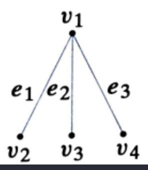
Matemática Discreta

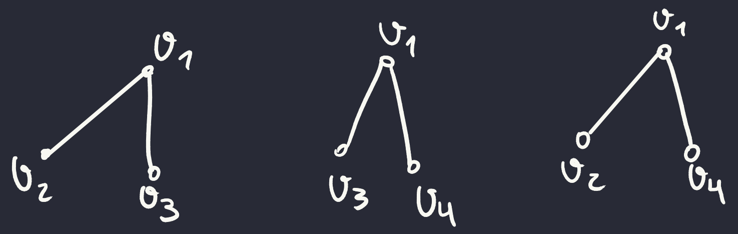
01/10/24

Rushadão A1's

Prova 2022

Exercício 1 (1 ponto) Mostre todos os subgrafos do seguinte grafo que contêm exatamente duas arestas:





Exercício 2 (1 ponto) Prove que o máximo número de arestas de um grafo simples bipartido de n vértices é $\lfloor n^2/4 \rfloor$, isto é, o maior inteiro menor ou igual a $n^2/4$.

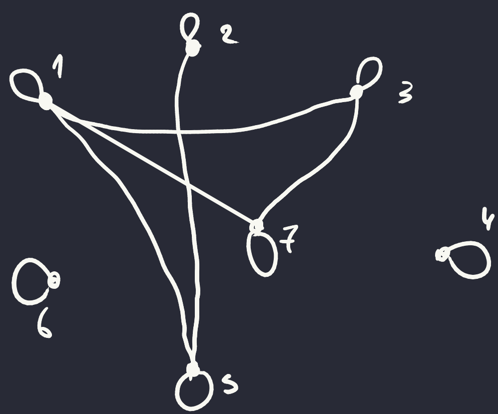
O bipartido com maior número de vértices é o $K_{n/2,\, n/2}$

O grau de todo vértice desse grafo é $\delta(v) = \frac{n}{2}$, logo $2|E| = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$

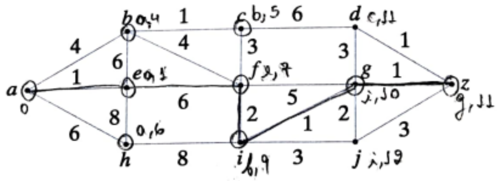
Exercício 3 (1,5 pontos) Desenho um grafo cuja matriz de adjacência é $A = (a_{ij})$ de tamanho 7×7 e tal que:

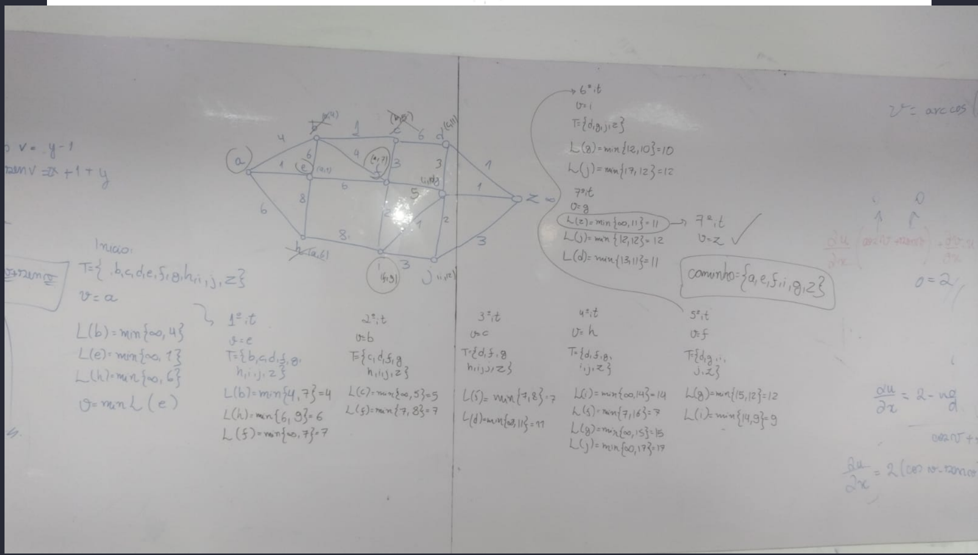
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \neq j \text{ e } i+1 \text{ é divisor de } j+1, \\ 1 & \text{se } i \neq j, \text{ e } j+1 \text{ é divisor de } i+1, \\ 2 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$



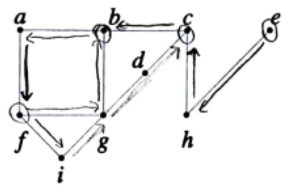
Exercício 4 (1,5 pontos) Use o algoritmo de Dijkstra para achar o caminho de a a z de menor comprimento no seguinte grafo. Detalhe as iterações do algoritmo.





Exercício 5 (2 pontos) Seja G um grafo conexo que possui quatro vértices de grau ímpar: v_i para $i = 1, 2, 3, 4$, (G pode ter mais de quatro vértices em total). Prove que existem caminhos P_1 de v_1 a v_2, e P_2 de v_3 a v_4, sem arestas repetidas, tais que cada aresta de G pertence a exatamente um desses caminhos.

Ilustre esta propriedade no seguinte grafo:



$P_1 : (f, g, b, a, f, i, g, d, c)$
$v_1 = f,\ v_2 = c$

$P_2 : (e, c, b)$
$v_3 = e,\ v_4 = b$

Sabemos que todo vértice tem grau $2k+1$, logo dado um caminho P_1 de v_1 a v_2, passamos numa quantidade ímpar de arestas adjascentes a v_1 e v_2. Assim criamos o subgrafo G' removendo as arestas de P_1 do grafo G. Assim, v_1 e v_2 tem grau par, pois: $2k+1-2p-1 = 2(k-p)$ ($2p+1$ é a quantidade de arestas que passam por v_1 ou v_2). No novo subgrafo G', v_1 e v_2 tem grau par e v_3, v_4 tem grau ímpar, isso é condição suficiente para ter caminho euleriano de v_3 a v_4.

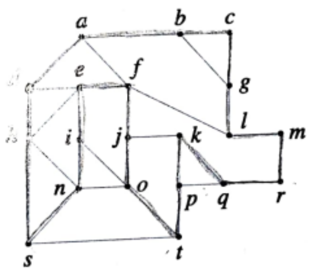
Exercício 6 (3 pontos) Determine e justifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. São as justificativas que contam pontos.

(a) Não existe grafo cuja matriz de incidência tenha uma coluna com todos zeros.

(b) Não existe grafo cuja matriz de incidência tenha uma linha com todos zeros.

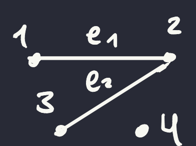
(c) Todo grafo completo K_n contém um ciclo Hamiltoniano.

(d) O seguinte grafo é Hamiltoniano:



a) Verdade, pois isso implica que existe aresta que não incide em ponto nenhum (Contra definição de aresta)

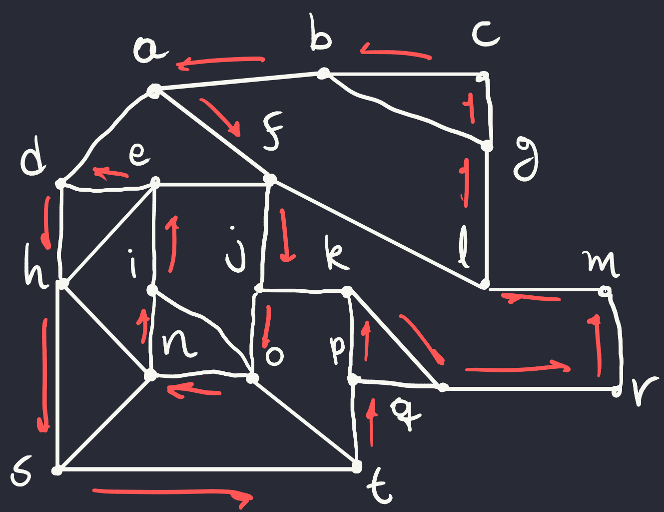
b) Falso, contra exemplo:



$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

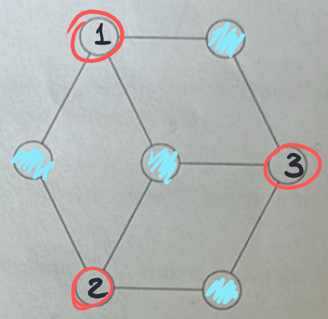
c) Dado $K_n(V^K, E^K)$, $\forall v \in V^K: \delta(v) = n-1$, logo, $\forall v, w \in V^K$, $\delta(v) + \delta(w) \geq n \Rightarrow n-1+n-1 \geq n$ ✓ logo, existe ciclo hamiltoniano.

d)



Prova 2023

Exercício 1 (1 ponto) Determine se o seguinte grafo é euleriano. Ele é Hamiltoniano? Bipartido?



Euleriano? Não, há vértices de grau ímpar

Hamiltoniano: Não, removendo os vértices 1, 2, 3, há 4 componentes conexas.

Sim, é bipartido

Exercício 2 (2 pontos) Prove que K_5 não é planar.

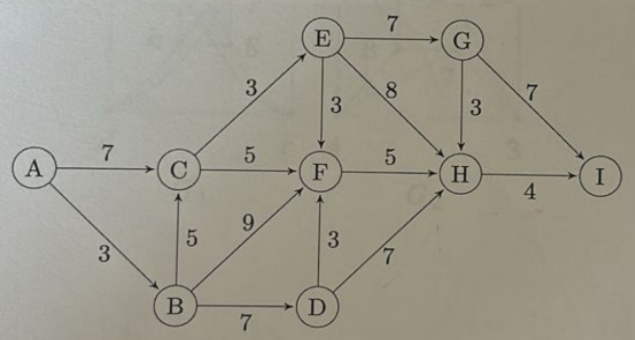
$$\forall v \in V,\ \delta(v) = 4,\quad |V| = 5 \quad \therefore\ E = \frac{\cancel{4}\cdot 5}{\cancel{2}} = 10$$

$$F + 5 = 2 + 10 \Rightarrow F = 7$$

$$3F \leq 2E \Rightarrow 3\cdot 7 \leq 2\cdot 10 \Rightarrow \boxed{21 \leq 20}$$

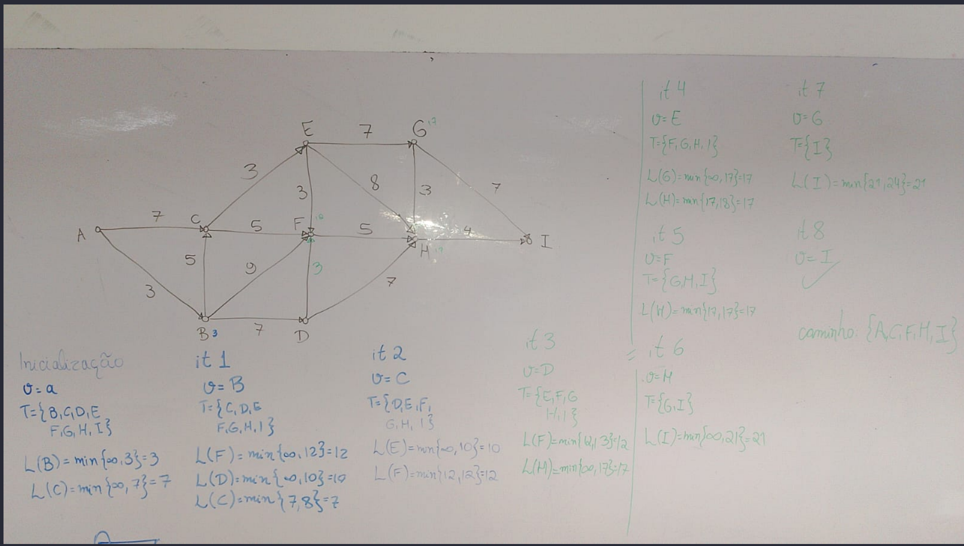
Não é planar

Exercício 3 (2,5 pontos) Use o algoritmo de Dijkstra para achar o caminho de A a I de menor comprimento no seguinte grafo. Detalhe as iterações do algoritmo.



Denote com s o comprimento do caminho mais curto de A a I.

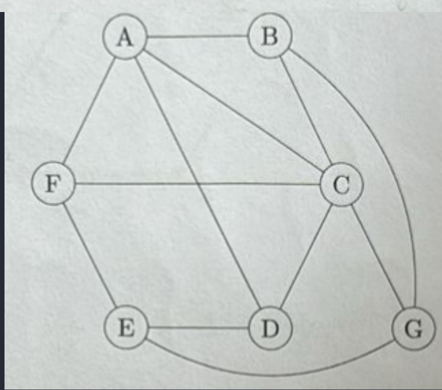
- Para quais arestas e do grafo, diminuir o peso de e em 0.1, altera o valor de s?
- Para quais arestas e do grafo, aumentar o peso de e em 0.1, altera o valor de s?

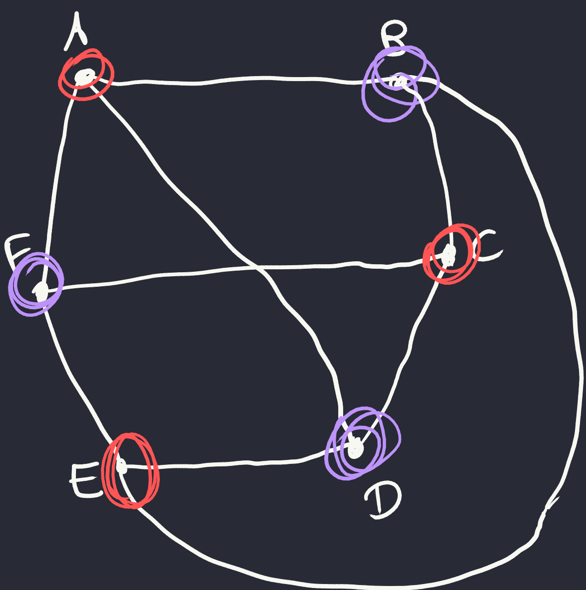


• {H, I}

• {A, C}, {C, F}, {F, H},
{A, B}, {B, D}, {D, H},

Exercício 4 (1,5 pontos) Determine se o seguinte grafo é planar:





Removo:
{A, C}
{C, G}

Reduzo em série:
G

↪ Homeomorfo a $K_{3,3}$

Exercício 5 (3 pontos) Determine e justifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. São as justificativas que contam pontos.

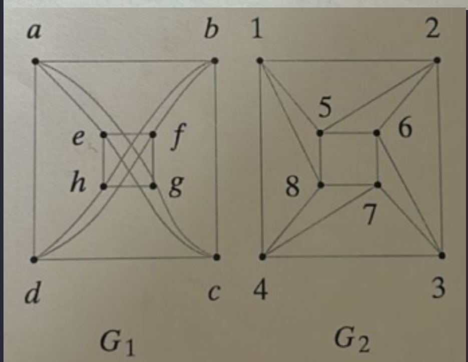
(a) Sejam A a matriz de adjacência de K_5 e n um inteiro positivo. Então, todos os elementos da diagonal de A^n são iguais entre sí, e todos os elementos de fora da diagonal também.

Verdade. Como todos os vértices ligam entre si, um caminho de tamanho n de v_i a v_k pode ter os vértices permutados pois sempre há uma aresta que liga v_j e v_p. Logo, $\forall v \in V$, $\exists$ mesma quantidade de caminhos de tamanho n de v para qualquer outro vértice.

(b) Todo grafo bipartido completo $K_{n,m}$ com $n \geq 1$ e $m \geq 1$ ímpares, possui um ciclo euleriano.

Não, se m possui $2k+1$ vértices, $\forall v \in V_n$ (Conjunto de n vértices), $\delta(v) = 2k+1$, logo não há ciclo euleriano (grau ímpar).

(c) O seguintes grafos são isomorfos:



Não, em G_2 existe uma triangulação, ou seja, existe ciclos de tamanho 3. Agora em G_1, não existe vértice com essa característica