Lista de Exercícios

1) Mostre que não existe $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ t.q. $r^2 = 3$
2) Mostre que não existe $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ t.q. $r^2 = 5$
3) Tente generalizar para $r^2 = p$, onde $p \in \mathbb{N}$ é um primo
4) Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x^2 = y^2$, mostre que alguma das opções vale:
   (a) $x = y$ (b) $x = -y$
5) Se $x, y, z \in \mathbb{R}$, mostre que $|x - z| < |x - y| + |y - z|$
6) Se $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Sugestão: o trinômio do segundo grau $q(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)^2$ é sempre ≥ 0

7) Determine quais valores de $x \in \mathbb{R}$ satisfazem
   $|x - 5| < |x + 1|$

---

1 Suponha por absurdo que $\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3$ $(p, q \in \mathbb{Z} \mid mdc(p, q) = 1)$.

$\therefore p^2 = 3q^2 \Rightarrow 3 \mid p^2 \Rightarrow \boxed{3 \mid p}$"

$\therefore p = 3m \Rightarrow 9m^2 = 3q^2 \Rightarrow 3 \mid q^2 \Rightarrow \boxed{3 \mid q}$

Dem: $p^2 = 3m$. Seja $p = 3K + r$ $(r = \{0, 1, 2\})$

$\therefore (3K + r)^2 = 3n \Rightarrow 9K^2 + 6Kr + r = 3n$

$\Rightarrow 3(3K^2 + 2Kr) + r = 3n \quad \therefore \boxed{r = 0}_{//}$.

Portanto, $\boxed{p = 3m \wedge q = 3n}_{//}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$

Logo, $mdc(p, q) \neq 1$.

2 e 3 Mesma coisa

④ $x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 0$

Logo, $x+y=0$ ou $x-y=0$. Portanto ocorre a) ou b)

⑤ $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$|x-z| < |x-y| + |y-z|$$

A afirmativa é falsa. Tome $x=2$, $y=1$ e $z=0 \Rightarrow |2-0| < |2-1| + |1-0| \Rightarrow 2 < 2$ (Absurdo)

⑥ Provado em algebra linear usando a norma de um vetor ($\|x\| \geq 0$) e o fato de que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\|x - \lambda y\| \geq 0$.

Além disso fizemos o ponto crítico da função $f(\lambda) = \|x\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2 \|y\|^2$

Achamos $\lambda = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$

Substituímos no desenvolvimento de $\|x - \lambda y\| \geq 0$ e substituímos as coordenadas de $x, y \in \mathbb{R}^n$ por números reais quaisquer.

(7) I) $\cancel{x^2} - 10x + 25 < \cancel{x^2} + 2x + 1$

$24 < 12x$

$\boxed{x > 2}$.

II) Analisando cada caso

- $x + 1 > x - 5 \Rightarrow 6 > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$
- $x + 1 > -x + 5 \Rightarrow x > 2$
- $-x - 1 > x - 5 \Rightarrow x < 2$ (Impossível, $x = 1$)
- $-x - 1 > -x + 5 \Rightarrow$ (Impossível)

Interseção: $\boxed{x > 2}$.