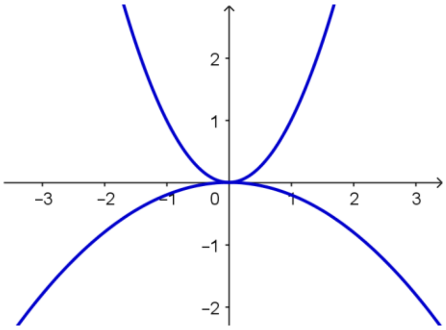
# Transformações 3

## Casos degenerados




Qual é a equação da curva representada ao lado?

A parte de cima é a parábola $y = x^2$ e a de baixo é a parábola $y = -\frac{1}{5}x^2$,

A equação da curva ao lado é $x^4 + 4x^2y - 5y^2 = 0$.

Por que?

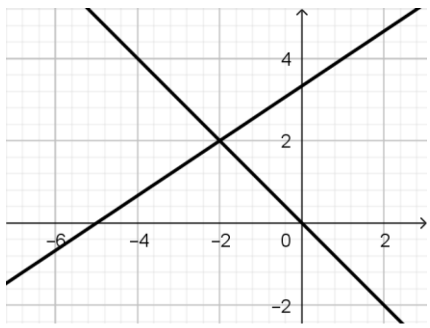
A equação da parábola de cima é $x^2 - y = 0$ e a da de baixo é $x^2 + 5y = 0$.

A equação da curva representada pela união das duas parábolas é, simplesmente,

$$(x^2 - y)(x^2 + 5y) = 0$$

De fato, qualquer ponto que esteja em uma das parábolas satisfaz à equação acima.

**Uma equação representa duas retas**




Uma equação do segundo grau pode representar duas retas. Por exemplo, para representar simultaneamente as retas $x + y = 0$ e $2x - 3y + 10 = 0$ construímos a equação

$$(x + y)(2x - 3y + 10) = 0$$

Que desenvolvida é

$$2x^2 - xy - 3y^2 + 10x + 10y = 0$$

O gráfico está ao lado.

Pois bem, a equação acima está contida no caso geral da equação completa do segundo grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Vamos agora examinar alguns desses casos particulares que também são chamados de “cônicas degeneradas”.

*Exemplo* 1

O que representa a equação $4x^2 - 9xy + 2y^2 = 0$?

*Solução*

Observe inicialmente que a origem $(0, 0)$ satisfaz a equação dada. Além disso, a origem é centro de simetria da “curva”. De fato, se um ponto $(x, y)$ pertence a essa curva, o ponto

$(-x, -y)$ também pertence. Portanto essa equação deve representar duas retas concorrentes. Para encontrar essas retas há duas formas de proceder. Vamos mostrar ambas:

1) Obter um fator comum para colocar em evidência

$$4x^2 - 9xy + 2y^2 = 0$$
$$4x^2 - 8xy - xy + 2y^2 = 0$$
$$4x(x - 2y) - y(x - 2y) = 0$$
$$(x - 2y)(4x - y) = 0$$

As duas retas são $x - 2y = 0$ e $4x - y = 0$.

2) Organizando uma equação do segundo grau

$$4x^2 - 9xy + 2y^2 = 0$$
$$2\boldsymbol{y^2} - 9x\boldsymbol{y} + 4x^2 = 0$$

Resolvemos a equação do segundo grau em $\boldsymbol{y}$.

$$y = \frac{9x \pm \sqrt{81x^2 - 36x^2}}{4} = \frac{9x \pm \sqrt{49x^2}}{4} = \frac{9x \pm 7x}{4}$$

As retas são

$$y = 4x \text{ e } y = \frac{x}{2}$$

*Exemplo* 2

O que representa a equação $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y - 15 = 0$?

*Solução*

Como não há o termo retangular, o mais prático é completar os quadrados:

$$x^2 - 2x + 1 - 4(y^2 - 4y + 4) = 15 + 1 - 16$$
$$(x - 1)^2 - 4(y - 2)^2 = 0$$

Daí,

$$2(y - 2) = \pm(x - 1)$$

As duas retas são $x - 2y + 3 = 0$ e $x + 2y - 5 = 0$.

*Obs*

Você pode, também, organizar uma equação do segundo grau em uma das variáveis:

$$4y^2 - 16y - (x^2 - 2x - 15) = 0$$

Resolva essa equação.

Você vai chegar em

$$y = \frac{16 \pm 4\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{8}$$

E é fácil terminar.

*Exemplo* 3

O que representa a equação $9x^2 - 6xy + y^2 - 1 = 0$

*Solução*

Observe o quadrado perfeito. Ficamos com

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 1 = 0$$

$$(3x - y)^2 - 1 = 0$$

$$(3x - y)^2 - 1^2 = 0$$

$$(3x - y - 1)(3x - y + 1) = 0$$

A equação dada representa as retas paralelas $3x - y - 1 = 0$ e $3x - y + 1 = 0$.

*Exemplo* 4

O que representa a equação $4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y = 0$?

*Solução*

Novamente, devemos ficar atentos aos quadrados perfeitos:

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y = 0$$

$$(2x + y)^2 - 4(2x + y) = 0$$

$$(2x + y)(2x + y - 4) = 0$$

A equação dada representa as retas paralelas $2x + y = 0$ e $2x + y - 4 = 0$.

*Exemplo* 5

O que representa a equação $3x^2 + 2xy - y^2 - 6x - 2y + 3 = 0$?

*Solução*

Na falta de ideia melhor vamos fazer uma translação nos eixos, tentando encontrar uma posição mais adequada para a origem. Façamos, então, as substituições:

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

$$3x^2 + 2xy - y^2 - 6x - 2y + 3 = 0$$

$$3(x' + a)^2 + 2(x' + a)(y' + b) - (y' + b)^2 - 6(x' + a) - 2(y' + b) + 3 = 0$$

$$3x'^2 + 6ax' + 3a^2 + 2x'y' + 2bx' + 2ay' + 2ab - y'^2 - 2by' - b^2 - 6x' - 6a - 2y' - 2b + 3 = 0$$

$$3x'^2 + 2x'y' - y'^2 + (6a + 2b - 6)x' + (2a - 2b - 2)y' + 3a^2 + 2ab - b^2 - 6a - 2b + 3 = 0$$

Vamos, então, eliminar os termos do primeiro grau

$$\begin{cases} 6a + 2b = 6 \\ 2a - 2b = 2 \end{cases}$$

A solução é $a = 1$ e $b = 0$.

A nova origem é $O_1 = (0, 0)' = (1, 0)$

A equação fica assim:

$$3x'^2 + 2x'y' - y'^2 = 0$$

Já sabemos que essa equação representa duas retas concorrentes no ponto $(1\ 0)$.

Podemos agora fatorar escrevendo $3x'^2 + 3x'y' - x'y' - y'^2 = 0$ ou organizar a equação anterior como uma do segundo grau em $y'$.

$$y'^2 - 2x'y' - 3x'^2 = 0$$

$$y' = \frac{2x' \pm \sqrt{4x'^2 + 12x'^2}}{2} = \frac{2x' \pm 4x'}{2} = x' \pm 2x'$$

No novo sistema as equações das retas são $y' = -x'$ e $y' = 3x'$.

Vamos retornar ao sistema original com as substituições:

$$\begin{cases} x' = x - a = x - 1 \\ y' = y - b = y - 0 \end{cases}$$

Ficamos com

$$y' = -x' \quad \rightarrow \quad y = -(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = -x + 1$$

$$y' = 3x' \quad \rightarrow \quad y = 3(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = 3x - 3$$

*Obs*

A equação $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$ representa apenas o ponto $(2, 3)$.

A equação $x^2 + y^2 + 1 = 0$ representa o conjunto vazio.

*Obs*

Elipse, hipérbole e um par de retas concorrentes possuem centro de simetria.

Parábola não possui centro de simetria.

Um par de retas paralelas possui infinitos centros de simetria.