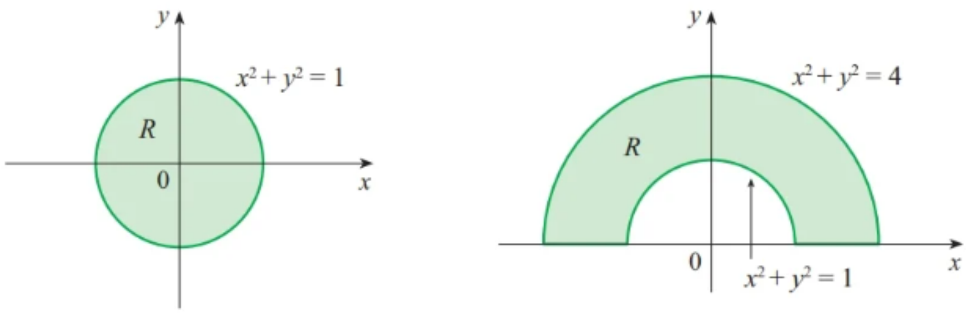
Integrais duplas em coordenadas polares

Quando podemos representar uma certa região D (geralmente discos) em coordenadas polares, chamamos tal região de retângulo polar:

$$R = \{(r,\theta) \mid a \leq r \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

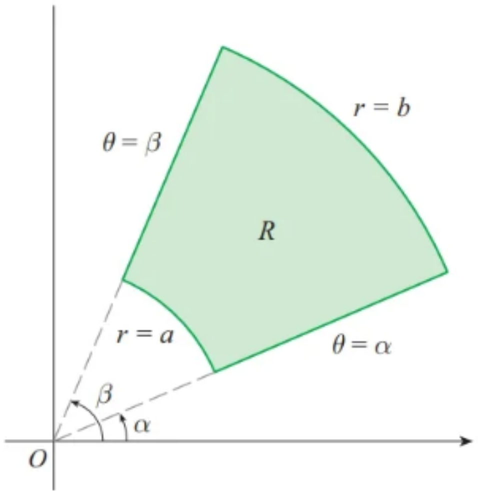
em que dividimos $[a,b]$ em m subintervalos de tamanho $(b-a)/m$ e $[\alpha,\beta]$ em n subintervalos de tamanho $(\beta-\alpha)/n$, dividindo o retângulo polar em retângulos polares menores:

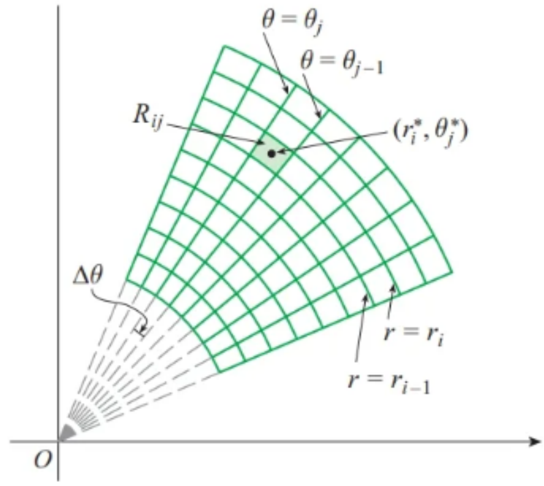
$$R_{ij} = [r_{i-1}, r_i] \times [\theta_{j-1}, \theta_j].$$



(a) $R = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

(b) $R = \{(r,\theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$





A área de cada retângulo polar é dada por: $\frac{1}{2}\Delta\theta\left(r_i^2 - r_{i-1}^2\right)$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})}_{\text{ponto amostral médio adotado}} \cdot \Delta\theta \underbrace{(r_i - r_{i-1})}_{\Delta r} = r_i^* \cdot \Delta\theta \cdot \Delta r$$

Como estamos trabalhando com coordenadas polares, podemos definir $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ e

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\,\text{sen}\,\theta_j^*)\, r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$$

Assim,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta A =$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\,\text{sen}\,\theta_j^*)\, r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta =$$

$$\boxed{= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)\cdot r\,dr\,d\theta}$$

Para fazer a mudança de integração ("Fubini"):

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)\cdot r\,dr\,d\theta = \int_{a}^{b}\int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)\cdot r\,d\theta\,dr$$

$0 \leq a \leq r \leq b$ e $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ (por conta de possíveis superposições).

Podemos extender quando r é uma função de θ:

$$D = \{(r,\theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta}$$