Problema 11. Definamos a operação $a \otimes b$ como sendo a^b. Por exemplo, $2 \otimes 3 = 8$. Determine o valor de:

$$\frac{2 \otimes (2 \otimes (2 \otimes 2))}{((2 \otimes 2) \otimes 2) \otimes 2}. \quad = 2^{16}/2^8 = 2^8 = 256$$

a) $\frac{1}{256}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 1 d) 4 ~~e)~~ 256

$$2 \otimes (2 \otimes 2^2) = 2 \otimes 2^4 = 2^{16}.$$

$$(4 \otimes 2) \otimes 2 = 16 \otimes 2 = 16^2 = (2^4)^2 = 2^8$$

Problema 13. Com quantos zeros termina o número $15^6 \cdot 28^5 \cdot 55^7$?

~~a)~~ 10 b) 18 c) 26 d) 13 e) 5

$$5^6 \cdot 3^6 \cdot 4^5 \cdot 7^5 \cdot 5^7 \cdot 11^7 = 3^6 \cdot 7^5 \cdot 11^7 \cdot 5^{13} \cdot 2^{10}$$

$$= 3^6 \cdot 7^5 \cdot 11^7 \cdot 5^3 \cdot 10^{10}.$$

Problema 14. As potências 2^n e 5^n, onde n é um inteiro positivo, começam com o mesmo algarismo d. Qual é este algarismo?

$2^1 = 02$	$5^1 = 5$
$2^2 = 04$	$5^2 = 25$
$2^3 = 08$	$5^3 = 125$
$2^4 = 16$	$5^4 = 625$
$2^5 = 32$	$5^5 = 3125$
$2^6 = 64$	
$2^7 = 128$	
$2^8 = 256$	
$2^9 = 512$	
$2^{10} = 1024$	

$$\boxed{d = 3}$$

Problema 15. Se $a = 2^{40}$, $b = 3^{20}$ e $c = 7^{10}$, então:

~~a)~~ $c < b < a$ ~~b) $a < c < b$~~   ~~c) $b < a < c$~~   d) $b < c < a$ ~~e) $c < a < b$~~

$a = 4^{20} = 2^{40}$ $a > b$. $\boxed{a > b > c}$

$b = 3^{20}$ $a > c$.

$c < 2^{30}$.

$b = 9^{10}$ $\therefore b > c$

Problema 51. Achar o menor inteiro positivo n tal que as 73 frações

$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \ldots, \frac{91}{n+93}$$

sejam todas irredutíveis.

$\frac{a}{n+a+2}$. $\Rightarrow$ $\frac{a}{n+2}$ irredutível.

I) Logo $n+2$ deve ser o próximo primo

$n+2 = 97$

$\boxed{n = 95}$

Problema 58. Determine o valor da expressão abaixo quando $a = 2014$ e $\boxed{n = 1000}$.

$$\underbrace{\frac{1}{a^{-n}+1} + \frac{1}{a^{-n+1}+1} + \ldots + \frac{1}{a^{-1}+1}}_{1000} + \boxed{\frac{1}{a^{0}+1}} + \underbrace{\frac{1}{a^{n}+1} + \frac{1}{1+a^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{a^{1}+1}}_{1000}.$$

a) 1000^{2013} b) 2013^{1000} c) 2013   d) $\frac{2001}{2}$ e) 1000.

$$\frac{1}{a^{-n}+1} + \frac{1}{a^{n}+1} = \frac{a^{n}+1}{a^{n}+1}.$$

$$1000 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{2001}{2}$$

Problema 59. Ao efetuar a soma $13^1 + 13^2 + 13^3 + \ldots + 13^{2006} + 13^{2007}$, obtemos um número inteiro. Qual o algarismo das unidades desse número? 0

$13 \equiv 3$

$13 + 13^2 \equiv 3 + 3^2 \equiv 3 + 9 \equiv 2$

$13 + 13^2 + 13^3 \equiv 2 + 3^3 \equiv 2 + 27 \equiv -1 \equiv 9.$

$13 + 13^2 + 13^3 + 13^4 \equiv -1 + 3^4 \equiv -1 + 81 \equiv 0.$

$13 + 13^2 + 13^3 + 13^4 + 13^5 \equiv 0 + 3^5 \equiv 3.$

$13 + 13^2 + 13^3 + 13^4 + 13^5 + 13^6 \equiv 3 + 3^6 \equiv 3 + 9 \equiv 2$

$$\begin{array}{r|l} 2007 & 4 \\ \hline 007 & 501 \\ 3 & \end{array}$$

$= 9$

Problema 62. Calcule o valor de

$$A = \frac{1001 \cdot 1002 \cdot 1003 \cdot \ldots \cdot 2000}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1999}$$

a) 2^{1000} b) 2^{999} c) 1000 d) 999 e) 2.

$$A = \frac{1001 \cdot 1002 \cdot 1003 \cdot \ldots \cdot 2000}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1999} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2000}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2000}$$

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2000}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1000} = \frac{2^{1000} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2000)}{\cancel{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2000)}} = 2^{1000}$$

Problema 86. Simplifique a expressão:

$$\frac{(x^{2n+1}+x)(x^{2n+1}-x)-(x^4)^{(n+1/2)}}{(x^n+x)^2-x^{2n}-2x^{n+1}},$$

$$\frac{\cancel{x^{2\cdot(2n+1)}} - \cancel{x}^{2} - \cancel{x^{4n+2}}}{\cancel{x^{2n}} + \cancel{2x^{n+1}} + \cancel{x}^{2} - \cancel{x^{2n}} - \cancel{2x^{n+1}}} = -1$$

Problema 105. Sejam a e b números reais.

a) Verifique que $(a+b)^2 \geq 4ab$.

b) Verifique que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

c) Verifique que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$.

a) $(a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab$

$a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$

$(a-b)^2 \geqslant 0$ ✓

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$

$\frac{a+b}{ab} \geqslant \frac{4}{a+b}$

$(a+b)^2 \geqslant 4ab$ ✓

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

$$+\ \frac{4}{c}+\frac{4}{d} \geq \frac{16}{c+d}.$$

$$S \geq \frac{4}{a+b} + \frac{16}{c+d} + \frac{12}{d}.$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \qquad \Rightarrow \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{a+b+c} + \frac{16}{d} \geq \boxed{\frac{64}{a+b+c+d}}$$

$$\therefore\ \underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}_{\geq \frac{4}{a+b}}+\frac{4}{c}}_{\geq \frac{16}{a+b+c}}+\frac{16}{d}}_{\geq \frac{64}{a+b+c+d}.} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

Usando que

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \geq \frac{4}{m+n}.$$

Problema 107. Sejam:

$$A = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \text{ e } B = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

Quanto vale $A \cdot B$?

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ ~~c)~~ 1 d) $2+\sqrt{2}$ e) $2+\sqrt{3}$.

$A \cdot B \Rightarrow$

$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{4-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$

$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)} \cdot \sqrt{2-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$

$\sqrt{(2+\sqrt{3})\left(\sqrt{\cancel{2}} - (2+\sqrt{3})\right)}$

$= \sqrt{(2+\sqrt{3})} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-3} = 1$

Problema 110. João está ajudando seu pai com as finanças de sua loja. Como a quantidade de produtos ofertados estava influenciando a quantidade de produtos vendidos, ele decidiu procurar algum padrão que pudesse ajudá-lo a descobrir qual a quantidade ideal de produtos que deveriam ser ofertadas para maximizar a quantidade de produtos vendidos. Depois de um bom tempo "quebrando a cabeça", ele percebeu que se "a" produtos eram ofertados, então a loja vendia "$a(10-a)$" itens. Em seguida, com a ajuda de um produto notável semelhante a essa expressão, foi possível achar a quantidade ideal de produtos que deveriam ser vendidos. Como ele fez isso?

$a \cdot (10-a)$ eram vendidos.

$f(a) = -a^2 + 10a. = -\left(a^2 - 10a + 25\right) + 25.$

$f(a) = -(a-5)^2 + 25.$

$f(a)$ máx quando $(a-5)^2 = 0 \therefore \boxed{a=5}_u.$

$f(a) = 25$

Problema 111. O pai de João (veja o problema anterior), percebendo a astúcia do filho, decidiu desafiá-lo a fazer o mesmo com uma fórmula bem diferente e supondo agora que a é um número real qualquer. Nesse novo problema, dado "a" real, ele deve tentar achar o valor máximo de $4a - a^4$. Novamente usando produtos notáveis, João conseguiu descobrir que o máximo de tal expressão é 3. Você consegue descobrir como ele fez isso?

$f(a) = 4a - a^4 = 4a - 2a^2 + 2a^2 - a^4 + 1 - 1$

$4a - 2a^2 + 1 \quad - (a^2-1)^2$

$-2a^2 + 4a + 3 - 2 - (a^2-1)^2$

$3 \underbrace{-2(a-1)^2}_{\leq 0} \underbrace{-(a^2-1)^2}_{\leq 0}$.

Fazer aparecer isso!

$a = 1 \Rightarrow f(a)_{\text{máx}} = 3$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13

Problema 139. A sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \in \mathbb{Z}$ e $F_1 = F_2 = 1$. Determine o valor de:

$$\left(1 - \frac{F_2^2}{F_3^2}\right)\left(1 - \frac{F_3^2}{F_4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{F_{2013}^2}{F_{2014}^2}\right)$$

a) $\frac{F_{2016}}{F_{2013}^2}$ b) $\frac{F_{2014}}{F_{2013}}$ c) $\frac{F_{2015}^2}{F_{2013}^2}$ d) $\frac{F_{2015}}{2}$ e) $\frac{F_{2015}}{2F_{2013}F_{2014}}$.

$$\frac{(F_3^2 - F_2^2)(F_4^2 - F_3^2) \ldots (F_{2014}^2 - F_{2013}^2)}{(F_3 \cdot F_4 \cdot F_5 \ldots F_{2013} \cdot F_{2014})^2}$$

$F_1 \quad F_2 \quad \ldots \quad F_{2012} \qquad (F_4 \cdot F_5 \quad F_6 \ldots F_{2015}.)$

$$\frac{(F_3 - F_2)(F_4 - F_3) \ldots (F_{2014} - F_{2013}) \cdot (F_3 + F_2) \cdot (F_4 + F_3) \ldots (F_{2014} + F_{2013})}{(F_3 \cdot F_4 \cdot F_5 \ldots F_{2013} \cdot F_{2014})^2}$$

$$\frac{F_1 \cdot F_2 \cdot \cancel{F_3} \cdot \cancel{F_4} \cdot \cancel{(F_5 \cdot F_6 \ldots F_{2012})^2} \cdot \cancel{F_{2013}} \cdot \cancel{F_{2014}} \cdot F_{2015}}{F_3^2 \cdot F_4^2 \cdot \cancel{(F_5 \cdot F_6 \cdot F_7 \ldots F_{2012})^2} \cdot F_{2013}^2 \cdot F_{2014}^2}$$

$$\boxed{= \frac{F_{2015}}{2 \cdot F_{2013} \cdot F_{2014}}} \quad e.$$

Problema 132. Calcule o valor de:

$$\sqrt{(2014)(2015)(2016)(2017) + 1}$$

$$\sqrt{x \cdot (x+1)(x+2)(x+3) + 1}$$

$$\sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+1+1) + 1}$$

$$\sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+1) + (x^2+3x+1)}$$

$$= \sqrt{(x^2+3x+1)^2} = \boxed{x^2+3x+1}$$

Problema 135. Fatore n^5+n^4+1.

$$n^5+n^4+n^3+n^2+n-n^3-n^2-n+1$$

$$n^3(n^2+n+1)+(n^2+n+1)-n(n^2+n+1).$$

$$(n^2+n+1)(n^3-n+1).$$

PR: $n^5-\cancel{n^3}+\cancel{n^2}+n^4-\cancel{n^2}+\cancel{n}+\cancel{n^3}-\cancel{n}+1$

$$\underline{=n^5+n^4+1}\ \therefore$$

Problema 136. Qual é o menor inteior positivo n tal que $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0{,}01$

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0{,}01$$

$$(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})<0{,}01(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$$

$$100<\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$$

$$100^2-200\sqrt{n}<-1$$

$$\frac{100^2+1}{200}<\sqrt{n}$$

$$50+\frac{1}{200}<\sqrt{n}$$

$$n>50^2+100\cdot\frac{1}{200}+\left(\frac{1}{200}\right)^2.$$

$$n>2500+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{200}\right)^2$$

Menor é $\boxed{2501}$.

$101 \cdot 11 = 1111 \quad (2+2)$

$101 \cdot 111 = 11211 \quad (2+2+2)$

$101 \cdot 1111 = 112211 \quad (2+2+2+2)$

$101 \cdot 11111 = 1122211 \quad \dots$

$\Rightarrow n = 101 \cdot \underbrace{111\dots11}_{2007 \text{ alg}} \quad \Rightarrow \quad S_n = 2 \cdot 2007 = 4014$

Problema 141. Define-se o conjunto de 100 números $\{1, 1/2, 1/3, ..., 1/100\}$. Eliminamos dois elementos quaisquer a e b deste conjunto e se inclui, no conjunto, o número $a + b + ab$ ficando assim um conjunto com um elemento a menos. Depois de 99 destas operações, ficamos só com um número. Que valores pode ter esse número?

$$a+b+ab = a(b+1)+b+1-1$$
$$(a+1)(b+1)-1.$$

$$(1+1/2)(1+1/3).(1+1/4)\dots(1+1/100) - 1.$$

$$\frac{3.\cancel{4}.\cancel{5}\dots\cancel{4}.101}{2.\cancel{3}.\cancel{4}\dots\cancel{100}} = \frac{101}{2} - 1 = \boxed{\frac{99}{2}}$$

Depois das 99 operações

Problema 145. Sejam a, b, c, x, y, z reais distintos tais que $ax + by + cz = 0$. Verifique que

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}$$

não depende de x, nem de y, nem de z.

$$ax+by+cz=0.$$
$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2 = -2(abxy+acxz+bcyz)$$

$$bc(y^2+z^2)+ac(x^2+z^2)+ab(x^2+y^2) + a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

$$ax^2(a+b+c) + by^2(a+b+c) + cz^2(a+b+c)$$

$$bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2 =$$
$$= ax^2(a+b+c) + by^2(a+b+c) + cz^2(a+b+c)$$

$$\hookrightarrow \frac{\cancel{(ax^2+by^2+cz^2)}}{(a+b+c)\cancel{(ax^2+by^2+cz^2)}} = \boxed{\frac{1}{a+b+c}}$$

Problema 152. O retângulo $ABCD$ abaixo representa um terreno. Deve-se passar uma cerca que o divida de maneira que a área do polígono $CDEF$ seja o dobro da área do polígono $ABFE$. Sobre o lado AD essa cerca começa a 5m do vértice A e sobre o lado BC essa cerca termina a x metros do vértice B.

a) Represente algebricamente a área dos dois polígonos separados pela cerca.

b) Determine o valor de x.

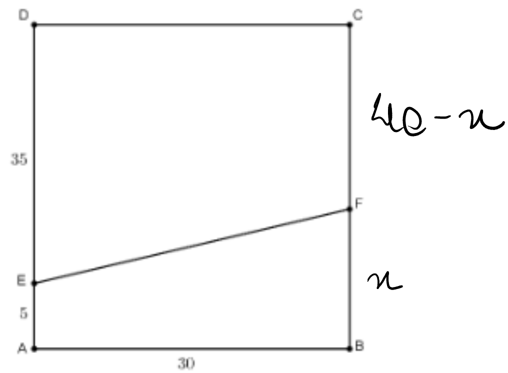

Figura 3

a) $A(CDEF) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (40-x+35) = (75-x) \cdot 15$

$A(ABFE) = \frac{1}{2} \cdot 30(5+x) = (5+x) \cdot 15$

b) $(75-x) \cdot \cancel{15} = 2 \cdot (5+x) \cdot \cancel{15}$

$75 - x = 10 + 2x$

$\boxed{\frac{65}{3} = x}$ u

Figura 7

Problema 161. A figura abaixo é o projeto de um quarto com uma porta de 1m de largura e uma porta dupla de 2m de largura. As dimensões externas desse quarto são 5m x 3m. Se a espessura das paredes é x, determine:

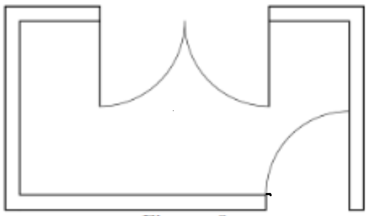

Figura 9

a) o perímetro interno desse quarto.

b) a área interna desse quarto, desconsiderando o vão deixado pelas portas.

c) se a altura das portas é $2m$ e a altura das paredes é $3m$, determine a área interna das paredes, desconsiderando as portas.

a) Perímetro interno: $2\cdot(5-2x)+2\cdot(3-2x)$
$= 16-8x$

b) Área interna: $(5-2x)(3-2x) = 15-16x+4x^2$.

c) Áreas das portas

Problema 306. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2a^2}{1+a^2} = b \\ \dfrac{2b^2}{1+b^2} = c \\ \dfrac{2c^2}{1+c^2} = a \end{cases}$$

$$\frac{1+a^2}{a^2} + \frac{1+b^2}{b^2} + \frac{1+c^2}{c^2} - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} - \frac{2}{c} = 0.$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} + 1 = \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{c}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \left(1 - \frac{1}{b}\right) = \left(1 - \frac{1}{c}\right) = 0$$

$$\therefore \boxed{a = b = c = 1} \text{ ou } \boxed{a = b = c = 0}$$

Problema 219. Encontre $x^2 + y^2$ se $x, y \in \mathbb{Z}$ e

$$\begin{cases} xy + x + y = 71 \\ x^2y + xy^2 = 880. \end{cases}$$

$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy.$

$$\boxed{K = (x+y)^2 - 2xy.}$$

$$\begin{cases} (x+y) + xy = 71 \\ xy(x+y) = 880 \end{cases}$$

$K = 16^2 - 2 \cdot 55 = 146$

$xy(71 - xy) = 880$

$-(xy)^2 + 71xy = 880$

$(xy)^2 - 71(xy) + 880 = 0$

$(xy) = \frac{71 \pm 39}{2}$ $\nearrow 55$ $\searrow 16.$

$(x+y)$ $\nearrow 55$ $\searrow 16$

Por 5 e 11.

Problema 229. Para quais valores de r vale que:

$$(r^2 + 5r - 24)(r^2 - 3r + 2) = (4r - 10)(r^2 + 5r - 24)?$$

$$(r^2+5r-24)(r^2-3r+2) = (4r-10)(r^2+5r-24)$$

$$(r^2+5r-24)(r^2-3r+2-4r+10) = 0$$

$$(r^2+5r-24)(r^2-7r+12) = 0.$$

$$(r+8)(r-3)(r-4)(r-3) = 0$$

Valores de r: $\begin{cases} r = 3 \\ r = 4 \\ r = -8 \end{cases}$