CÁLCULO 1- LISTA 1-2022/2 (Livros : Stewart vol 2 e Hélio Lopes)

1. Liste os 5 primeiros termos da sequência.

   a) $a_n = \frac{2^n}{2n+1}$ b) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ c) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$ d) $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$

2. Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência, assumindo que o padrão continue.

   a) 1/2, 1/4,1/6, 1/8, ...
   b) 4, -1, ¼, -1/16, 1/64, ...
   c) 1,0,-1,0,1,0, -1,0, ...

3. Determine se a sequência é convergente ou divergente. Se ela for convergente encontre o limite.

   a) $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}$ b) $a_n = \frac{3+5n^2}{1+n^2}$ c) $a_n = \frac{cos^2 n}{n}$ d) $a_n = \frac{(-1)^n n^3}{n^3+2n+1}$

   d) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

4. Se (a_n) é uma sequência tal que todo termo a_n é um inteiro e (a_n) é convergente, o que se pode afirmar sobre a sequência?

5. Seja (a_n) uma sequência e a um número real tais que $|a_n$- a$|< \frac{1}{2^n}$, para n>1. Determine n tal que a_n seja uma aproximação de a com erro menor que 1/1000.

6. Dê exemplo de sequências (a_n) e (b_n) divergentes tais que $(a_n - b_n) \to 0$.

7. Considere a proposição: Se $\lim(a_n - b_n) = 0$, então lim a_n- lim b_n = 0.

   i) Decida se a proposição é verdadeira ou falsa:

   ii) Escolha, entre as opções abaixo, aquela que melhor justifique sua resposta:

   a) Pois lim $(a_n - b_n) =$ lim a_n- lim b_n .

   b) Pois, pelo teorema sobre operações com limite, lim $(a_n - b_n) =$

      lim a_n- lim b_n.

   c) Pois se $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ e $b_n = (-1)^n$, então $(a_n - b_n) = \frac{1}{n}$ e (a_n) não converge.

   d) Pois se $a_n = b_n$, então $a_n - b_n = 0$.

   e) Pois $a_n - b_n$ é praticamente zero, isto é $a_n = b_n$.

8. Considere a seguinte proposição: Se x_n é limitada, então x_n tem limite.

   a) $x_n = 1 + (-1)^n$ é um contraexemplo para a proposição?

   b) $x_n = \frac{1}{2^n} + (-1)^n$ é um contraexemplo para a proposição?

   c) $x_n = n + \frac{(-1)^n}{n^2}$ é um exemplo para a proposição?

d) $x_n = n + \frac{(-1)^n}{n^2}$ é um contraexemplo para a proposição.

9. Seja (a_n) definida por: $a_n = \begin{cases} 0 & para\ n\ ímpar \\ \frac{n}{2} & para\ n\ par \end{cases}$

Decida qual das informações abaixo é correta:

a) $\lim a_n = 0$

b) (a_n) não é convergente

c) $\lim a_n = \infty$

10. Seja (a_n), a sequência definida por: $a_n = \begin{cases} \frac{-(n+1)}{2} & para\ n\ ímpar \\ \frac{n}{2} & para\ n\ par \end{cases}$

Decida qual das informações abaixo é correta:

a) $\lim a_n = -\infty$
b) $\lim a_n = \infty$
c) $\lim |a_n| = \infty$

11.: Dê exemplo de sequências (a_n) e (b_n) que satisfaçam $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$ e $\lim(a_n + b_n) = 6.$

12. Dê exemplo de sequências (a_n) e (b_n) que satisfaçam $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$ e:

a) $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$

b) $\lim \frac{a_n}{b_n} =$- 5,8

c) $\lim \frac{a_n}{b_n} = -\infty$

13. Verifique se as sequências u_n são convergentes. Para as convergentes, dê o limite.

a) $u_n = \frac{n^2+8}{n^2+100}$

b) $u_n = \frac{3n^3+10}{n-10}$

c) $u_n = \frac{(n+1)(n+2)n^2}{n^3}$

d) $u_n = n + \frac{1}{(-2)^n}$

e) $u_n = n + (-1)^n$

14. Dê um exemplo de sequências (a_n) e (b_n) limitadas e divergentes tal que $\lim(a_n + b_n)$ exista.

1) a) $a_n = \dfrac{2^n}{2n+1}$ $\left\{ a_1 = \dfrac{2}{3} \; ; \; a_2 = \dfrac{4}{5} \; ; \; a_3 = \dfrac{8}{7} \; ; \; a_4 = \dfrac{16}{9} \; ; \; a_5 = \dfrac{32}{11} \right.$

b) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ $\left\{ a_1 = 0 \; ; \; a_2 = \dfrac{3}{5} \; ; \; a_3 = \dfrac{\cancel{8}}{\cancel{10}}\ {}^{4/5} \; ; \; a_4 = \dfrac{15}{17} \; ; \; a_5 = \dfrac{\cancel{24}}{\cancel{26}}\ {}^{12/13} \right.$

c) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$ $\left\{ a_1 = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\ {}^{1} \; ; \; a_2 = \dfrac{4}{5} \; ; \; a_3 = \dfrac{\cancel{6}}{\cancel{10}}\ {}^{3/5} \; ; \; a_4 = \dfrac{8}{17} \; ; \; a_5 = \dfrac{\cancel{10}}{\cancel{26}}\ {}^{5/13} \right.$

d) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$, $a_1 = 6$ $\left\{ a_1 = 6 \; ; \; a_2 = 6 \; ; \; a_3 = 3 \; ; \; a_4 = 1 \; ; \; a_5 = 1/4 \right.$

2) a) O padrão é $a_n = \dfrac{1}{2n}$ $(n \in \{1,2,3,\dots\})$

b) O padrão é $a_n = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ $(n \in \{1,2,3,\dots\})$

c) O padrão é $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{n_k} = 4k-3 \; (k \in \{1,2,3,\dots\}) \\ 0 & \text{se } a_{n_k} = 2k \; (k \in \{1,2,3,\dots\}) \\ -1 & \text{se } a_{n_k} = 4k-1 \; (k \in \{1,2,3,\dots\}) \end{cases}$

Digitalizado com CamScanner

Resposta do monitor: $a_n = -\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)(-1)^{\frac{n+1}{2}}$ $(n \in \{1,2,3,\dots\})$

3 a) $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2} = \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{3}{n^2}+5\right)}{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n}+1\right)} = \frac{\frac{3}{n^2}+5}{\frac{1}{n}+1} \longrightarrow \frac{5}{1} = 5$ //

$\frac{3}{n^2}+5$ é convergente para 5

$\frac{1}{n}+1$ é convergente para 1

• Se (a_n) e (b_n) são sequências e ~~são~~ têm limites a e b, respectivamente, e são convergentes, então $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

• Se (a_n) e (b_n) são sequências e têm limites a e b, respectivamente, e são convergentes, então $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

b) $a_n = \frac{3+5n^2}{1+n^2} = \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{3}{n^2}+5\right)}{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n^2}+1\right)} = \frac{\frac{3}{n^2}+5}{\frac{1}{n^2}+1} \longrightarrow \frac{5}{1} = 5$ //

$\frac{3}{n^2}+5$ é convergente para 5.

$\frac{1}{n}+1$ é convergente para 1

c) $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{n}$

Sabemos que $-1 \le \cos n \le 1$ $\therefore$ $0 \le \cos^2 n \le 1$. Logo $\cos^2 n$ é limitada.
Se a_n e b_n são sequências satisfazendo $|a_n| \le b_n$ e $\lim b_n \to 0$, então $\lim a_n \to 0$.

Como $\left|\cos^2 n \cdot \dfrac{1}{n}\right| \le \dfrac{1}{n}$ e $\lim \dfrac{1}{n} \to 0$, então $\lim\left(\cos^2 n \cdot \dfrac{1}{n}\right) \to 0$.

Por fim, $\cos^2 n \cdot \dfrac{1}{n}$ é convergente.

d) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n + 1} = \dfrac{(-1)^n \cancel{n^3}}{\cancel{n^3}\left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)} = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{\left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}$

Como $\lim \dfrac{1}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \to \dfrac{1}{1} = 1$ e $(-1)^n$ não é convergente

então $\lim (-1)^n \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}$ não existe. Por fim, $(-1)^n \dfrac{1}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}$ não é convergente

(veja o item 3a))

e) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 1} = \dfrac{(-1)^n \cdot \cancel{n^2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{(-1)^n \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = (-1)^n \cdot \left(\dfrac{1}{n}\right) \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}$

Como $\lim \frac{1}{n} \to 0$ e $\left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right| \leq \frac{1}{n}$, então $\lim (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to 0$.

Por fim $\lim (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$ é convergente.

4 (a_n) é convergente e $a_n \in \mathbb{Z}$. Chame o lim a_n de K. Portanto $K \in a_n$. Se a_n é convergente, então dado um $m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ e $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) ocorre $K - \varepsilon < a_n < K + \varepsilon$. Para um ε muito pequeno, chegamos que $a_n = K$ a partir de uma ordem m ($m \in \mathbb{N}$ e $n \geq m$).

5 Temos que $|a_n - a| < \varepsilon$ e $|a_n - a| < \frac{1}{2^n}$. Queremos um n que satisfaz $\frac{1}{2^n} < \varepsilon = \frac{1}{1000}$. O menor $n \in \mathbb{N}$ que satisfaz $2^n > 1000$ é $n = 10$

6 $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ (divergente)

$b_n = (-1)^n$ (divergente)

• $\lim (a_n - b_n) = \lim \left(\frac{1}{n} + (-1)^n - (-1)^n\right) = \lim \frac{1}{n} \Rightarrow 0$.

7) i) A afirmação é falsa. Se $\lim(a_n - b_n) \to 0$ então $\lim a_n - \lim b_n = 0$. Só é verdadeira quando (a_n) e (b_n) têm limite, são limitados e convergentes

ii) C) A c) é um contraexemplo e uma justificativa da resposta) dada no item i)

8) a) $x_n = 1 + (-1)^n$ é limitada $[0, 2]$, mas não possui limite pois $(-1)^n$ é divergente. contraexemplo

b) $x_n = \frac{1}{2^n} + (-1)^n$ é limitada, mas não possui limite pois $(-1)^n$ é divergente. (contraexemplo)

c) $x_n = n + \frac{(-1)^n}{n^2}$ não é limitada, logo, também não possui limite (contraexemplo)

d) —

$$\underbrace{\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n} + (-1)^n\right)}$$ → não é convergente

9) $a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ ímpar } (\to 0) \\ \frac{n}{2} & n \text{ par } (\to \infty) \end{cases}$ $(a_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$

b) (a_n) não é convergente.

(10) $a_n = \begin{cases} -\frac{(n+1)}{2} & n \text{ impar } (\to -\infty) \\ \frac{n}{2} & n \text{ par } (\to \infty) \end{cases}$

$(a_n) = (-1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots)$

$(|a_n|) = (1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots) = (1, 2, 3, \ldots)$

c) $\lim |a_n| \to \infty$.

(11) $(a_n) = n+6$ $(\lim (a_n) \to \infty)$

$(b_n) = -n$ $(\lim (b_n) = -\infty)$

$\lim (a_n + b_n) = \lim (n+6-n) = \lim 6 = 6$.

(12) a) $\begin{cases} \lim a_n = \infty \\ \lim b_n = -\infty \\ \lim \frac{a_n}{b_n} = 0 \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} a_n = n. \\ b_n = -n^2. \end{matrix}}$

b) $\begin{cases} \lim a_n = \infty \\ \lim b_n = -\infty \\ \lim \frac{a_n}{b_n} = -5{,}8 \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} a_n = 5{,}8n \\ b_n = -n. \end{matrix}}$ //

c) $\begin{cases} \lim a_n = \infty \\ \lim b_n = -\infty \\ \lim \frac{a_n}{b_n} = -\infty \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} a_n = n^2 \\ b_n = -n \end{matrix}}$ //.

(13) a) $u_n = \dfrac{n^2+8}{n^2+100} = \dfrac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{8}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{100}{n^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{8}{n^2}}{1+\frac{100}{n^2}} \to \dfrac{1}{1} = 1$

$1+\dfrac{8}{n^2} \to 1+0=1$ convergente

$1+\dfrac{100}{n^2} \to 1+0=1$

b) $u_n = \dfrac{3n^3+10}{n-10} = \dfrac{\cancel{n^3}\left(3+\frac{10}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{10}{n^3}\right)} = \dfrac{3+\frac{10}{n^3}}{\frac{1}{n^2}-\frac{10}{n^3}}$

Como $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right) \to 0$ Un não converge.

• Se lim Un existisse: $\lim u_n = \lim \dfrac{3+\frac{10}{n^3}}{\frac{1}{n^2}-\frac{10}{n^3}} = \dfrac{3}{0}$ ($\nexists$)

(veja item 3a))

c) $u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)n^2}{n^3} = \dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}} = n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$

Como n não é convergente e $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 0$, Un também não converge.

d) $u_n = n + \frac{1}{(-2)^n}$. Como n não converge e $\lim\left(\frac{1}{(-2)^n}\right) = 0$

u_n também não converge

e) $u_n = n + (-1)^n$. Como n e $(-1)^n$ não convergem, u_n também não converge.

14) $(a_n), (b_n)$ limitados e divergentes tais que $\lim(a_n + b_n)$ existe

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} + (-1)^n \\ b_n &= -(-1)^n \end{aligned}}$$

$$\lim(a_n + b_n) = \lim\left(\frac{1}{n} + (-1)^n - (-1)^n\right) = \lim \frac{1}{n} = 0$$