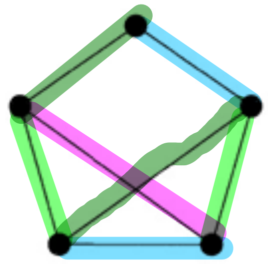
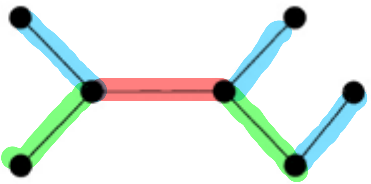
Exercício 1 Encontre o número cromático por arestas em cada grafo a seguir.

(a)



(b)



a) $\chi'(G) = 4$

b) $\chi'(G) = 3$

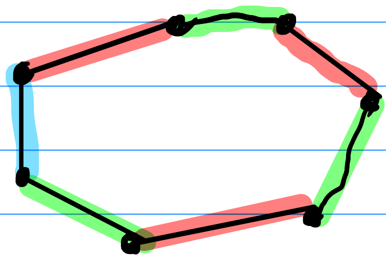
Exercício 2 Compare os limites inferiores e superiores para o número cromático por arestas dado pelo teorema de Vizing com o valor correto para os grafos abaixo.

(i) O grafo ciclo C_7

(ii) O grafo completo K_8

(iii) O grafo completo bipartido $K_{4,6}$

(i)



$\Delta(C_7) = 2$. $2 \leq \chi'(G) \leq 3$

$\chi'(G) = 3$.

(ii) Pelo teorema: $\chi'(K_n) = \begin{cases} \Delta(K_n)+1, & n \text{ ímpar} \\ \Delta(K_n), & n \text{ par.} \end{cases}$

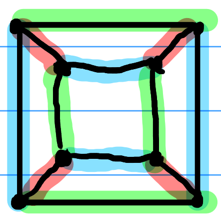
Logo, $\chi'(K_8) = \Delta(K_8) = 7$.

Pelo teorema de Vizing $7 \leq \chi'(G) \leq 8$.

(iii) Pelo teorema: se G é bipartido, $\chi'(G) = \Delta(G)$. Logo, $\chi'(K_{4,6}) = 6$.
Pelo teorema de Vizing:
$6 \leq \chi'(K_{4,6}) \leq 7$.

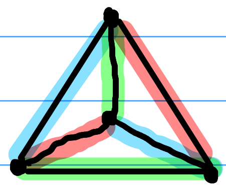
Definição. Os *grafos Platônicos* são os grafos formados pelos vértices e arestas dos cinco sólidos regulares (Platônicos): o tetraedro, o octaedro, o cubo, o icosaedro e o dodecaedro.

Exercício 3 Qual é o número cromático por arestas de cada um dos grafos Platônicos?



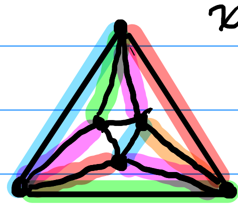
$\chi' = 3$

Cubo



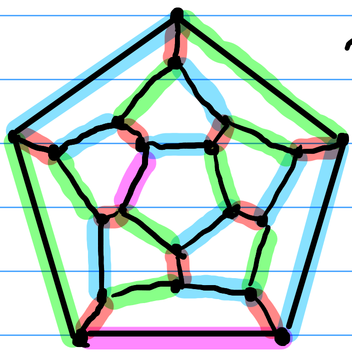
$\chi' = 3$

Tetraedro



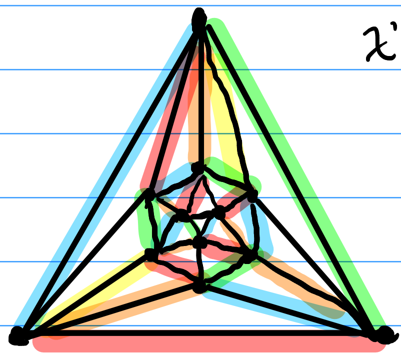
$\chi' = 5$

Octaedro



$\chi' = 4$

Dodecaedro



$\chi' = 6$

Icosaedro

Exercício 4 Prove que $\chi'(K_{r,s}) = \max(r, s)$, exibindo uma coloração explícita para as arestas de $K_{r,s}$.

Teorema: Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$
Como $K_{r,s}$ é bipartido completo, então,
$\Delta(K_{r,s}) = \max(r,s) = \chi'(G)$.

Uma coloração explícita seria: suponha, sem perda de generalidade, que $r \geq s$:
Cada um dos s vértices, de grau $\delta = r$, teriam suas arestas incidentes de r cores distintas. Além disso, "pintando" cada vértice r de uma cor, não teríamos perigo de repetir já que teríamos r sequências dos r cores.

Definição. Um grafo G é dito *regular* quando todos os vértices nele tem o mesmo grau.

Exercício 5 Seja G um grafo simples com um número ímpar de vértices. Prove que se G é regular de grau Δ, então $\chi'(G) = \Delta + 1$.

Suponha por absurdo que $\chi'(G) = \Delta$. Se G é Δ-regular e tem um número ímpar de vértices, então Δ é par, já que $\Delta . n = 2e$.
Logo, cada vértice tem um número par de vértices vizinhos, com $\Delta \leq n-1$ (n é o número de vértices) e $e \leq \frac{(n-1).n}{2}$

1) No caso máximo (K_n): $\chi'(K_n) = n = \Delta + 1$, que já quebra a hipótese de $\chi'(G) = \Delta$.
2) Nos outros casos ($e < (n-1)n/2$): Colorimos as

Δ arestas incidentes em qualquer vértice com Δ cores distintas (não colorimos as outras ainda).

Como o grafo é simples, ao pintar as arestas do segundo vértice, ainda podemos pintar com as Δ cores. Seguindo assim, podemos chegar até o último vértice pintando as arestas com as Δ cores.

Agora, vamos analisar as arestas do último vértice. Como o grafo é simples, sempre sobrará pelo menos uma aresta que não pode ser colorida com as Δ cores, já que todas as outras são incidentes nesse vértice. Logo, $\chi'(G) = \Delta + 1$.

Exercício 6 Escolha 16 quadrados em um tabuleiro de xadrez 8×8 de forma que cada linha e cada coluna do tabuleiro contenha exatamente 2 dos quadrados escolhidos. Mostre que é possível posicionar 8 peões brancos e 8 peões pretos nos 16 quadrados escolhidos de maneira que cada linha e cada coluna contenha exatamente 1 peão branco e 1 peão preto.

Podemos montar um modelo com grafos. Os vértices são os 16 peões e dois vértices estão ligados se eles estão na mesma linha ou na mesma coluna.

Portanto, do enunciado, tal grafo é 2-regular. Logo, podemos reordenar os vértices e formar um grafo ciclo com 16 vértices (C_{16}).

Nossa missão é verificar se $\chi'(C_{16}) = 2$ e $\chi(C_{16}) = 2$, pois, então, a mostragem estaria completa.

Podemos fazer isso na mão e verificar que é verdade!

Definição. Um grafo G é dito um grafo de *Classe 1* se $\chi'(G) = \Delta(G)$. Caso contrário, isto é, se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, é dito um grafo de *Classe 2*.

Exercício 7 Mostre que toda árvore é um grafo de *Classe 1*.

__Teorema:__ Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$

__Teorema:__ G é bipartido se, e só se, $\chi(G) = 2$

__Proposição:__ Toda árvore é bipartida.

Uma árvore é um grafo simples, conexo, acíclico e que possui apenas um caminho entre cada par de vértices. Dada uma raiz v, podemos dividir as árvores em níveis ("distância do vértice do nível à raiz).

Sejam c_1, c_2 cores. Basta colorir cada nível com uma das cores de forma alternada: a raiz tem cor c_1, o nível 1 tem cor c_2 e assim por diante. Isso ocorre pois as árvores são acíclicas e há apenas um caminho entre cada par de vértices.

Logo, exceto pela árvore trivial, toda árvore possui uma 2-coloração.

A árvore trivial é 1-cromática, já que não tem arestas e um vértice. Contudo, a árvore trivial também é bipartida (V_1 = único vértice, $V_2 = \emptyset$)

Logo, toda árvore é bipartida.

Caso 1) Árvore trivial: $\chi'(T) = 0 = \Delta(T)$ (1 vértice e 0 arestas). Classe 1.

Caso 2) Árvore não-trivial: $\chi(T) = 2 \Leftrightarrow T$ é bipartida $\Rightarrow \chi'(T) = \Delta(T)$. Classe 1.

Exercício 8 Mostre que todo ciclo de tamanho ímpar é um grafo de *Classe 2*.

<u>Proposição</u>: Todo ciclo é 2-regular.

Opção 1: indução, homeomorfismo e isomorfismo

Opção 2: cada vértice do ciclo deve ter uma aresta de entrada e outra, distinta, de saída, uma vez que não podemos repetir arestas no ciclo.

Pensando no ciclo como um grafo à parte, temos que todo vértice tem grau 2, logo, tal grafo é 2-regular.

<u>Proposição</u>: Seja G grafo simples, Δ-regular e com um número ímpar de vértices. Então, $\chi'(G) = \Delta + 1$.

Provado no exercício 5

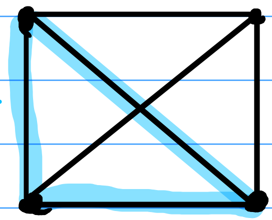
Como o ciclo é $\Delta = 2$-regular e possui número de arestas ímpar, então o número de vértices também é ímpar:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2e \Rightarrow 2 \cdot n = 2(2K+1) \Rightarrow n = 2K+1$$

Logo, χ' do ciclo é $\Delta + 1$. Portanto, todo ciclo ímpar é de classe 2.

Exercício 9 Encontre um grafo que contenha um ciclo de tamanho ímpar, mas que seja de *Classe 1*.

<u>**Teorema:**</u> $\chi'(K_n) = \begin{cases} n = \Delta(K_n)+1, & n \text{ ímpar} \\ n-1 = \Delta(K_n), & n \text{ par.} \end{cases}$



$\longrightarrow \chi'(K_4) = \Delta(K_4) = 3$.

Classe 1

ciclo ímpar