4a) $s(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1} = (t^2-1)(t^2+1)^{-1}$

$s'(t) = v(t) = (t^2-1)'(t^2+1)^{-1} + (t^2-1)[(t^2+1)^{-1}]'$

$\Rightarrow v(t) = \frac{2t}{t^2+1} + \frac{(t^2-1)(-1)(2t)}{(t^2+1)^2} = \frac{2t}{(t^2+1)^2} \cdot [(t^2+1) - (t^2-1)] = \frac{4t}{(t^2+1)^2} \cdot \Rightarrow \boxed{4t(t^2+1)^{-2}}$

$v'(t) = a(t) = \frac{(4t)'}{(t^2+1)^2} + (4t)[(t^2+1)^{-2}]' = \frac{4(t^2+1)}{(t^2+1)^3} - \frac{8t \cdot 2t}{(t^2+1)^3}$

$\Rightarrow a(t) = \frac{4t^2+4-16t^2}{(t^2+1)^3} \Rightarrow \boxed{\frac{4-12t^2}{(t^2+1)^3}}$.

ii) Parada ou em MRU:

$v(t) = 0$, $t = 0$ (Repouso).

$a(t) = 0$, $t = \sqrt{3}/3$ (Repouso/MRU).

11b) i) $s(t) = \operatorname{sen}(t)$

$s'(t) = v(t) = \cos(t)$

$v'(t) = a(t) = -\operatorname{sen}(t)$.

ii) $v(t) = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (Repouso)

$a(t) = 0 \Rightarrow -\operatorname{sen}(t) = 0 \Rightarrow t = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (Repouso ou MRU)

6) a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-2)(x-1)}, & \mathbb{R}-\{1,2\} \\ a, & x=2. \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x-1)}, & \mathbb{R}-\{1,2\} \\ a, & x=2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^+} \left[\frac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x-1)}\right] = \lim_{x\to 2^-} \left[\frac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x-1)}\right] = a$$

• $(x-2)^2 \geq 0 \therefore$ se $x\to 2^+ \vee x \to 2^-$, $(x-2)^2 \to 0^+$

Segue que: $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = a \Rightarrow \boxed{4 = a}$

b) • $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+0}{1-0} \Rightarrow 1$

• $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+2)}{(x-1)} = \frac{3}{0^+} = \infty$

• $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+2)}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

A.V. $\Rightarrow x = 1$ | A.H. $\Rightarrow y = 1$

(7) $y = 2x^3 - 2x^2 + 1$

$y' = 6x^2 - 4x$.

a) Horizontal: $y' = 0 \Rightarrow 6x^2 - 4x = 0 \quad x(3x-2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3}}$

Para $x = 0$: $y = 1$ $\qquad (0,1)$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right)$

Para $x = \frac{2}{3}$: $y = 19/27$

b) Paralela a $2y - 20x + 10 = 0$

$\hookrightarrow y - 10x + 5 = 0 \Rightarrow y = 10x - 5$.

$\therefore y' = 10 \qquad 6x^2 - 4x = 10$

$3x^2 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 8}{6}$ $\nearrow 5/3$ $\hookrightarrow -1$

Para $x = 5/3$: $y = 127/27$

Para $x = -1$: $y = -3$ $\Rightarrow \left(\frac{5}{3}, \frac{127}{27}\right)$ e $(-1, -3)$.

(8) $f(x) = |x^2 - 1|(x+1)$. $\qquad$ Não sei fazer.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

② Verdadeira!

$|x-a| < \delta$ $\qquad a = x_n.$

$|f(x)-f(a)| < \varepsilon.$

$|x| < \delta'.$

$|f(x)-2| < \varepsilon'.$

- $|x - x_n| < \delta$
- $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon$

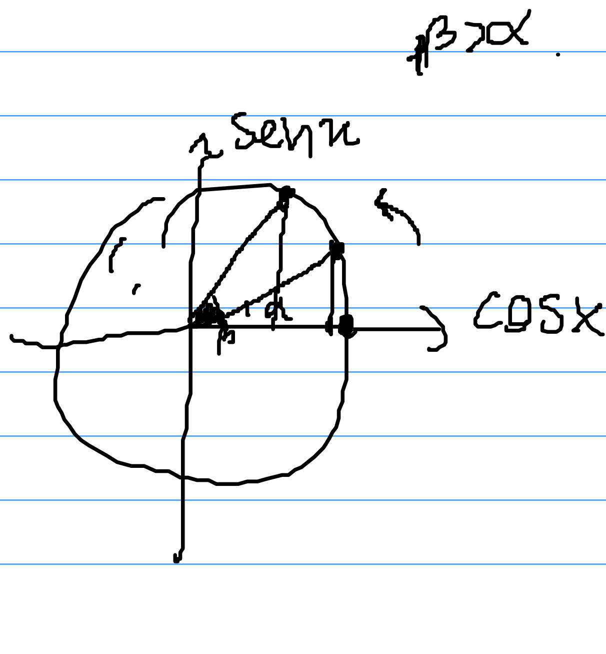
Quando $x \to 0$ $\qquad |x| \to 0$ e $f(x) \to f(0)$

Como $\delta \to 0$ e δ depende de ε, então $\varepsilon \to 0$

$\therefore |f(0) - 2| \to 0$. Pela definição precisa de limite,

$f(0) \to 2$. Como f é contínua em $[-1,1]$ e $0 \in [-1,1]$, então $\boxed{f(0)=2.}$

$(-\infty, 0) \cup (0, 1]$



$f(x) = x - \cos x.$

$\cos 1 < 1$

$f(0) = 0 - \cos 0 = -1. < 0.$
$f(1) = 1 - \cos 1 > 0$ ✓.

$f(1) = 1 - \cos 1 > 0$ $\cdot\ -1 \leq \cos x \leq 1$
$f(\infty) > 0.$

$f(-1) = -1 - \cos -1. = -1 - \cos 1 < 0$
$f(-\infty) - \quad < 0.$

$f(1) = -1 - \cos 1 < 0$
$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 \quad < 0$ X

$f(-\frac{1}{2})\ -\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2} = < 0$

⑤ b) $f'(x)$

$$f(x) = \left(\frac{x^3+1}{x^3+3}\right)\left(x^2 - 2x^{-1} + 1\right)$$

$$(x^3+1)\left[(x^3+3)^{-1}\right]' + (x^3+1)'(x^3+3)^{-1}$$

$$-\frac{(x^3+1)}{(x^3+3)^2} \cdot 3x^2 + \frac{3x^2(x^3+3)}{(x^3+3)^2} = \frac{3x^2}{(x^3+3)^2} \cdot (x^3+3-x^3-1)$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3+3)^2}$$

$2x + 2x^{-3} + \frac{3}{2} x^{-1/2}$

$2 + 2(-3)x^{-4} \cdot 1 + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} \cdot 1$

$$\boxed{2 - 6x^{-4} - \frac{3}{4} x^{-3/2}}$$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2} \right) \Rightarrow \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad \frac{1}{1+\cos x} \quad \frac{1}{2}$

6.3 $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$

$y' + y'' = 2y = \operatorname{sen} x$

$y' = A\cos x - B \operatorname{sen} x$

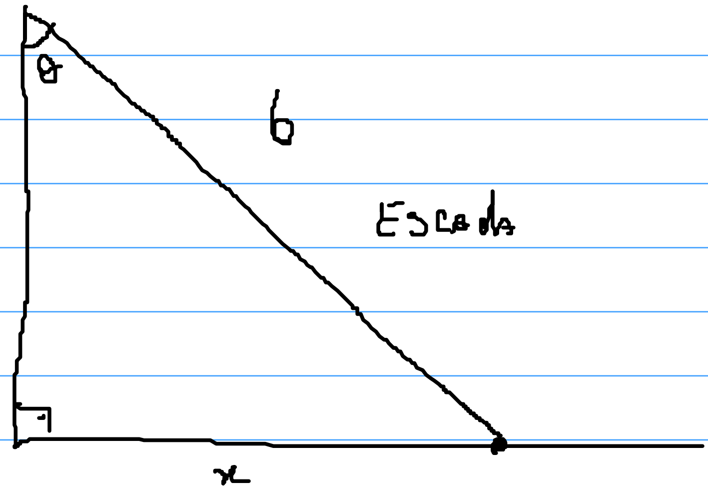
$y'' = -A \operatorname{sen} x - B\cos x$

$2y = 2A \operatorname{sen} x + 2B\cos x$

$$\begin{cases} 2A = -A - B \\ 2B = A - B \end{cases}$$

$$\boxed{3B = A}$$

Parede



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{6}$$

$$x = 6\operatorname{sen}\theta.$$

$$x(\theta) = 6\operatorname{sen}\theta.$$

$$x'(\theta) = (6\operatorname{sen}\theta)' = 6\cos\theta.$$

$$x'(\theta) = 6\cos\theta.$$

$$x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6\cos\frac{\pi}{3} = 6\cdot\frac{1}{2} = \boxed{3\,m/rad}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \cos x}{x + \cos x} = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cancel{x}\left(1 - \frac{\cos x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1 - \frac{\cos x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}}\right] =$$

$$= \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\cos x - 1}{x}\right) \cdot \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}\right)\right] = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x(\cos x + 1)}$$

$$\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{x}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 1}$$

$$-1 \cdot \frac{0}{2} = 0.$$

Pela definição precisa de limite:
Dados $\varepsilon, \delta > 0$ e δ dependente de ε.

- $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
- $|x - a| < \delta$

Então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, em que $|f(x) - f(a)| \to 0$

$|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon$ $\qquad x_n \to 0.$

$|x - x_n| < \delta$ $\qquad f(x_n) \to 2.$

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &< \varepsilon \\ |x - 0| &< \delta \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} |f(x) - 2| &< \varepsilon \\ |x| &< \delta \end{aligned}$$

Como $x \to x_n \to 0$ então $\delta = \varepsilon = 0$. Logo, $|f(x) - 2| \to 0$
e $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2.$

Sejam A, B e C matrizes quadradas $n \times n$ tais que A e B são inversíveis e $ABCA = A^t$, onde A^t é a transposta da matriz A. Então podemos afirmar que:

- (A) C é inversível e det $C = det(AB)^{-1}$;
- (B) C não é inversível pois $detC = 0$;
- (C) C é inversível e $detC = detB$;
- (D) C é inversível e $detC = (detA)^2 \cdot detB$;
- (E) C é inversível e $detC = \dfrac{detA}{detB}$

$$ABCA = A^t$$
$$ABC = A^t . A^{-1}$$
$$C = A^t . A^{-1} . B^{-1} . A^{-1}.$$
$$C = A^t . A^{-1} . B^{-1} . A^{-1}.$$
$$detC = de$$

Dadas as funções

$$f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}, X \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$g(x) = x\,\mathrm{sen}\, x, x \in \mathbb{R}$$ g é par

podemos afirmar que:

$$\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^x+1}{\cancel{e^x}}}{\frac{e^x-1}{\cancel{e^x}}} =$$

- (A) ambas são pares.
- (B) f é par e g é ímpar.
- (C) f é ímpar e g é par.
- (D) f não é par e nem ímpar e g é par.
- (E) ambas são ímpares.

Considere as equações $z^3 = i$ e $z^2 + (2+i)z + 2i = 0$, onde z é complexo. Seja S_1 o conjunto das raízes da primeira equação e S_2 o da segunda. Então

- (A) $S_1 \cap S_2$ é vazio;
- (B) $S_1 \cap S_2 \subset R$;
- (C) S_1 possui apenas dois elementos distintos;
- (D) $S_1 \cap S_2$ é unitário;
- (E) $S_1 \cap S_2$ possui dois elementos.

$z^3 = i^3$; $z^2 + (2+i)z + 2i = 0$

$z^3 + i^3 = 0$

$(z+i)(z^2 - zi - 1) = 0$

$z = i$

$z = \frac{-i \pm \sqrt{-1+4}}{2}$

$z = -i$

$z = \frac{-i + \sqrt{3}}{2}$

$z = \frac{-i - \sqrt{3}}{2}$

$z = \frac{-(2+i) \pm \sqrt{(2+i)^2 - 8i}}{2}$

$z = \frac{-(2+i) \pm (2-i)}{2}$

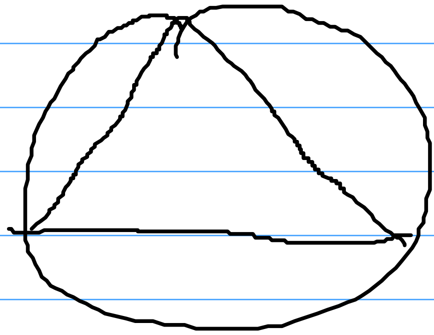
$-2 - i + 2 - i$

$-2 - i - 2$

A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência e de um hexágono regular, cuja apótema mede $10\ cm$, circunscrito a esta mesma circunferência é:

- (A) $1/2$
- (B) 1
- (C) $1/3$
- (D) $3/8$
- (E) n.d.a.

$R_c = 10\,cm.$

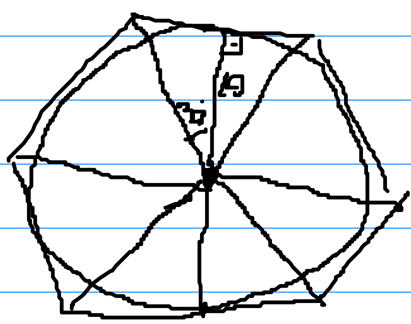


$\frac{l}{\text{sen}60} = 2R$

$l = 10\sqrt{3}.$

$l = 20$

$\boxed{A_t = \frac{10^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4}}$



$tg30 = \frac{l/2}{10}$

$\frac{20\sqrt{3}}{3} = y$

$A = \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{4}} \cdot \frac{20^2}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{20^2\sqrt{3}}{2}$

$3 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4 \cdot 2} \cdot \frac{2}{20^2\sqrt{3}} = \frac{3}{8}$

$$\frac{d}{dx}(x^3+x^2)^5 = 5(x^3+x^2)^4(3x^2+2x).$$

Mostre que a função $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$, $x \neq 1$.

é injetora

Condição de injeção: se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$

Suponha $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\therefore \quad \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1}$$

$$(2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1)$$

$$2x_1\cancel{x_2} - 2x_1 + x_2 - \cancel{1} = 2\cancel{x_1}x_2 - 2x_2 + x_1 - \cancel{1}$$

$$3x_2 = 3x_1$$

$x_1 = x_2$ (absurdo)

$\therefore f(x_1) \neq f(x_2)$ quando $x_1 \neq x_2$

e f é injetora.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-3x^2+ax-2}{x-2}$$. Determine a para que o limite exista.

Para o limite existir, a descontinuidade em $x=2$ deve ser removida, ou seja, devemos encontrar uma outra função $g(x)$ contínua em $x=2$ e $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^4-3x^2+ax-2}{x-2}$

Uma das formas disso ocorrer seria quando $x=2$ é raíz de x^4-3x^2+ax-2.

$$\therefore\ 2^4-3.2^2+2a-2=0$$
$$2^3-3.2+a-1=0$$
$$\underline{a=-1}$$

Quando $a=-1$, $x-2$ é fator de $x^4-3x^2+ax-2 \Rightarrow x^4-3x^2-x-2$.

$$\rightarrow x^4-3x^2-x-2=(x-2)(x^3+2x^2+x+1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^3+2x^2+x+1)}{\cancel{(x-2)}} = 8+8+2+1 = \underline{19}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad x \neq -1.$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\frac{(x+h)^2}{x+h+1} - \frac{x^2}{x+1}}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{(x+h)^2 \cdot (x+1) - x^2 (x+h+1)}{h(x+1)(x+h+1)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{(x^2+2xh+h^2)(x+1) - x^2(x+h+1)}{h(x+1)(x+h+1)} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \left[\frac{\cancel{x^3} + 2\cancel{x^2}h + h^2x + \cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^3} - \cancel{x^2h} - \cancel{x^2}}{h(x+1)(x+h+1)} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \left[\frac{x^2h + 2xh + h^2}{\cancel{h}(x+1)(x+1+h)} \right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{x^2 + 2x + h}{(x+1)(x+1+h)} \right]$$

$$= \boxed{\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}}$$

$f(x) = x(x+1)\sqrt{x} \quad , x>0$

$f(x) = (x^2+x)\, x^{1/2}$

$f'(x) = (x^2+x)' \cdot x^{1/2} + (x^2+x) \cdot (x^{1/2})'$

$= (2x+1)\, x^{1/2} + \dfrac{(x^2+x)}{2\sqrt{x}}$

$\dfrac{2 \cdot (2x+1)\sqrt{x}}{2} + \dfrac{\cancel{x}(x+1)\sqrt{x}}{2\cancel{x}}$

$\boxed{\dfrac{\sqrt{x}}{2}(5x+1)} = f'(x)$

8ª QUESTÃO (V 1,5) Calcule f'(x).

a) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ b) $f(x) = (\operatorname{sen}x - 3\cos x)^{10}$ c) $f(x) = tgx(\operatorname{sen}x)^3$ d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{3x^2-1}}$

a) $f(x) = (1-\cos x)\cdot x^{-2}$

$f'(x) = (1-\cos x)'\cdot x^{-2} + (1-\cos x)(x^{-2})'$

$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}x}{x^2} - \frac{2(1-\cos x)}{x^3}$

$$\boxed{= \frac{2\cos x + x\operatorname{sen}x - 2}{x^3}}$$

b) $f(x) = (\operatorname{sen}x - 3\cos x)^{10}$

$$\boxed{f'(x) = 10(\operatorname{sen}x - 3\cos x)^9\cdot(\cos x + 3\operatorname{sen}x)}$$

c) $f(x) = tgx(\operatorname{sen}x)^3$

$f'(x) = (tgx)'(\operatorname{sen}x)^3 + tgx[(\operatorname{sen}x)^3]'$

- $tgx = \operatorname{sen}x\cdot(\cos x)^{-1}$

$(tgx)' = (\operatorname{sen}x)'(\cos x)^{-1} - (\cos x)^{-2}\cdot(-\operatorname{sen}x)\cdot\operatorname{sen}x$

$= 1 + tg^2x = \sec^2 x.$

- $(\operatorname{sen}x)^3$

$$[(\operatorname{sen} x)^3]' = 3(\operatorname{sen} x)^2 \cdot \cos x.$$

$$f'(x) = \sec^2 x \cdot \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{tg} x \cdot 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x$$

$$f'(x) = \operatorname{tg}^2 x \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen}^3 x$$

$$\boxed{f'(x) = \operatorname{sen} x \left(\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{sen}^2 x\right)}$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x^2-1}} = (3x^2-1)^{-1/3}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot (3x^2-1)^{-4/3} \cdot 6x$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2-1)^4}}}$$

6ª QUESTÃO (V 1,0) Considere as sequências $a_n = (-1)^n(\frac{n+1}{n})$ e $b_n = (-1)^n n \, sen\frac{1}{n}$. Verifique a convergência das sequências a_n, b_n e $a_n b_n$.

I) $a_n = (-1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right) = (-1)^n \cdot \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n \cdot \cancel{\frac{n}{n}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

Abuso de notação: $\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \to \pm 1 \cdot 1 \to \pm 1$

Como o limite tende a dois valores, $\nexists \lim_{x\to\infty} a_n$. Logo, a_n diverge.

II) $b_n = (-1)^n \cdot n \, sen\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n \cdot \frac{sen\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty}(-1)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{sen\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Fazendo $1/n = m$. Se $n\to\infty$, $m\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \cdot \cancel{\lim_{m\to 0}\frac{sen\,m}{m}}^{\,1} = \lim_{n\to\infty}(-1)^n$$

Fazendo um abuso de notação:

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \to \pm 1$. Como o limite tende a valores diferentes, então $\nexists \lim_{n\to\infty} b_n$ e b_n é divergente.

III) $a_n \cdot b_n = \left[(-1)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot (-1)^n \cdot n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right]$

$$\lim_{n\to\infty} [a_n \cdot b_n] = \lim_{n\to\infty} \left[(-1)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot (-1)^n \cdot n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[(-1)^{2n} (n+1) \cdot \frac{\operatorname{sen} 1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} + \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right]$$

$$= \underbrace{\cancel{\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}}_{1} + \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$$

$1 + \operatorname{sen} 0 = 1$.

$\boxed{\text{Logo } a_n b_n \text{ converge para } 1}$.

7ª QUESTÃO (V 1,5) Considere $f(x) = \begin{cases} 3x^3+3, & x \le -1 \quad (-\infty, -1] \\ 9x-16, & -1 < x \le 2 \quad (-1, 2] \\ x^3-3x, & x > 2 \quad (2, \infty) \end{cases}$

a) Dê o domínio de f.
b) Verifique se f é contínua em x = -1 e em x = 2.
c) A função é derivável em x = -1? Em caso afirmativo, calcule f'(-1).
d) Verifique se f é derivável em x = 2.
e) Dê o domínio de f'.

a) Como $3x^3+3$, $9x-16$ e x^3-3x são funções polinomiais, elas são contínuas nos reais. Portanto f(x) é contínua nos intervalos $(-\infty,-1]$, $(-1,2]$ e $(2,+\infty)$. Fazendo a união desses intervalos, chegamos que o domínio de f também é $\mathbb{R}$.

b) em $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \quad \text{(condição a verificar)}$$

$$\lim_{x\to -1} 9x-16 = \lim_{x\to -1} 3x^3+3 = 0$$

Vemos que isso é um absurdo, pois $\lim_{x\to -1} 9x-16 \neq 0$. Logo f não é contínua em $x=-1$.

em $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} x^3-3x = \lim_{x\to 2} 9x-16 = 2$$

Vemos que é verdade, logo f é contínua em $x=2$.

c) Como f não é contínua em $x=-1$, $f'(-1)$ não existe. Logo, f não é derivável em $x=-1$.

d) Fazendo um abuso de notação:

$$f'(x) = \begin{cases} 9x^2, & x < -1 \\ 9, & -1 < x \leq 2 \\ 3x^2-3, & x > 2 \end{cases}$$

Vimos que f não é derivável em $x=-1$. Agora vamos ver se $f'(2)$ existe. Para isso:

$$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = f'(2)$$

$$\lim_{x \to 2} 3x^2-3 = \lim_{x \to 2} 9 = 9$$

Vemos que é verdade. Logo f é derivável em $x=2$.

e) O único ponto de descontinuidade em f' é em $x=-1$. Logo, o domínio de f' é $\mathbb{R}-\{-1\}$.

5ª QUESTÃO (V 1,0) Sabendo que f é uma função derivável com f(0) = 0 e $h(x) = 3(x-1)^2 + (f(x)+1)^2$ é a função constante igual a ~~5~~ 4, calcule f'(0).

$$4 = 3(x-1)^2 + (f(x)+1)^2$$

$$0 = 2\cdot 3(x-1)\cdot 1 + 2(f(x)+1)\cdot f'(x)$$

$$0 = 6(x-1) + 2f'(x)\cdot(f(x)+1)$$

$$\Rightarrow 0 = 6(0-1) + 2f'(0)\cdot(0+1)$$

$$\boxed{f'(0) = 3}$$

4ª QUESTÃO (V 1,5) Considere $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + 8x - 6$, definida em todo R. Sabendo que f é injetiva, determine:

a) $f^{-1}(-6)$ e $(f^{-1})'(-6)$.

b) A equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto de abcissa -6.

a) Vemos que além de ser injetiva, f é sobrejetora. Logo, f é bijetora e admite função inversa.

$$f(x) = 3x^5 + 2x^3 + 8x - 6$$

$$f(0) = -6 \quad \therefore \quad \boxed{f^{-1}(-6) = 0}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3x^5 + 2x^3 + 8x - 6} \Rightarrow \frac{1}{15x^4 + 6x^2 + 8} \Rightarrow (f^{-1}(-6))' = \frac{1}{15\cdot 0 + 6\cdot 0 + 8}$$

$$(f^{-1}(-6))' = \frac{1}{8}$$

b) $y - 0 = \frac{1}{8}(x+6)$

$$\boxed{y = \frac{x}{8} + \frac{3}{4}}$$

Questão 6 (valor 1,0)
Considere a função

$$f(x) = x - \frac{3}{x}, \quad x \neq 0$$

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 3$.

$f(x) = x - 3x^{-1}$

$f'(x) = 1 - (-1) \cdot 3x^{-2} \cdot 1$

$$\boxed{f'(x) = 1 + \frac{3}{x^2}}$$

$f'(3) = 1 + \frac{\cancel{3}}{\cancel{9}_3} = \frac{4}{3}$

$f(3) = 3 - \frac{3}{3} = 2$

$\therefore r: (y-2) = \frac{4}{3}(x-3)$

$$\boxed{y = \frac{4}{3}x - 2}$$

Questão 3 (valor 1,5)
Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}-1}$

b) $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}-1}$

a) $\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+3x^2}+1}{\sqrt{1+3x^2}+1} = \frac{x\left(\sqrt{1+3x^2}+1\right)}{3x^2}$.

$\frac{x \cdot |x|\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{|x|}\right)}{3x^2}$.

$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x \cdot |x| \cdot \left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{|x|}\right)}{3x^2}\right]$

$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{|x|} \cdot \left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{|x|}\right)}{3\cancel{x^2}}\right] \Rightarrow x\to 0,\ x>0$ e $|x| = x$.

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{|x|}}{3}\right] = \infty$

$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{x \cdot |x| \cdot \left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{|x|}\right)}{3x^2}\right] \Rightarrow x\to 0,\ x<0$ e $|x| = -x$

$\lim_{x\to 0^-}\left[-\frac{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{|x|}}{3}\right] = -\infty$.

Logo, tal limite não existe.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{|x|\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}\right)}$ $\Rightarrow x \to \infty$, $x > 0$ e $|x| = x$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}} = \dfrac{1}{\sqrt{3+0} - 0} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Questão 4 (valor 1,5)
Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-3}{|x^3 - 3x^2|}$

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x-3}{|x^3 - 3x^2|}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-3}{|x^3 - 3x^2|} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-3}{x^2(x-3)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-3}{-x^2(x-3)} = \lim\limits_{x \to 0^-} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$

O limite não existe

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x-3}{|x^3 - 3x^2|}$, $x \to 3$, $x < 0$, $x^3 - 3x^2 \to 0$, $x^3 - 3x^2 < 0$

$\therefore |x^3 - 3x^2| = -x^2(x-3)$.

$\lim\limits_{x \to 3^-} - \dfrac{\cancel{x-3}}{x^2\cancel{(x-3)}} = -\dfrac{1}{3^2} = \boxed{-\dfrac{1}{9}}$.