

1. Explique porque essas afirmações são falsas

(a) A solução completa é qualquer combinação linear de x_p e x_n .

SE $\alpha x_p + \beta x_n$ FOREM SOLUÇÕES, SE $\alpha = 0$, x_n NÃO VAI SER SOLUÇÃO DE $Ax = b \rightarrow b \neq 0$

(b) O sistema $Ax = b$ tem no máximo uma solução particular.

SE O NÚCLEO DE A FOR NÃO-TRIVIAL TODA SOLUÇÃO DE $Ax = b$ É ESCRITA COMO

(c) Se A é inversível, não existe nenhuma solução x_n no núcleo.

SEMPRE HÁ A SOLUÇÃO $x = 0$

2. Sejam

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Use a eliminação de Gauss-Jordan para reduzir as matrizes $[U \ 0]$ e $[U \ c]$ para $[R \ 0]$ e $[R \ d]$. Resolva $Rx = 0$ e $Rx = d$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 - \frac{3}{4}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\div 4 L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{aligned} x_2 &= 1 \\ x_1 + 2 &= 0 \\ x_1 &= -2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad N(U) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

SOLUÇÃO PARTICULAR

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \begin{aligned} x_2 &= 1 \\ x_1 + 2 &= -1 \\ x_1 &= -3 \\ x_3 &= 2 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO GERAL.

3. Suponha que $Ax = b$ e $Cx = b$ tenham as mesmas soluções (completas) para todo b . Podemos concluir que $A = C$?

Seja e_i a i -ésima coluna da base canônica

$$Ae_i = a_i \quad \text{a } i\text{-ésima coluna de } A$$

Se $Ax = b$ e $Cx = b$ então $Cx = a_i \Rightarrow Ce_i = a_i$ ou seja a i -ésima coluna de A é a de C . $A = C$

4. Ache o maior número possível de vetores linearmente independentes dentre os vetores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_3+L_2 \\ L_4+L_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 3 \text{ pivôs, logo} \\ 3 \text{ vetores LI} \end{matrix}$$

5. Ache uma base para o plano $x - 2y + 3z = 0$ em \mathbb{R}^3 . Encontre então uma base para a interseção desse plano com o plano xy . Ache ainda uma base para todos os vetores perpendiculares a esse plano.

PLANO:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y=1 \\ z=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x-2=0 \\ x=2 \end{matrix}$$

PIVÔ \swarrow $x \quad y \quad z$

$$\begin{matrix} y=0 \\ z=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+3=0 \\ x=-3 \end{matrix}$$

$\rightarrow \text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$

PLANO xy :

$$x - 2y + 3z = 0$$

$$x - 2y = 0$$

$$x = 2y \rightarrow \text{VETORES DO TIPO } \begin{bmatrix} x \\ x/2 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 2y \\ y \end{bmatrix}$$

PERPENDICULARES

$$x - 2y + 3z = 0$$

$$\text{VETOR NORMAL: } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6. Ache (na sua forma mais simples) a matriz que é o produto das matrizes de posto 1 uv^T e wz^T ? Qual seu posto?

$$\begin{matrix} uv^T \\ n \times 1 \quad 1 \times n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} wz^T \\ n \times 1 \quad 1 \times n \end{matrix}$$

COMO $\underbrace{uv^T wz^T}_{\mathbb{R}} \rightarrow \langle v, w \rangle \cdot uz^T$ LOGO, COMO uz^T É POSTO 1, $uv^T wz^T$ TAMBÉM TEM POSTO 1.

7. Suponha que a coluna j de B é uma combinação linear das colunas anteriores de B . Mostre que a coluna j de AB é uma combinação linear das colunas anteriores de AB . Conclua que $\text{posto}(AB) \leq \text{posto}(B)$.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow \text{coluna } j \text{ de } B \text{ é combinação linear das colunas anteriores.}$$

$$\text{coluna } j \text{ de } AB = A \cdot \text{coluna } j \text{ de } B$$

$$\text{coluna } j \text{ de } AB = A \cdot (\text{span}([b'_1, \dots, b'_j]))$$

$$\alpha Ab_1 + \beta Ab_2 + \gamma Ab_3 + \dots + \theta Ab_j$$

↳ combinação linear das colunas anteriores de AB .

$$\text{posto}(AB) \leq \text{posto}(B)?$$

O POSTO SÃO AS COLUNAS LI, SE B TEM n COLUNAS, PORÉM, DEPENDENDO DA MATRIZ A , PODE OCORRER DA COLUNA αAb_i SER A COMBINAÇÃO LINEAR DE OUTRAS COLS. LOGO, $\text{posto}(AB) \leq \text{posto}(B)$

8. O item anterior nos dá $\text{posto}(B^T A^T) \leq \text{posto}(A^T)$. É possível concluir que $\text{posto}(AB) \leq \text{posto}(A)$?

$$\text{posto}(AB) \leq \text{posto}(B) \quad \rightarrow \quad \text{posto}(A) = \text{posto}(A^T)$$

$$\text{posto}(B^T A^T) \leq \text{posto}(A^T)$$

$$\downarrow$$
$$\text{posto}(B^T A^T) \leq \text{posto}(A)$$

$$\text{posto}((B^T A^T)^T) \leq \text{posto}(A)$$

$$\boxed{\text{posto}(AB) \leq \text{posto}(A)}$$

9. Suponha que A e B são matrizes quadradas e $AB = I$. Prove que $\text{posto}(A) = n$. Conclua que B precisa ser a inversa (de ambos lados) de A . Então, $BA = I$.

$$\text{VIMOS QUE } \text{posto}(AB) \leq \text{posto}(A)$$

$$\text{COMO } AB = I, A \text{ e } B \text{ SÃO } n \times n$$

LOGO, SE $AB = I$, ENTÃO $\text{posto}(AB) = n$, LOGO, $\text{posto}(A) = n$, POIS NÃO PODE SER MENOR. COMO VIMOS ANTES, $\text{posto}(B) = n$.

$$AB = I \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1} \cdot I \quad \rightarrow \quad AB \cdot B^{-1} = I \cdot B^{-1}$$
$$\underbrace{B = A^{-1}} \quad \underbrace{A = B^{-1}}$$