Funções Contínuas

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ função definida no intervalo I; sendo $c \in I$, dizemos que f é contínua em c quando $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (ou, equivalentemente, para toda sequência $x_n \to c$ com $x_n \in I$ temos $f(x_n) \to f(c)$)

A função é contínua em I quando for contínua em todos seus pontos. Exemplos usuais são os polinômios, as funções racionais (em seu domínio de definição), funções trigonométricas.

Exemplo: seja $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = A$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $h(x) = B$ se $x \notin \mathbb{Q}$ $(A \neq B)$. Então h é descontínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

Já $l(x) = x\,h(x)$ é contínua em 0. De fato, $|l(x)| \leq (\max\{|A|, |B|\})|x|$, de modo que $\lim_{x \to 0} l(x) = 0 = l(0)$

De modo mais geral: seja $f: I \to \mathbb{R}$ limitada numa vizinhança de $c \in I$. Então $(x-c)f(x)$ é contínua em $c \in I$. Casos interessantes: $x^k \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $k \in \mathbb{N}$

Exemplo: consideremos uma função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz $h(x+y) = h(x) + h(y)$ quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Vejamos o que se pode dizer sobre ela.

(i) $h(0) = 0$, pois $h(x+0) = h(x) + h(0) \Rightarrow h(x) = h(x) + h(0)$
$\Rightarrow h(0) = 0$

(ii) $h(x) = -h(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
De fato, $h(x + (-x)) = h(x) + h(-x) \Rightarrow h(0) = h(x) + h(-x)$
$\Rightarrow h(x) = -h(-x)$.

(iii) $h(m) = m\,h(1)$ para $m \in \mathbb{Z}$

Suponhamos $m \in \mathbb{N}$; temos que

$h(m) = h(m-1+1) = h(m-1)+h(1) = h(m-2)+2h(1) = \dots = m h(1)$

Se $m=-k$ para $k \in \mathbb{N}$, segue-se que

$h(m) = h(-k) = -h(k) = -h(1)k = h(1)(-k) = h(1)m$

(IV) Se $m \in \mathbb{Z}$ então $h\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} h(1)$ $(m \neq 0)$.

De fato, suponhamos $m \in \mathbb{N}$:

$$h\Big(\underbrace{\tfrac{1}{m}+\dots+\tfrac{1}{m}}_{m \text{ vezes}}\Big) = \underbrace{h\left(\tfrac{1}{m}\right)+\dots+h\left(\tfrac{1}{m}\right)}_{m \text{ vezes}} = m\, h\left(\tfrac{1}{m}\right)$$

$\Rightarrow h(1) = m h\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} \cdot h(1)$

Se $m=-k$, com $k \in \mathbb{N}$: $h\left(\frac{1}{m}\right) = h\left(-\frac{1}{k}\right)$

$= -h\left(\frac{1}{k}\right) = -\frac{h(1)}{k} = \frac{h(1)}{m}$

(V) Finalmente consideremos $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\frac{m}{n} > 0$.

Temos $h\left(\frac{m}{n}\right) = h\Big(\underbrace{\tfrac{1}{n}+\dots+\tfrac{1}{n}}_{m \text{ vezes}}\Big) = m\, h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} h(1)$

Se $\frac{m}{n} = \frac{-k}{n}$, com $k, n \in \mathbb{N}$:

$h\left(\frac{m}{n}\right) = h\left(-\frac{k}{n}\right) = -h\left(\frac{k}{n}\right) = -\frac{k}{n} h(1) = \frac{m}{n} h(1)$

Resumindo: Temos $h(r) = h(1) \cdot r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$; imaginamos que $h(x) = h(1) \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Porém, existem exemplos mostrando não ser este o caso. O que faz diferença é a continuidade de h e se assumimos esta propriedade vemos imediatamente que $h(x) = h(1) \cdot x$. De fato, seja $\frac{p_n}{q_n} \to x$ sequência de racionais e x irracional.

Ora, $h\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = h(1) \frac{p_n}{q_n} \Rightarrow h(x) = h(1)\, x$.

Vejamos agora propriedades características das funções contínuas.

Teorema: seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então f é limitada.

prova: vamos mostrar que f é limitada superiormente. Caso não o seja, para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos $x_n \in [a,b]$ de modo que $f(x_n) > n$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (x_n) possui subsequência (x_{n_j}) convergente para um ponto de $[a,b]$. Pela continuidade de f tem-se que $(f(x_{n_j}))$ também é convergente, e em particular limitada superiormente. Mas $f(x_{n_j}) > n_j$, ou seja, $(f(x_{n_j}))$ não é limitada superiormente, absurdo $\square$

Exercício: complete a demonstração para concluir que f é limitada inferiormente.
Dê exemplos de funções contínuas definidas em $[a,b)$ não limitadas.

Teorema: seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, $A = \inf\{f(t) ; t \in [a,b]\}$, $B = \sup\{f(t) ; t \in [a,b]\}$. Existem então $c, d \in [a,b]$ de modo que $f(c) = A$ e $f(d) = B$.

prova: existe sequência (y_n) com $y_n \in [a,b]$ de modo que $f(y_n) \to A$ (porque?). Porém (y_n) possui subsequência convergente pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, digamos $y_{n_j} \to c$. Pela continuidade de f temos que $\lim f(y_{n_j}) = f(c)$, e portanto $A = f(c)$ $\square$

Exercício: complete a demonstração para obter a existência de $d \in [a,b]$ t.q. $f(d) = B$.

Portanto, se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, existem pontos em $[a,b]$ onde são atingidos os valores de mínimo e de máximo da função; tais pontos são chamados pontos de mínimo global e de máximo global para a função.

Exercício: seja $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua de modo que $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$. Então existe um ponto de mínimo global para h.

Enuncie a propriedade correspondente quando $\lim_{x \to \infty} h(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \infty} h(x) = -\infty$.

definição: uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ é uma sequência finita de pontos $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k = b$.
Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos a partição $\mathcal{P}_n$ formada por intervalos de mesmo comprimento $\dfrac{b-a}{n}$.

Teorema: seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\varepsilon > 0$ qualquer. Existe então $n \in \mathbb{N}$ de modo que se x, y pertencem ao mesmo intervalo de $\mathcal{P}_n$ temos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Este Teorema traduz a idéia intuitiva de que a função contínua passa do valor $f(a)$ para o valor $f(b)$ por meio de pequenos acréscimos.

<u>prova</u>: por absurdo. Suponhamos que P_n não satisfaça o Teorema qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $x_n, y_n \in [a,b]$ de modo que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ (isto é, x_n, y_n estão em algum subintervalo da partição) mas $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Passando a subsequências convergentes (novamente usando o Teorema de Bolzano-Weierstrass) (x_{n_j}) e (y_{n_j}), vemos que $\lim x_{n_j} = \lim y_{n_j}$ (pois $|x_{n_j} - y_{n_j}| \leq \frac{1}{n_j}$). Seja $c \in [a,b]$ este limite comum. Segue-se então que $\lim f(x_{n_j}) = f(c) = \lim f(y_{n_j})$ devido à continuidade da função, o que é impossível porque $|f(x_{n_j}) - f(y_{n_j})| \geq \varepsilon$ $\square$

Diremos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua é <u>uniformemente contínua</u>. Mais geralmente, consideremos $g: I \to \mathbb{R}$; g é <u>uniformemente contínua</u> quando, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ de modo que $|x-y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

<u>Exemplo</u>: consideremos $g: (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$. Ela não é uniformemente contínua: se procuramos $\delta > 0$ de modo que $|x-y| < \delta$ implica $|g(x) - g(y)| < \frac{1}{2}$, deparamos com pares de pontos $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}$ para os quais ~~g(x)~~ $g\left(\frac{1}{n+1}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right) = 1$; claramente $\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| \to 0$ quando $n \to \infty$.

Outro resultado característico das funções contínuas é o Teorema do Valor Intermediário

<u>Lema</u>: seja $f: I \to \mathbb{R}$ contínua, e $c \in I$. Se $f(c) > 0$, existe $\delta > 0$ t.q. se $|x - c| < \delta$ e $x \in I$ então $f(x) > 0$.

<u>prova</u>: seja $\varepsilon_0 > 0$ t.q. $(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon) \subset \mathbb{R}_{>0}$. Pela continuidade de f, existe $\delta > 0$ de modo que se $|x - c| < \delta$ e $x \in I$ então $f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$, portanto $f(x) > 0$.

Dizemos que as funções contínuas possuem sinal constante localmente; o sinal só muda (talvez!) se a função passa por um zero.

<u>Teorema</u>: seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se L é algum valor entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in (a,b)$ de modo que $f(c) = L$.

<u>prova</u>: suponhamos $f(a) < L < f(b)$ (o outro caso $f(b) < L < f(a)$ é análogo. Definamos $A = \{x \in [a,b] \,;\, f(x) < L\}$. Então $A \neq \emptyset$ pois $a \in A$, e A é limitado superiormente; observemos que $b \notin A$. Seja $c = \sup(A)$. Afirmativa: $f(c) = L$.

Pelo lema acima, temos $f(x) < L$ se $x \in [a,b]$ está próximo de a, e $f(x) > L$ se $x \in [a,b]$ está próximo de b. Em particular, $c \in (a,b)$.

- se $f(c) < L$ temos $f(x) < L$ para $x \in (c - \delta_0, c + \delta_0)$, δ_0 suficientemente pequeno; logo, c não pode ser o supremo de A, absurdo.
- se $f(c) > L$, temos $f(x) > L$ para $x \in (c - \delta_1, c + \delta_1)$, δ_1 suficientemente pequeno; mas em $(c - \delta_1, c]$ temos pontos de A, absurdo novamente.

Corolário: seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Existe então $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Exemplo: consideremos $g: [0,1] \to [0,1]$ contínua. Existe então $c \in [0,1]$ de modo que $g(c) = c$ (c é um ponto fixo de g). De fato, se $g(0) = 0$ ou $g(1) = 1$ a afirmativa é obviamente válida. Assim podemos assumir $g(0) > 0$ e $g(1) < 1$. Definamos $\psi(x) = g(x) - x$; ψ é função contínua definida em $[0,1]$, com $\psi(0) > 0$ e $\psi(1) < 0$, de modo que existe $c \in (0,1)$ satisfazendo $\psi(c) = 0$, ou seja, $g(c) = c$.

Corolário: consideremos $g(x) = x^n$, com $x \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Para qualquer $L > 0$, existe $c > 0$ de modo que $g(c) = L$, ou seja, $c^n = L$. (c é raiz n-ésima de L)

prova: como $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$, existe $b > 0$ de modo que se $x \geq b$ então $f(x) > L$. Restringindo g ao intervalo $[0,b]$, e devido a $g(0) < L < g(b)$, concluímos que existe $c \in (0,b)$ de modo que $g(c) = L$

obs: usando $y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + xy^{n-2} + \dots + yx^{n-2} + y^{n-1})$, vemos que g é estritamente crescente em $(0,\infty)$. Portanto, só existe uma raiz n-ésima positiva de L.

Exemplo: consideremos uma função contínua $g: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ de modo que $g(0) = g(2\pi)$.

Existe então $t_0 \in [0,\pi]$ de modo que $g(t_0) = g(t_0+\pi)$.
De fato, definamos $\varphi(t) = g(t) - g(t+\pi)$ para $t \in [0,2\pi]$.
Trata-se de uma função contínua satisfazendo
$\varphi(0) = -\varphi(\pi)$, pois $\varphi(\pi) = g(\pi) - g(2\pi) = g(\pi) - g(0)$
$= -\varphi(0)$. Caso $\varphi(0) = 0$ temos $\varphi(\pi) = 0$;
mas se $\varphi(0) \neq 0$ vemos que φ possui sinais
opostos em 0 e π, daí concluímos a existência de $t_0 \in (0,\pi)$ tal que $\varphi(t_0) = 0$.

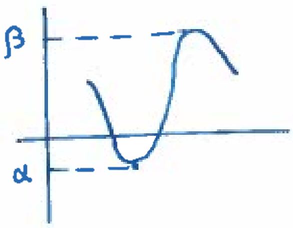
Um modo sugestivo de encarar este exemplo é
observar que g induz uma função G de S^1 em $\mathbb{R}$.
Realmente, cada ponto $P \in S^1$ é univocamente associado a algum $t(P) \in [0,2\pi]$ pois $P = (\cos t(P), \operatorname{sen} t(P))$,
salvo quando se trata do ponto $(0,1)$, simultaneamente associado a $t=0$ e $t=2\pi$. Segue-se que
$G(P) = g(t(P))$ está bem definida pois $g(0) = g(2\pi)$.
Dizemos que $G: S^1 \to \mathbb{R}$ é contínua, motivados pelo
fato de g ser contínua. Podemos enunciar então:
se $G: S^1 \to \mathbb{R}$ é contínua, existe um par de pontos
antípodas com a mesma imagem; isso se segue-se
do fato de que os pontos correspondentes a t_0 e
$t_0+\pi$ no círculo serem antípodas.

Outra forma curiosa de ver este fato: existem
dois pontos antípodas no equador da terra com
a mesma temperatura (em cada instante, claro).

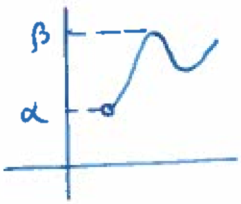
Exemplo: Vimos que se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua
então $M = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$ e $m = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}$
são valores assumidos pela função f. O Teorema

do Valor Intermediário (T.V.I.) implica $f([a,b]) = [m, M]$.
Mais geralmente, se $I \subset \mathbb{R}$ é intervalo então $f(I)$ também é intervalo. Analisemos alguns casos:

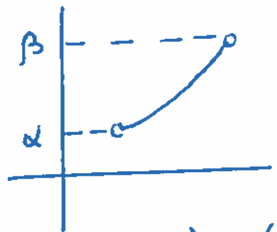
(i) suponhamos f limitada (inferior e superiormente), $\alpha = \inf\{f(x);\ x \in I\}$, $\beta = \sup\{f(x);\ x \in I\}$ (assumimos $\alpha < \beta$, caso contrário $f(x) \equiv \alpha = \beta$). Claramente $f(I) \subset [\alpha, \beta]$. Provemos que $(\alpha, \beta) \subset f(I)$: dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, existem $x_n, y_n \in I$ t.q. $f(x_n) \in [\alpha, \alpha + \frac{1}{n}]$ e $f(y_n) \in (\beta - \frac{1}{n}, \beta]$. Pelo T.V.I. o intervalo $[f(x_n), f(y_n)] \subset f(I)$. Quando $n \to \infty$ temos $\lim f(x_n) = \alpha$ e $\lim f(y_n) = \beta$, e daí $(\alpha, \beta) \subset f(I)$.



$f(I) = [\alpha, \beta]$



$f(I) = (\alpha, \beta]$



$f(I) = (\alpha, \beta)$

(ii) suponhamos f não limitada superiormente nem limitada inferiormente. Então $f(I) = \mathbb{R}$. De fato, dados $m, n \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ e $n < 0$, quaisquer, existem $x_m, y_n \in I$ de modo que $f(x_m) > m$ e $f(y_n) < n$. Portanto, $(f(y_n), f(x_m)) \subset f(I)$. Como $\lim f(y_n) = -\infty$ e $\lim f(x_m) = +\infty$, vemos que $f(I) = \mathbb{R}$.

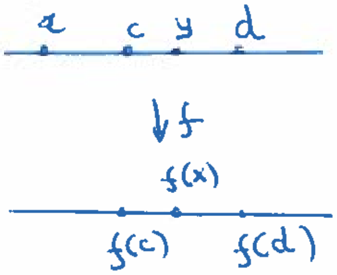
(iii) os casos restantes: f não limitada inferiormente, limitada superiormente ($f(I) \subset (-\infty, \beta]$ e $(-\infty, \beta) \subset f(I)$); f limitada inferiormente e não limitada superiormente ($f(I) \subset [\alpha, \infty)$ e $(\alpha, \infty) \subset f(I)$) são análogos.

Exemplo: seja $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ contínua e injetiva. Então ou f é estritamente crescente ($x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$) ou f é estritamente decrescente ($x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$).

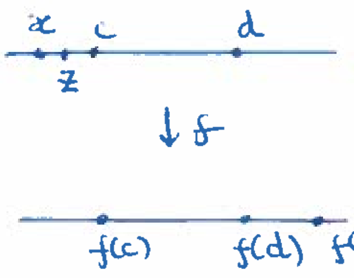
Selecionemos $c<d$ em (a,b); portanto ou $f(c)<f(d)$ ou $f(c)>f(d)$. O primeiro caso corresponde à situação estritamente crescente, e o segundo caso à situação estritamente decrescente.

Suponhamos $f(c)<f(d)$, e tomemos um par de pontos $x<y$ em (a,b).

(i) $x<c \Rightarrow f(x)<f(c)$; $c<x<d \Rightarrow f(c)<f(x)<f(d)$ e $x>d \Rightarrow f(x)>f(d)$. Estas afirmativas são provadas por absurdo.

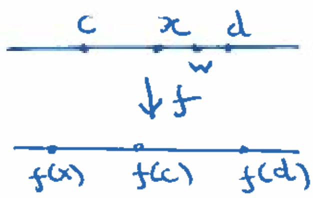


existe $y\in[c,d]$ de modo que $f(y)=f(x)$, absurdo

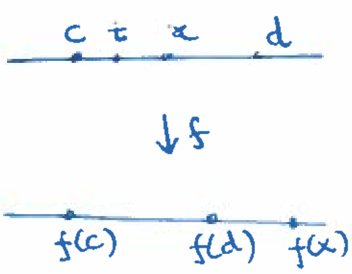


existe $z\in[x,c]$ de modo que $f(z)=f(d)$, absurdo

O caso $x>d \Rightarrow f(x)>f(d)$ é análogo

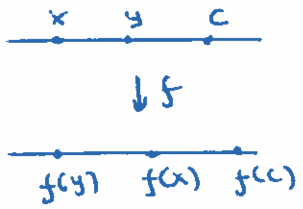


existe $w\in[x,d]$ de modo que $f(w)=f(c)$, absurdo



existe $t\in[c,x]$ de modo que $f(t)=f(d)$, absurdo

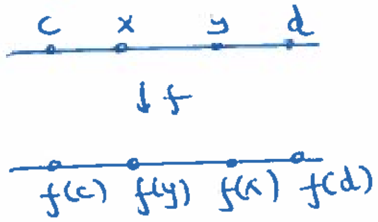
(ii) consideremos $x < y < c$



Se $f(y) < f(x)$, existe em $[y, c]$ algum x_1 t.q. $f(x_1) = f(x)$, absurdo

(iii) consideremos $x < c$ e $c < y$: caso óbvio pois $f(x) < f(c)$ e $f(y) > f(c)$, logo $f(x) < f(y)$

(IV) sejam $c < x < y < d$



Em $[c, x]$ temos t_1 t.q. $f(t_1) = f(y)$, absurdo

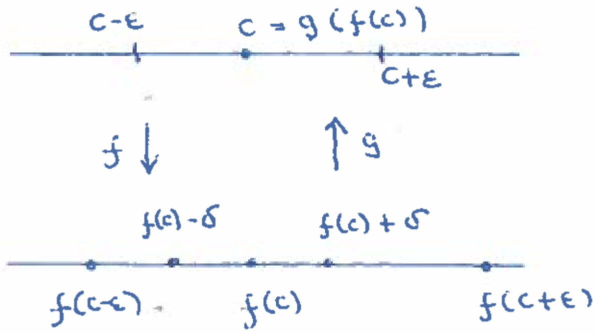
(V) Exercício: demais caso

Exercício: $f((a,b))$ é intervalo aberto (f contínua e injetiva).

Sempre na situação acima, definimos $g : f(I) \to I$ como a função inversa de f ($g \circ f = Id$); temos que g é injetiva.

Teorema: g é contínua.

prova: suponhamos f estritamente crescente. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, devemos encontrar $\delta > 0$ de modo que $g((f(c) - \delta, f(c) + \delta)) \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ se queremos provar que g é contínua em $f(c)$; podemos restringir $\varepsilon > 0$ de modo que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset I$. Ora, $f((c-\varepsilon, c+\varepsilon)) = (f(c-\varepsilon), f(c+\varepsilon))$, de modo que $g((f(c-\varepsilon), f(c+\varepsilon))) \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$; basta então tomar $\delta > 0$ de modo que $(f(c) - \delta, f(c) + \delta)$ □



Podemos então definir funções arc sen : $(-1,1) \longrightarrow (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, arc cos : $(-1,1) \longrightarrow (0,\pi)$ e arctg : $\mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, todas contínuas. Observe que sen e tg são estritamente crescentes em $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, e cos é estritamente decrescente em $(0,\pi)$

Exemplo: $h(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$, é estritamente crescente quando k é ímpar. De fato, se $0 < x_1 < x_2$ então $x_2^k - x_1^k = (x_2 - x_1)(x_2^{k-1} + x_1 x_2^{k-2} + \dots + x_1^{k-1} x_2 + x_1^{k-1}) > 0$

Se $x_1 < 0 < x_2$ então $x_1^k < x_2^k$ pois x_1^k é negativo.

Se $x_1 < x_2 < 0$, escrevemos $x_1 = -t_1$ e $x_2 = -t_2$; temos
$t_1 > t_2 > 0 \Rightarrow t_1^k > t_2^k \Rightarrow -t_1^k < -t_2^k \Rightarrow (-t_1)^k < (-t_2)^k$
$\Rightarrow x_1^k < x_2^k$.

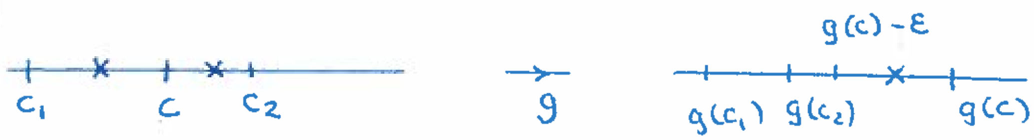
A inversa $y \longmapsto y^{1/k}$ está definida para $y \in \mathbb{R}$ e é contínua.

Quando k é par, $\ell(x) = x^k$ é estritamente crescente em $(0,\infty)$, de modo que possui inversa contínua $y \longmapsto y^{1/k}$ definida em $(0,\infty)$.

Exemplo: consideremos uma função $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$

contínua t.q. existem 3 pontos $c_1 < c < c_2$ satisfazendo $g(c_1) < g(c)$, $g(c_2) < g(c)$. <u>Afirmação</u>: para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, qualquer $l \in (g(c)-\varepsilon, g(c))$ possui 2 pré-imagens distintas em $[c_1, c_2]$ (e, claro, distintas de c). Assim, valores inferiores a $g(c)$ mas próximos de $g(c)$ possuem 2 pré-imagens distintas em $[c_1, c_2]$.

Basta tomar $\varepsilon > 0$ de modo que $(g(c)-\varepsilon, g(c))$ esteja contido em $(g(c_1), g(c)) \cap (g(c_2), c)$ e aplicar o T.V.I. a g restrita aos intervalos $[c_1, c]$ e $[c, c_2]$



Resultado análogo vale se existem $c_1 < c < c_2$ satisfazendo $g(c_1) > g(c)$ e $g(c_2) > g(c)$.

<u>Consequência</u>: não existe $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua de modo que cada $f(x)$ possua exatamente 2 pré-imagens.

<u>prova</u>: por absurdo; suponhamos que existe tal função f. Seja M o valor de máximo global, atingido em 2 pontos distintos $\tilde{c} < c$.
Caso $a < \tilde{c} < c < b$, tomemos pontos $a < \tilde{c}_1 < \tilde{c} < \tilde{c}_2 < c_1 < c < c_2 < b$. Os valores $g(\tilde{c}_1), g(\tilde{c}_2), g(c_1)$ e $g(c_2)$ são todos estritamente inferiores a M (pois M só é assumido por f em $\tilde{c}$ e c). Ora, qualquer l suficientemente próximo a M ($l < M$) possui 2 pré-imagens em $[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2]$ e outras duas em $[c_1, c_2]$, absurdo.

Caso $\tilde{c} = a$ e $c < b$, tomemos pontos $a = \tilde{c} < \tilde{c}_2 < c_1 < c < c_2 < b$; $g(\tilde{c}_2)$, $g(c_1)$ e $g(c_2)$ são todos estritamente inferiores a M, de modo que para ℓ suficientemente próximo de M $(\ell < M)$ encontramos duas pré-imagens em $[c_1, c_2]$ e outra em $[\tilde{c}, \tilde{c}_2]$ (justifique esta última!), novamente absurdo.

Caso $a < \tilde{c} < c = b$ procedemos analogamente para chegar a um absurdo. Resta então $\tilde{c} = a$ e $c = b$. Examinamos então o valor m de mínimo global, que não pode ser atingido em $\underline{a}$ nem em $\underline{b}$, pois senão $M = m$ e g seria constante, absurdo. Segue-se mais uma vez que existem $a < \tilde{d} < d < b$ de modo que $g(\tilde{d}) = g(d) = m$, e aplicamos o argumento do início do Exemplo para chegar a um absurdo.

<u>Exercício</u>: mostre que não existe $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua de modo que $f(x)$ possui exatamente k imagens inversas, onde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$.