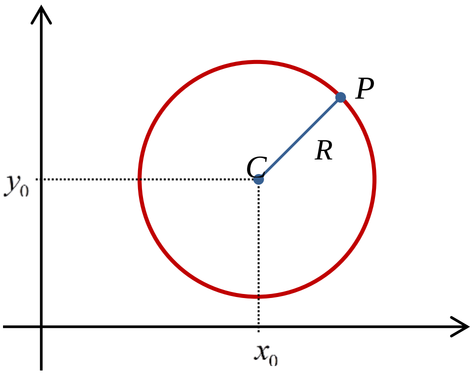
Circunferência

Depois de muitas aulas sobre vetores e retas chega a vez da circunferência. Sua equação é muito fácil e, provavelmente, você já a conhece desde a escola.

Equação da circunferência

Uma circunferência fica definida quando conhecemos a posição do seu centro e o valor do raio. No desenho abaixo vemos a circunferência de centro $C=(x_0,\ y_0)$ e raio R.



Se $P=(x,\ y)$ é um ponto qualquer da circunferência então a distância entre C e P é igual a R. Assim, se $CP=R$ então $CP^2=R^2$, ou seja,

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

Esta é a equação reduzida da circunferência de centro $C=(x_0,\ y_0)$ e raio R.

Por exemplo, a equação da circunferência de centro $C=(2,\ 3)$ e raio 4 é $(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$. Pois bem, esta equação pode ser desenvolvida e tomará uma forma um pouco diferente.

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$$
$$x^2-4x+4+y^2-6y+9=16$$
$$x^2+y^2-4x-6y-3=0$$

Esta equação, representa a mesma circunferência de centro $C=(2,\ 3)$ e raio 4. Ela se chama, naturalmente, equação *desenvolvida* da circunferência. Todo ponto (x,y) cujas coordenadas satisfazem essa equação, pertence a essa circunferência.

O problema básico é fazer o inverso; dada a equação da circunferência, determinar o centro e o raio. Vamos fazer isso a seguir completando os quadrados, Observe:

Exemplo

Determinar o centro e o raio da circunferência $x^2+y^2-8x+10y-8=0$.

Solução

Inicialmente, reunimos os termos em cada uma das variáveis e criamos dois espaços para introduzir os números que completam cada quadrado:

$$x^2-8x+\quad+y^2+10y+\quad=8+\quad+\quad.$$

Vamos descobrir os números que completam os quadrados e acrescentá-los tanto de um lado quanto do outro da equação. Ficamos com

$$x^2-8x+\mathbf{16}+y^2+10y+\mathbf{25}=8+\mathbf{16}+\mathbf{25}$$
$$(x-4)^2+(y+5)^2=49$$

Portanto, essa equação tem centro $C = (4, -5)$ e raio $R = 7$.

Vou pedir agora que você repita esse processo no caso geral.

Exercício (para fazer agora)
Determine o centro e o raio da circunferência $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

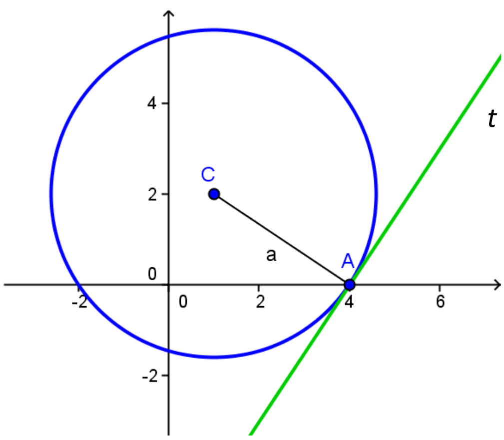
Resposta: $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$. $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$, com $a^2 + b^2 > 4c$.

Observe que se $a^2 + b^2 = 4c$ a equação dada representa apenas um ponto e, se $a^2 + b^2 < 4c$ a equação dada nada representa.
Passamos, a seguir a examinar quando uma reta é tangente a uma circunferência.

Tangente a uma circunferência

Exemplo
Uma circunferência tem centro no ponto $C = (1, 2)$ e passa pelo ponto $A = (4, 0)$. Determine a equação da reta tangente a essa circunferência no ponto *A*.

Solução:
Podemos observar a situação do exemplo na figura ao lado.



Não há necessidade de encontrarmos a equação da circunferência. A reta tangente passa pelo ponto *A* e é perpendicular ao raio *CA*.
O coeficiente angular da reta *CA* é:

$$m_{CA} = \frac{0-2}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

Logo, o coeficiente angular da tangente t é $m_t = \frac{3}{2}$.

Assim, como a reta t passa pelo ponto $A = (4, 0)$ e tem este coeficiente angular, sua equação é:

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 4)$$

Ou seja, $3x - 2y = 12$.

Obs

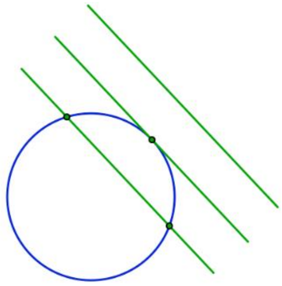
Se uma reta passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem coeficiente angular m então

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

Logo, a equação dessa reta é $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Veja, a seguir, as posições relativas entre uma reta e uma circunferência.

Uma reta é *secante* a uma circunferência quando há dois pontos de interseção, é *tangente* à circunferência quando há apenas um ponto comum ou é *exterior* à circunferência quando não há nenhum ponto em comum. Vamos ver a seguir como se determina a interseção entre uma reta e uma circunferência.



Exemplo
Considere a reta r cuja equação é $x - 2y + 5 = 0$ e a circunferência C cuja equação é $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$. Determine $r \cap C$.

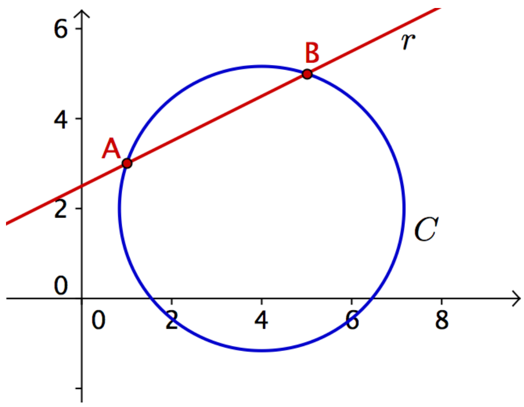
Solução
Devemos buscar os pontos que satisfazem às duas equações. Como uma equação é do primeiro grau e a outra do segundo grau, só há um jeito: isolar uma das incógnitas da equação mais simples e fazer a substituição na outra. Acompanhe:

$$x = 2y - 5$$
$$(2y - 5)^2 + y^2 - 8(2y - 5) - 4y + 10 = 0$$
$$4y^2 - 20y + 25 + y^2 - 16y + 40 - 4y + 10 = 0$$
$$5y^2 - 40y + 75 = 0$$
$$y^2 - 8y + 15 = 0$$

Resolvendo essa equação encontramos as raízes 3 e 5. Substituindo cada um desses valores na equação da reta temos:

$y_1 = 3 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1$
$y_2 = 5 \quad \rightarrow \quad x_2 = 5$

Os pontos de interseção são, portanto, $A = (1, 3)$ e $B = (5, 5)$.
A figura ao lado mostra a situação real do que calculamos.



Observação:
Na tentativa de determinação dos pontos comuns entre uma reta e uma circunferência chegaremos, inevitavelmente, a uma equação do segundo grau. Essa equação poderá ter duas raízes, uma raiz ou nenhuma raiz real, o que corresponde a cada uma das posições relativas entre a reta e a circunferência: secante, tangente e exterior.

Uma outra forma de determinar a posição relativa entre uma reta e uma circunferência é a de calcular a distância do centro da circunferência à reta. Se essa distância for menor que o raio a reta é secante, se for igual ao raio a reta é tangente e, se for maior que o raio, a reta é exterior –a circunferência. Vamos recordar a fórmula da distância de um ponto a uma reta e resolver um problema logo a seguir.

Distância do ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ à reta de equação $ax + by + c = 0$. $$d = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Problema

Determine para que valores de k a reta de equação $y = -2x + k$ é tangente à circunferência de equação $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$.

Solução:

A equação da reta dada na forma geral é $2x + y - k = 0$. O centro da circunferência é $C = (1, 2)$ e o raio é $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

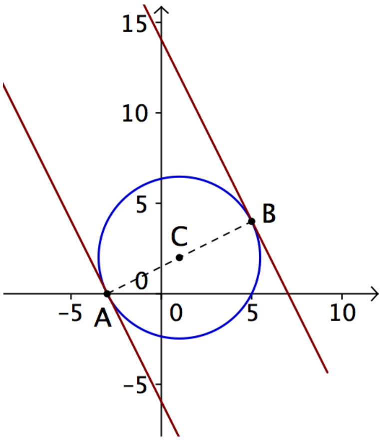
Como a distância do centro da circunferência à reta deve ser igual ao raio devemos ter:

$\frac{|2 \cdot 1 + 2 - k|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 2\sqrt{5}$

Assim, $|4 - k| = 10$ e há dois casos a considerar:

a) $4 - k = 10 \quad \Longrightarrow \quad k = -6$.

b) $4 - k = -10 \quad \Longrightarrow \quad k = 14$.



A figura ao lado mostra a situação que calculamos.

Observe a figura. Veja os valores de k no eixo Y. A pergunta natural é como determinar os pontos de tangência A e B. Uma forma é determinar a interseção de cada uma das retas com a circunferência. Por exemplo, para determinar o ponto A vamos obter a interseção da reta $y = -2x - 6$ com a circunferência dada.

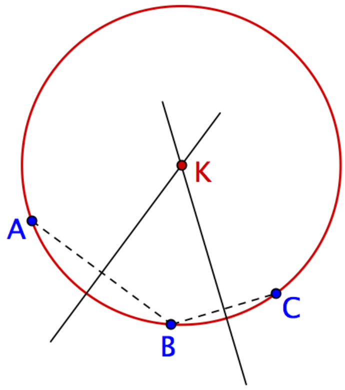
Fazendo a substituição temos:

$$(x-1)^2 + (-2x - 6 \ - 2)^2 = 20$$
$$(x-1)^2 + (-2x - 8)^2 = 20$$
$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 32x + 64 - 20 = 0$$
$$5x^2 + 30x + 45 = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$(x+3)^2 = 0$$
$$x = -3$$

Na equação da reta $y = -2x - 6$, se $x = -3$ temos $y = 0$ e um dos pontos de tangência é $A = (-3, 0)$ que está bem visível na figura. O ponto B é o simétrico de A em relação ao centro. Portanto, $B = (5, 4)$.

Quando estudamos a equação da reta, um dos primeiros problemas que abordamos foi o de determinar a equação da reta que passa por dois pontos dados. Vamos agora abordar o problema de encontrar a equação da circunferência que passa por três pontos, não colineares, dados.

Circunferência por três pontos



Por três pontos não colineares passa uma, e somente uma, circunferência. Dados os pontos não colineares A, B e C, o ponto K, centro da circunferência que passa por esses três pontos é equidistante desses pontos. Se $KA = KB$ então K está na mediatriz do segmento AB e, se $KB = KC$ então K está na mediatriz do segmento BC. Assim, K é o ponto de interseção das duas mediatrizes. A figura ao lado mostra o que dissemos.

a) Utilizando esse conceito, dados os pontos A, B e C, determinamos as mediatrizes de AB e BC, por exemplo e sua interseção, o ponto K, centro da circunferência que passa por A, B e C. Em seguida, calculamos a distância de K a qualquer um dos pontos dados, e obtemos o valor do raio da circunferência. A circunferência está determinada e sua equação pode ser obtida.

b) Outra forma é perceber que a equação que queremos encontrar tem a forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e ela deve ser satisfeita para os três pondos dados. No exemplo a seguir mostramos a eficiência desse procedimento.

Exemplo

Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos $A = (3,1)$, $B = (8,2)$ e $C = (2,6)$.

Solução:

Desejamos encontrar uma equação do tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ que seja satisfeita pelos três pontos dados. Fazemos então as substituições:

A: $3^2 + 1^2 + a \cdot 3 + b \cdot 1 + c = 0$

B: $8^2 + 2^2 + a \cdot 8 + b \cdot 2 + c = 0$

A: $2^2 + 6^2 + a \cdot 2 + b \cdot 6 + c = 0$

Arrumando,

$$E_1: \quad 3a + b + c = -10$$
$$E_2: \quad 8a + 2b + c = -68$$
$$E_3: \quad 2a + 6b + c = -40$$

Vamos agora fazer duas diferenças:

$$E_1 - E_2: \quad a - 5b = 30$$
$$E_2 - E_1: \quad 5a + b = -58$$

Resolvendo esse sistema encontramos $a = -10$ e $b = -8$ e, substituindo esses valores em E_1, por exemplo, encontramos $c = 28$.

A equação da circunferência que passa pelos pontos $A = (3,1)$, $B = (8,2)$ e $C = (2,6)$ é, portanto, $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 28 = 0$.

Interseção de circunferências

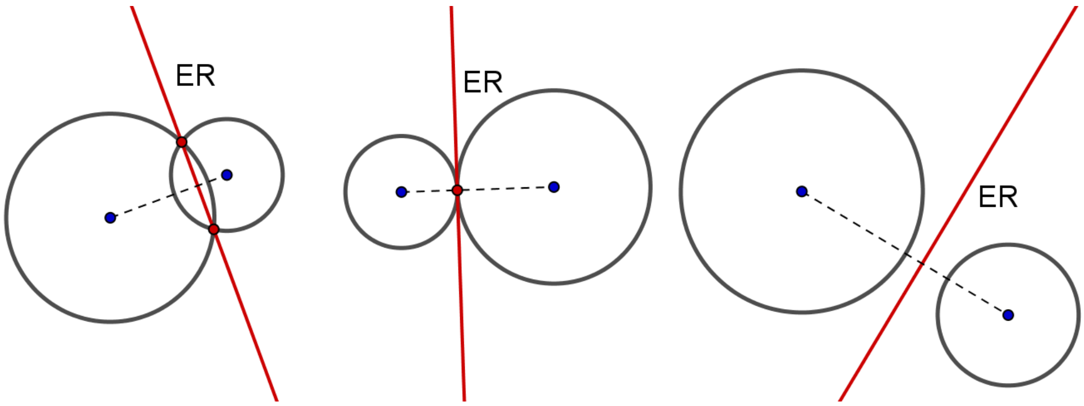
A interseção de duas circunferências dadas é, naturalmente, o conjunto formado pelos seus pontos comuns, ou seja, pelo conjunto solução do sistema formado por suas equações. Entretanto, como resolver um sistema como o abaixo?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

O truque é, inicialmente, obter uma nova equação subtraindo as equações dadas:

$$(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + c_2 - c_1 = 0$$

Essa equação representa uma reta. Todo ponto que for comum às duas circunferências pertence também a essa reta que se chama *eixo radical* (ER) das duas circunferências. Você poderá provar que essa reta é perpendicular à reta que contém os centros das circunferências.



Devemos então obter a interseção desse eixo radical com uma das circunferências. Faremos isso juntos no exemplo a seguir.

Exemplo
Sejam C_1: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ e C_2: $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$.
Determine $C_1 \cap C_2$.

Solução
Com a dica acima, construímos a equação $ER = C_1 - C_2$: $-12x - 6y + 12 = 0$, ou seja, $2x + y = 2$.

Vamos, então, encontrar $ER \cap C_1$ resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Não é difícil. Na equação mais simples, vamos isolar uma das letras e fazer a substituição na outra equação.

$$y = 2 - 2x$$

$$x^2 + (2 - 2x)^2 + 4x - 2(2 - 2x) - 5 = 0$$

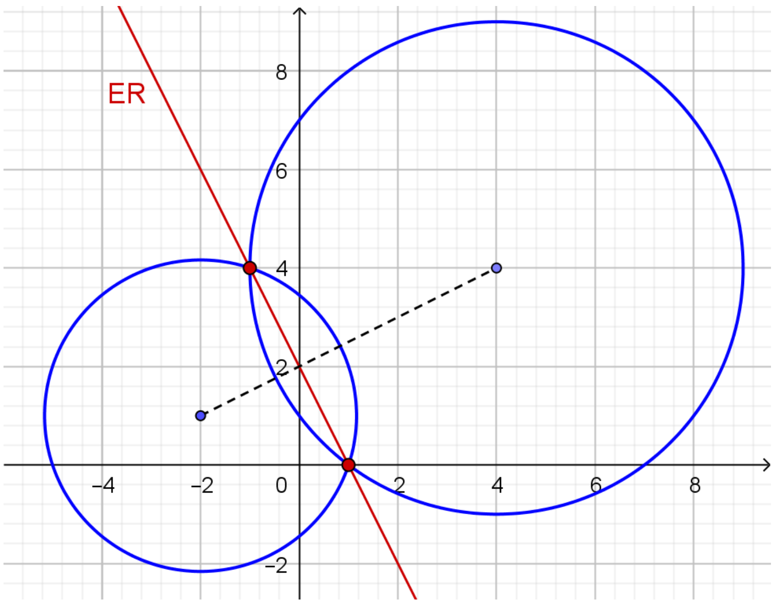
Resolvendo essa última equação chegamos a $x = \pm 1$. Observando a primeira equação temos que

$x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = 4$

Portanto, $C_1 \cap C_2 = \{(1, 0), (-1, 4)\}$

A figura a seguir mostra exatamente o que calculamos.



Exercícios

A Lista 4 já está disponível com os exercícios de circunferência.
Na próxima aula enviarei as soluções de alguns exercícios, mas não todos. Prefiro que vocês tentem antes.

Boa semana e bom trabalho. Escrevam se precisarem de algo: eduardo.wagner@fgv;br