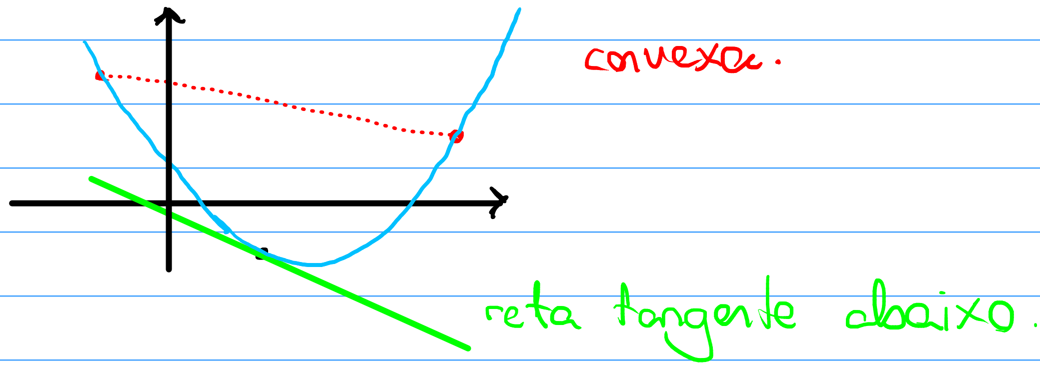
CONCAVIDADE DO GRÁFICO

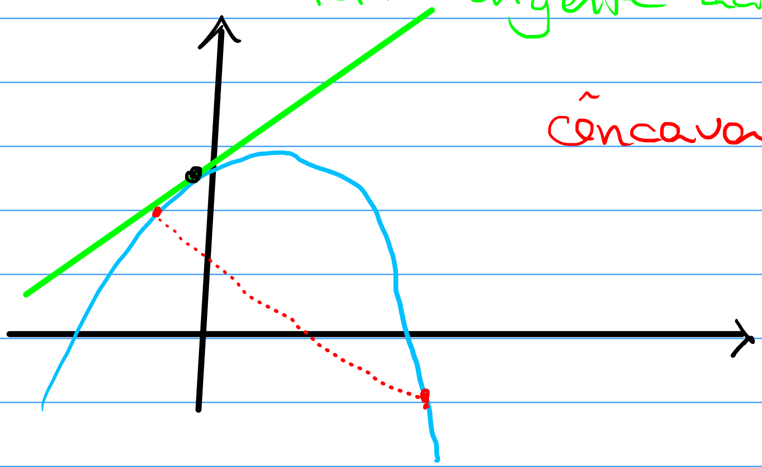
Def: Função Convexa: Uma função é convexa ou seu gráfico possui concavidade para cima, se dados 2 pontos do gráfico, o segmento determinado por eles está acima do gráfico.

f é convexa em $I(U)$ ⇒ a reta tangente em $x = x_0$ está abaixo do gráfico de f (numa vizinhança de x_0)



Def: Função Côncava: f é côncava ou seu gráfico possui concavidade para baixo se os segmentos que unem dois pontos do gráfico estão abaixo do gráfico.

f é côncava em $I(U)$ ⇒ a reta tangente em $x = x_0$ está acima do gráfico de f (numa vizinhança de x_0)



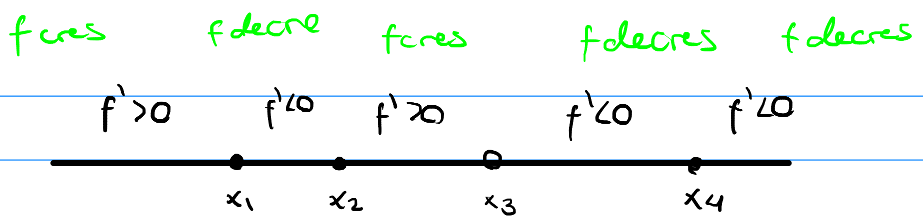
• **Proposição** ⇒ Seja $f: I \to \mathbb{R}$ contínua com $f': I \to \mathbb{R}$ crescente. Então $y = f(x)$ possui concavidade para cima.

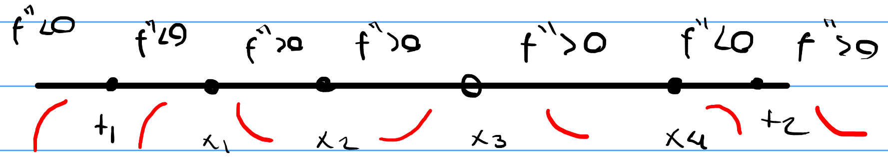
• **Proposição** ⇒ Seja $f: I \to \mathbb{R}$ contínua com $f': I \to \mathbb{R}$ decrescente. Então $y = f(x)$ possui concavidade para baixo.

• **Proposição** ⇒ Seja $f: I \to \mathbb{R}$, derivável até a 2ª ordem.

→ se $f''(x) > 0$ em I ⇒ $y = f(x)$ possui concavidade para cima (convexa), pela proposição 1.

→ se $f''(x) < 0$ em I ⇒ $y = f(x)$ possui concavidade para baixo (côncava), pela proposição 2.





$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_4) = 0$ e $\nexists\, f'(x_3)$ críticos de f

$f''(t_1) = f''(t_2) = 0$ críticos de f'.

• **Número de inflexão:** Seja $f: I \to \mathbb{R}$ contínua. $x_0 \in I$ é número de inflexão se houver mudança de concavidade em x_0.

Ex: $f(x) = e^{-x^2}$

a) domínio f
b) números críticos de
c) extremos locais
d) números de inflexão
e) intervalos abertos onde f é crescente ou decrescente
f) intervalos abertos onde f é convexa (cima) ou côncava (baixo)

a) $\mathbb{R}$

b) $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x\, e^{-x^2}$ $(\text{dom } f' = \mathbb{R})$

$\therefore f'(x) = 0 \Rightarrow -2x\, e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ $(e^{x} > 0)$.

O único número crítico é $x = 0$.

c) e e) Estudo do sinal de f':

$f'(0)$

$-\infty$ $\quad f' > 0 \quad$ 0 $\quad f' < 0 \quad$ $+\infty$

f cres $\qquad$ f decres.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{cres: } (-\infty, 0) \\ \text{decres: } (0, \infty) \end{array}}$$

cres → decres

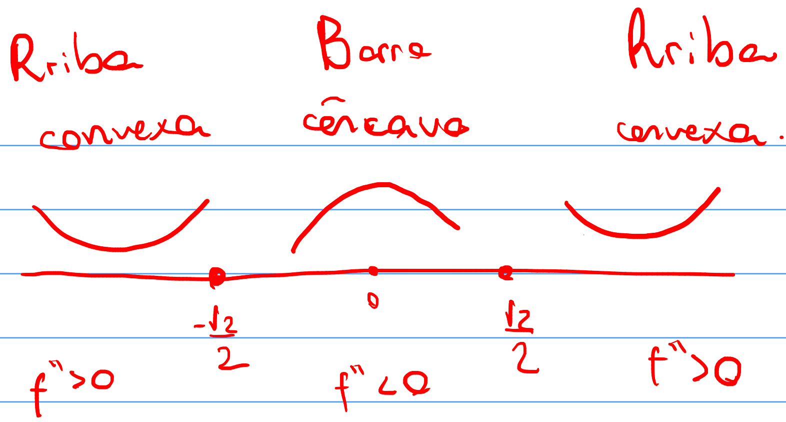
$\boxed{x = 0 \text{ é máximo local}}$

d) Estudando o sinal de $f''(x)$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$

$= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$



Inflexão : $\boxed{x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

f) Rriba : $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, \infty)$

Barra : $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Ex) $f(x) = e^{-x^2}$

a) $\lim_{x \to \infty} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Esboce o gráfico $f(x)$

a) $\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$

$\frac{1}{x} \to 0$, com $\frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x}$, então $\frac{1}{e^{x^2}} \to 0$

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$

b)

limdo da vó