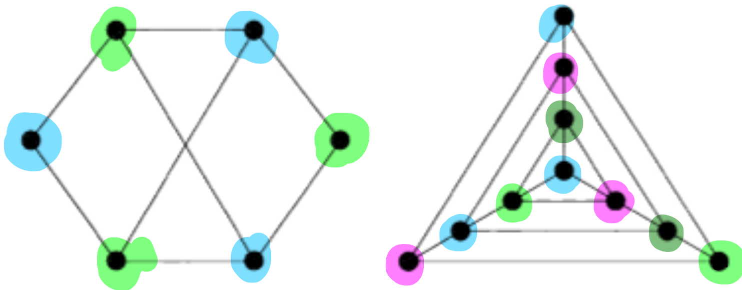
Exercício 1 Encontre o número cromático de cada um dos seguintes grafos:



Números cromáticos: 2 e 3

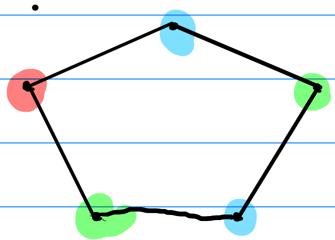
Exercício 2 Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique.

(a) Se G contém como subgrafo o grafo completo K_r, então o número cromático de G é maior ou igual a r.

(b) Se o número cromático de G é maior ou igual a r, então G contém como subgrafo o grafo completo K_r.

a) Sabemos que um grafo completo K_r é r-cromático. Se G contém um subgrafo K_r, então G é pelo menos r-cromático. A configuração mínima seria G ser o K_r. Se o número cromático de G fosse menor que r, K_r seria no máximo $(r-1)$-cromático, absurdo!

b) Falso. Tome como exemplo:



O grafo é 3-cromático, mas não possui grafo isomorfo a K_3

Exercício 3 Seja G um grafo simples planar que não contém triângulos.

(a) Prove que G contém um vértice de grau no máximo 3.

(b) Prove que $\chi(G) \leq 4$.

a) Para número de vértices $v < 2$, temos que a afirmativa é verdade. Para $v \geq 3$, temos que vale que $e \leq 2v - 4$, onde e é o número de arestas do grafo planar simples

Supondo que todos vértices satisfaçam $\delta(v) \geq 4$. Assim,

$$4v \leq \sum_{v \in V} \delta(v) = 2e \quad e \quad 2v \leq e.$$

Contudo, sabemos que vale $e \leq 2v - 4$, assim $2v \leq e \leq 2v - 4$, que é um absurdo.

Logo $\exists v \in V \mid \delta(v) \leq 3$.

b) Temos que G não possui subgrafo isomorfo a K_3 e $\exists v \in V \mid \delta(v) \leq 3$.

Vamos provar por indução no número de vértices de G. Para $n \leq 3$, a tese vale trivialmente.
Suponha válido que $\chi(G) \leq 4$ $\forall$ $G(V, E) \mid |V| \leq n$.
Queremos verificar se vale para o caso $n+1$.
Se G' o grafo obtido retirando $v \in V \mid \delta(v) \leq 3$ de G, lembrando que G e G' não têm triângulos
$(G' = G \setminus \{v\})$

Caso 1) $\delta(v) < 3 \Leftrightarrow \delta(v) \leq 2$. Então v tem no máximo 2 vizinhos. Assim, como $\chi(G') \leq 4$, então, trivialmente, $\chi(G) \leq 4$, já que G, G' não têm triângulos.

Caso 2) $\delta(v) = 3$. Então v tem 3 vizinhos. Como $\chi(G') \leq 4$, então $\chi(G)$ é no máximo 4 (pior caso seria $\chi(G') = 4$, mas como $\delta(v) = 3$, então podemos repetir uma das quatro cores na coloração de v). Assim $\chi(G) \leq 4$.

Exercício 4 Tente provar o Teorema das Quatro Cores adaptando a demonstração do resultado "todo grafo planar é 6-colorível". Em qual ponto falha a prova?

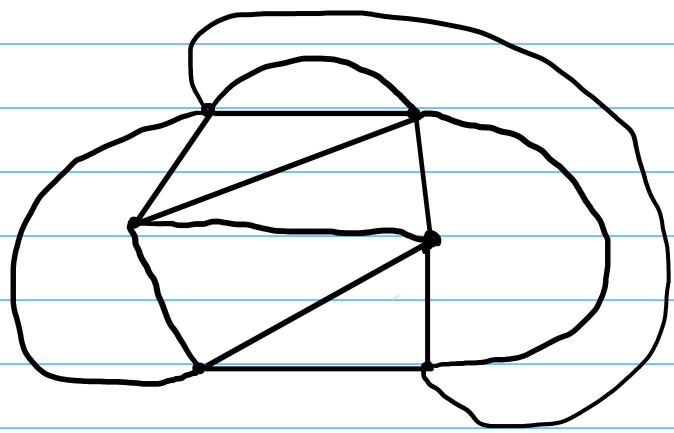
- G contém v tal que $\delta(v) \leq 5$
- Devemos fazer indução no número de vértices
- Usar que todo grafo simples conexo é $(\Delta(G)+1)$-colorível.
- A ideia é tirar um vértice $v \mid \delta(v) \leq 5$. Como o subgrafo é $(\Delta(G')+1)$-colorível, então quando recolocarmos o vértice, sempre sobrará uma cor para v.

Adaptação

- G contém v tal que $\delta(v) \leq 3$
- Devemos fazer indução no número de vértices
- Usar que todo grafo simples conexo é $(\Delta(G)+1)$-colorível.

• A ideia é tirar um vértice $v \mid \delta(v) \leq 3$. Caso o subgrafo é $(\Delta(G_i)+1)$-colorível, então quando recolocarmos o vértice, sempre sobrará uma cor para v.

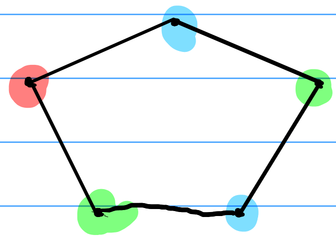
A demonstração falha no primeiro passo. Podemos montar um grafo planar tal que $\nexists v \in V \mid \delta(v) \leq 3$.



Exercício 5 É possível eliminar a hipótese $\Delta \geq 3$ do Teorema de Brooks? Isto é, continua valendo a tese se $\Delta < 3$?

Suponha qe valha para $0 \leq \Delta(G) \leq 2$.
Então, pelo teorema, G é $\Delta(G)$-colorível (G simples e não completo).

Isso é um absurdo, temos, por exemplo, o seguinte grafo:



Temos qe $\Delta(G) = 2$, mas G não é 2-colorível, pois G é 3-cromático.

Logo, não é possível eliminar tal hipótese do teorema.

Exercício 6 Seja G um grafo simples conexo com $\Delta(G) \leq d$, e tal que G contém um vértice de grau (estritamente) menor a d. Prove que $\chi(G) \leq d$.

$\Delta(G) \leq d$ e $\exists v \in V \mid \delta(v) \leq d-1$.
Provar qe $\chi(G) \leq d$.

Vamos provar por indução no número de vértices. Para $n=1$, a observação é trivial. Suponha válida a tese para todo grafo com no máximo $n-1$ vértices.
Vamos verificar se vale para n vértices.

Seja G um grafo de $n-1$ vértices
• tal que $\Delta(G) \leq d$, $\exists w \in V \mid \delta(w) \leq d-1$, $\chi(G) \leq d$.

Temos duas situações:
1) adicionar $v \mid \delta(v) \leq d-1$ a G e criar G';
2) adicionar $v \mid \delta(v) \leq d$ a G e criar G'.

1) Adicionando $v \mid \delta(v) \leq d-1$ em G, criaremos G' tal que $\Delta(G') \leq d$ e $\exists v \in V' \mid \delta(v) \leq d-1$. Caso $\chi(G) \leq d$ e adicionamos v, temos que sobrará pelo menos uma cor das $\chi(G)$ cores usadas para colorir os vértices de G para colorir v, assim $\chi(G') \leq d$, confirmando a hipótese.

2) Adicionando $v \mid \delta(v) \leq d$ em G, criaremos G' tal que $\Delta(G') \leq d$ e $\exists k \in V \mid \delta(k) \leq d-1$ (já que G cumpre a hipótese).
Agora, retirando w de G', criamos um grafo G'' em que, não temos certeza se existe vértice tal que seu grau é no máximo $d-1$. Contudo, o caso máximo para G'' é ser um K_d. Portanto, $\chi(G'') \leq d$.
Adicionando w a G'' voltamos para G'. Pelo caso 1), $\chi(G'') \leq d$.

Outro jeito: Teorema de Brooks: Se G é simples não completo com $\Delta(G) \geq 3$, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$. Provar para $\Delta(G) \leq 2$ apenas.

Exercício 7 O Departamento de Matemática Aplicada está preparando o horário das disciplinas para o próximo ano. Existem um total de n disciplinas para serem distribuídas em m horários durante a semana. Alguns pares de disciplinas não podem ser oferecidos no mesmo horário porque alguns alunos precisam cursa-los simultaneamente. Modele este problema como um problema de coloração em grafos, determine o significado dos vértices, das arestas e das cores. Sob quais condições não é possível encontrar um horário factível?

O grafo tem n vértices (disciplinas) e dois vértices são adjacentes se, e só se, as disciplinas correspondentes não podem ser oferecidas no mesmo horário.

Não será possível encontrar um horário factível se $\chi(G) \geq m+1$ e será possível encontrar horários se $\chi(G) \leq m$.

Lembre-se da definição de coloração por vértices.

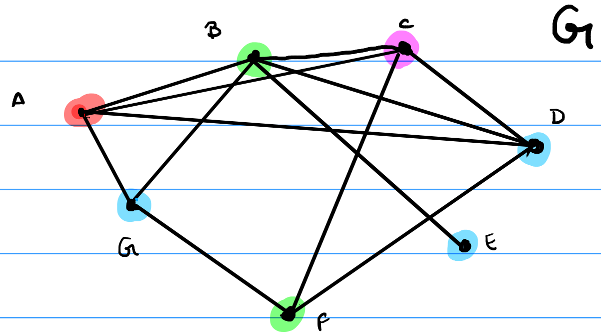
Exercício 8 Uma indústria química precisa armazenar algumas substâncias químicas em um depósito. Algumas substâncias reagem violentamente quando em contato, e o gerente da indústria decide dividir o depósito em várias salas de modo a manter separados um par de substâncias perigosas. Na seguinte tabela, estão indicados tais pares:

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	*	*	*			*
B	*	-	*	*	*		*
C	*	*	-	*		*	
D	*	*	*	-		*	
E		*			-		
F			*	*		-	*
G	*	*				*	-

Tabela 1: Os asteriscos indicam os pares de substâncias que devem ser mantidas separadas.

Construa um grafo apropriado. Encontre o menor número de salas necessárias para o armazenamento as substâncias químicas com segurança.

Os vértices são as substâncias e dois vértices são adjacentes se, e só se, as substâncias correspondentes devem ser mantidas separadas.



Teorema: Se G contém um subgrafo isomorfo a K_r, então $\chi(G) \geq r$.

Como G possui um subgrafo isomorfo a K_4, mas não possui subgrafo isomorfo a K_5, então $\chi(G) = 4$.

Logo, são necessárias, no mínimo, 4 salas.

$\neq G$

Definição. Um grafo G é *k-crítico* se $\chi(G) = k$ e, dado qualquer subgrafo G' de G, $\chi(G') < k$.

Exercício 9 Mostre que se G é um grafo *k-crítico*, então seus vértices possuem grau pelo menos $k-1$.

Suponha, por absurdo, que $G(V,E)$ é K-crítico e $\exists v \in V \mid \delta(v) \leq k-2$.

Sabemos que o número cromático máximo é do K_n e $\chi(K_n) = n$ (no caso de grafos simples). Assim, no nosso caso, temos que sobrariam ao menos $n-k+2$ cores para pintar v. No caso máximo, sobraria ao menos 2 cores para pintar v $(k=n)$.

Portanto, se removermos v de G, obteríamos G' tal que $\chi(G') \geq k$, o que é um absurdo, já que G é K-crítico.

Logo, se G é K-crítico, $\delta(v) \geq k-1 \; \forall v \in V$.

Exercício 10 Mostre que em um grafo k-crítico com n vértices, o número de arestas é pelo menos $\frac{1}{2}(k-1)n$.

Pelo exercício nove, temos que $\delta(v) \geq k-1 \; \forall v \in V$.
Assim, temos o seguinte:

$(k-1).n \leq \sum_{v \in V} \delta(v)$ (soma dos graus é maior ou igual do que o caso $(k-1)$-regular)

Portanto, $(k-1)n \leq 2e$ e $e \geq 1/2\,(k-1)n$.
Logo, o número de arestas é pelo menos $1/2\,(k-1)n$.