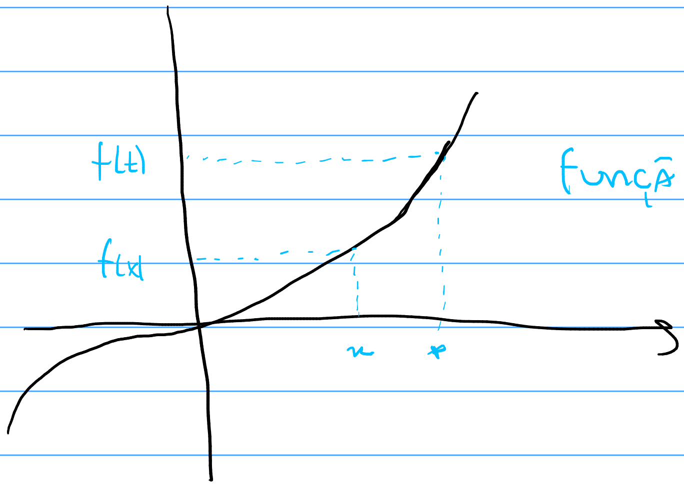
FUNÇÃO INJETIVA:

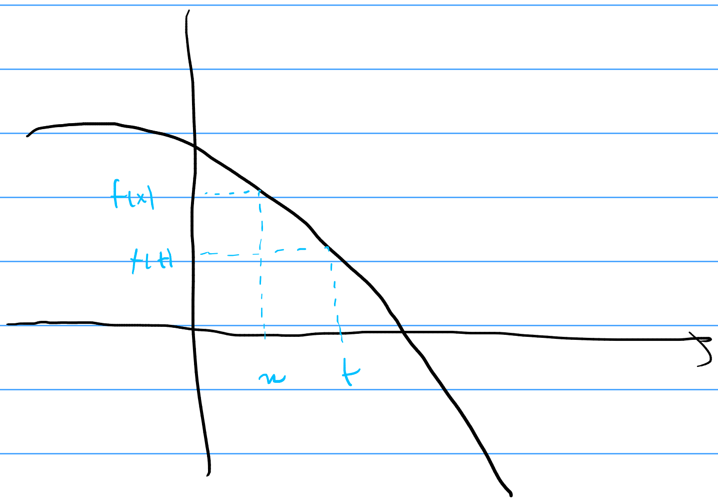
$f: D \to E$ f é injetiva se $x \neq t \Leftrightarrow f(x) \neq f(t)$.
Isso é equivalente a se $x = t \Leftrightarrow f(x) = f(t)$.
$D \subset \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Com isso, conseguimos definir função crescente:
$f: D \to \mathbb{R}$ é crescente se $\forall x, t \in D$, $x < t$, $f(x) < f(t)$.

E também decrescente:
$f: D \to \mathbb{R}$ é crescente se $\forall x, t \in D$, $x < t$, $f(x) > f(t)$.



Função crescente.



FUNÇÃO INVERSA:

Se f é injetiva e $b \in \operatorname{Im} f \Rightarrow$ a equação $f(x)=b$ terá uma única solução $x=a$. $b \mapsto a$

$$a \xrightarrow{f} b$$

A função inversa faz o contrário:

$f: \operatorname{dom} f \to \operatorname{Im} f$

$f^{-1}: \operatorname{Im} f \to \operatorname{dom} f.$

$$a \xleftarrow{f^{-1}} b$$

Logo, $\boxed{f(x)=y \text{ e } f^{-1}(y)=x.}$

Um exemplo: $f(x)=x^5$; $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{x}$.

CONTINUIDADE DA INVERSA:

Teorema da continuidade para f^{-1}:

Seja $f: I \to \mathbb{R}$, f injetiva e contínua e $J = Im f$.
Logo, $f^{-1}: J \to I$. é contínua.

OBSERVAÇÃO: Se f é crescente, então f^{-1} também é crescente, pois $f^{-1}: J \to I$.

DERIVADA DA INVERSA:

Seja $f: I \to \mathbb{R}$, $Im f = J$ $\wedge$ f injetiva e contínua.
Portanto, $f^{-1}: J \to I$ e $f(x) = t \iff f^{-1}(t) = x$.

Supondo $f(a) = b$ e f derivável em a ($\exists f'(a)$).
Queremos verificar se existe $(f^{-1}(b))'$.

$$(f^{-1}(b))' := \lim_{t \to b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{t - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} =$$

Se $t \to b$, então $x \to a$ pois f é contínua. por hipótese.

$$\Rightarrow \frac{\lim_{x \to a} 1}{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \boxed{\frac{1}{f'(a)}}$$

Logo $(f^{-1}(b))' \to 1/f'(a)$

Onde $\boxed{f(a)=b}$ ///.

contudo, $f'(a) \neq 0$.

Além disso, $(f^{-1}(b))' = \boxed{\dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$ ///.

Calcule $(\sqrt[n]{t})'$.

Faça $f(x) = x^n$. Sabemos que $\sqrt[n]{t} = f^{-1}(t)$.

$\therefore (\sqrt[n]{t})' = (f^{-1}(t))' = \dfrac{1}{f'(x)}$ (pelo é que concluímos)

$\therefore \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{x}{nx^n}$, sabendo que $x^n = t$.

$\Rightarrow \dfrac{t^{1/n}}{n \cdot t} = \boxed{\dfrac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1}}$ ///.

Calcule: $f'(x)$ em que $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$.

$m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicando $f(x) = (x^{1/n})^m$

$\Rightarrow f'(x) = m \cdot (x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot (x^{1/n})' = m \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot \dfrac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$.

$$m \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \cdot = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} \cdot$$

Portanto, conseguimos extender a regra do produto para os racionais.

Derivada de $\operatorname{arctg} t = f^{-1}(t) = x$

e $f(x) = t = \operatorname{tg} x$.

$$(f^{-1}(t))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

e $\operatorname{tg} x = t. \Rightarrow t^2 = \operatorname{tg}^2 x$

$$\boxed{= \frac{1}{1+t^2} = (\operatorname{arctg} t)'}$$