Exercício 1 - Derivada por Sequências

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função derivável, $c \in \mathbb{R}$ e $(x_n), (y_n)$ sequências em $\mathbb{R}$ tais que $x_n, y_n \to c$, com $x_n < c < y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$$

Exercício 2 - Funções Constantes

Mostre que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3 - O Teorema do Valor Médio para Integrais

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, mostre que $\exists M \in (a, b)$ tal que

$$f(M)(b - a) = \int_a^b f(t)dt$$

Interprete isto geometricamente.

Definindo $G(x) = \int\limits_0^x g(t)dt$, onde $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua e crescente. Mostre que

$$G(1) \geq 2G(1/2)$$

Exercício 4 - O Discreto Contínuo

Os feiticeiros, Daviros e Beatriza, amigos de Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-vanato, Cardineiro, Borges, Rodrigues e Benzo, utilizaram seus proderes que aprenderam em Matemática Discreta, para mostrar que uma certa função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, positiva e decrescente satisfazia

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$$

Utilize seus poderes de Análise Real para mostrar que $\int\limits_1^{\infty} f(t)dt < +\infty$, isto é, que o limite

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt$$

existe.

① Usando o polinômio de Taylor centrado em c:

$$f(x_n) = f(c) + f'(c)(x_n - c) + r(x_n) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{r(x_n)}{x_n - c} = 0$$

$$f(y_n) = f(c) + f'(c)(y_n - c) + s(y_n) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{s(y_n)}{y_n - c} = 0$$

$$f(x_n) - f(y_n) = f'(c)(x_n - y_n) + r(x_n) - s(y_n)$$

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(c) + \frac{r(x_n)}{x_n - y_n} - \frac{s(y_n)}{x_n - y_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(f'(c) + \frac{r(x_n)}{x_n - y_n} - \frac{s(y_n)}{x_n - y_n} \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \right) = \lim_{n\to\infty} f'(c) + \lim_{n\to\infty} \frac{r(x_n)}{x_n - y_n} - \lim_{n\to\infty} \frac{s(y_n)}{x_n - y_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \right) = f'(c) + \lim_{n\to\infty} \frac{r(x_n)}{x_n - y_n} - \lim_{n\to\infty} \frac{s(y_n)}{x_n - y_n}$$

Temos que $\left| \frac{r(x_n)}{x_n - y_n} \right| \leq \left| \frac{r(x_n)}{x_n - c} \right|$ e $\left| \frac{s(y_n)}{x_n - y_n} \right| \leq \left| \frac{s(y_n)}{y_n - c} \right|$

$(x_n < c < y_n)$. Como $\frac{r(x_n)}{x_n - c}, \frac{s(y_n)}{y_n - c} \to 0$

(já provado)

então $\lim_{n\to\infty} \frac{r(x_n)}{x_n-y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s(y_n)}{x_n-y_n} = 0$

$$\boxed{e \quad f'(c) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n-y_n}\right)}$$

2) Fazendo $\psi(x) = sen^2 x + cos^2 x$, temos que $\psi'(x) = 2 sen x \cos x - 2 sen x \cos x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Portanto, $\psi(x)$ é constante.
Como $\psi(0) = 1$, então $\psi(x) = sen^2 x + cos^2 x = 1$.

3)
I) Defina $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $F'(x) = f(x)$.
Pelo Teorema do Valor Médio, sabemos que $\exists m \in (a,b) \mid F'(m) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}$

Logo, $f(m) = \frac{\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt}{b-a}$ e

$$\boxed{f(m)(b-a) = \int_a^b f(t)\,dt}$$

II) A interpretação geométrica seria que a área abaixo da curva de $f(x)$ entre a e b e tal área seria um retângulo de base $(b-a)$ e altura $f(m)$.

III) Pelo Teorema do Valor médio, sabemos que $\exists m \in (1/2, 1) \wedge \exists N \in (0, 1/2) \mid$

$\int_0^0 g(t)dt = 0$

$$G'(m) = \frac{G(1) - G(1/2)}{1/2} \quad e \quad G'(N) = \frac{G(1/2) - G(0)}{1/2}$$

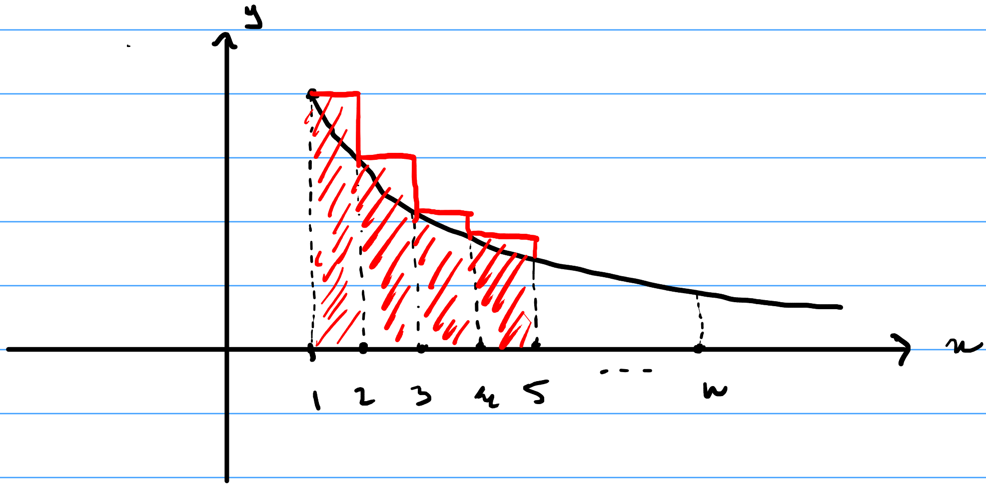
Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$g(m) = \frac{G(1) - G(1/2)}{1/2} \quad e \quad g(N) = \frac{G(1/2) - 0}{1/2}$$

Como g é crescente e $m > N$, temos que
$g(m) \geq g(N)$ e

$$G(1) \geq 2\,G(1/2).$$

④ Tome a seguinte função, sem perda de generalidade (lembrando que f é positiva, contínua e decrescente e $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}_+$)



Considere a seguinte partição: $P = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$
Perceba que ($S(f, P_n)$ é a soma superior de f dada a partição P até n)

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(i) \cdot 1 \text{ (tamanho da partição)}$$

Além disso, sabemos que

$$\int_1^n f(t)\,dt \leq S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

Tirando o limite: $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(t)\,dt \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i)$

$\int_1^\infty f(t)\,dt \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} f(i) < \infty$, então, por transitividade, $\int_1^\infty f(t)\,dt < \infty$