Análise Real

Exercícios

① Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos, com $a_n \le b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\sum b_n$ converge, mostre que $\sum a_n$ também converge.

② Estude o limite das sequências (quando $n \to \infty$)

1. $a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$
2. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $a_n = \frac{n^2+3n-2}{5n^2}$
4. $a_n = n^{(-1)^n}$
5. $a_n = \frac{n}{2^n}$
6. $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$

③ Se $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, então $\lim_{n\to\infty} |b_n| = |B|$

④ Suponha que a sequência (a_n) possui a seguinte propriedade:
para $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. se $m \ge k > N$ então $|a_m - a_k| < \varepsilon$.
Prove que (a_n) é convergente

⑤ Mostre que existe sequência (a_n) de modo que qualquer valor real é ponto de aderência.

---

① $\sum a_n, \sum b_n > 0$ e $a_n \le b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. $\sum b_n$ converge.
Mostrar que $\sum a_n$ também converge.

Se $a_n \le b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, então segue que
$a_{n-1} \le b_{n-1}$ e $a_{n-1} + a_n \le b_{n-1} + b_n$, $a_{n-2} \le b_{n-2}$
$a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \le b_{n-2} + b_{n-1} + b_n$. Seguindo o mesmo raciocínio:
$\sum a_n \le \sum b_n$, já que $\sum a_n, \sum b_n > 0$.
Seja $\sum b_n$ convergente para L. Logo, para $n > m \in \mathbb{N}$,
$\exists\, \varepsilon > 0 \mid |\sum b_n - L| < \varepsilon$.