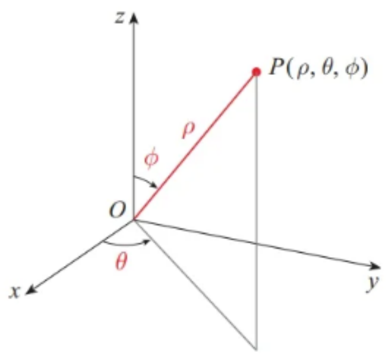
Coordenadas esféricas

As coordenadas esféricas são um sistema de coordenadas tridimensionais do formato: (ρ, θ, ϕ) em que $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e θ é que vem nas coordenadas cilíndricas.

As coordenadas esféricas são úteis quando a simetria é posta em um ponto da função



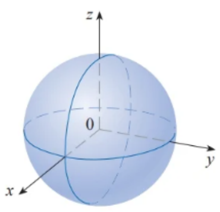


FIGURA 2 $\rho = c$, uma esfera

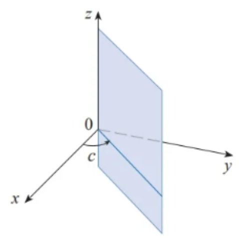


FIGURA 3 $\theta = c$, um semiplano

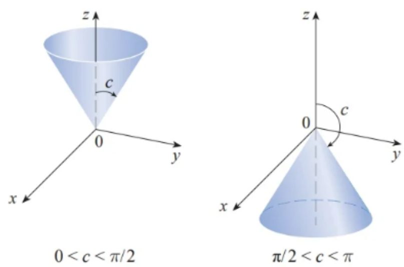
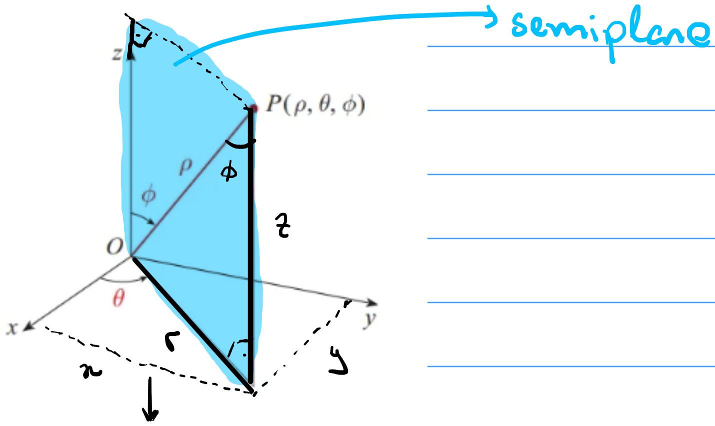


FIGURA 4 $\phi = c$, um cone

Agora, vamos ver a correspondência nas coordenadas retângulares:



$r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\theta$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\phi = \dfrac{r}{\rho} \Rightarrow r = \rho\sin\phi \\ \cos\phi = \dfrac{z}{\rho} \Rightarrow z = \rho\cos\phi \end{array}\right\} \quad \rho^2 = z^2 + r^2$$

$$\therefore \begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\,\text{sen}\theta, \quad z = \rho\cos\phi \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad (\rho \geq 0) \\ \theta = \text{Arc tg}\, y/x \\ \phi = \text{Arccos}\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2} \right) \end{cases}$$

Cálculo com coordenadas esféricas

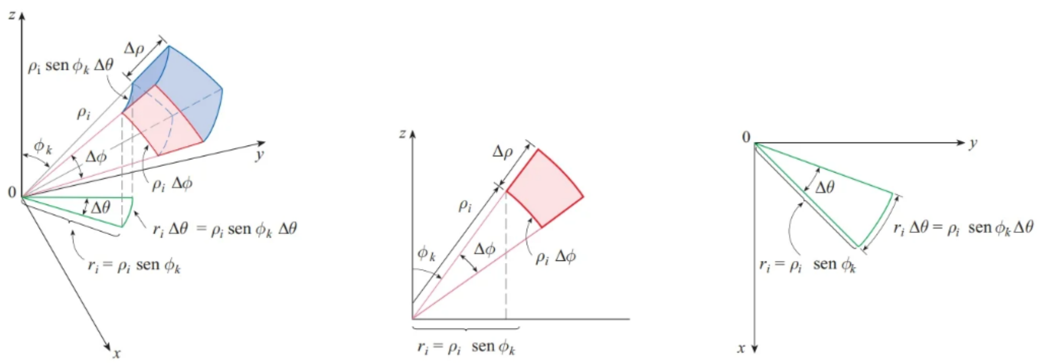
A ideia seria dividir em cunhas esféricas, em que o volume de integração seria transformado em:

$$\boxed{E=\{(\rho,\theta,\phi) \mid a\le\rho\le b,\ \alpha\le\theta\le\beta,\ c\le\phi\le d\}, \text{ em que } a\geq 0,\ \beta-\alpha\le 2\pi,\ d-c\le\pi.}$$

Portanto, vamos dividir E, em pequenas cunhas esféricas E_{ijk} por meio de esferas igualmente espaçadas de ρ_i, semiplanos $\theta_j=\theta$ e semicones $\phi_k=\phi$.

Assim E_{ijk} é aproximadamente uma caixa retangular de dimensões $\Delta\rho_i$, $\rho_i\Delta\phi$ e $\rho_i\,\text{sen}\,\phi_k\,\Delta\theta$ e

$$\Delta V_{ijk}\approx(\Delta\rho)\cdot(\rho_i\Delta\phi)(\rho_i\,\text{sen}\,\phi_k\,\Delta\theta)=\rho_i^2\,\text{sen}\,\phi_k\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi.$$



(a) Uma cunha esférica (b) Vista lateral (c) Vista superior

Assim,

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V_{ijk}$$

$$\lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\rho_i^* \operatorname{sen}\phi_k^* \cos\theta_j^*, \rho_i^* \operatorname{sen}\phi_k^* \operatorname{sen}\theta_j^*, \rho_i^* \cos\phi_k^*)\, \rho_i^{*2} \operatorname{sen}\phi_k^*\, \Delta\rho\, \Delta\theta\, \Delta\phi$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

com $E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta,\ c \leq \phi \leq d\}$

Podemos estender para cunhas gerais também, em que, $g_1(\theta,\phi) \leq \rho \leq g_2(\theta,\phi)$

Em geral, as coordenadas esféricas são utilizadas nas integrais triplas quando superfícies como cones e esferas formam a fronteira da região de integração.