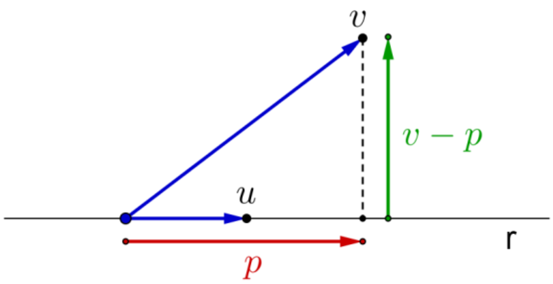
Vetores – 5

5.1. Projeção de um vetor dado sobre uma reta dada

Na figura a seguir, v é um vetor dado, r é uma reta dada, u é um vetor que tem a direção de r e p é o vetor projeção de v sobre r.



Temos $p = \alpha u$ para algum α real. Mas, $v - p$ é perpendicular a u. Então,

$$(v - p) \cdot u = 0$$

$$v \cdot u - p \cdot u = 0$$

$$v \cdot u = p \cdot u$$

$$v \cdot u = \alpha u \cdot u$$

$$v \cdot u = \alpha(u \cdot u)$$

$$\alpha = \frac{v \cdot u}{u \cdot u}$$

Assim, como $p = \alpha u$ temos que a projeção de v sobre a reta que contém u é:

$$p = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

Exemplo

Determine o comprimento da projeção do vetor $v = (6, 8)$ sobre a reta $x - 3y = 0$.

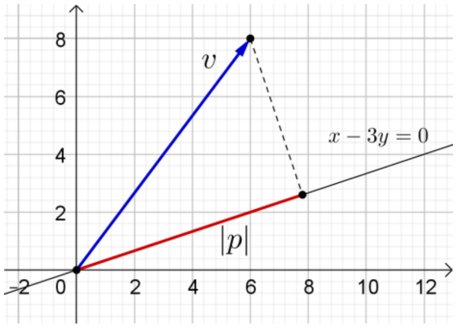
Solução

Um vetor diretor da reta dada é $u = (3, 1)$. O vetor projeção de v sobre a reta que contém u é:

$$p = \frac{(6, 8) \cdot (3, 1)}{(3, 1) \cdot (3, 1)}(3, 1) = \frac{26}{10}(3, 1) = \frac{13}{5}(3, 1) = \left(\frac{39}{5}, \frac{13}{5}\right)$$

O comprimento da projeção é

$$|p| = \left|\frac{13}{5}(3,1)\right| = \frac{13}{5}|(3,1)| = \frac{13\sqrt{10}}{5}$$

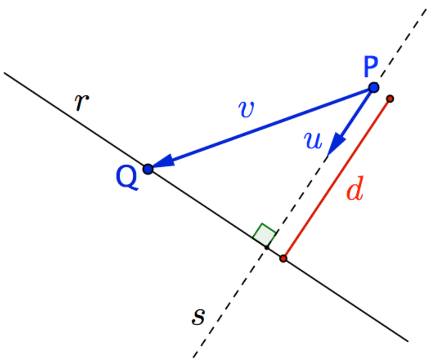


Exemplo

Calcule a distância do ponto $P = (6, 4)$ à reta $r\colon 2x + 3y - 5 = 0$.

Solução

A figura a seguir mostra, em desenho livre, a reta r e o ponto P. Consideremos a reta reta s , passando por P e perpendicular a r.



Seja Q um ponto qualquer da reta r. A distância d, do ponto P à reta r, é exatamente o comprimento da projeção do vetor $\overrightarrow{PQ}$ sobre a reta s.

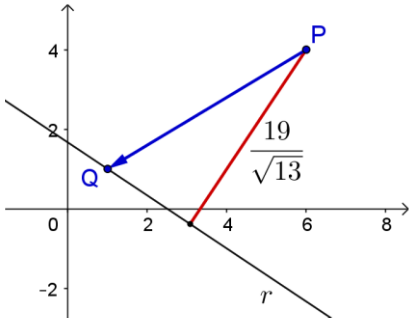
A reta r dada, de equação $2x + 3y - 5 = 0$ tem como vetor normal $u = (2, 3)$.

Por outro lado, devemos escolher um ponto qualquer da reta r e escolhemos $Q = (1, 1)$. Assim, o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é $v = Q - P = (-5, -3)$.

Assim, distância d, do ponto P à reta r é, portanto,

$$d = \left|\frac{v \cdot u}{u \cdot u} u\right| = \frac{|v \cdot u|}{|u|^2}|u| = \frac{|v \cdot u|}{|u|}$$

$$d = \frac{|(-5) \cdot 2 + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{19}{\sqrt{13}}$$

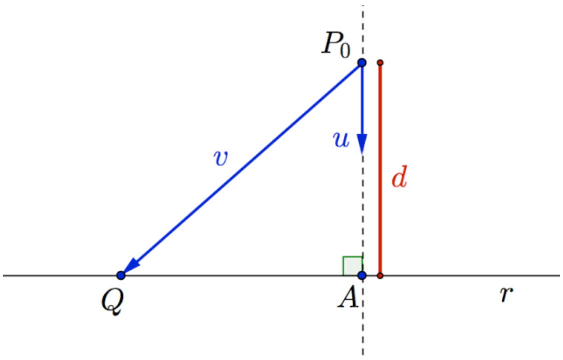


Passamos agora a enfrentar o problema de encontrar uma fórmula para a distância do ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ à reta de equação $ax + by + c = 0$.

5.2. A fórmula da distância de um ponto dado a uma reta dada

Em muitas situações em geometria precisamos calcular a distância de um ponto dado a uma reta dada. Por exemplo, todo ponto da bissetriz de um ângulo possui mesma distância aos lados desse ângulo. Assim, na geometria com coordenadas, para encontrar a bissetriz de um ângulo dado por duas retas precisamos utilizar uma ferramenta que calcule a distância de um ponto a uma reta. Vamos então a seguir, construir essa ferramenta utilizando o que já vimos antes nessas notas.

Consideremos a reta r de equação $ax + by + c = 0$, o ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e vamos seguir exatamente os passos descritos no exemplo do item anterior para calcular a distância de P_0 a r. Veja com atenção o desenho a seguir.



Tomemos um ponto qualquer $Q = (x, y)$ da reta r de equação $ax + by + c = 0$ e seja $v = \overrightarrow{P_0Q} = (x - x_0, y - y_0)$.

Um vetor perpendicular a r é $u = (a, b)$.

Observe a figura acima. O comprimento da projeção de v sobre a reta que contêm u é $P_0A = d$, que é a distância de P_0 à reta r.

Portanto,

$$d = \left|\frac{v \cdot u}{u \cdot u} u\right| = \frac{|v \cdot u|}{|u|^2} |u| = \frac{|v \cdot u|}{|u|}$$

$$d = \left|\frac{(a, b) \cdot (x - x_0, y - y_0)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} |ax - ax_0 + by - by_0|$$

Veja que, como $Q = (x, y)$ é um ponto da reta r então $ax + by = -c$. Assim,

$$d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} |-ax_0 - by_0 - c|$$

ou seja,

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo

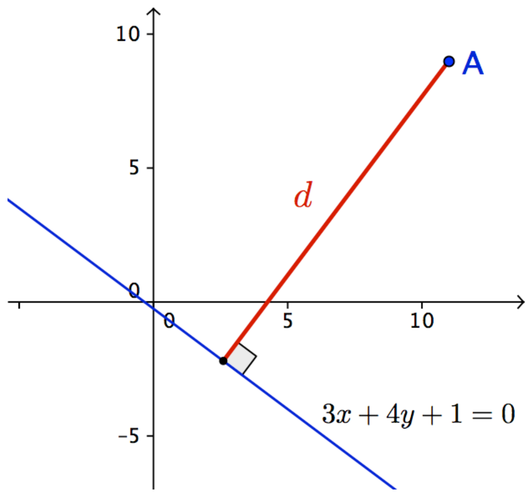
Qual é a distância do ponto $(11, 9)$ à reta de equação $3x + 4y + 1 = 0$?

Solução

Aplicando a fórmula anterior temos

$$d = \frac{|3 \cdot 11 + 4 \cdot 9 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 14$$

A ilustração está a seguir.



A seguir, vamos resolver um problema que envolve o conceito de *lugar geométrico* dos pontos que possuem determinada propriedade.

Problema

São dados o ponto $A = (1, 1)$ e a reta $r: x + y = 0$. Determine o lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e de r.

Solução

O lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e de r é o conjunto dos pontos que cumprem essa condição: ter mesma distância ao ponto A e à reta r.

Na geometria com coordenadas (geometria analítica) esse conjunto será descrito por uma equação que as coordenadas desse ponto devem satisfazer. Entretanto, muitas vezes, não é fácil perceber, no plano cartesiano qual é o aspecto do gráfico de uma equação do tipo $f(x, y) = 0$. Vamos inicialmente resolver o problema dado e, depois, discutir esse aspecto.

Seja $P = (a, b)$ um ponto que cumpre as condições do enunciado.

A distância de P ao ponto A é:

$$PA = \sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2}$$

A distância de P à reta r é:

$$d = \frac{|a+b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|a+b|}{\sqrt{2}}$$

Como essas distâncias devem ser iguais vamos fazer $PA^2 = d^2$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = \left(\frac{|a+b|}{\sqrt{2}}\right)^2$$

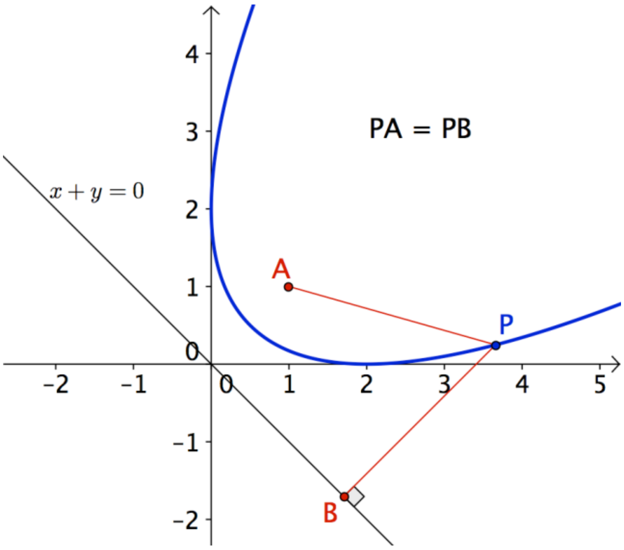
Desenvolvendo isso chegamos a $a^2 - 2ab + b^2 - 4a - 4b + 4 = 0$ e, trocando as letras a e b pelas tradicionais x e y, concluímos que o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ que equidistam de A e de r é a curva cuja equação é

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

Mais a frente, no nosso curso, estudaremos a equação

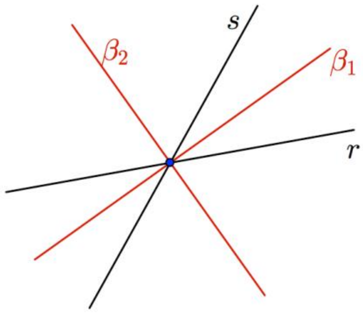
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que é chamada de equação geral do segundo grau e que, a menos de casos particulares, representa uma cônica. A figura a seguir mostra a curva que é o lugar geométrico dos pontos que equidistam do ponto A e da reta r do nosso problema. Essa curva é uma



parábola e o desenho mostra um ponto P desse lugar geométrico, equidistante do ponto $(1, 1)$ e da reta $x + y = 0$.

Outro problema clássico que envolve a distância de um ponto a uma reta é o problema da bissetriz de um ângulo. Dadas duas retas, como podemos encontrar as bissetrizes desse par de retas? Observe, na figura a seguir, que duas retas r e s possuem duas bissetrizes relacionadas aos ângulos formados por elas. Além disso, essas bissetrizes β_1 e β_2 são perpendiculares (procure justificar esse fato).



A propriedade que caracteriza a bissetriz de um ângulo é que ela é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados desse ângulo e, na geometria com coordenadas, essa é a condição que um ponto deve satisfazer para que pertença a uma das bissetrizes de um par de retas. Vamos ver isso no exemplo seguinte.

Exemplo

Determine as equações das bissetrizes dos ângulos determinados pelas retas $y = x$ e $y = -x/2$.

Solução

As equações das retas devem ser escritas na forma $ax + by + c = 0$. Assim, nossas retas são dadas pelas equações $x - y = 0$ e $x + 2y = 0$.

Seja $P = (a, b)$ um ponto de uma das bissetrizes desse par de retas. Esse ponto P deve ter mesma distância às retas dadas e, aplicando a fórmula que demonstramos, ficamos com:

$$\frac{|a - b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a + 2b|}{\sqrt{5}}$$

ou seja,

$$\sqrt{5} \cdot |a - b| = \sqrt{2} \cdot |a + 2b|$$

Há dois casos a considerar:

1)

$$\sqrt{5} \cdot (a - b) = \sqrt{2} \cdot (a + 2b)$$

2)

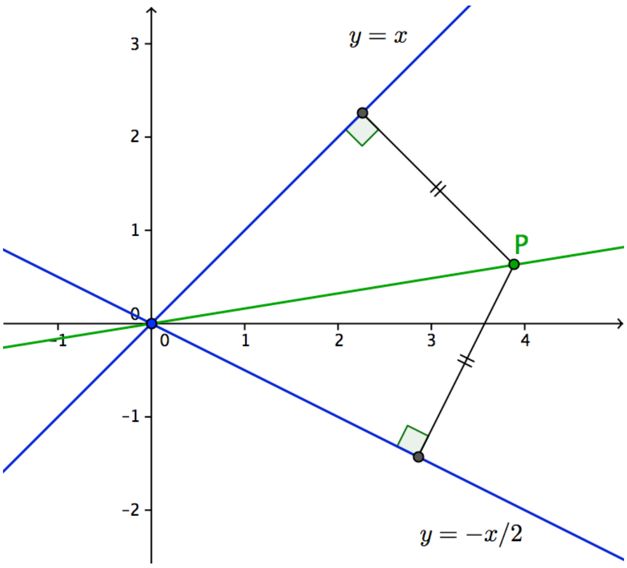
$$\sqrt{5} \cdot (a - b) = -\sqrt{2} \cdot (a + 2b)$$

Trocando os nomes das variáveis:

a por x e b por y, e trabalhando e organizando essas equações, chegamos as equações das duas bissetrizes:

$$\beta_1 \; : y = \left(\sqrt{10} - 3\right)x$$

$$\beta_2 \; : y = -\left(\sqrt{10} + 3\right)x$$



O desenho ao lado mostra β_1 .

Observe ainda que β_1 e β_2 são perpendiculares porque o produto de seus coeficientes angulares é

$$-\left(\sqrt{10} + 3\right)\left(\sqrt{10} - 3\right) = -1$$