1. Jaime e Walléria, alunos do segundo período, decidiram participar da nova exposição da FGV Arte. Eles planejam pintar um quadro de uma flor com várias pétalas, utilizando uma tinta especial que cobre uma área de 20 cm^2 para cada 100 ml, considerando as diversas camadas aplicadas. Como estudantes da EMAp, descobriram que o formato da flor é dado pela expressão $R = \sin(6\theta)$, em metros. Determine a quantidade de tinta necessária para pintar todas as pétalas da flor.

$R = \text{sen}(6\theta)$ é uma rosácea de 12 pétalas (par → 2n pétalas; ímpar → n pétalas).

Calculando a área da rosácea:

$\text{sen}\, 6\theta = 0 : \Rightarrow \theta = k\pi/6 \quad k \in \mathbb{Z}.$

A curva "completa" uma pétala de 0 a $\pi/6$.

$$\therefore \quad A = 12 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \text{sen}^2(6\theta)\, d\theta = 3 \int_0^{\pi/6} (1 + \cos 12\theta)\, d\theta$$

$$A = 3\left(\theta + \frac{1}{12}\,\text{sen}\, 12\theta\right)\Big|_0^{\pi/6} = \boxed{\frac{\pi}{2}}\ m^2 = 100^2\,\frac{\pi}{2}\ cm^2.$$

Calculando a quantidade de tinta (em L):

$20\, cm^2$ — $0{,}1$ L

$\frac{100^2 \pi}{2}\, cm^2$ — x L

$$\Rightarrow x = \frac{100^2\pi}{2} \cdot \frac{0{,}1}{20} = \frac{100}{4}\pi = \boxed{25\pi \text{ L}}$$

2. Leonardo e Eliane são grandes aficionados por automobilismo e decidiram apostar uma corrida durante o último final de semana. A pista escolhida tinha o formato de uma lemniscata, dada pela equação $R = 2\cos^2(\theta)$. Por uma incrível coincidência numérica, Eliane venceu a corrida por M segundos de diferença, em que M é o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto em que $\theta = \frac{\pi}{3}$. A aposta envolvia uma compensação financeira, na qual o perdedor deveria pagar ao vencedor N reais por segundo, em que N é a área total da lemniscata. Encontre os valores de M e N e determine quanto Eliane recebeu de Leonardo.

Vamos calcular M:

Temos que $x = 2\cos^3\theta$ e $y = 2\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta$. Fazendo

$$dy/dx = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{2.(\cos^3\theta + \text{sen}\,\theta . 2\cos\theta(-\text{sen}\,\theta))}{2.3\cos^2\theta.(-\text{sen}\,\theta)}.$$

$$\Rightarrow dy/dx = \frac{2\,\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta}{3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}.$$ Em $\theta = \pi/3$: $dy/dx = \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{9}}$

Vamos calcular N:

A curva $R = 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ é uma lemniscata, com 2 repartições.

$\theta = 0 \Rightarrow (x,y) = (2,0)$

$\theta = \pi/2 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

Lembre-se que aqui eu percorri 1/2 de uma das 2 partes

$$N = 2.\left(2.\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)^2\,d\theta\right) = 2.\int_0^{\pi/2}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right)d\theta$$

$$= 2.\left(\theta + 2.\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\,\text{sen}\,4\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$2\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta+\frac{1}{8}\operatorname{sen}4\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=2\left(\frac{3\pi}{4}+0+0-0-0-0\right)=\boxed{\frac{3\pi}{2}}$$ //

Logo, a quantidade de dinheiro que Eliane receber de Leonardo é $M.N=\frac{5\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{3\pi}{2}=$

$$\boxed{=\frac{5\pi\sqrt{3}}{6}\text{ reais}}$$ //.

3. Helora, aluna de Matemática Aplicada, decidiu abrir uma conta no banco Saporitander, o banco dos matemáticos. Com receio de esquecer a senha de seis dígitos do seu cartão, ela pensou em uma regra matemática para gerar os números. Ela escolheu a função $f(x,y)=2x^3+3y^2+3x^2y-24y$ e decidiu que os dígitos da senha seriam dados, em ordem crescente, pelos dígitos dos pares de coordenadas que anulam simultaneamente as duas derivadas parciais de primeira ordem da função. Qual é a senha de Helora?

OBS.: A senha pode conter números negativos e repetidos.

$$f(x,y)=2x^3+3y^2+3x^2y-24y$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2+6xy$
- $\frac{\partial f}{\partial y}=6y+3x^2-24$

Queremos valores de (x,y) tais que:

$$\begin{cases}6x(x+y)=0 & (1)\\ 3(x^2+2y-8)=0 & (2)\end{cases}$$

Temos de (1) que $x=0$ ou $x=-y$

I) $x=0$: Substituindo $x=0$ em (2), obtemos $y=4$. $(0,4)$

II) $x=-y$: substituindo $x=-y$ em (2), obtemos: $x=4 \wedge y=-4$ e $x=-2 \wedge y=2$:

Portanto, a senha será $-4, -2, 0, 2, 4, 4$.

4. Ao passar pelo hall da EMAp, Stephany ouviu Maria Clara e Luisa discutindo sobre a simetria do chamado fólio de Descartes em relação à reta $y = x$. Maria Clara acreditava que a curva era simétrica, enquanto Luisa discordava. Por ser aluna da disciplina de Cálculo Multivariado, Stephany conhecia bem a curva e decidiu não só demonstrar a simetria — isto é, que se (a, b) pertence à curva, então (b, a) também pertence — mas também encontrar todos os pontos em que as tangentes são horizontais ou verticais. Dada a curva parametrizada, resolva o problema como Stephany.

$$x = \frac{3t}{1+t^3} \qquad\qquad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

I) Primeiro, vamos ver a simetria da curva em relação a $y=x$:

$$(a,b) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$$

$$(b,a) = \left(\frac{3t_0}{1+t_0^3}, \frac{3t_0^2}{1+t_0^3}\right)$$

Temos que: $\frac{3t}{1+t^3} = \frac{3t_0^2}{1+t_0^3}$ e $\frac{3t_0}{1+t_0^3} = \frac{3t^2}{1+t^3}$

Segue disso que $\frac{1+t^3}{1+t_0^3} = \frac{t}{t_0^2}$ e $\frac{1+t^3}{1+t_0^3} = \frac{t^2}{t_0}$

Logo $\frac{t}{t_0^2} = \frac{t^2}{t_0}$ $(t, t_0 \neq 0)$ $\Rightarrow \frac{1}{t_0} = t. \Rightarrow \boxed{t_0 = \frac{1}{t}}$

como $\exists\, t_0 \mid (b,a) \in$ Curva. Logo, a curva tem simetria em relação a $y=x$

II) Fazendo a derivada, em relação a t:

$$dy/dx = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{(1+t^3)\cdot \cancel{6}^{2}t - \cancel{3}t^2 \cdot 3t^2}{\cancel{(1+t^3)^2}}}{\frac{(1+t^3)\cdot\cancel{3} - \cancel{3}t\cdot 3t^2}{\cancel{(1+t^3)^2}}}$$

$$= \frac{2t(1+t^3) - 3t^4}{1(1+t^3) - 3t^3} = \frac{2t - t^4}{1-2t^3} = \frac{t(t^3-2)}{2t^3-1}$$

1) Tangentes horizontais $(t(t^3-2)=0 \wedge 2t^3-1 \neq 0)$

$$\boxed{t=0 \quad e \quad t=\sqrt[3]{2}}$$

Pontos: $(0,0)$ e $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$

$$\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}$$

2) Tangentes verticais $(t(t^3-2)\neq 0 \wedge 2t^3-1=0)$

$$\boxed{t=\sqrt[3]{1/2}}$$

Ponto: $(2\sqrt[3]{1/2}, 2\sqrt[3]{1/4})$.

5. Sillas e Matheus, monitores de Cálculo em Várias Variáveis, decidiram aplicar um simulado para os seus monitorados, visando prepará-los para o teste que se aproximava. Após elaborarem quatro questões criativas, eles não conseguiam pensar em mais nada e decidiram que a última questão seria objetiva. Portanto, determine o limite, caso ele exista, ou prove que não há limite. Para isso, utilize coordenadas polares.

Dica: Note que $(x, y) \to (0, 0)$ é equivalente a $(r) \to (0)$.

a)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

b)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

c)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

d)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$$

e)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-y^2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sabemos que $x^2+y^2=r^2$ e $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r^2\to 0} \frac{\operatorname{sen} r^2}{r^2} = \lim_{K\to 0} \frac{\operatorname{sen} K}{K} = 1.$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4.(\operatorname{sen}^2 2\theta/4)}{r^4} = \operatorname{sen}^2 2\theta/4$

Perceba que numa faixa $[0, \pi/4]$, $\operatorname{sen}^2 2\theta/4$ varia. Logo, o limite não existe.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)}{\cancel{r^2}} = \cos 2\theta$

Como $\cos 2\theta$ varia entre $[0, \pi]$, o limite não existe.

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2} = \lim_{r^2\to 0} \frac{1-e^{-r^2}}{r^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{xe^{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}}{e^{x}+e^{x}x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x}$$

$$\boxed{=1}$$

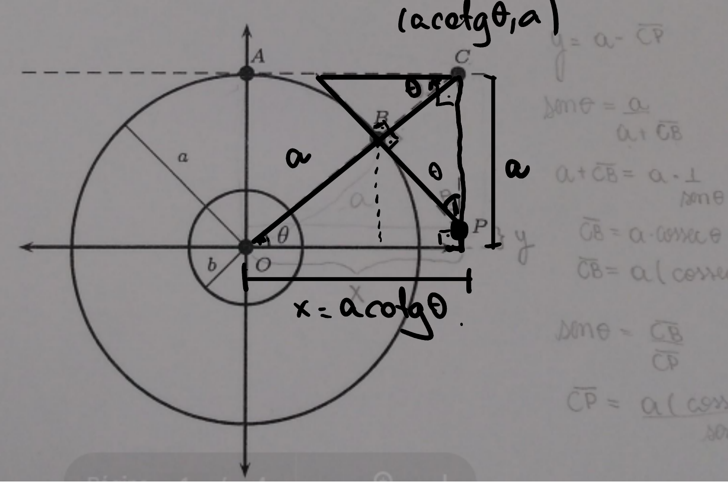
e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - y^2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^3}(\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta)}{\cancel{(r^2)^{3/2}}}$$

$= \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$. Como para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/3$ a função assume valores diferentes, o limite não existe.

Questão 1 (2,5 pontos)

Considere a figure abaixo. Nela temos dois círculos concêntricos na origem O, um de raio a e outro, menor, de raio b. Da origem O traçamos uma reta variando seu ângulo θ. Essa reta encontra o círculo de maior raio no ponto B e a reta horizontal $y = a$ no ponto C. Traçamos então a tangente ao círculo de raio a no ponto B até encontrar a reta paralela ao eixo y e que passa no ponto C. O ponto P é onde essa reta tangente e essa reta vertical se encontram.

Parametrize a curva descrita pelo ponto P usando o parâmetro θ.



$C = (a\,\text{cotg}\theta,\ a)$

$B = (a\cos\theta,\ a\,\text{sen}\theta)$.

$$\text{sen}\theta = \frac{a}{a + \overline{CB}}$$

$$\boxed{\therefore\ \overline{CB} = a\,\text{cossec}\theta - a}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{CB}{y} \Rightarrow x = \frac{CB}{\text{sen}\theta} = \frac{a(\text{cossec}\theta - 1)}{\text{sen}\theta}.$$

$$\boxed{y = a - \frac{a(\text{cossec}\theta - 1)}{\text{sen}\theta}} \quad \boxed{x = a\,\text{cotg}\theta}$$

2,5

Questão 2 (2,5 pontos)

Considere a seguinte curva polar, chamada *estrofoide*, $r = 2\cos\theta - \sec\theta$.

(a) Esboce seu gráfico.

(b) Calcule a área delimitada pelo seu laço.

a) $r = 2\cos\theta - \sec\theta.$

$$\begin{cases} x = (2\cos\theta - \sec\theta)\cos\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta. \\ y = (2\cos\theta - \sec\theta)\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,2\theta - \text{cotg}\,\theta \end{cases}$$

$\theta = 0 \quad r = 1$

$\theta = \pi/6 \quad r = 1/\sqrt{3}$

$\theta = \pi/4 \quad r = 0$

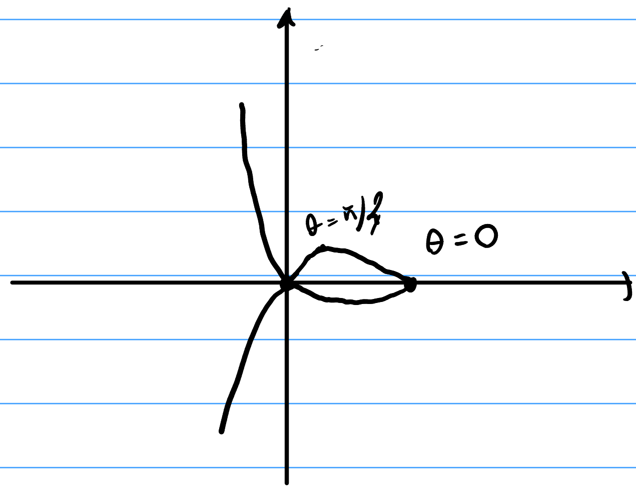
$\theta = \pi/3 \quad r = -1$

$\theta = \pi/2 \quad r = -\infty$

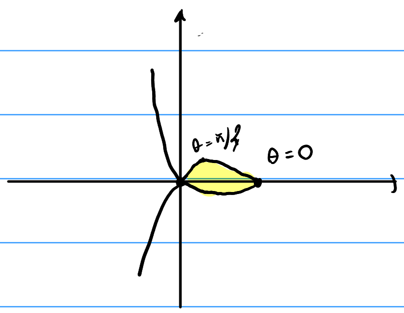
$\theta = \pi \quad r = -1$

$\theta = 3\pi/2 \quad r = \infty$

$\theta = 2\pi \quad r = 1$



b)



$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (2\cos\theta - \sec\theta)^2 \, d\theta = \int_0^{\pi/4} (4\cos^2\theta - 4 + \sec^2\theta)\, d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/4} 2(1+\cos 2\theta) - 4 + \sec^2\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi/4} (2\cos 2\theta + \sec^2\theta - 2)\, d\theta$$

$$\Rightarrow A = \left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\operatorname{sen}2\theta + tg\,\theta - 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/4} = \left(1 + 1 - \pi/2\right) = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}$$

Questão 3 (2,5 pontos)

Calcule o comprimento de arco total da astróide, $x = a\cos^3\theta$ e $y = a\,\operatorname{sen}^3\theta$, com $a > 0$.

Questão 4 (2,5 pontos)

Verifique se as seguintes funções são contínuas:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y}{(x-1)^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (1,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (1,0). \end{cases}$

a) Vamos ver

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen} r^2}{1-\cos r} \overset{H}{=} \lim_{r\to 0} \frac{\cos r^2 \cdot 2r}{\operatorname{sen} r}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{r\to 0} \frac{-\operatorname{sen} r^2 \cdot 4r}{\cos r} \boxed{= 0.}$$

Logo, a função é contínua.

b) Vamos ver

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \Rightarrow x = y+1 \Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{2y^2} = \frac{1}{2}$$

Logo, ou o limite não existe, ou ele é $1/2$.
Portanto, a função é divergente.

Questão 1) a) Seja $f: R^2 \to R$ e suponhamos que $\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) = 5$.

a) O que você pode dizer sobre $f(1,3)$?

b) Calcule o limite se existir : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2 + 3y^2)\ln(x^2+y^2)$

c) Calcule o limite se existir : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

a) Não podemos afirmar nada, pois não sabemos de $f(1,3)$ está definida no domínio

b) $$\lim_{r\to 0} 3r^2 . \ln r^2 = \lim_{r\to 0} \frac{3\ln r^2}{\frac{1}{r^2}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{LH}{=} \lim_{r\to 0} \frac{3\,\frac{1}{r^2}.2r}{-\frac{2}{r^3}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty}$$

$$= \lim_{r\to 0} -3r^2 = \boxed{0}$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow x = 0 \quad \lim = 0$

$\Rightarrow x = y \quad \lim = 1/2$

Não existe o limite.

Questão 2) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^4}{x^4+6y^8} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existem

b) Mostre que $f(x,y)$ não é diferenciável em (0,0)

a) Vamos usar a definição de derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \boxed{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \boxed{0}$$

$$\boxed{\therefore \exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \wedge \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}$$

b) Fazendo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+6y^8} \Rightarrow$ $x=0 \Rightarrow \lim = 0$
$x = y^2 \Rightarrow \lim = 1/7$

$\therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+6y^8}$ e $f(x,y)$ não é

diferenciável em (0,0)

Questão1) Considere a equação polar $r = \frac{2}{\sqrt{\cos 2\theta}}$

a) Encontre a equação cartesiana desta equação
b) Em que pontos da curva as tangentes são horizontais? E verticais?
c) Encontre a equação da reta tangente cuja inclinação é $\frac{5}{4}$

a) $x^2+y^2 = \dfrac{4}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$ $\quad x = r\cos\theta$ $\quad y = r\,\text{sen}\,\theta$ $\Rightarrow \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$x^2+y^2 = 4\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \Rightarrow \boxed{x^2-y^2=4}$ $\Rightarrow$ hipérbole equilátera

b) Derivando implicitamente em relação a x: $2x - 2y\,dy/dx = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}}$.

Tangentes horizontais: $x=0$ e $y \neq 0$: Não há pontos.
Tangentes verticais: $x \neq 0$ e $y=0$: $(2,0)$ e $(-2,0)$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5}{4}$ $\therefore$ $\boxed{y = \dfrac{4}{5}x}$.

Questão 2) Resolva os limites ou prove que não existem.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln\left(\frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}\right)$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{x^2+x+y^2}$

a) $f(x,y) = \frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}$ e $g(x) = \ln(f(x,y))$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{3r^2-r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0}\left(3-r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\right)$$

$$= \boxed{3}$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(f(x,y)) = \ln\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\right) = \boxed{\ln 3}$$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{x^2+x+y^2}$ $\Rightarrow$ $x=0 \Rightarrow \lim = 0$

$\Rightarrow x=y \Rightarrow \lim = 2$

Limite não existe