# Análise Real – Exercícios

① Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivável e $c\in(a,b)$; sejam ainda $x_n\to c$, $y_n\to c$ sequências em $(a,b)$ t.q. $x_n<c<y_n$.
Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(c)$ (*)

Dê um exemplo para mostrar que a conclusão (*) não é verdadeira se $c<x_n<y_n$

Se $f$ for de classe $C^1$, então (*) é verdadeira para quaisquer sequências $x_n\to c$, $y_n\to c$

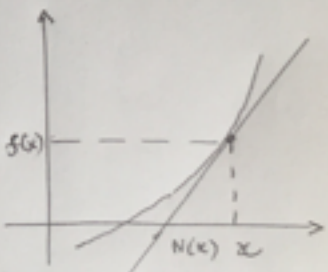
② (i) Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=0$, $k\in\mathbb{N}$

(ii) Seja $g(x)=e^{-1/x^2}$ se $x\neq 0$, $g(0)=0$. Mostre que $g$ é de classe $C^1$

③ Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ duas vezes derivável e $c\in(a,b)$ ponto crítico. Mostre que se $f''(c)>0$ então $c$ é 1 ponto de mínimo local; se $f''(c)<0$ então $c$ é ponto de máximo local.

④ Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ de classe $C^1$, e $c\in(a,b)$ t.q. $f(c)=c$. Se $|f'(c)|<1$, mostre que existe $\delta>0$ t.q. se $x\in[c-\delta,c+\delta]$ então a sequência $x_1=x$, $x_{n+1}=f(x_n)$ converge para $c$.

⑤ Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 2 vezes derivável e $f'(x)\neq 0$ para todo $x\in(a,b)$. Se $f(c)=0$ para algum $c\in(a,b)$, mostre que existe $\delta>0$ de modo que se $x\in[c-\delta,c+\delta]$ então a sequência $x_1=x$, $x_{n+1}=N(x_n)$ converge para $c$; aqui, $N(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$




← tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(x, f(x))$

⑥ Seja $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ duas vezes derivável e estritamente convexa para cima. Mostre que $g''(x)>0$ para $x\in(a,b)$.