

1. Sejam S e T dois subespaços de um espaço vetorial V .

(a) Defina $S+T = \{s+t; s \in S \text{ e } t \in T\}$. Mostre que $S+T$ é um subespaço vetorial.

$$\alpha(s_1+t_1) + \beta(s_2+t_2)$$

$$\alpha s_1 + \alpha t_1 + \beta s_2 + \beta t_2$$

$$\underbrace{\alpha s_1 + \beta s_2}_{\in S} + \underbrace{\alpha t_1 + \beta t_2}_{\in T} \therefore \in S+T$$

(b) Defina $S \cup T = \{x; x \in S \text{ ou } x \in T\}$. Argumente que $S \cup T$ não é necessariamente um subespaço vetorial.

$$s_1 \in S \rightarrow \alpha s_1 + \beta t_1$$

$$t_1 \in T$$

SE $\alpha = \beta = 1$, NÃO HÁ UMA REGRA QUE

GARANTE QUE s_1+t_1 PERTENCE A S_1

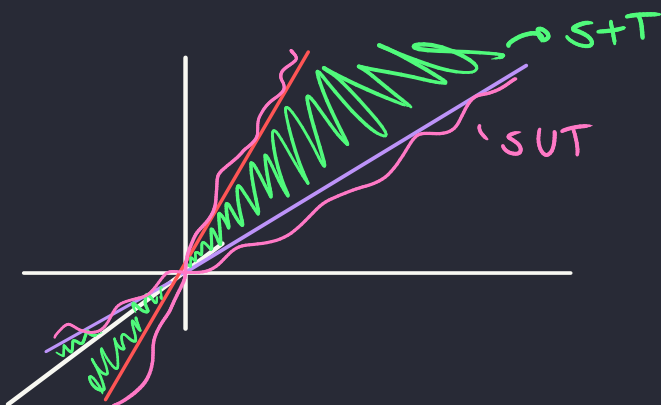
OU A T_1 , POIS, NO CASO ILUSTRADO,

s_1+t_1 PERTENCEM A SUBESPAÇOS DIFERENTES

(c) Se S e T são retas no \mathbb{R}^3 , o que é $S+T$ e $S \cup T$?

$S+T$ É UM PLANO

$S \cup T$ É A UNIÃO DE DUAS RETAS



2. Como o núcleo $N(C)$ é relacionado aos núcleos $N(A)$ e $N(B)$, onde $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$?

$$x \in N(C) \Leftrightarrow Cx = 0 \rightarrow Cx = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = 0$$

$$y \in N(A) \Leftrightarrow Ay = 0$$

$$z \in N(B) \Leftrightarrow Bz = 0$$

$$\begin{bmatrix} Ax \\ Bx \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \text{ELEMENTOS QUE ZERAM} \\ A \in B \Rightarrow N(A) \cap N(B)$$

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Ache a sua forma escalonada reduzida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -12 & -3 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \div 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 1/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - 5L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 23/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Qual é o posto dessa matriz?

POSTO 2

(c) Ache uma solução especial para a equação $Ax = 0$.

$$D = \begin{bmatrix} -\frac{23}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow S = \text{span} \left(\left\{ \begin{bmatrix} -23/4 \\ -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/4 \\ -7/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right)$$

4. Ache a matrizes A_1 e A_2 (não triviais) tais que $\text{posto}(A_1 B) = 1$ e $\text{posto}(A_2 B) = 0$ para $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

A_1, A_2 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\rightarrow A_1$ QUALQUER MATRIZ DE POSTO 1

$\text{posto}(A_1 B) = 1$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a+b \end{bmatrix}$ (POSTO 1)

SE $c+d = a+b$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix}$ $a+b=0$
 $c+d=0$

$\hookrightarrow A_2$ É QUALQUER MATRIZ $A_n = (a_{ij})$ TAL QUE $a_{12} = -a_{11}$

5. Verdadeiro ou Falso:

(a) O espaço das matrizes simétricas é subespaço. **V**

(b) O espaço das matrizes anti-simétricas é um subespaço. **V**

(c) O espaço das matrizes não-simétricas ($A^T \neq A$) é um subespaço. **F**

6. Se A é 4×4 e inversível, descreva todos os vetores no núcleo da matriz $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ (que é 4×8).

$$N(A) \subseteq \mathbb{R}^4 \quad N(B) \subseteq \mathbb{R}^8$$

$$v \in N(B) \text{ T.Q. } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}^T, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$$

$$Bv = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 + Av_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Av_1 = -Av_2 \rightarrow \text{SE } A \text{ INVERTÍVEL}$

$$\boxed{v_1 = -v_2}$$

$$N(B) = \left\{ \begin{bmatrix} v \\ -v \end{bmatrix}; v \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

7. Mostre por contra-exemplos que as seguintes afirmações são falsas em geral:

(a) A e A^T tem os mesmo núcleos.

$$\text{SE } A_{m \times n} \text{ ENTÃO } A_{n \times m}^T \text{ LOGO } N(A) \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ E } N(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$\text{SE } A_{n \times n} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) A e A^T tem as mesmas variáveis livres.

$$\text{SE } A_{m \times n}, \text{ com } m < n$$

$$\rightarrow \text{posto}(A) = m, \text{ ENTÃO } A_{n \times m}^T, \text{ TODAS AS COLUNAS SÃO PIVÔ.}$$

(c) Se R é a forma escalonada de A , então R^T é a forma escalonada de A .

$$R = EA \quad R^T = A^T E^T \rightarrow \text{PARA } R^T \text{ SER A FORMA ESCALONADA DE } A, E^T = A \text{ E } A^T = E, \text{ O QUE NEM SEMPRE É VERDADE:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Construa uma matriz cujo espaço coluna contenha $(1, 1, 5)$ e $(0, 3, 1)$ e cujo núcleo contenha $(1, 1, 2)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 3 & y \\ 5 & 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 1 + 0 + x &= 0 \rightarrow x = -1 \\ 1 + 3 + 2y &= 0 \rightarrow y = -2 \\ 5 + 1 + 2z &= 0 \rightarrow z = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

9. Construa uma matriz cujo núcleo contenha todos os múltiplos de $(4, 3, 2, 1)$.

$$\begin{aligned} Ax &= 0 \\ N(A) &= \left\{ x = \alpha \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow A \alpha \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ A_{n \times 4} \cdot \alpha \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} &\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=0} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

10. (Bônus) Dado um espaço vetorial real V , definimos o conjunto

$$V^* := \{ f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é linear} \}$$

Ou seja, V^* é o conjunto de todas as funções lineares entre V e \mathbb{R} . Relembramos que uma função $f : E \rightarrow F$, onde E e F são espaços vetoriais, é dita *linear* se para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\alpha \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Chamamos V^* de *espaço dual* de V .

(a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.

PARA V^* SER ESPAÇO VETORIAL, TODO $h \in V^*$ PODE SER ESCRITO COMO $h(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$, SE TODO α PODE SER ESCRITO COMO $\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}$, TEMOS QUE

$$h(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha f(\mathbf{v}) + \beta f(\mathbf{w}) + \alpha g(\mathbf{v}) + \beta g(\mathbf{w})$$

$$h(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha(f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})) + \beta(f(\mathbf{w}) + g(\mathbf{w}))$$

$$h(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha h(\mathbf{v}) + \beta h(\mathbf{w}) \rightarrow V^* \text{ É ESPAÇO VETORIAL}$$

(b) Agora, seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que existe uma bijeção $\varphi : V^* \rightarrow V$ tal que, para toda $f \in V^*$ e para todo $\mathbf{v} \in V$, tenhamos

$$f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle.$$

Dica: Utilize a dimensão finita de \mathbb{R}^n para expandir \mathbf{v} como uma combinação linear dos vetores da base canônica e aplique a linearidade de f .

$$\varphi : V^* \rightarrow V$$

$$\text{INJETIVIDADE} \Rightarrow \varphi(f_1) = \varphi(f_2) \therefore f_1 = f_2$$

$$\text{SOBREJETIVIDADE} \Rightarrow \forall f \in V^*, \exists g \text{ ; } \varphi(f) = g$$

