Exercício 1 - Zeros Infinitos

Seja $a > 0$ e $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $p(x)p(x+a) \leq 0, \forall x \in \mathbb{Z}$. Mostre que p é um polinômio se, e somente se, $p \equiv 0$.

Dê um exemplo de função contínua p que satisfaz a condição dada para algum $a > 0$ e não é constante.

Exercício 2 - Os Hiperbólicos

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que

$$f'(x) = g(x), g'(x) = f(x), f(0) = 0, g(0) = 1 \text{ e } g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Mostre que $f(x)\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) - g(x)\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$

(b) Mostre que $f(x)\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - g(x)\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Conclua que $f(x) = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$ e $g(x) = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$.

Exercício 3 - Convexidade

Seja f uma função duas vezes derivável, com f'' contínua, definida no intervalo $[0, 1]$. Sabe-se que

- $f(0) > 0$
- $f(1) < 0$
- f é côncava para cima (ou convexa), isto é, $f''(x) > 0$ para todo $x \in (0, 1)$

Mostre que f cruza o eixo x exatamente uma vez no intervalo $[0, 1]$.

Exercício 4 - Raízes de Polinômios

Todo polinômio com coeficientes reais tem exatamente n raízes complexas. Sei que você viu isso em aula. Mas sabe refazer a demonstração?

Exercício 5 - L'Hôspital e Taylor

duas vezes

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável tal que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. Mostre que $f''(0) = 0$.

Exercício 6 - Taxas de Variação II

Benzo, um estudante exemplar, em suas primeiras aulas de Análise já estava um pouco adiantado na matéria e estudava sobre a derivada de uma função. Ele sabia que se f é derivável, então

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Mas, querendo dar um passo além, supôs que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes derivável, então

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h}$$

Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-vanato, Cardineiro, Borges e Rodrigues, seus amigos, querem saber se ele está certo. Ajude-os.

1 Temos que $p(0)p(a) \leq 0$, $p(a)p(2a) \leq 0$, $p(2a)p(3a) \leq 0$, ..., $p((n-1)a)p(na) \leq 0$, ...

Supondo, $p(0) \leq 0$, então $p(a) \geq 0$, $p(2a) \leq 0$, $p(3a) \geq 0$ e assim por diante.

Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, em cada um dos intervalos

$[0,a], [a,2a], \ldots, [(n-1)a, na], \ldots$

deveríamos ter uma raiz para p, ou seja, p teria infinitas raízes e $p \equiv 0$.

- Um exemplo seria $\operatorname{sen} x = p(x)$ e $a = \pi$.

$\boxed{\text{TVI: se } f \text{ é contínua em } [a,b] \text{ e } L \text{ está entre } f(a), f(b) \text{ (exclusives), então existe } c \in [a,b] \mid f(c) = L.}$

(2) Defina $\Psi(x) = f(x)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) - g(x)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

e $\varphi(x) = f(x)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - g(x)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

a) Analisando $\Psi'(x)$:

$$\Psi'(x) = f'(x)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) + f(x)\cdot\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - g'(x)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - g(x)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$\Psi'(x) = g(x)\cancel{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)} + g'(x)\cancel{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)} - g'(x)\cancel{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)} - g(x)\cancel{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)}$$

$$\Psi'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\Psi(x)$ é constante $\forall x \in \mathbb{R}$.
Como $\Psi(0) = -1$, então $\Psi(x) = -1$

Logo, $f(x)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) - g(x)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) Análogo para $\varphi(x)$.

c) Temos que

$$\begin{cases} f(x)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) - g(x)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = -1 \\ f(x)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - g(x)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \quad , \quad g(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$$

(3) Como $f(0)>0$ e $f(1)<0$ e f é contínua em $[0,1]$, então pelo teorema do valor intermediário, $\exists c \in [0,1] \mid f(c)=0$. Portanto, f possui uma raiz, ou seja, corta o eixo x.

Queremos provar que tal c é único.

Suponha por absurdo que $\exists d \neq c \in [0,1]$ t.q. $f(d)=0$. Também suponha, sem perda de generalidade que $0<c<d<1$

Logo, pelo teorema de Rolle, $\exists x_1 \in (c,d)$ t.q $f'(x_1)=0$

Pelo teorema do valor Médio, $\exists x_2 \in (d,1)$ t.q $f'(x_2) = \frac{f(1)-f(d)}{1-d} = \frac{f(1)}{1-d} < 0$ $(f(1)<0,\ 1-d>0)$

Pelo teorema do valor médio, $\exists s \in (x_1,x_2)$ t.q $f''(s) = \frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} < 0$ $(f'(x_2)<0,\ f'(x_1)=0,\ x_2-x_1>0)$ o que é um absurdo, pois $f''(x)>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, $f(x)$ possui exatamente uma raiz em $[0,1]$ e, por consequência, corta o eixo x uma única vez.

(4) Vamos provar por indução.

Quando $n=1$, o polinômio pode ser escrito como $p(x)=\alpha x+\beta$, que possui uma raiz.

Agora, suponha verdade que todo polinômio de grau n tem até n raízes.

Queremos verificar se tal hipótese funciona para polinômios de grau $n+1$. Suponha que esse polinômio tenha, pelo menos, $n+2$ raízes $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} < a_{n+2}$. Portanto, pelo teorema de Rolle, $\exists\, k_i \in (a_{i-1}, a_i)\ \forall i = \{2, \dots, n+2\}$ t.q $p'(k_i)=0$ e $p'(x)$ teria no mínimo $n+1$ raízes, o que é um absurdo, já que o grau de $p'(x)$ é n.

Logo, um polinômio de grau n tem no máximo n raízes.

(5) Como f é derivável, então ela é contínua em $\mathbb{R}$

Sabemos que f é derivável em $\mathbb{R}$. Logo, $\forall y \in \mathbb{R}$
$\exists \lim_{x \to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = L$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \mid |f(x)-f(y)| < \varepsilon \Rightarrow |x-y| < \delta$.
Portanto, f é contínua.

Assim, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- Sabemos que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. Se $\lim_{x \to 0} f(x)$ fosse ilimitada, então $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \pm\infty$ (dependendo de $\lim_{x \to 0} f(x)$).

- Se $\lim_{x \to 0} f(x) = K$ (constante real diferente de 0), então $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x^2} = \pm\infty$ (dependendo do sinal de K)

- Logo, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Sem usar Taylor: Como $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, e f, x^2 são diferenciáveis, então

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x}$$ (L'Hospital - provado na lista 5).

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0)}{h} = 0.$$

Como f é duas vezes derivável, então f' é contínua e $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$.

Pela definição de $f''(0)$: $f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$

e $f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x}$. Logo, $0 = \frac{f''(0)}{2} \Rightarrow \boxed{f''(0) = 0}$.

Usando Taylor: $f(0) = f'(0) = 0$

Sabemos que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + r(x), \quad \lim_{x\to 0} \frac{r(x)}{x} = 0.$$

Logo, $$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{x^2} + \frac{f'(0).x}{x^2} + \frac{f''(0).x^2}{2x^2} + \frac{r(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\cancel{\frac{f(0)}{x^2}}^{0} + \cancel{\frac{f'(0)}{x}}^{0} + \frac{f''(0)}{2} + \cancel{\frac{r(x)}{x^2}}^{0} \right) = 0$$

e $0 = \lim_{x \to 0} f''(0)$ e $\boxed{f''(0) = 0}$,

ⓑ Vamos usar Taylor duas vezes:

$(x-a=h)$ $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)h^2}{2} + r(h)$, $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$

$(x-a=-h)$ $f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} + s(h)$, $\lim_{h \to 0} \frac{s(h)}{h} = 0$

Logo, $f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = f''(a)h^2 + r(h) + s(h)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \left(f''(a) + \frac{r(h)}{h^2} + \frac{s(h)}{h^2} \right)$$

$$\boxed{\text{e } f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}}$$