Mudança de variáveis em Integrais Duplas

Já vimos uma transformação de variável em integrais duplas que são as coordenadas polares.

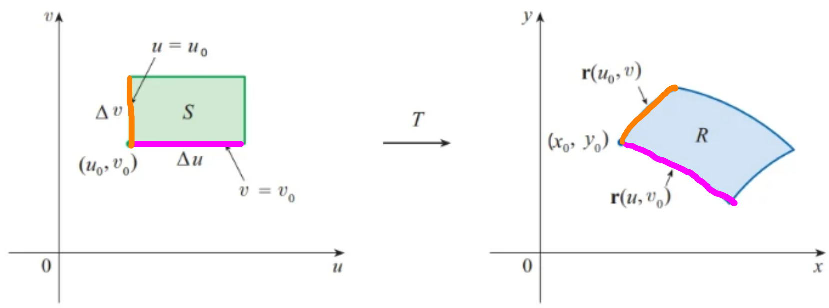
Plano xy $\longrightarrow$ Plano $r\theta$ com $x = r\cos\theta$ $\wedge$ $y = r\sin\theta$.

Considere uma mudança geral marcada pela transformação T do plano uv no plano xy:

$$T(u,v) = (x,y) \quad e \quad x = g(u,v) \wedge y = h(u,v)$$

Geralmente, T é de classe C^1, ou seja, possui as derivadas parciais de primeira ordem. Se T é injetora, então existe T^{-1} que leva xy em uv.

Partindo para a integral dupla, suponha que queiramos calcular $\iint_R f(x,y)\,dA$, mas seja difícil. Assim, buscamos uma mudança de variável que transforme R em S, facilitando a integração.



$(x,y) = T(u,v)$

e

$(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$

e

$x = g(u,v)$

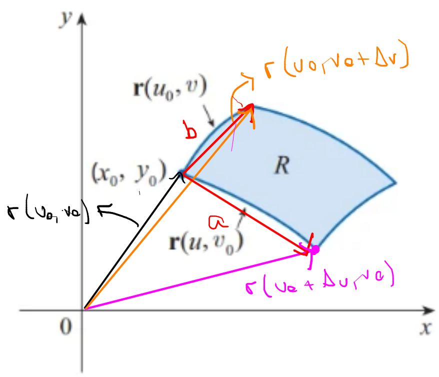
$y = h(u,v)$

Considere o vetor $r(u,v) = g(u,v)\hat{i} + h(u,v)\hat{j}$ seja o vetor posição da imagem do ponto (u,v), ou seja, (x,y).

Assim, os vetores tangentes a (x_0, y_0) serão:

$$\boxed{\begin{aligned} r_u &= \frac{\partial x}{\partial u}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\hat{j} \\ r_v &= \frac{\partial x}{\partial v}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\hat{j} \end{aligned}}$$

Além disso, sabemos que:



$$b = r(u_0, v_0+\Delta v) - r(u_0, v_0)$$
$$a = r(u_0+\Delta u, v_0) - r(u_0, v_0)$$

Além disso, sabemos que:

$$r_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{r(u_0+\Delta u, v_0) - r(u_0, v_0)}{\Delta u} \quad \text{e} \quad \boxed{r_u \cdot \Delta u \approx b}.$$

Analogamente, $\boxed{r_v \Delta v \approx a}$

Assim, conseguimos aproximar a área R pelo paralelogramo de área $|a \times b|$, com
$|a \times b| = |(r_u \Delta u) \times (r_v \Delta v)| = |r_u \times r_v| \, \Delta u \, \Delta v$.

Além disso, sabemos que $r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} \hat{k}$

O determinante $\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix}$ é o JACOBIANO

da transformação T dada por $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$.

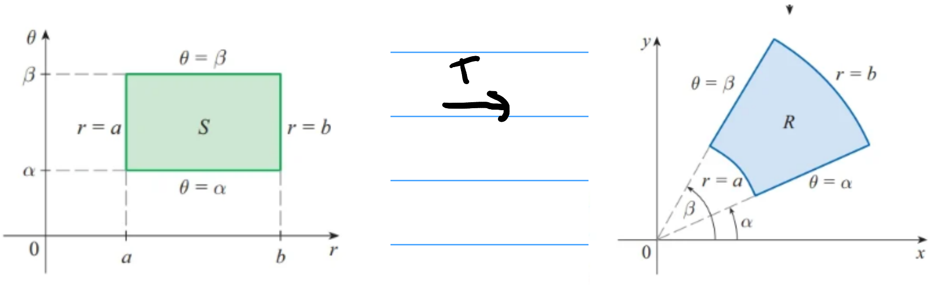
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix}$$

Com isso, temos que $\Delta A \approx \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \cdot \Delta u \cdot \Delta v$

e, tendendo ao infinito, temos:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_S f(g(u,v), h(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv}$$

Coordenadas Polares



Para integrais triplas é a mesma coisa.

$$\boxed{13} \quad \iiint_R f(x,y,z)\,dV = \iiint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$