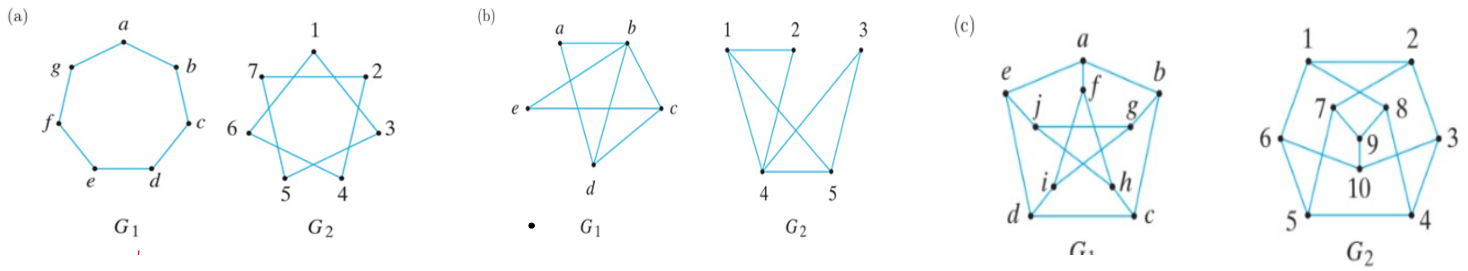
**Exercício 1** Nos itens a seguir, prove que os grafos $G_1$ e $G_2$ são *isomorfos*.

(a)




Qualquer grafo isomorfo ao $G_1$ e $G_2$ do item (c) é chamado de *grafo de Petersen*. O grafo de Petersen é muito usado como um exemplo; na verdade, D. A. Holton e J. Sheehan escreveram um livro inteiro sobre ele.

a) Fazendo o diagrama:

| x | f(x) |
|---|---|
| a | 1 |
| b | 3 |
| c | 5 |
| d | 7 |
| e | 2 |
| f | 4 |
| g | 6 |

| e | g(e) |
|---|---|
| {a,b} | {1,3} |
| {a,g} | {1,6} |
| {b,c} | {3,5} |
| {c,d} | {5,7} |
| {d,e} | {7,2} |
| {e,f} | {2,4} |
| {f,g} | {4,6} |

Portanto, achamos duas funções f, g bijetivas
$f: V_1 \to V_2$
$g: E_1 \to E_2$

b) Fazendo o mesmo diagrama:

| x | f(x) |
|---|---|
| a | 2 |
| b | 4 |
| c | 5 |
| d | 1 |
| e | 3 |

| e | g(e) |
|---|---|
| {a,b} | {2,4} |
| {a,d} | {2,1} |
| {b,c} | {4,5} |
| {b,d} | {4,1} |
| {b,e} | {4,3} |
| {c,e} | {5,3} |

Portanto, achamos duas funções f, g bijetivas
$f: V_1 \to V_2$
$g: E_1 \to E_2$

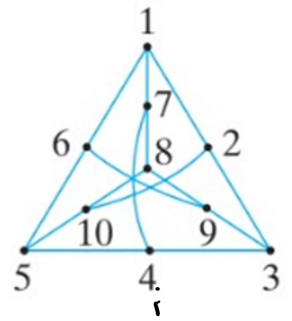
c) Repetindo o diagrama:

| x | f(x) |
|---|---|
| a | 9 |
| b | 8 |
| c | 4 |
| d | 5 |
| e | 7 |
| f | 10 |
| g | 1 |
| h | 3 |
| i | 6 |
| j | 2 |

| e | g(e) |
|---|---|
| {a,b} | {9,8} |
| {a,e} | {9,7} |
| {a,f} | {9,10} |
| {b,c} | {8,4} |
| {b,g} | {8,1} |
| {c,d} | {4,5} |
| {c,h} | {4,3} |
| {d,e} | {5,7} |
| {d,i} | {5,6} |
| {e,j} | {7,2} |
| {f,i} | {10,6} |
| {f,h} | {10,2} |
| {g,i} | {1,6} |
| {g,j} | {1,2} |
| {h,j} | {3,2}. |

Portanto, achamos duas funções $f, g$ bijetivas
$f: V_1 \to V_2$
$g: E_1 \to E_2$

**Exercício 2** Prove que o grafo a seguir é um grafo de Petersen. Ou seja, prove que esse grafo é isomorfo aos grafos do Exercício 1($c$).




Como já provamos que $G_1$ é isomorfo a $G_2$, então se provarmos que o grafo é isomorfo a $G_1$, por exemplo, já provaremos que o grafo em questão é de Petersen.

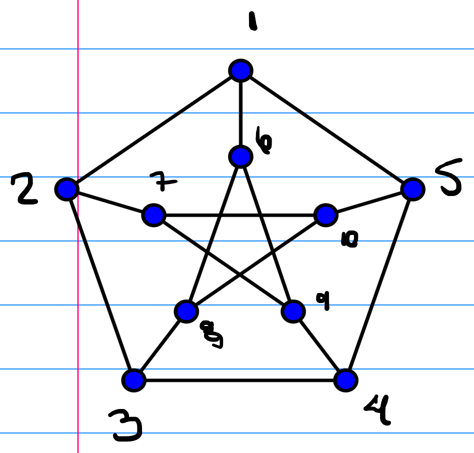
Fazendo o diagrama:

| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | h |
| 2 | j |
| 3 | g |
| 4 | i |
| 5 | d |
| 6 | c |
| 7 | f |
| 8 | a |
| 9 | b |
| 10 | e |

| e | g(e) |
|---|---|
| {1, 2} | {h, j} |
| {1, 6} | {h, c} |
| {1, 7} | {h, f} |
| {2, 3} | {j, g} |
| {2, 10} | {j, e} |
| {3, 4} | {g, i} |
| {3, 9} | {g, b} |
| {4, 5} | {i, d} |
| {4, 7} | {i, f} |
| {5, 6} | {d, c} |
| {5, 10} | {d, e} |
| {6, 9} | {c, b} |
| {7, 8} | {f, a} |
| {8, 9} | {a, b} |
| {8, 10} | {a, e} |

Achamos um par (f, g) de isomorfismo.

**Exercício 3** Desenhe um grafo com 10 vértices. Rotule cada vértice com um dos 10 subconjuntos de dois elementos distintos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Coloque uma aresta entre dois vértices se seus rótulos (ou seja, seus subconjuntos) não têm elementos em comum. Prove que seu grafo é o grafo de Petersen, ou seja, prove que esse grafo é isomorfo aos grafos do Exercício 1($c$)



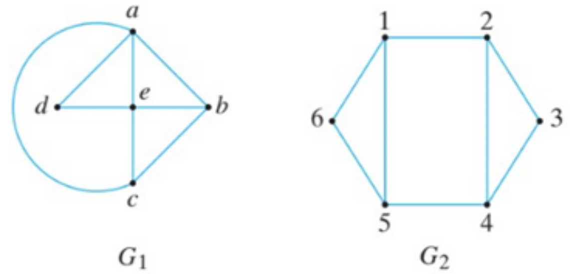

- $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
- $E = \{\{1,2\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,7\},\{3,4\},\{3,8\},\{4,5\},\{4,9\},\{5,10\},\{6,8\},\{6,9\},\{7,9\},\{7,10\},\{8,10\}\}$

Mesma coisa da questão anterior. Fazendo:

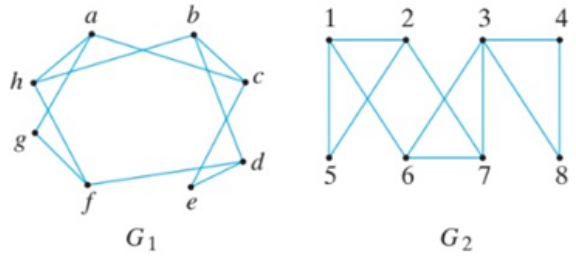
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | a |
| 2 | e |
| 3 | d |
| 4 | c |
| 5 | b |
| 6 | f |
| 7 | j |
| 8 | i |
| 9 | h |
| 10 | g |

**Exercício 4** Nos itens a seguir, prove que os grafos $G_1$ e $G_2$ *não são isomorfos*.

(a)




(b)




a) Não é isomorfismo pois fere uma das condições necessárias (isomorfismo ⇒ condição ≡ ~condição ⇒ ~isomorfismo).

Como o número de vértices de $G_1$ e $G_2$ é diferente, então não há isomorfismo.

b) Sequência dos graus dos vértices de $G_1$: $\{3,3,3,3,3,2,2,2\}$
Sequência dos graus dos vértices de $G_2$: $\{4,3,3,2,2,2,2,2\}$

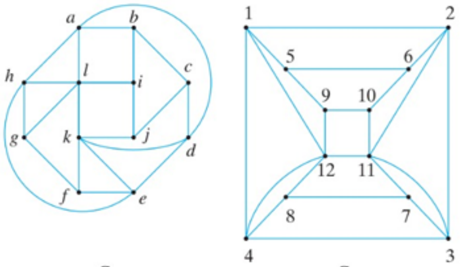
Como a sequência dos graus dos grafos é diferente, então isso fere a condição necessária de isomorfismo. Logo, os grafos não são isomorfos.

Condições necessárias

- Mesmo número de vértices
- Mesmo número de arestas
- Mesma sequência de graus.

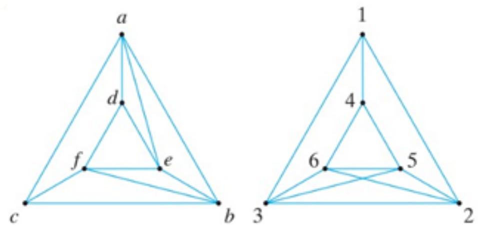
**Exercício 5** Nos itens a seguir, determine se os grafos $G_1$ e $G_2$ são isomorfos. Justifique suas respostas.

(a)




$G_1$ $G_2$

(b)




a) são isomorfos.
Vemos que ambos têm a mesma quantidade de vértices e arestas e têm a mesma sequência de graus.

Temos o diagrama:

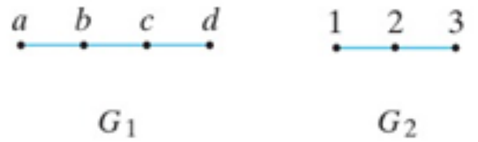
| x | f(x) |
|---|---|
| a | 1 |
| b | 5 |
| c | 6 |
| d | 2 |
| e | 3 |
| f | 7 |
| g | 8 |
| h | 4 |
| i | 9 |
| j | 10 |
| k | 11 |
| l | 12 |

b) Não são isomorfos.
vejamos as sequências dos graus dos grafos: $\{4,4,4,4,3,3\}$, $\{4,4,4,4,3,3\}$. Contudo, os vértices de grau 3 são vizinhos em um grafo e não são vizinhos em outro.

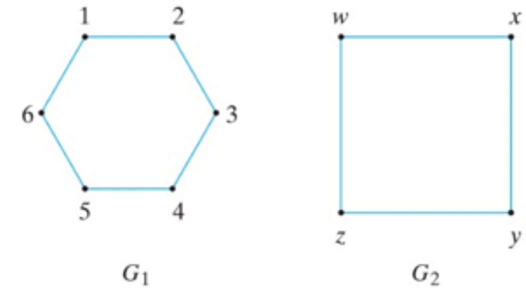
**Definição.** Um *homomorfismo* de um grafo $G_1$ para um grafo $G_2$ é uma função $f$ do conjunto de vértices de $G_1$ para o conjunto de vértices de $G_2$ com a propriedade de que se $v$ e $w$ são adjacentes em $G_1$, então $f(v)$ e $f(w)$ são adjacentes em $G_2$.

**Exercício 6** Nos itens a seguir, para cada par de grafos, dê um exemplo de um homomorfismo de $G_1$ a $G_2$.

(a)

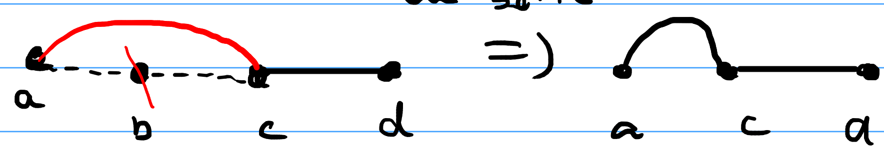



(b)



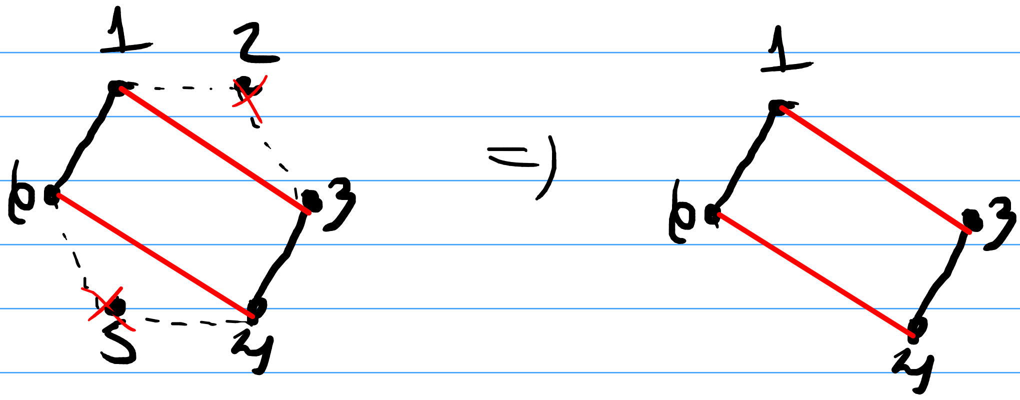

Elim
em série

a)



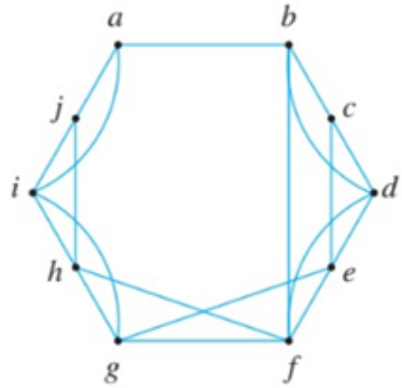

$G_1$ isomorfo a $G_2$

b)




isomorfo a $G_2$

**Exercício 7** Mostre que o único homomorfismo do grafo a seguir a ele mesmo é a função identidade.




Para termos homomorfismos, devemos ser capazes de fazer eliminações em série.
Contudo, o grafo não possui vértices de grau 2, portanto, o único homeomorfismo do grafo é ele mesmo.