Exercício 1 - A Integral Imprópria

Seja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, com $a > 0$, tal que $\int\limits_a^\infty f(t)dt$ existe. Mostre que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\alpha > a$ tal que se $x, y > \alpha$, então

$$\left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon$$

Exercício 2 - O Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $\alpha, \beta : I \to [a, b]$ deriváveis, com I sendo um intervalo aberto. Pondo $g : I \to \mathbb{R}$ como $g(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$, mostre que g é derivável e calcule sua derivada.

Seja agora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua positiva. Mostre que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^{g(y)} f(t)dt = y$$

Exercício 3 - A Integração por Partes

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável, com derivada integrável. Então, mostre que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) + \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f'(x)dx$$

Exercício 4 - Funções Periódicas

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $a > 0$ tal que $f(x + a) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\int_c^d f(t + a)dt = \int_{c+a}^{d+a} f(t)dt$$

Exercício 5 - Euler-Mascaroni

Alexor, amigo de Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-Vanato, Cardineiro, Borges, Rodrigues, Benzo, Daviros, Beatriza, Severo, Jeã e Luka, estava estudando integrais e foi-lhe apresentado a definição da função logaritmo de base e $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Ele sabia que $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = +\infty$ e sabia também que a série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (que representa a área de blocos retangulares que fornecem uma aproximação por cima do gráfico de $f(x) = 1/x$) também era $+\infty$. Mas, ele se perguntou se ao subtrair esses dois infinitos, o resultado poderia ser um número finito. Ele considerou então a sequência

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n$$

Mostre que (x_n) converge.

Comentário: Este número é conhecido como *a constante γ de Euler-Mascaroni*, que tem valor aproximado em 0.5772. Não se sabe se este número é racional ou irracional, sendo portanto um problema em aberto.

1 Faça $L = \int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{x \to \infty} \int_a^x f(t)dt$

Logo, pela definição de limite, $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > a$ t.q
$x > \alpha \Rightarrow \left| \int_a^x f(t)dt - L \right| < \varepsilon/2$

Além disso, se $x, y > \alpha$, então:

$$\left| \int_x^y f(t)dt \right| = \left| \int_x^a f(t)dt + \int_a^y f(t)dt \right| = \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right|$$

$$= \left| \left(\int_a^y f(t)dt - L \right) + \left(L - \int_a^x f(t)dt \right) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_a^y f(t)dt - L \right| + \left| \int_a^x f(t)dt - L \right|$$ (Desigualdade triangular)

$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ e

$\left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon$.

Desigualdade Triangular

(2) I) $$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = \int_{0}^{\beta(x)} f(t)\,dt - \int_{0}^{\alpha(x)} f(t)\,dt = g(x)$$

↳ poderia outra constante

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pela regra da cadeia:

$$g'(x) = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$

Como $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta: I \to [a,b]$, ambas contínuas, então $\exists\, f\circ\alpha, f\circ\beta: I \to \mathbb{R}$ (esquema da composição de funções). Além disso, $\exists \alpha', \beta'$. Logo, $\exists\, g'(x)$ e $g(x) = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x)$.

II) Defina $h(y) := \int_0^y f(t)\,dt$. Pelo teorema Fundamental do cálculo, $h'(y) = f(y)$. Assim, $h'(y)$ é contínua e positiva, logo $h(y)$ é crescente para todo $y \in \mathbb{R}$.

Como h é derivável pelo TFC, então h é contínua. Como h é crescente, então h é bijetiva, logo $\exists h^{-1}$.

Como $h(y) = \int_0^y f(t)\,dt$, então $h(g(y)) = \int_0^{g(y)} f(t)\,dt = y$. Basta tomar $g(y) = h^{-1}(y)$, uma vez que $h\circ h^{-1} = h^{-1}\circ h = y$ (identidade)

Esquema:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "f \circ \alpha"'] & {[a,b]} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

TFC:

③ $\int_a^b \left[f(x) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) \right] dx$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) \right] dx$

Integrando por partes e usando o TFC:

$= \int_a^b f(x)\,dx + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,dx$

$= \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) \Big|_a^b = \frac{b-a}{2} f(b) + \frac{b-a}{2} f(a)$

$= \left(\frac{b-a}{2}\right)(f(a) + f(b))$

$\therefore \frac{\cancel{2}}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{\cancel{b-a}}{\cancel{2}}(f(a)+f(b)) = f(a) + f(b).$

Integração por partes:

(4) $\displaystyle\int_c^d f(t)\,dt = \int_c^d f(a+t)\,dt.$

Fazendo $u = a+t$, temos $du = dt$ e $u(c) = c+a$ e $u(d) = d+a$. Logo,

passo voltar a variável

$$\int_c^d f(t)\,dt = \int_c^d f(a+t)\,dt = \int_{u(c)}^{u(d)} f(u)\,du = \int_{c+a}^{d+a} f(t)\,dt$$

(5) Tome a seguinte partição: $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Assim, sabemos que $S(1/x, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} 1/j$. Logo,

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{x}\, dx \leq S(1/x, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

e $(1 + 1/2 + \cdots + 1/n) \geq \log n$. Logo, $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Agora, vamos comparar os termos de x_n.

$$x_{n+1} \geq x_n : \quad \sum_{j=1}^{n} 1/j + 1/n{+}1 - \log(n+1) \geq \sum_{j=1}^{n} 1/j - \log n$$

$$1/n{+}1 \geq \log(1 + 1/n),$$

Tome a seguinte função $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

Fazendo $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$, para $x > 0$, sabemos que

$f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$ (domínio de f). Assim f é
crescente para $x > 0$.

Como $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x+1} - \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right) = 0 - \log 1 = 0$, então

sabemos que $f(x) \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$. Assim, retornando à sequência, sabemos que $x_{n+1} \leq x_n$. Logo, x_n é decrescente e limitada inferiormente, assim, x_n é convergente.