Conjuntos Numéricos

① Vamos admitir conhecidos o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ dos números naturais, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ e o conjuntos dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} ; p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$ (com a condição $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$ quando $pq_1 = p_1 q$).
Temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, e podemos considerar $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ identificando cada $m \in \mathbb{Z}$ com $\frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$.
O conjunto $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

② Em geral, um conjunto A é um corpo quando existem duas operações (vamos denominá-las soma e multiplicação) satisfazendo:

- a soma associa a dois elementos $x, y \in A$ um elemento $x + y$ e a multiplicação associa um elemento $x . y$
- cada uma destas operações é comutativa (para quaisquer $x, y \in A$, tem-se $x + y = y + x$ e $x . y = y . x$) e associativa (para quaisquer $x, y, z \in A$ temos $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x . (y . z) = (x . y) . z$)
- existem elementos neutros para cada uma destas operações: $0 \in A$ para a adição ($x + 0 = x$ para qualquer $x \in A$) e $1 \in A$ para a multiplicação ($x . 1 = x$ para qualquer $x \in A$). Exigimos $0 \neq 1$

- existem elementos inversos para a soma (para qualquer $x \in A$ existe $(-x) \in A$ tal que $x + (-x) = 0$) e para a multiplicação em $A \setminus \{0\}$ (para qualquer $x \neq 0$ em A existe x^{-1} de modo que $x . x^{-1} = 1$).
- existe uma relação entre estas operações denominada distributividade: para quaisquer $x, y, z \in A$ tem-se $(x+y).z = x.z + y.z$.

Dizemos que A é grupo para a soma e $A \setminus \{0\}$ é grupo para a multiplicação.

O conjunto $\mathbb{Q}$ é exemplo de corpo para as operações usuais de soma e multiplicação.

$\mathbb{Z}$ é grupo para a soma, porém $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ não é grupo para a multiplicação devido à ausência de elementos inversos (em $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$!)

Voltando à situação em que A é um corpo, existem outras propriedades que decorrem da definição. Por exemplo:

- $x.0 = 0$ para todo $x \in A$. De fato,

  $x.0 + x = x.0 + x.1 = x.(0+1) = x.1 = x$.

  Somando $(-x)$: $x.0 + x + (-x) = x + (-x)$

  $\Rightarrow x.0 = 0$

- $x.(-y) = (-x).y$ para quaisquer $x, y \in A$

  De fato: $0 = x.(y + (-y)) = x.y + x.(-y)$

  Somando $(-x).y$ a $x.y + x.(-y) = 0$

obtemos $(-x).y + x.y + x.(-y) = (-x).y$

ou $[(-x)+x].y + x.(-y) = (-x).y$

logo: $0.y + x.(-y) = (-x).y$, ou seja, $x.(-y) = (-x).y$

- $\begin{cases} (-x).y = -(x.y) \\ (-x).(-y) = x.y \end{cases}$ (exercício)

  (em particular $(-1).(-1) = 1$, ou mais geralmente $(-x).(-x) = x.x$)

- $x.y = 0 \Rightarrow$ um dos fatores é nulo.

  De fato: se $x \neq 0$ então $x^{-1}.(x.y) = x^{-1}.0 = 0$ e portanto $(x^{-1}.x).y = y = 0$.

  Se $y \neq 0$ procedemos da mesma forma; finalmente, se $x = 0$ e $y = 0$ não há mais o que provar.

  Daqui resulta que se $x^2 = y^2$ então $x = y$ ou $x = -y$

  De fato: $x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x+y).(x-y) = 0$

  Portanto, ocorre uma das situações: $x = y$, $x = -y$ (se ocorreram simultaneamente então $x = y = 0$)

Usualmente escrevemos $x + (-y) = x - y$ ($x - y$ é o resultado de subtrair y de x) e também $x.y^{-1} = \frac{x}{y}$ quando $y \neq 0$ (divisão de x por y).

3 O corpo A é <u>ordenado</u> quando existe subconjunto A^+ (conjunto dos elementos positivos) tal que: (i) se $x, y \in A^+$ então $x+y \in A^+$ e $x.y \in A^+$; (ii) se $x \in A$, somente ocorre uma

das situações seguintes: $x = 0$, $x \in A^+$, $-x \in A^+$ (escrevendo $A^- = \{-x \,;\, x \in A^+\}$, então temos união disjunta $A = A^- \cup \{0\} \cup A^+$).

Observemos que $x^2 \in A^+$ se $x \neq 0$. De fato, se $x \in A^+$ trata-se de (i); se $(-x) \in A^+$, temos $(-x).(-x) \in A^+$ (ii). Porém $(-x).(-x) = x^2$.

Em particular, $1 \in A^+$

Exercício: $x \in A^-$ e $y \in A^- \Rightarrow x.y \in A^+$
$x \in A^-$ e $y \in A^+ \Rightarrow x.y \in A^-$
$x \in A^+ \Rightarrow x^{-1} \in A^+$; $x \in A^- \Rightarrow x^{-1} \in A^-$

Diremos que $x < y$ se $y - x \in A^+$ ($x \leq y$ se $y - x \in \{0\} \cup A^+$).

Proposição: 1) $x < y$ e $y < z \Longrightarrow x < z$

2) se $x, y, z \in A$, só ocorre uma das 3 possibilidades:

$x < y$, $x = y$, $x > y$

3) $x < y$ e $z \in A \Longrightarrow x + z < y + z$

4) $x < y$ e $z > 0 \Rightarrow x . z < y . z$
$x < y$ e $z < 0 \Rightarrow x . z > y . z$

Prova: exercício

Vê-se facilmente que $\mathbb{Q}$ é (corpo) ordenado, sendo $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} \,;\, p > 0 \text{ e } q > 0 \right\}$; tem-se $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$ (exercício). Observe que se $p \in \mathbb{Q}^-$ e $q \in \mathbb{Q}^-$ então $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$

A expressão $x \leq y$ significará $x < y$ ou $x = y$ ($x \leq y \Leftrightarrow y - x \in A^+ \cup \{0\}$)

<u>Definição</u>: dado $a \in A$, designamos por $|a|$ (módulo de a) o valor que satisfaz:

$|0| = 0$, $|a| = a$ se $a \in A^+$, $|a| = -a$ se $a \in A^-$

Equivalentemente: $|a| = \max\{a, -a\}$

Temos que $-|a| \leq a \leq |a|$; se $a > 0$ e $|x| < a$ então $-a < x < a$ (reciprocamente: se $a > 0$ e $-a < x < a$ então $|x| < a$).

Observemos que $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$ (para $a \geq 0$)

<u>Proposição</u>: para $x, y \in A$ quaisquer temos $|x+y| \leq |x| + |y|$ e $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Prova da desigualdade: $x \leq |x|$ e $y \leq |y| \Rightarrow x + y \leq |x| + |y|$

$-|x| \leq x$ e $-|y| \leq y \Rightarrow x + y \geq -(|x| + |y|)$

Isto é: $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, ou seja,

$|x+y| \leq |x| + |y|$

(4) Vamos agora discutir o aparecimento do conjunto dos números reais. Isso é feito de forma axiomática:

1) $\mathbb{R}$ é corpo ordenado contendo $\mathbb{Q}$, respeitando as operações de $\mathbb{Q}$ e a ordenação de $\mathbb{Q}$.

Isso significa que a soma e produto em $\mathbb{R}$, quando aplicados a elementos de $\mathbb{Q}$, resultam nos elementos de $\mathbb{Q}$ que são, respectivamente, a soma e o produto realizados em $\mathbb{Q}$. Além disso, $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{R}^+$.

2) $\mathbb{R}$ é (corpo ordenado) completo.

Este axioma permitirá encontrar soluções de equações como $t^2 = 2$ (mais geralmente, $t^2 = b$ onde $b > 0$).

O corpo $\mathbb{Q}$ é insuficiente para este objetivo: não existe nenhum $t \in \mathbb{Q}$ de modo que $t^2 = 2$. De fato, suponhamos que existam $p, q \in \mathbb{N}$ de modo que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Por meio de simplificação, podemos supor que p e q não sejam simultaneamente números pares. Ora, sendo $p^2 = 2q^2$, vemos que p é par (se p fosse ímpar, $p = 2k+1$ e então $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$, e daí p^2 seria número ímpar). Agora que já sabemos que p é par, escrevemos $p = 2\ell$ para algum $\ell \in \mathbb{N}$; segue-se que $p^2 = 4\ell^2 \Rightarrow 4\ell^2 = 2q^2$ $\Rightarrow q^2 = 2\ell^2 \Rightarrow q$ também é par. Segue-se um absurdo: supusemos que p e q não são simultaneamente pares, e concluímos que p e q são pares!

Conclusão: não existem $p, q \in \mathbb{N}$ de modo que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Exercício: mostre que se $m \in \mathbb{N}$ é primo então não existem $p, q \in \mathbb{N}$ de modo que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = m$.

Veremos adiante que se $k \in \mathbb{N}$ é par, então $t^k = b$ sempre possui solução se $b > 0$; caso k seja ímpar, $t^k = b$ possui solução para qualquer $b \in \mathbb{R}$.

O Axioma da Completude é enunciado do seguinte modo: consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ um intervalo fechado $I_n = [a_n, b_n]$ de modo que: (i) $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; (ii) $b_n - a_n \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Então existe um elemento $c \in \mathbb{R}$ t.q. $c \in \bigcap I_n$, e este elemento é único.

Analisemos a seguir algumas consequências da completude de $\mathbb{R}$.

Proposição: seja $a \geq 0$ t.q. $a \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $a = 0$

Prova: definamos $I_n = [0, \frac{1}{n}]$, para $n \in \mathbb{N}$.
Então $a \in \bigcap I_n$; como esta interseção contém um único elemento, e $0 \in \bigcap I_n$, vemos que $a = 0$

Proposição: dado um número real $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n_0 > M$.

Prova: caso $n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos $\frac{1}{M} \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\frac{1}{M} = 0$ pela Proposição anterior, o que é absurdo. Logo, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $n_0 > M$

<u>Exercício</u>: se $a, b \in \mathbb{R}^+$, mostre que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $m_0 \cdot a > b$

<u>Exercício</u>: considere um intervalo $[a,b]$ com $a<b$. Dado $m \in \mathbb{N}$, podemos dividir $[a,b]$ em subintervalos $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ de modo que $a_j - a_{j-1} \leq \frac{1}{m}$ para todo $1 \leq j \leq k$.

<u>Proposição</u>: seja $a<b$. Existe $r \in \mathbb{Q}$ t.q. $a<r<b$ ("densidade dos racionais").

<u>Prova</u>: considere $q \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{q} < b-a$ (por que existe?). A seguir considere o conjunto $U = \{n \in \mathbb{N} ; \frac{n}{q} \geq b\}$; como $U \neq \emptyset$ (por que?), possui um menor elemento $n_0 \in U$ (portanto $\frac{n_0}{q} \geq b$), pelo Princípio da Boa Ordenação. Segue-se que $\frac{n_0 - 1}{q} < b$. Afirmativa: $\frac{n_0-1}{q} > a$. Caso contrário, se $\frac{n_0-1}{q} \leq a$, devido a $\frac{n_0}{q} \geq b$ concluímos que $\frac{1}{q} \geq b-a$, absurdo

O Axioma da Completude é frequentemente utilizado na versão que envolve os conceitos de supremo e ínfimo de um conjunto

<u>Definição</u>: seja $A \neq \emptyset$ subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que A é <u>limitado</u> <u>superiormente</u> se existe $M \in \mathbb{R}$ de modo que $a \leq M$ para todo $a \in A$; qualquer elemento de $\mathbb{R}$ com tal propriedade é uma <u>cota superior</u>

De modo análogo, A é limitado inferiormente se existe $m \in \mathbb{R}$ de modo que $m \leq a$ para todo $a \in A$; tais elementos são cotas inferiores de A.

Teorema: seja $A \neq \emptyset$ limitado superiormente. Então existe uma cota superior de A (denominada supremo de A) que é a menor dentre todas as cotas superiores.

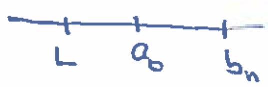
Prova: começamos tomando algum $a_1 \in A$ e uma cota superior $b_1 \in \mathbb{R}$; seja $I_1 = [a_1, b_1]$.
Dividimos I_1 em dois segmentos iguais; seja $c \in \mathbb{R}$ o ponto médio. Caso $c \in \mathbb{R}$ seja cota superior de A, escolhemos $I_2 = [a_2, b_2]$ com $a_2 = a_1$ e $b_2 = c$; senão, existe algum $a_2 \in A$ t.q. $c < a_2 \leq b_1$, e escolhemos $I_2 = [a_2, b_2]$ com $b_2 = b_1$.
Qualquer que seja a opção, $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$, o extremo esquerdo a_2 de I_2 pertence a A e o extremo direito b_2 de I_2 é cota superior.

A partir de I_2 e pelo mesmo processo criamos $I_3 = [a_3, b_3]$ t.q. $b_3 - a_3 = \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \frac{1}{2^2}(b_1 - a_1)$, sendo $a_3 \in A$ e b_3 cota superior de A.
Prosseguindo, obtemos sequência de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ de modo que $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1)$, $a_n \in A$ e b_n é cota superior.
Pelo Axioma da Completude, existe um único $L \in \bigcap I_n$. Afirmamos que L é o supremo de A.

- L é cota superior de A

De fato, observemos que $b_n - L \leq \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; caso exista $a_0 \in A$ satisfazendo $a_0 > L$ então $b_n - L \geq a_0 - L$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e daí $\frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \geq a_0 - L$, ou seja, $2^{n-1} \leq \frac{b_1 - a_1}{a_0 - L}$, o que implica $n - 1 \leq \frac{b_1 - a_1}{a_0 - L}$.

Concluimos que $n \leq 1 + \frac{b_1 - a_1}{a_0 - L}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, absurdo.



- L é a menor das cotas superiores de A.

Seja então L_1 cota superior t.q. $L_1 \leq L$

Temos $L - a_n \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; mas $a_n \leq L_1$, de modo que $0 \leq L - L_1 \leq L - a_n \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente $L = L_1$.

Observações: 1) pode ocorrer tanto $L \in A$ quanto $L \notin A$, como se vê nos exemplos $[a,b]$ ou $[a,b)$. Em ambos os casos $L = b$.

2) Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Temos que $(\sup A) - \varepsilon < \sup A$, logo $(\sup A) - \varepsilon$ não é cota superior de A. Logo existe algum $a_0 \in A$ t.q. $(\sup A) - \varepsilon < a_0$. Como $a_0 \leq \sup A$, temos $a_0 \in ((\sup A) - \varepsilon, \sup A)$

Exercício: refazer o Teorema para a existência do ínfimo quando $A \neq \emptyset$ for limitado inferiormente.

Exemplo: $0 = \inf\{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\}$

Proposição: seja $I_n = [a_n, b_n]$ sequência de intervalos encaixantes, isto é, $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\cap I_n \neq \emptyset$.

Prova: temos $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$.
O conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ é limitado superiormente, pois cada b_m é cota superior de A. Seja $c = \sup A$, portanto $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pois o supremo também é cota superior...). Porém $c \leq b_m$ qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$ pois $\underline{c}$ é a menor das cotas superiores de A. Daí, $a_n \leq c \leq b_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in \cap I_n$.

Exercício: refazer o Teorema anterior mostrando a existência do ínfimo de um conjunto limitado inferiormente.

Até o momento não mostramos que $\mathbb{R}$ contém outros elementos além dos números racionais. Mostraremos a seguir que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ também é um conjunto denso em $\mathbb{R}$, isto é, dados $a < b$, existe $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ t.q. $a < c < b$.
Faremos isto de forma indireta, analisando as cardinalidades de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

<u>Definição</u>: um conjunto X é <u>enumerável</u> quando existe $f: \mathbb{N} \longrightarrow X$ sobrejetiva (f é uma <u>enumeração</u>)

Isso significa que varremos X por meio dos elementos $f(1), f(2), \ldots, f(n)$, podendo haver repetições. Por exemplo, os conjuntos finitos são enumeráveis.

Nosso objetivo agora é mostrar que $\mathbb{Q}$ é enumerável e $\mathbb{R}$ é não-enumerável.

<u>Exercício</u>: <u>qualquer</u> subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.

<u>Exemplo</u>: $\mathbb{Z}$ é enumerável.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots
\end{array}$$

Podemos explicitar a enumeração como:

n par $\Rightarrow f(n) = -\frac{n}{2}$

n ímpar $\Rightarrow f(n) = \frac{n-1}{2}$

Observe que se trata de uma bijeção.

<u>Exercício</u>: $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ é enumerável.

<u>Exemplo</u>: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

$$\begin{array}{cccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

<u>Exemplo</u>: $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Sejam $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ e $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}^*$ enumerações.

Definimos $F: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ como $F(m,n) = \dfrac{f(m)}{g(n)}$

Tomamos então $F \circ \ell$, onde $\ell: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumeração.

Exercício: se X e Y são enumeráveis então $X \cup Y$ é enumerável.

Este exercício pode ser aplicado ao caso $X = \mathbb{Q}$ e $Y = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; caso $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ seja enumerável então $\mathbb{R}$ é enumerável. Neste ponto intervém novamente o Axioma da Completude.

Teorema: $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Prova: seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ enumeração. Consideremos $I_1 = [a_1, b_1]$ t.q. $f(1) \notin I_1$. A seguir tomamos $I_2 = [a_2, b_2]$ com $I_2 \subset I_1$ de modo que $f(2) \notin I_2$. Prosseguimos indutivamente: supondo já escolhidos $I_n \subset \ldots \subset I_2 \subset I_1$ de modo que $f(j) \notin I_j$ para $1 \leq j \leq n$, escolhemos $I_{n+1} \subset I_n$ de modo que $f(n+1) \notin I_{n+1}$. Seja $c \in \cap I_j$, isto é, $c \in I_j$ para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Como $c = f(m)$ para algum $m \in \mathbb{N}$, e $c \in I_m$, obtemos contradição com $f(m) \notin I_m$.

Concluimos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não é enumerável; além de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$, os elementos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são muito mais abundantes do que os elementos de $\mathbb{Q}$.

Observe-se que o argumento acima se aplica a qualquer intervalo $[a, b]$, com $a < b$.

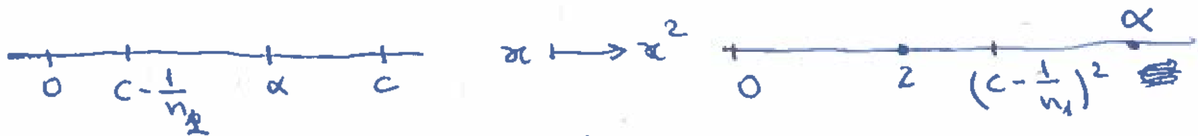
Exercício: $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a, b]$ é não enumerável.

Segue-se que em qualquer intervalo $[a,b]$ com $a<b$ existem números irracionais.

<u>Exemplo</u>: podemos mostrar diretamente que existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $c^2=2$ (vimos que $c \notin \mathbb{Q}$)
Considere $A = \{a \in \mathbb{R}^+ ; a^2 < 2\}$. Temos $1 \in A$, e é impossível termos algum $a_0 \in A$ t.q. $a_0 > 2$, pois neste caso $a_0^2 > 4$. Portanto, 2 é cota superior de A. Seja $c = \sup A$; mostraremos que $c^2 = 2$ eliminando as possibilidades $c^2 < 2$ e $c^2 > 2$.

- suponhamos $c^2 < 2$; mostre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $(c + \frac{1}{n_0})^2 < 2$. Daí $c + \frac{1}{n_0} \in A$, absurdo. Em particular, $c \notin A$.

- caso $c^2 > 2$, mostre que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ de modo que $(c - \frac{1}{n_1})^2 > 2$. Porém, no intervalo $(c - \frac{1}{n_1}, c)$ existe algum $\alpha \in A$, e portanto $\alpha^2 > 2$, contradição.



<u>Exercício</u>: refaça o argumento tomando $\inf\{b \in \mathbb{R}^+ ; b^2 > 2\}$
Mostre que existe raiz quadrada de qualquer $b \in \mathbb{R}^+$.

<u>Referência</u>: o Curso de Análise Real, de Cassio Neri e Marco Cabral, traz no Capítulo 3 uma construção dos números reais a partir dos números racionais.

Complemento: Duas Propriedades de $\mathbb{N}$

A) Princípio da Boa Ordenação: seja $U \neq \emptyset$ um subconjunto de $\mathbb{N}$. Existe então $m \in U$ tal que $m \leq n$ para todo $n \in U$ ("m é o menor elemento de U")

B) Princípio da Indução: seja $V \subset \mathbb{N}$ tal que

- $1 \in V$
- sempre que um natural $p \in V$ então $p+1 \in V$

Então $V = \mathbb{N}$.

Vejamos alguns exemplos de aplicação de B.

1) Para qualquer $m \in \mathbb{N}$ temos $1+2+\dots+m = \frac{m+1}{2} \cdot m$

De fato, seja $V = \{ m \in \mathbb{N} ; 1+2+\dots+m = \frac{m+1}{2} \cdot m \}$

Claramente $1 \in V$; desejamos mostrar que $V = \mathbb{N}$. Seja $p \in V$, isto é,

$$1+2+\dots+p = \frac{p+1}{2} \cdot p$$

Queremos mostrar que $p+1 \in V$. Ora:

$1+2+\dots+p+p+1 = (1+2+\dots+p) + (p+1) = \frac{p+1}{2} \cdot p + p+1$

$= (\frac{p}{2}+1)(p+1) = \frac{1+(p+1)}{2} \cdot (p+1)$, logo $p+1 \in V$

e $V = \mathbb{N}$ portanto.

2) Exercício: sejam $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Então

$$a + (a+r) + \dots + (a+nr) = \frac{2a+nr}{2} \cdot (n+1)$$

3) Exercício: considere $b > 1$. Então

$$\frac{b^{n+1}-1}{b-1} = 1 + b + \dots + b^n \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}$$

4) <u>Exercício</u>: seja $x \geq -1$. Então $(1+x)^n \geq 1+nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, $2^n \geq 1+n > n$

5) <u>Exercício</u>: mostre que

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$