Transformações 2

Rotação

A equação geral do segundo grau tem a forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ela pode representar diversas coisas como veremos nesta aula. Para estimular sua curiosidade veja, a seguir, uma lista das coisas que essa equação pode representar:

- uma circunferência
- uma elipse
- uma hipérbole
- uma parábola
- um ponto
- uma reta
- um par de retas paralelas
- um par de retas concorrentes
- o conjunto vazio

Na aula anterior aprendemos como tentar eliminar os termos de primeiro grau e, nesta aula vamos ver como eliminar o termo Bxy para obter uma equação mais simples de forma a podermos identificar o que ela representa.

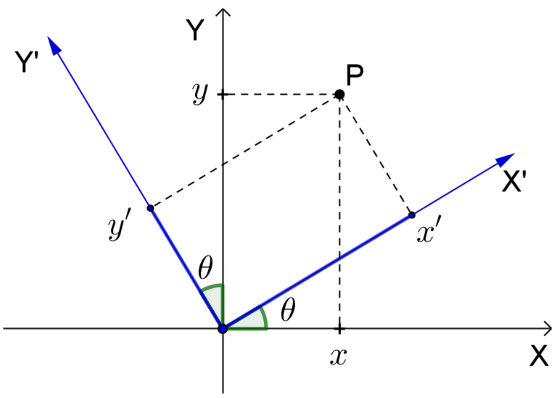
Nesta aula vamos aprender como girar os eixos de determinado ângulo e obter as novas coordenadas dos pontos nesse novo sistema. Uma determinada rotação dos eixos permite sempre eliminar o *termo retangular* da equação e preparar o terreno para sua identificação.

A figura ao lado mostra o que vamos fazer.

O sistema XY sofreu uma rotação de ângulo θ. Obtemos o novo sistema $\mathrm{X'Y'}$.

Qualquer ponto possui representação nesses dois sistemas:

$$P = (x, y) = (x', y')'$$



Nosso primeiro trabalho é o de relacionar as coordenadas antigas e novas de acordo com o ângulo de rotação e, nesta introdução, vamos considerar o ângulo de rotação no intervalo $-90° < \theta < 90°$.

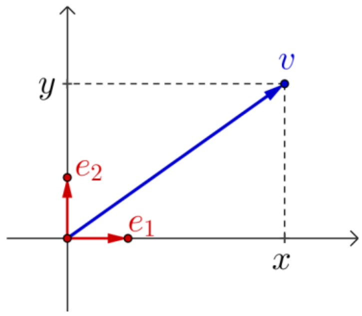
Trabalho de preparação

Sejam $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ os vetores unitários dos eixos X e Y.
Para cada vetor $v = (x,y)$ do plano cartesiano temos:

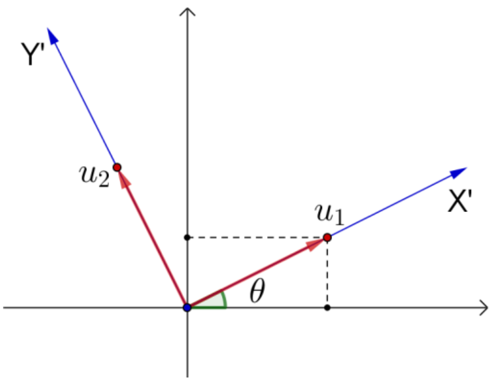
$$v = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2$$

Assim, vemos como escrever cada vetor como combinação linear dos dois vetores unitários principais do plano.

$$v = (x,y) = xe_1 + ye_2$$



Após a rotação, os novos eixos X' e Y' possuem também seus vetores unitários u_1 e u_2.



Assim, o vetor $v = (x,y)$ tem representação no novo sistema como

$$v = (x',y')' = x'u_1 + y'u_2$$

Observe que

$$u_1 = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$$

$$u_2 = (-\sin\theta, \cos\theta) = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$$

Temos então:

$$v = xe_1 + ye_2 = x'u_1 + y'u_2 =$$

$$= x'(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) + y'(-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2) =$$

$$= (x'\cos\theta - y'\sin\theta)e_1 + (x'\sin\theta + y'\cos\theta)e_2$$

Daí,

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Essas equações mostram as coordenadas antigas em função das novas, mas é preciso também fazer o inverso; mostrar as coordenadas novas em função das antigas.
Multiplicando a primeira equação por $\cos\theta$ e a segunda por $\sin\theta$ ficamos com

$$x\cos\theta = x'\cos^2\theta - y'\sin\theta\cos\theta$$
$$y\sin\theta = x'\sin^2\theta + y'\sin\theta\cos\theta$$

Somando,

$$x\cos\theta + y\sin\theta = x'$$

Analogamente, obtemos

$$-x\sin\theta + y\cos\theta = y'$$

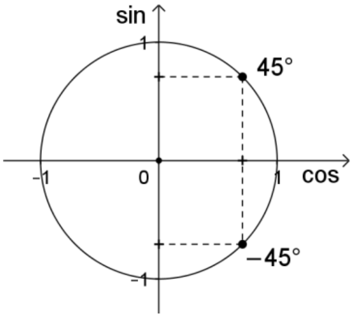
Ou seja,

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Exemplo

Considere a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$. Determine sua nova equação após uma rotação nos eixos de $-45°$.

Solução



Recordando a trigonometria:

$$\cos(-45°) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(-45°) = -\sin 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Preparando a substituição:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}$$

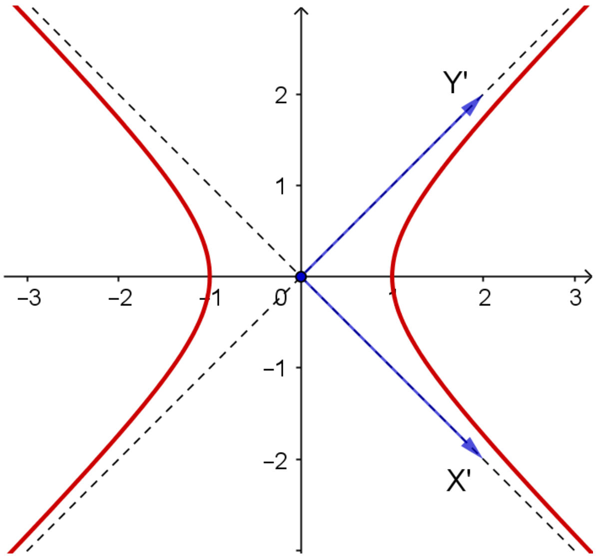
Substituindo,

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{1}{2}(-x' + y')^2 = 1$$

$$x'^2 + 2x'y' + y'^2 - x'^2 + 2x'y' - y'^2 = 2$$

$$2x'y' = 1$$



Eliminação do termo retangular

Consideremos a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = k$$

Como se verá a seguir, os termos do primeiro grau não têm influência na determinação do ângulo de rotação que elimina o termo Bxy. Veremos também que essa eliminação é sempre possível.

Façamos as substituições:

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases}$$

$$A(x' \cos\theta - y' \sin\theta)^2 + B(x' \cos\theta - y' \sin\theta)(x' \sin\theta + y' \cos\theta) + C(x' \sin\theta + y' \cos\theta)^2 = k$$

Desenvolvendo,

$$Ax'^2\cos^2\theta - 2Ax'y' \sin\theta \cos\theta + Ay'^2\sin^2\theta +$$
$$Bx'^2 \sin\theta\cos\theta + Bx'y'\cos^2\theta - Bx'y'\sin^2\theta \; - By'^2 \sin\theta\cos\theta +$$
$$Cx'^2\sin^2\theta + 2Cx'y' \sin\theta\cos\theta + Cy'^2\cos^2\theta = k$$

Essa equação tem a forma

$$A'x'^2 + B'x'y' + \; C'y'^2 = k$$

onde

$$A' = A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$$
$$B' = B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (C - A)2\sin\theta\cos\theta$$
$$C' = \; A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$$

Vamos escrever agora apenas o termo retangular:

$$B'x'y' = [B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (C - A)2\sin\theta\cos\theta]x'y'$$

$$B' = B\cos 2\theta + (C - A)\sin 2\theta$$

Fazendo $B' = 0$,

$$B\cos 2\theta + (C - A)\sin 2\theta = 0$$

$$B\cos 2\theta = (A - C)\sin 2\theta$$

Se $A \neq C$,

$$\frac{B}{A - C} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}$$

Se $A = C$, $2\theta = 90°$ e, portanto, $\theta = 45°$.

É, portanto, sempre possível eliminar o termo retangular (xy) de uma equação do segundo grau. Para que todos os valores dos ângulos apareçam apenas uma vez vamos combinar que o ângulo θ seja tal que $0° < 2\theta < 180°$, ou seja, $0° < \theta < 90°$.

Pois bem, se temos uma equação completa do segundo grau e desejamos eliminar o termo retangular temos que girar os eixos de um ângulo θ, mas o que sabemos é que a tangente de 2θ, é obtida facilmente a partir dos três primeiros coeficientes. O que faremos a seguir é mostrar como obter os valores se $\sin\theta$ e $\cos\theta$ a partir de $\tan 2\theta$.

Recordação de trigonometria:

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ (1)

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ (2)

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (3)

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ (4)

Vamos manipular essas coisas.

A partir de (3) temos

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

Substituindo x por 2θ e tirando a raiz quadrada,

$$\cos 2\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta}}$$

Atenção aqui. Vamos combinar que $0° < 2\theta < 180°$, então o sinal de $\cos 2\theta$ é o mesmo sinal de $\tan 2\theta$.

Uma vez que conhecemos $\cos 2\theta$ vamos calcular o seno e o cosseno do ângulo θ.
A partir de (2) temos

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - \sin^2\theta - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

Daí,

$$2\sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

e cálculos análogos conduzem a

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

Com esses valores podemos iniciar o processo de substituição.

Vamos mostrar um exemplo para servir de modelo.

Exemplo
Identificar e determinar os focos da cônica $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$.

Solução
Siga o passo a passo.

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-4}{5 - 8} = \frac{4}{3}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8/5}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Temos, então.

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

A partir das relações de substituição

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

temos

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \end{cases}$$

Começa o trabalho,

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$$

$$5 \cdot \frac{1}{5}(2x' - y')^2 - 4 \cdot \frac{1}{5}(2x' - y')(x' + 2y') + 8 \cdot \frac{1}{5}(x' + 2y')^2 = 36$$

$$5\left(4x'^2 - 4x'y' + y'^2\right) - 4\left(2x'^2 + 3x'y' - 2y'^2\right) + 8\left(x'^2 + 4x'y' + 4y'^2\right) = 36 \cdot 5$$

Desenvolvendo de forma arrumada:

$$\begin{aligned} &20x'^2 - 20x'y' + 5y'^2 + \\ &-8x'^2 - 12x'y' + 8y'^2 + \\ &8x'^2 + 32x'y' + 32y'^2 = 36 \cdot 5 \end{aligned}$$

Veja que os termos retangulares desaparecem!
A equação resultante é:

$$20x'^2 + 45y'^2 = 180$$

ou seja,

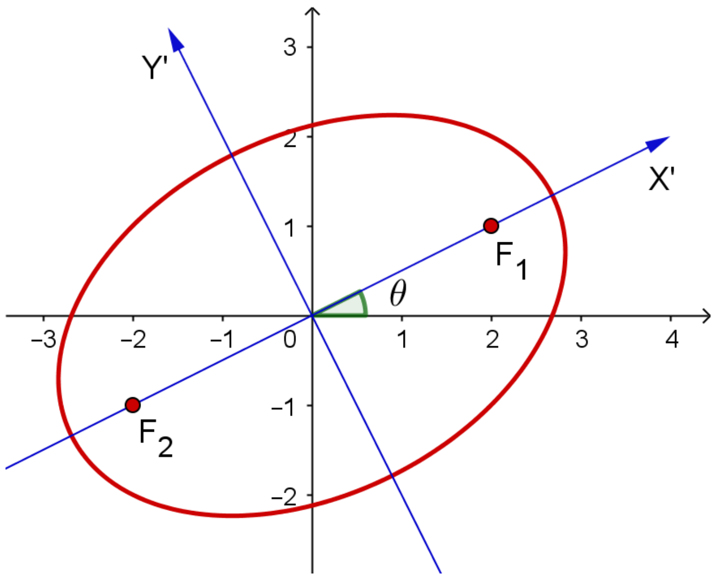
$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Como $a^2 = 9$ e $b^2 = 4$ temos $c^2 = 5$, ou seja, $c = \sqrt{5}$.
Temos então, ainda no novo sistema, $F_1 = (\sqrt{5}, 0)'$ e $F_2 = (-\sqrt{5}, 0)'$.
Voltando ao sistema original temos, para o foco da direita,

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta = \sqrt{5} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} - 0 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} = 2 \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta = \sqrt{5} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} + 0 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 1 \end{cases}$$

Assim, $F_1 = (2,1)$ e, consequentemente, $F_2 = (-2,-1)$.

Vamos ver:



Vejamos outro exemplo.

Exemplo
Identifique a cônica $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y = 0$.

Solução
Vamos repetir os procedimentos anteriores.

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A - C} = -\frac{24}{7}$$

$$\cos 2\theta = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{24}{7}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{625}{49}}} = -\frac{7}{25}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{7}{25}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{18/25}{2}} = \frac{3}{5}$$

Daí,

$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

Preparando a substituição:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \dfrac{1}{5}(3x' - 4y') \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = \dfrac{1}{5}(4x' + 3y') \end{cases}$$

Temos então:

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y = 0$$

$$16\cdot\frac{1}{25}(3x' - 4y')^2 - 24\cdot\frac{1}{25}(3x' - 4y')(4x' + 3y') + 9\cdot\frac{1}{25}(4x' + 3y')^2$$
$$-\frac{60}{5}(3x' - 4y') - \frac{80}{5}(4x' + 3y') = 0$$

Desenvolvendo,

$$144x'^2 - 384x'y' + 256y'^2 +$$
$$-288x'^2 + 168x'y' + 288y'^2 +$$
$$144x'^2 + 216x'y' + 81y'^2 +$$
$$-900x' + 1200y' - 1600x' - 1200y' = 0$$

Ficamos com

$$625y'^2 - 2500x' = 0$$

ou

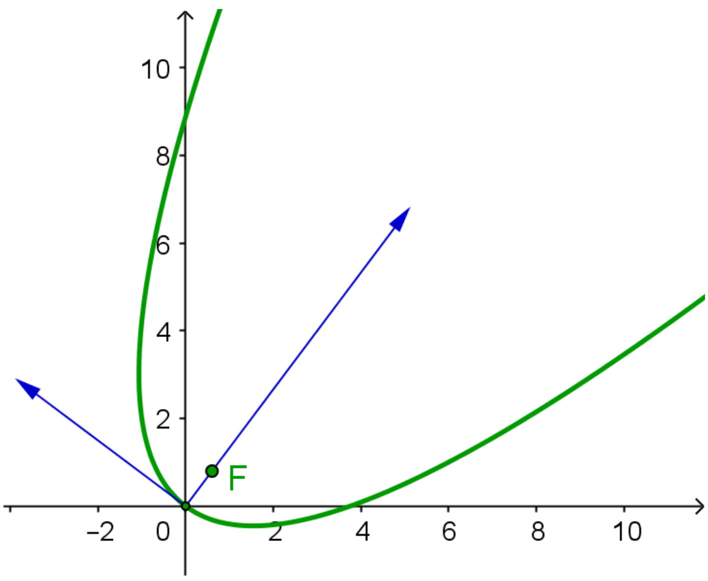
$$y'^2 = 4x'$$

Uma parábola, portanto. Temos $2p = 4$ e o parâmetro é $p = 2$. O foco no sistema novo é $F = (1,0)'$ e no sistema original,

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}(3\cdot 1 - 4\cdot 0) = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{1}{5}(4\cdot 1 + 3\cdot 0) = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Assim, $F = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Veja a situação real:



Propriedades

Considere uma cônica de equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = k$$

Após uma rotação dos eixos de ângulo θ obtemos uma equação da forma

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'x'^2 = k$$

onde

$$A' = A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta$$

$$B' = B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (C - A)2\sin\theta\cos\theta$$

$$C' = A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$$

Há duas propriedades:

1) $A + C = A' + C'$
2) $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$

O valor de $\Delta = B^2 - 4AC$ identifica a cônica.

$\Delta < 0 \quad \rightarrow \quad$ uma elipse ou um ponto
$\Delta > 0 \quad \rightarrow \quad$ uma hipérbole ou duas retas concorrentes
$\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad$ uma parábola ou duas retas paralelas

Na próxima aula veremos esses casos degenerados.