

a) $\left(x^2-a^2\right) \div (x-a)$. b) $\left(x^2+2xa+a^2\right) \div (x+a)$. c) $\left(x^3+a^3\right) \div (x+a)$.

34. Sejam $A = x^3 + 6x^2 - 2x + 4$ e $B = x^2 - 1$, polinômios. Determine o quociente e o resto de A na divisão por B.

35. Demonstre que $n^3 - n$ é múltiplo de 6 para todo natural n.

36. Prove que $n^7 - n$ é múltiplo de 7 para todo natural n.

37. Prove que, para quaisquer naturais m e n, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

38. Prove que todo inteiro positivo possui uma única representação da forma $2^a b$, na qual a é inteiro não negativo e b é inteiro positivo ímpar.

39. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(d) $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$

(e) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ (se x é diferente de 1)

(f) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

(g) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

40. Calcule as somas

(a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2$

(b) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(c) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$

41. Prove que se n é um número natural maior ou igual a 4, então $n! > 2^n$.

42. Prove que para todo natural n o número $4^n + 15n - 1$ é divisível por 9.

43. Se m e n são números naturais, definimos $\dbinom{n}{m}$ como o número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com exatamente m elementos.

(a) Prove que, para todos os naturais m e n, $\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=\binom{n+1}{m+1}$.

(b) (IME) Demonstre, por indução, o binômio de Newton, ou seja, $(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots y^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

44. Para todo natural maior que 1, prove que $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

45. Determine todos os números naturais n tais que $1! + 2! + 3! + \cdots + n! = n^2$.

46. Calcule $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$, ou seja, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! \cdots + n \cdot n!$.

47. Prove que, se o produto de $n \geq 2$ números reais positivos é igual a 1, então sua soma é maior ou igual a n, e determine em que casos ocorre a igualdade.

48. Prove que a média aritmética de um conjunto finito de números positivos é sempre maior ou igual a sua média geométrica, e determine em que casos ocorre a igualdade.

49. Prove que, para todo inteiro positivo n e todo real x, $|\operatorname{sen} nx| \leq n|\operatorname{sen} x|$.

50. Prove que, para todo x positivo, $x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\log_x 2^k \cdot \log_x 2^{k+1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\log_x^2 2}.$$

51. Calcule a soma a seguir, em função de m e n.

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n+1}{k}$$

52. Um país tem n cidades. Quaisquer duas cidades estão conectadas por uma estrada de mão única. Prove que existe uma rota que passa por todas as cidades.

53. De um tabuleiro quadriculado 64×64 retira-se uma casa qualquer. Prove que o tabuleiro restante pode ser completamente coberto com triminós em forma de "L" (sem superposição).

54. Uma certa organização tem n membros, e $n+1$ comitês distintos de três membros. Prove que há dois comitês com exatamente um membro em comum.

55. Qual é o valor da expressão

$$20112011^2 + 20112003^2 - 16 \times 20112007 \ ?$$

A) 2×20112007^2 B) 2×20112003^2 C) 2×20112007 D) 2×20112003 E) 2×20112011^2

56. Seja α uma raiz da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$.

(a) Racionalize $\frac{1}{\alpha}$.

(b) Prove que $\alpha^2 - 2$ é outra raiz da mesma equação.

57. Seja $\alpha = \sqrt[3]{3+\sqrt{2}} + 5$.

(a) Encontre um polinômio de coeficientes racionais do qual α seja uma raiz.

(b) Racionalize $\frac{1}{\alpha}$.

58. Prove que o polinômio

$$P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \cdots + x^{111} + 1$$

é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + \cdots + x + 1$.

59. Fatore $1 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{4n}$.

60. Fatore $n^4 - 20n^2 + 4$.

61. Fatore

(a) $x^4 + 4y^4$

(b) $x^4 + y^4$

62. Calcule:

$$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$$