Máximos e mínimos locais

Uma função tem um máximo local em (a,b) se $f(x,y) \leq f(a,b)$ para uma vizinhança de (a,b). Análogo para mínimo local ($f(x,y) \geq f(a,b)$).

Teorema: f tem máximo ou mínimo local em (a,b) se as derivadas parciais de primeira ordem forem iguais a 0 (duas variáveis) em (a,b) (decorre do teorema de Fermat).

Uma consequência disso é que o plano tangente a um ponto do máximo ou mínimo local é horizontal $z = z_0$.

Um ponto (a,b) é crítico se $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

ou uma das derivadas parciais não existir. Ou seja, máximos e mínimos são pontos críticos. Contudo, assim como no cálculo I, nem todos os pontos críticos são de máximos ou mínimos locais.

Para encontrar isso, usaremos o teste da segunda derivada (análogo ao teste da primeira derivada do cálculo 1).

Teste da Segunda Derivada:

Suponha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ contínuas em uma vizinhança de (a,b) e $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Definimos $$\boxed{D(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2}$$

I) Se $D(a,b) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0 \Rightarrow$ ponto de mínimo

II) Se $D(a,b) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0 \Rightarrow$ ponto de máximo

III) Se $D(a,b) < 0 \Rightarrow$ nenhum (ponto de sela)

IV) Se $D(a,b) = 0 \Rightarrow$ inconclusivo

!.

Máximos e mínimos absolutos

Um ponto (a,b) é de máximo absoluto se para todo (x,y) no domínio de f, $f(x,y) \leq f(a,b)$. Análogo para ponto de mínimo ($f(x,y) \geq f(a,b)$).

Teorema: Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado (fechado = contém os pontos internos e da fronteira; limitado = extensão finita), então f possui máximo e mínimo absolutos no intervalo.
Perceba a semelhança com o teste dos máximos e mínimos locais do cálculo I.

I) Pontos críticos de f em D;

II) Valores extremos na fronteira de D;

III) O maior é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto.