FGV EMAp

Fundamentos de Matemática

Lista 1 – 05/03/2024

A consulta é livre, mas você deve entregar suas soluções escritas de próprio punho e mencionar as fontes de consulta.

1. Analise cada um dos itens a seguir. Quais são proposições? Quais são sentenças abertas? Quais são verdadeiros ou falsos? Explique e / ou comente.

(a) $1 + 1 = 2$.
(b) $\pi = 3$.
(c) 12 pode ser escrito como soma de dois números primos.
(d) Todo inteiro par maior do que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.
(e) O quadrado de todo inteiro par é par.
(f) n é um número primo.
(g) $n^2 - 2n > 0$.
(h) $m < n$.
(i) $12 - 11$.
(j) π é um número especial.

2. Prove que $2 + 3 = 5$.

3. Prove que $3 < \pi < 4$.

4. Prove que 7 não é um divisor de 100.

5. Prove que para quaisquer números reais negativos a e b, se $a < b$, então $a^2 > b^2$.

6. Para quaisquer números reais a, b, c, prove que

(a) $(a + b - c)^2 = (a + b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$;
(b) $bc + ac + ab \leq a^2 + b^2 + c^2$;
(c) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab)$;
(d) $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = 3(b - c)(c - a)(a - b)$.

7. Para quaisquer números reais a e b, prove que

(a) $a \times 0 = 0 = 0 \times a$;
(b) $(-a)b = -ab = a(-b)$;
(c) $(-a)(-b) = ab$.

8. Subtraindo um mesmo número do numerador e do denominador da fração $\frac{14}{13}$, obtemos a fração $\frac{13}{14}$. Qual é esse número?

9. O número $n = 9999 \cdots 99$ tem 2011 algarismos e todos iguais a 9. Quantos algarismos 9 tem o número n^2?

10. As massas de todos os pares possíveis formados com 5 estudantes são 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg e 101 kg. Qual é a massa do estudante de massa intermediária?

11. Prove todos os números da sequência

$$49, 4489, 444889, \ldots, 444 \cdots 48 \cdots 889, \ldots$$

são quadrados perfeitos. (cada termo tem um algarismo quatro e um algarismo oito a mais que o anterior).

12. Sendo a, b, c números racionais distintos, prove que

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$$

é sempre o quadrado de um número racional.

13. Seja

$$f(x; y) = \left(\frac{\sqrt[4]{x^3 y} - \sqrt[4]{x y^3}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \right)^2 \cdot \left(1 + 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Calcule $f(9; 0,4)$.

14. Calcular o valor da expressão

$$\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

para $x = 2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$ e $k > 1$.

15. Calcule

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2024}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2024}}}}}}$$

16. Prove que se

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a,$$

então $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

17. Ache o domínio de definição e simplifique a expressão

$$A=\frac{\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b}{b-\sqrt{ab}}+\dfrac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}}{2}.$$

18. (a) Demonstre que se a, b, c, d são reais e $b \neq 0$, $d \neq 0$, $b+d \neq 0$, $b-d \neq 0$ e $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, então

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

(b) Sabendo que $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=2$ e $\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\dfrac{y}{\sqrt{3}}$, calcule x e y.

(c) (OIAM) Se $x \neq 1, y \neq 1, x \neq y$ e

$$\frac{yz-x^2}{1-x}=\frac{xz-y^2}{1-y},$$

demonstre que ambas as frações são iguais a $x+y+z$.

19. Seja $x=\dfrac{a-b}{a+b}$, $y=\dfrac{b-c}{b+c}$, e $z=\dfrac{c-a}{c+a}$.

(a) Prove que

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z).$$

(b) Prove que $x+y+z=-xyz$.

20. Fatore a^n-b^n, $n \in \mathbb{N}$. Para n ímpar, fatore a^n+b^n.

21. Fatore $x^3+2x^4+4x^2+2+x$.

22. Fatore as expressões

(a) x^5+x^4+1

(b) $x^{10}+x^5+1$

23. Fatore $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

24. (a) Fatore a expressão $a^3+b^3+c^3-3abc$.

(b) Usando a fatoração obtida no item anterior, determine uma solução da equação cúbica $x^3+px+q=0$.

25. Supondo que o inteiro n é soma de dois números triangulares,

$$n=\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2},$$

expresse $4n+1$ como soma de dois quadrados, $4n+1=x^2+y^2$. Reciprocamente, se $4n+1$ é soma de dois quadrados, prove que n é soma de dois números triangulares.

26. Para todo inteiro positivo n, considere um quadriculado $2^n \times 2^n$ do qual um quadradinho 1×1 qualquer foi removido. Prove que que é possível cobrir completamente tal quadriculado usando apenas peças de 3 quadradinhos em "L".