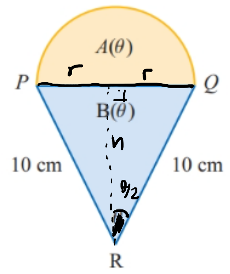
66. Um semicírculo com diâmetro PQ está sobre um triângulo isósceles PQR para formar uma região com um formato de sorvete, conforme mostra a figura. Se $A(\theta)$ é a área do semicírculo e $B(\theta)$ é a área do triângulo, encontre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{h}{10} \qquad \boxed{h = 10 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$A(\theta) = \pi r^2$$

$$B(\theta) = \frac{rh}{2} = 5r\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

$$\frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \frac{\pi r^2}{5\cancel{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \boxed{\frac{\pi}{5} \cdot \frac{r}{\cos(\theta/2)}}$$

Pitágoras

$$100^2 = 100^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + r^2$$

$$r = 100\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

$$\frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \frac{\pi}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{100}^{20}\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\cos(\theta/2)} = 20\pi\sqrt{\frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\theta/2}}$$

$$= 20\pi\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta/2} - 1}$$

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \lim_{\theta \to 0^+}\left[20\pi\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - 1}\right]$$

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

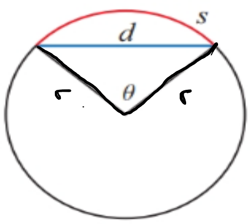
$$\lim_{\theta\to0^+}\left[20\pi\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}-1}\right] = \lim_{\theta\to0^+} 20\pi\sqrt{\lim_{\theta\to0^+}\frac{1}{\cos^2\theta/2}-\lim_{\theta\to0^+}1}$$

$$= 20\pi\cdot\sqrt{1-1} = 0$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0^+}\frac{A(\theta)}{B(\theta)} = 0$$

67. A figura mostra um arco de círculo com comprimento s e uma corda com comprimento d, ambos subentendidos por um ângulo central θ. Encontre

$$\lim_{\theta\to0^+}\frac{s}{d}$$



$$2\pi r \;-\; 2\pi$$
$$s \;-\; \theta$$

$$\cancel{2\pi} r\,\theta = \cancel{2\pi} s$$
$$\boxed{r\theta = s}$$

$$\frac{d}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{r}{\operatorname{sen}(90-\frac{\theta}{2})}$$

$$d = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(90-\tfrac{\theta}{2})$$
$$d = 2r\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2\cos\theta/2$$
$$\boxed{d = 2r\cdot\operatorname{sen}\theta/2\cos^2\theta/2.}$$

$$\lim_{\theta\to0^+}\frac{s}{d} = \lim_{\theta\to0^+}\frac{s}{d}\frac{\cancel{r}\theta}{2\cancel{r}\operatorname{sen}\theta/2\cos^2\theta/2} = \lim_{\theta\to0^+}\frac{\theta/2}{\operatorname{sen}\theta/2\cdot\cos^2\theta/2}$$

$$= \left[\left(\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\theta/2}{\operatorname{sen}\theta/2} \right) \cdot \left(\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\cos^2\theta/2} \right) \right]$$

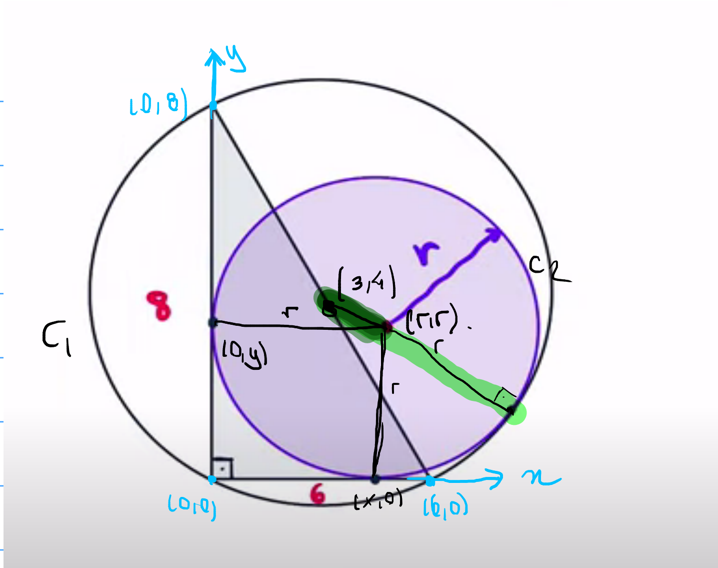
Sabemos que $\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}t}{t} = 1$ e $\lim_{t \to 0} \frac{t}{\operatorname{sen}t}$

Analisando $\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\theta/2}{\operatorname{sen}\theta/2}$, quando $\theta \to 0$, $\theta/2 \to 0$,

$\therefore$ podemos trocar a variável por t, sem perda de sentido. $\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\theta/2}{\operatorname{sen}\theta/2} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\operatorname{sen}t} = 1$.

Analisando $\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\cos^2\theta/2}$, temos que esse limite é 1, pois $\theta/2 \to 0$ e $\cos 0 = 1$.

Voltando, $\left[\left(\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\theta/2}{\operatorname{sen}\theta/2} \right) \cdot \left(\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\cos^2\theta/2} \right) \right] = 1 \cdot 1 = \boxed{1}$ //



Fazendo por GA

$C_1: (x-3)^2+(y-4)^2=5^2.$

$C_2: (x-r)^2+(y-r)^2=r^2.$

Distância entre os centros $(3,4)$ e (r,r) é $5-r$.

$\therefore \sqrt{(3-r)^2+(4-r)^2} = (5-r)$

$\cancel{9} - \overset{-4r}{\cancel{6}r} + r^2 + \cancel{16} - \cancel{8}r + \cancel{r^2} = \cancel{25} - \overset{-2r}{\cancel{10}r} + \cancel{r^2}$

$r^2 - 4r = 0$

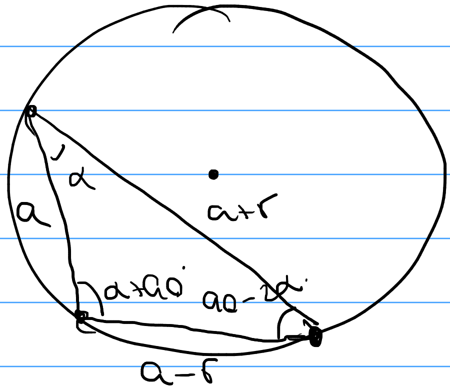
$r(r-4) = 0$

$\cancel{r=0} \vee \boxed{r=4}$

Enunciado da questão:

Considere um triângulo cujos lados estão em progressão aritmética e cujos vértices se encontram sobre uma circunferência de raio 1. Se o maior ângulo desse
triângulo é 90o
maior que o menor ângulo desse triângulo, qual a área desse triângulo?

$$\frac{3\sqrt{7}}{16}$$



Lei dos senos:

$$\frac{a+r}{\operatorname{sen}(\alpha+90)} = \frac{a}{\operatorname{sen}(90-2\alpha)} = \frac{a-r}{\operatorname{sen}\alpha} = 2.$$

$$\frac{a+r}{2} = \cos\alpha \quad ; \quad \frac{a-r}{2} = \operatorname{sen}\alpha.$$

$$\left(\frac{a-r}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+r}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{a^2 - \cancel{2ar} + r^2 + a^2 + \cancel{2ar} + r^2}{4} = 1$$

$$\boxed{a^2 + r^2 = 2} \quad \boxed{r^2 = 2 - a^2}$$

$$\frac{(a^2-r^2)}{4}\cdot a = \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}-r\right)\left(\frac{a}{2}+r\right)}$$

$$\frac{(a^2-r^2)\cancel{a}}{\cancel{4}} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{4}}\sqrt{3(a^2-4r^2)}$$

$$(2a^2-2) = \sqrt{3(5a^2-8)}.$$

$$4a^4 - 8a^2 + 4 = 15a^2 - 24.$$
$$4a^4 - 23a^2 + 28 = 0 \qquad a^2 = K$$
$$4K^2 - 23K + 28 = 0$$
$$K = \frac{23 \pm 9}{8}$$

$K = 4$.
$K = 7/4$.

$\boxed{\cancel{a = 2} \text{ ou } a = \sqrt{7}/2}$

A circunferência tem raio 1.

$$\boxed{a = \frac{\sqrt{7}}{2}}$$

$$A = \frac{(a^2 - r^2)a}{4} = \frac{(2a^2 - 2) \cdot a}{\cancel{4}\,2} = \frac{(a^2 - 1)a}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{7}{4} - 1\right) \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{7}}{16}}$$

PASSOS:

I) Escrever a PA assim $a-r, a, a+r$
II) Fazer a lei dos senos em um triângulo inscrito em uma circunferência

III) Fazer as transformações trigonométricas
IV) Achar $a^2+r^2=2$
V) Fazer a área do triângulo inscrito e a fórmula de Herón
VI) Achar a
VII) Achar a área.

REGRA DA CADEIA

Regra para derivação de funções compostas $f \circ g = f(g(x))$. Um exemplo:

$h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. $\Rightarrow g(x) = x^2 \wedge f(x) = \operatorname{sen} x$.

A regra da cadeia nos diz:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Calculando $h'(x)$ no nosso exemplo:

$h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. $\Rightarrow g(x) = x^2 \wedge f(x) = \operatorname{sen} x$.

- $f'(x) = \cos x$
- $g'(x) = 2x$

- $h'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = \boxed{2x \cos(x^2)}$.

Outro exemplo: $h(x) = (\operatorname{sen} x)^2$

$f(x) = x^2$; $g(x) = \operatorname{sen} x$.

- $f'(x) = 2x$
- $g'(x) = \cos x$

- $h'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} 2x$.

Um último exemplo:

$$g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9 \qquad f(t) = t^9 \; ; \; h(t) = \frac{t-2}{2t+1}$$

$$g'(t) = 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \cdot \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)'$$

$$g'(t) = 9 \cdot \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \cdot \frac{(2t+1)(1) - (t-2) \cdot 2}{(2t+1)^2}$$

$$\boxed{g'(t) = \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}}$$

Exemplos mais complexos:

$$y = e^{\operatorname{sen} x} \qquad f(x) = e^x \qquad g(x) = \operatorname{sen} x.$$

$$y' = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$$

⊛ Lembre-se $\frac{de^x}{dx} = e^x$

$y = sen(cos(tg\,x))$

$f(x) = sen(x) \qquad g(x) = cos((tg\,x))$

$y' = cos(cos(tg\,x)) \cdot [cos(tg\,x)]'$

Aplicando novamente:

$f(x) = cos\,x \qquad g(x) = tg\,x$

$y' = cos(cos(tg\,x)) \cdot (-sen(tg\,x)) \cdot sec^2 x$

$$\boxed{y' = -sen(tg\,x) \cdot cos(cos(tg\,x)) \cdot sec^2 x}$$

PROPRIEDADE INTERESSANTE:

$$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$$

$\cdot\ b^x = e^{\ln b \cdot x} \Rightarrow \frac{d}{dx} e^{\ln b\, x} \Rightarrow$ Regra da cadeia

$$e^{\ln b\, x} \cdot (\ln b \cdot x)' = \boxed{b^x \cdot \ln b}$$

Exemplo:

$\frac{d}{dx} 5^{x^2} \qquad f(x) = 5^x \quad g(x) = x^2$

$\Rightarrow 5^{x^2} \ln 5 \;\; 2x \boxed{= 2x \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 5}$

Demonstração da Regra da Cadeia:

$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$, Faça $\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)$.

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right] = f'(a) - f'(a) = 0$$

Mas $\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon \Delta x \Rightarrow \varepsilon \to 0$, $\Delta x \to 0$.

Seja $u = g(x)$ derivável em a e $y = f(u)$ derivável em $b = g(a)$

Seja Δx um incremento em x e Δy um incremento em y e u

Logo, $\Delta u = g'(a)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x = \Delta x [g'(a) + \varepsilon_1]$

e $\Delta y = f'(b)\Delta u + \varepsilon_2 \Delta u = \Delta u [f'(b) + \varepsilon_2]$

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

$$\therefore f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

RECORDANDO:

1) $(u(x))^r \Rightarrow r\,(u(x))^{r-1} \cdot u'(x)$

2) $(\operatorname{sen} u)' \Rightarrow \cos u \cdot u'$

3) $(\cos u)' \Rightarrow -\operatorname{sen} u \cdot u'$

4) $(\operatorname{tg} u)' \Rightarrow \sec^2 u \cdot u'$

5) $(\sec u)' \Rightarrow \operatorname{tg} u \cdot \sec u \cdot u'$

6) $(\operatorname{Arcsen} u)' \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

7) $(\operatorname{arctg} u)' \Rightarrow \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

8) $(e^u)' \Rightarrow e^u \cdot u'$

9) $(a^u)' \Rightarrow \ln a \cdot a^u \cdot u'$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

10) $(\ln u)' \Rightarrow \dfrac{1}{u} \cdot u'$

11) $(\log_a u)' \Rightarrow \dfrac{1}{\ln a \cdot u} \cdot u'$

Regra da potência: $r \cdot u^{r-1} \cdot u'$ $\quad (u^r)'$

Regra do produto: $uv' + vu'$. $\quad (u.v)'$

Regra do quociente: $\dfrac{v.u' - u.v'}{v^2}$ $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)'$

Regra da cadeia: $f'(g(x)) . g'(x)$ $\quad [(f(g(x))]'$.

Regra da inversa: $\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ $\quad [(f^{-1}(x))]'$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$ (squeeze theorem).

$$\lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0$$ (conseqüência do de cima).

$$\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{k}{t}\right)^t = e^k$$ (faça $a_t = \left(1 + \frac{k}{t}\right)^t$ e $b_t = \ln a_t$)

Lembre-se: casos $\frac{0}{0}$ bem provavelmente é só manipular; cheque os limites laterais;

Derivada Implícita.

Vamos derivar $x^2 + y^2 = 1$.

Faça $y = y(x)$ e pense numa regra da cadeia

Logo, $\frac{dy}{dx}(x) \Rightarrow 2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$

$$\therefore \; y'(x) = -\frac{x}{y(x)} \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{x}{y}. \quad (y \neq 0)}$$

Seja a função $y^3 + y = x$

$y'(x) = ?$ $\Rightarrow$ $3y^2 \cdot y' + y' = 1$

$$\boxed{\Rightarrow \; y' = \frac{1}{3y^2+1}}$$

I) $x+y = \text{sen}(xy)$

$$1+y' = \cos xy \cdot (y + xy')$$

$$1+y' = y \cdot \cos(xy) + xy' \cdot \cos(xy)$$

$$y'(1 - x \cdot \cos xy) = y\cos(xy) - 1$$

$$y' = \frac{y\cos xy - 1}{1 - x\cos xy}.$$

em $(0,0)$: $y' = \dfrac{0 - 1}{1 - 0} = \boxed{-1}$ //.

A reta é $\boxed{y = -x}$ //.

II) $xy + \ln x + \ln y = 1$

$$y + xy' + \frac{1}{x}\cdot 1 + \frac{1}{y}\cdot y' = 0$$

$$y'\left(x + \frac{1}{y}\right) = -\left(y + \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{y' = -\frac{\left(y + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{y}\right)}}$$ //

em $(1,1) \to y' = -\dfrac{\left(1+\frac{1}{1}\right)}{\left(1+\frac{1}{1}\right)} = -1.$

reta é $y = -x + n \Rightarrow 1 = -1 + n \quad n = 2.$

$\therefore \boxed{y = -x + 2}$ //

III) $x^2 - xy + y^2 = 12$

$2x - (y + xy') + 2yy' = 0$

$2x - y = y'(x - 2y)$

$\boxed{y' = \dfrac{2x - y}{x - 2y}}$ //.

$y' = 0 \Rightarrow 2x = y$, $\boxed{x \neq 2y}$ nec.

$x^2 - x(2x) + (2x)^2 = 12$

$x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 12$

$3x^2 = 12$

$\boxed{x = \pm 2}$ // $\boxed{y = \pm 4.}$ //

$(2,4)$ e $(-2,-4)$.

$y'' = \dfrac{(x-2y)(2-y') - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}$

$y' : (2,4)$ e $(-2,-4) = 0$

$$\therefore\ y'' : (2,4) = \frac{(2-8)(2) - (4-4)(1)}{(2-8)^2}$$

$$y'' : (2,4) = \frac{(-6)\cdot 2}{(-6)^2} = \frac{-12}{36} = \boxed{-1/3}$$

$$y''(-2,-4) = \frac{(-2+8)(2) - (-4+4)(1)}{(-2+8)^2}$$

$$y''(-2,-4) = \frac{2.6}{36} = \boxed{1/3}$$