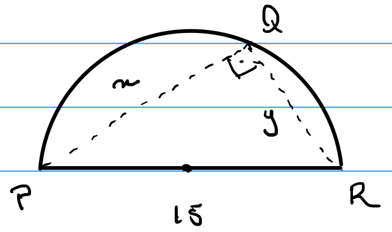
APLICAÇÕES DA DERIVADA.

Máximos e Mínimos:

Um Δ PQR está inscrito num semicírculo de diâmetro 15 cm conforme a figura.

Sabendo que o vértice Q varia sobre o semicírculo em 1 cm/s, determine a taxa com que a área de Δ varia no instante em que QR mede 12 cm.



Área $\Delta = \dfrac{xy}{2}$; $\overline{PQ} = x = x(t)$; $\overline{QR} = y = y(t)$.

$A(t) = x(t)\, y(t)$

Sabemos: $\begin{cases} y(t_0) = 12\,\text{cm} \\ y'(t_0) = 1\,\text{cm/s} \\ x^2 + y^2 = 15^2. \end{cases}$

Queremos $\dfrac{dA}{dt}(t_0)$

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{1}{2}\left(x'(t)\, y(t) + y'(t)\, x(t)\right).$$

Derive em t_0

$x^2(t) = 15^2 - (y(t))^2$

$2x.x' + 2yy' = 0$

$x' = -yy'/x \Rightarrow -12.1/9 =$

$x'(t_0) = -4/3.$

$x(t_0)^2 = 225 - 144.$

$\boxed{x(t_0) = 9}$.

$x'(t_0) = -2.12.1 = -24$

$$\frac{dA}{dt}(t_0) = \frac{1}{2}\left(x'(t_0)\, y(t_0) + y'(t_0)\, x(t_0)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(-\frac{4}{\cancel{3}}\right)_{cm/s} \cdot \cancel{12}^{\,4\ cm} + 1 \cdot 9 \right) = \frac{1}{2}\left(-16 + 9\right) = \frac{1}{2}(-7)$$

$$\boxed{= -\frac{7}{2}\ cm^2/s}$$

Valor máximo de uma função:

$f: D \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x)$

<u>Def</u>: $f(x_1)$ é o valor máximo de f em D se $f(x_1) \geq f(x)$ $\forall x \in D$.

Valor mínimo de uma função:

$f: D \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x)$

<u>Def</u>: $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em D se $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in D$.

Ex 2): $g: \mathbb{R} - \mathbb{R}$; $g(x) = tg\,x = \dfrac{sen\,x}{cos\,x}$

$g(x)$ não possui máximo e nem mínimo em $\mathbb{R}$.

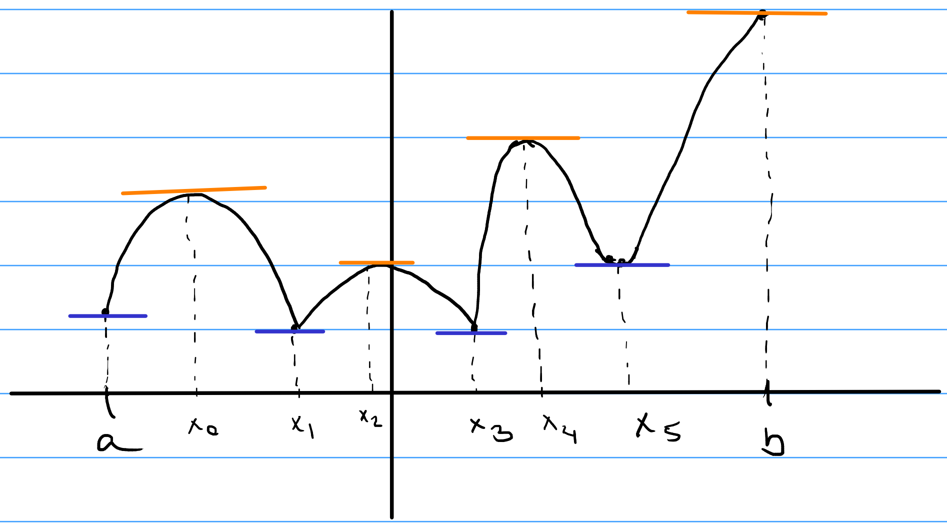
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} = -\infty$

$Img = (-\infty, \infty)$.

Ex 3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$

$\therefore$ Im $f = [0, \infty)$.

0 é o valor mínimo de f, mas f não possui máximo.



Do gráfico, $f(x_1) = f(x_3)$ são mínimos absolutos e $f(b)$ é máximo absoluto.

Domínio: $[a, b]$.

Máximos e mínimos Locais

<u>Def</u>: $f(x_1)$ é valor mínimo local de $f(x)$ se $f(x_1) \leq f(x)$, para todo $x_1 - r \leq x \leq x_1 + r$, isto é $f(x_1) \leq f(x)$ em uma vizinhança de x_1 $(x_1 \in D)$.

<u>Def</u>: $f(x_2)$ é valor máximo local de $f(x)$ se $f(x_2) \geq f(x)$, para uma vizinhança de x_2 $(x_2 \in D)$.

OBS: Extremidades não pode ser mínimo ou máximo local (a vizinhança não existiria)

Teorema de Valores Extremos:

(Teorema de Weierstrass).

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua (domínio limitado e fechado). Então existem $x_0, x_1 \in [a,b]$ tais que $f(x_0)$ = valor mínimo absoluto e $f(x_1)$ = valor máximo absoluto, ambos em $[a,b]$

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$