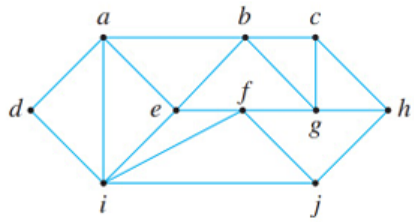
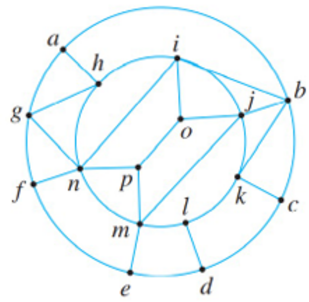
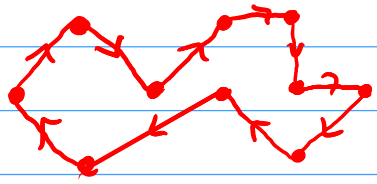
Exercício 1 Encontre um ciclo hamiltoniano em cada grafo abaixo:

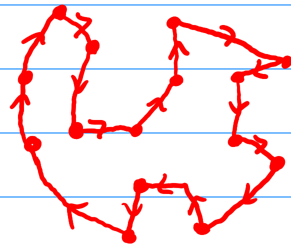
(a)



(b)

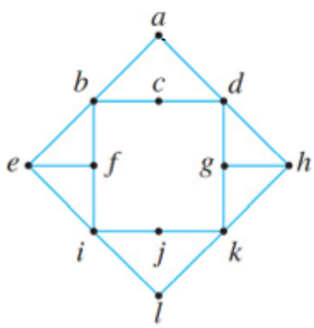




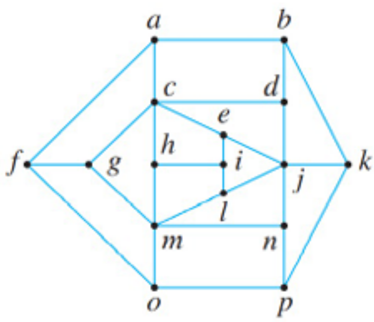


Exercício 2 Mostre que nenhum dos grafos a seguir contém um ciclo hamiltoniano

(a)



(b)



Teorema: Seja C um ciclo Hamiltoniano do grafo G. Então C, considerado como subgrafo, todos os vértices têm grau igual a 2.

Teorema de Ore:

Se $G=(V,E)$ é um grafo simples, com $n \geq 3$ vértices que satisfaz $\delta(v)+\delta(w) \geq n$ para todo par de vértices não adjacentes v, w, então G é Hamiltoniano

Teorema de Dirac

Se $G=(V,E)$ é um grafo simples) com $n \geq 3$ vértices e $\delta(v) \geq n/2$, $\forall v \in V$ então G é Hamiltoniano.

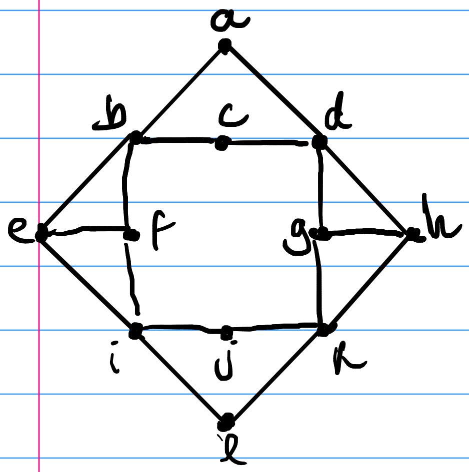
Teorema:

Se $G=(V,E)$ é Hamiltoniano, então $\forall S \subseteq V$, não vazio, o subgrafo de G obtido removendo os vértices de S possui no máximo $|S|$ componentes conexas

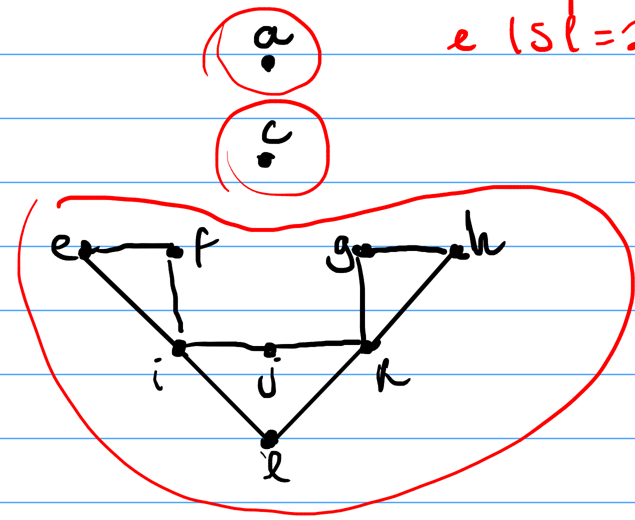
Lembre-se: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$.

Para responder as questões vamos usar o último teorema pois ele é da forma GH ⇒ condição ∴ ~condição ⇒ ~GH!

a) Escolha $S = \{b, d\}$

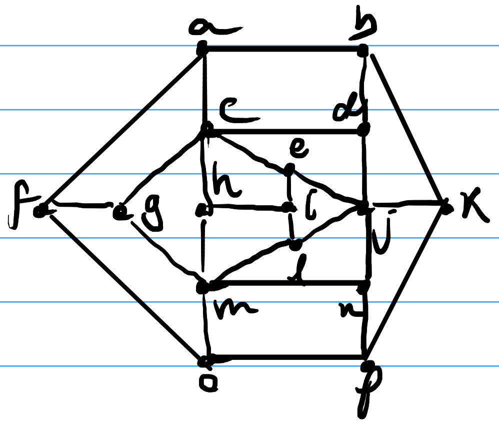


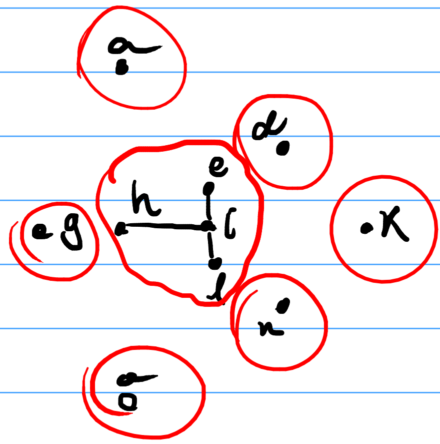
$\Rightarrow$



3 componentes e $|S| = 2$.

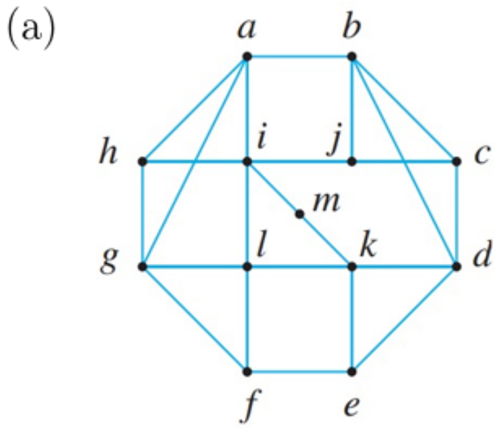
b) Escolha $S = \{b, c, f, j, m, p\}$

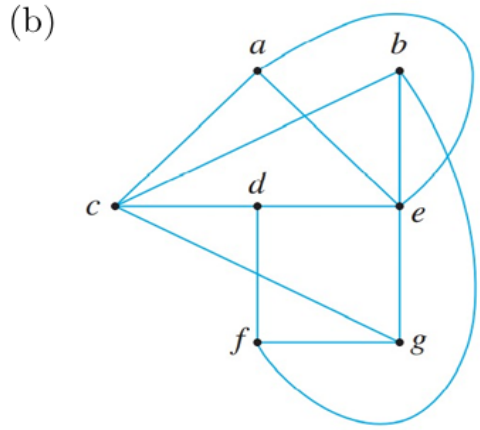


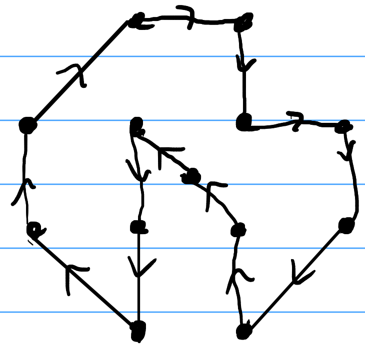


7 componentes, mas $|S| = 6$.

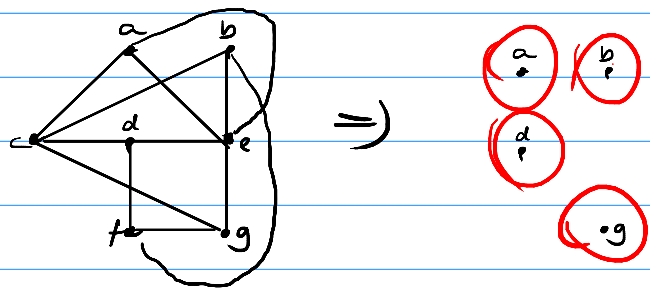
Exercício 3 Determine se cada grafo a seguir contém um ciclo hamiltoniano ou não. Se existir um ciclo hamiltoniano, exiba-o. Caso contrário, dê um argumento que prove que não existe um ciclo hamiltoniano.





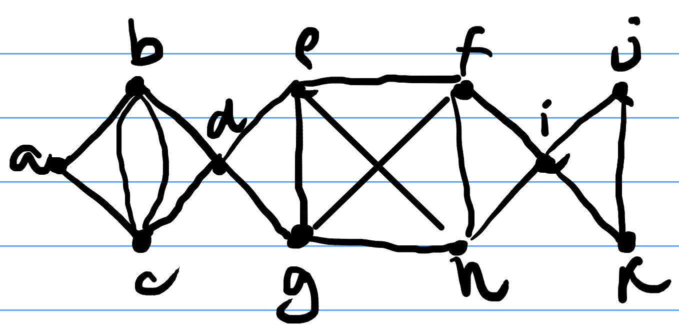


Escolha $S=\{c, e, f\}$



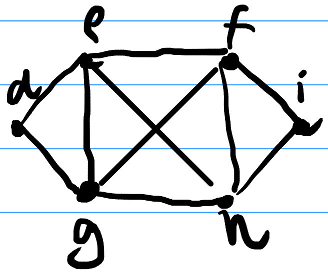
Exercício 4 Dê um exemplo de um grafo que tem um ciclo euleriano mas não contém um ciclo hamiltoniano.

Ciclo Euleriano: ciclo que contém todas as arestas uma única vez.

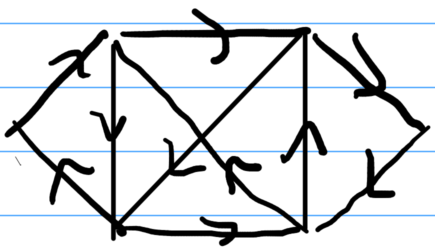


Para ver que não possui ciclo Hamiltoniano, tome $S=\{i\}$.

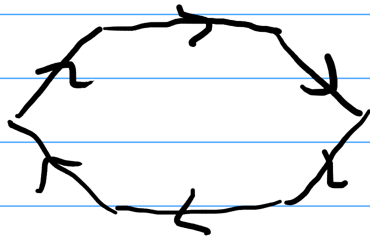
Exercício 5 Dê um exemplo de um grafo que tem um ciclo euleriano e um ciclo hamiltoniano que não são idênticos.



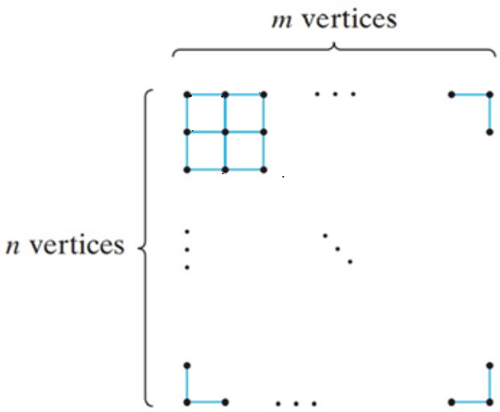
Euleriano:



Hamiltoniano:

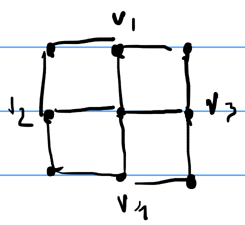


Exercício 6 Para que valores de m e n o grafo do **Exercício 7** da **Lista 2** contém um ciclo hamiltoniano?



$n = 1$ e	$m \in \mathbb{N}$
$m = 1$ e	$n \in \mathbb{N}$

Para casos diferentes, temos a seguinte estrutura:



Ao tirar v_1, v_2, v_3, v_4, temos 5 componentes conexas, o que contradiz a condição suficiente para grafos Hamiltonianos.

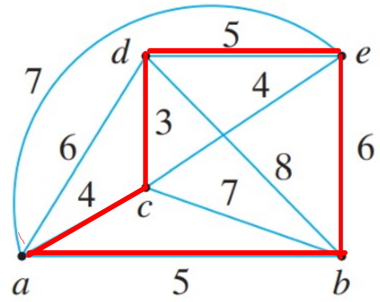
Exercício 7 Quando o grafo bipartido completo $K_{m,n}$ contém um ciclo hamiltoniano?

Só terá um grafo hamiltoniano quando $m=n$, mas $m=n\neq 1$.

I) Se $m\neq n$, iríamos contrariar a condição necessária de Grafos Hamiltonianos

II) Como $K_{n,m}$ é regular, todos os graus são iguais, isso satisfaz as condições suficientes de Grafo Hamiltoniano (teorema de Ore e Dirac).

Exercício 8 Mostre que o ciclo (e, b, a, c, d, e) é uma solução para o Problema do Caixeiro Viajante para o grafo a seguir:



Problema do Caixeiro Viajante: começo de um ponto, percorro outros pontos e volto de onde comecei com o menos custo possível.

No problema, meu ponto de início e fim é o vértice "e" e quero passar pelos vértices a, b, c, d com o menor custo possível.
Portanto, queremos no grafo, o menor ciclo Hamiltoniano

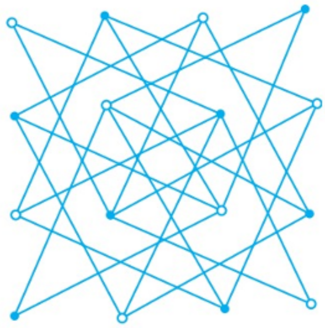
Esse problema não possui abordagens muito boas. Contudo, temos duas possibilidades:
1) Contar todos os ciclos Hamiltonianos ($(5-1)!/2 = 12$ por não ser dirigido)
2) método do melhor vizinho.

Aplicando o método do melhor vizinho para todos os vértices, veremos que obtemos o ciclo em vermelho.

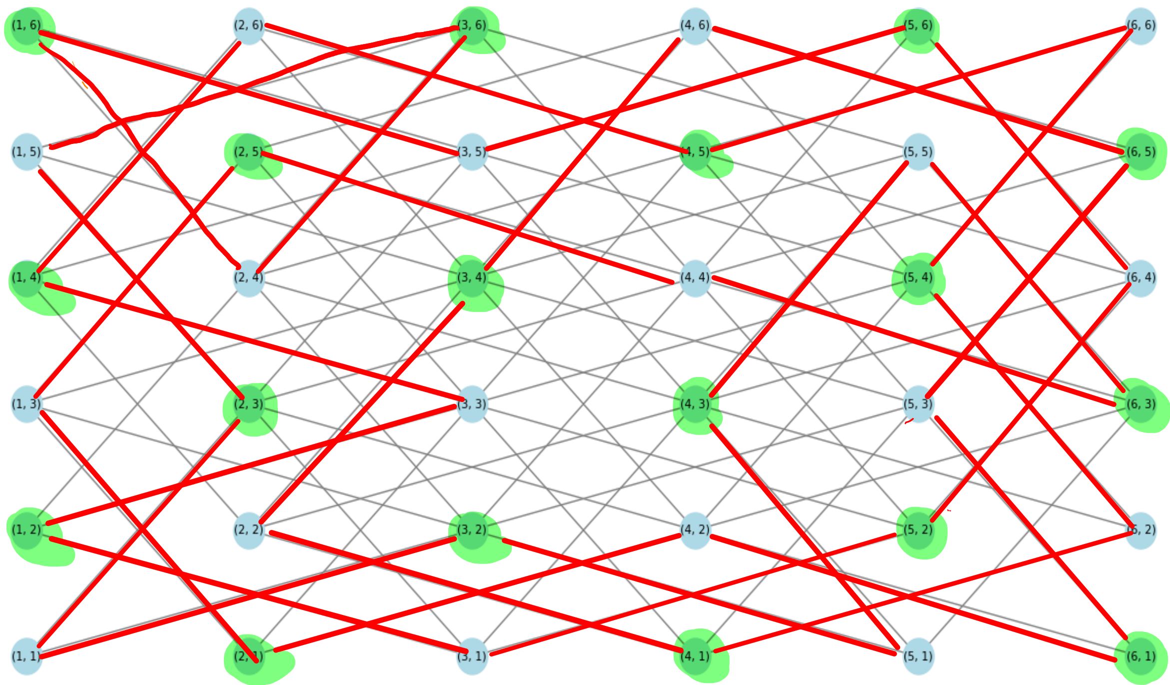
1) Para a: o melhor vizinho é c; o melhor vizinho de c é d; o melhor vizinho de d é e (não podemos voltar para c); o melhor vizinho de e é b (não podemos voltar para c, nem para d). o melhor vizinho de b é a (fechamos o ciclo).

Se repetirmos isso, para todos os vértices obteremos o ciclo em vermelho. Como o grafo não é dirigido, (e, b, a, c, d, e) é solução.

Exercício 9 No xadrez, o movimento do cavalo consiste em se mover duas casas horizontalmente ou verticalmente e daí mover uma casa na direção perpendicular. A partir disso, definimos o grafo GK_n, um grafo com $n \times n$ vértices, cada um representando uma casa do tabuleiro $n \times n$. As arestas deste grafo seguem a seguinte regra: dois vértices estão ligados por uma aresta se for possível fazer um movimento de cavalo entre as casas representadas. Veja como fica GK_4:



Encontre um ciclo hamiltoniano em GK_6.



```python
# Importando novamente as bibliotecas e ajustando o código
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

# Definir o tamanho do tabuleiro
N = 6

# Inicializar o grafo
G = nx.Graph()

# Movimentos possíveis do cavalo
knight_moves = [(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1),
                (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)]

# Adicionar vértices e arestas ao grafo
for x in range(1, N+1):
    for y in range(1, N+1):
        for dx, dy in knight_moves:
            x_new, y_new = x + dx, y + dy
            if 1 <= x_new <= N and 1 <= y_new <= N:
                G.add_edge((x, y), (x_new, y_new))

# Configurar a visualização
plt.figure(figsize=(8, 8))

# Definir a posição dos vértices no tabuleiro
pos = {(x, y): (x, y) for x in range(1, N+1) for y in range(1, N+1)}

# Desenhar o grafo com posições baseadas nas coordenadas do tabuleiro
nx.draw(G, pos, with_labels=True, node_color="lightblue", node_size=500, font_size=8, font_color="black", edge_color="gray")

# Exibir o grafo
plt.title("Grafo dos movimentos do cavalo num tabuleiro 6x6")
plt.show()
```

Exercício 10 Descreva um modelo gráfico apropriado para resolver o seguinte problema: As permutações de $\{1, 2, ..., n\}$ podem ser arrumadas em uma sequência tal que permutações adjacentes

$$p : p_1, ..., p_n, \qquad q : q_1, ..., q_n$$

satisfaçam $p_i \neq q_i$, para $i = 1, ..., n$?

Podemos modelar da seguinte maneira:
As permutações são os vértices.
Se as permutações forem diferentes, traçamos uma aresta.
O desafio seria encontrar um ciclo Hamiltoniano nesse grafo.
O número de arestas será $4!$

?

Exercício 11 Resolva o problema do exercício anterior para $n = 1, 2, 3, 4$.

$n=1$ trivial.

Definição. Um *caminho hamiltoniano* em um grafo G é um caminho simples que passa por todos os vértices uma única vez. (Um caminho hamiltoniano começa e termina em vértices diferentes.)

Exercício 12 Responda às perguntas:

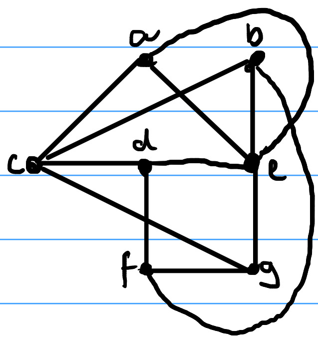
(a) Se um grafo tem um ciclo hamiltoniano, ele deve ter um caminho hamiltoniano? Explique.

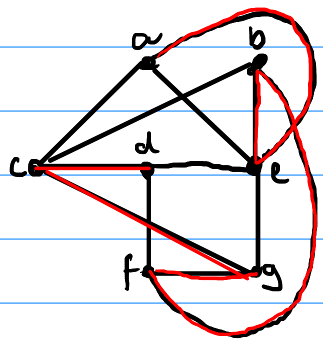
(b) O grafo do **Exercício** 3 (b) desta lista tem um caminho hamiltoniano?

(c) Para que valores de m e n o grafo do **Exercício 7** da **Lista 2** tem um caminho hamiltoniano?

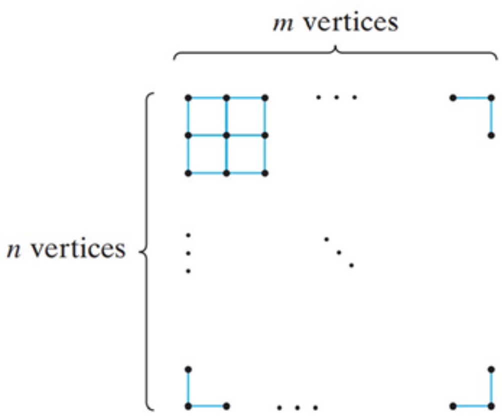
a) Sim. Seja o ciclo Hamiltoniano: $\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_1\}$. Se retirarmos a aresta $\{a_k, a_1\}$, teremos o caminho Hamiltoniano $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

b) Sim. $\{a, e, b, f, g, c, d\}$





c)



Possui um caminho Hamiltoniano para $m, n \in \mathbb{N}$.