Vetores no espaço – 4

O produto vetorial (continuação)

Na primeira aula de Vetores no Espaço, caracterizamos um *triedro direto* de forma intuitiva. Precisamos agora de uma definição mais precisa.

Definição
Um triedro u, v, w com vetores nessa ordem é chamado *direto* ou *positivamente orientado* quando $\det[u, v, w] > 0$.

Assim, o triedro formado pelos vetores unitários e_1, e_2, e_3, nessa ordem, é positivamente orientado por que

$$\det\,[e_1, e_2, e_3] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Mas, com uma pequena mudança, o triedro formado pelos vetores unitários e_2, e_1, e_3, nessa ordem, <u>não</u> é positivamente orientado por que

$$\det\,[e_2, e_1, e_3] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Vamos também recordar a 4ª propriedade do final da aula passada:

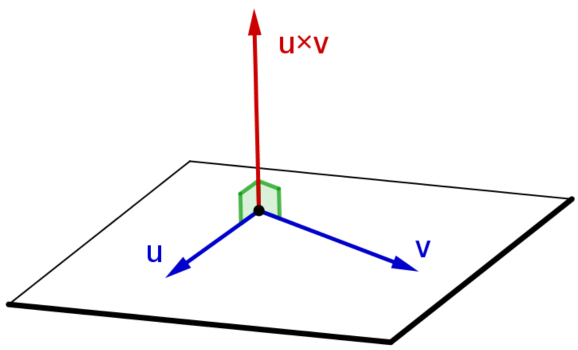
4. Para qualquer vetor w tem-se $u \times v \cdot w = \det\,[u, v, w]$

Podemos, então continuar com as propriedades do produto vetorial.

6. O triedro $u, v, u \times v$ é positivamente orientado.
De fato,

$$\det[u, v, u \times v] = u \times v \cdot u \times v = |u \times v|^2 > 0$$

Isso é o que justifica a figura que ilustramos o final da aula passada.



7. $u \times v = 0$ se, e somente se, os vetores u e v são colineares.

O produto vetorial do vetor $u = (a_1, b_1, c_1)$ pelo $v = (a_2, b_2, c_2)$ é o vetor

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Porém, para qualquer α real,

$$\begin{cases} a_2 = \alpha a_1 \\ b_2 = \alpha b_1 \\ c_2 = \alpha c_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0 \end{cases}$$

8. Se θ é o ângulo entre os vetores u e v então $|u \times v| = |u||v| \sin\theta$

Vamos ter um pouco de trabalho agora. Para não carregar a notação, vamos escrever:

$$u = (x, y, z) \ \text{ e } \ v = (x', y', z')$$

$$u \cdot v = xx' + yy' + zz'$$

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & x \\ z' & y' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right) = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$$

$$u \cdot v = |u||v| \cos\theta$$

Vamos começar.

$$|u||v| \cos\theta = xx' + yy' + zz'$$

Elevamos ao quadrado.

$$|u|^2|v|^2 \cos^2\theta = x^2{x'}^2 + y^2{y'}^2 + z^2{z'}^2 + 2xyx'y' + 2yzy'z' + 2xzx'z'$$

• Escrevemos agora:

$$|u|^2|v|^2 \sin^2\theta = |u|^2|v|^2(1 - \cos^2\theta) = |u|^2|v|^2 - |u|^2|v|^2 \cos^2\theta =$$

$$= |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2 =$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - x^2{x'}^2 - y^2{y'}^2 - z^2{z'}^2 - 2xyx'y' - 2yzy'z' - 2xzx'z'$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - x^2x'^2 - y^2y'^2 - z^2z'^2 - 2xyx'y' - 2yzy'z' - 2xzx'z'$$

Desenvolvendo e simplificando, (confira isso)

$$= x^2y'^2 + x^2z'^2 + y^2x'^2 + y^2z'^2 + z^2x'^2 + z^2y'^2 - 2xyx'y' - 2yzy'z' - 2xzx'z' =$$

$$= y^2z'^2 - 2yzy'z' + z^2y'^2 + x^2z'^2 - 2xzx'z' + z^2x'^2 + y^2x'^2 - 2xyx'y' + y^2x'^2 =$$

$$= (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2 =$$

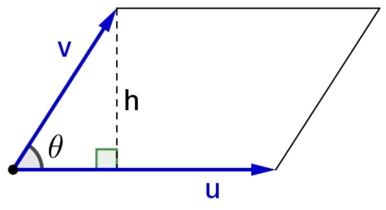
$$= |u \times v|^2$$

Temos, portanto

$$|u \times v| = |u||v| \sin\theta$$

Áreas do paralelogramo e do triângulo

Considere o paralelogramo definido pelos vetores u e v como na figura a seguir e seja θ o ângulo entre eles.



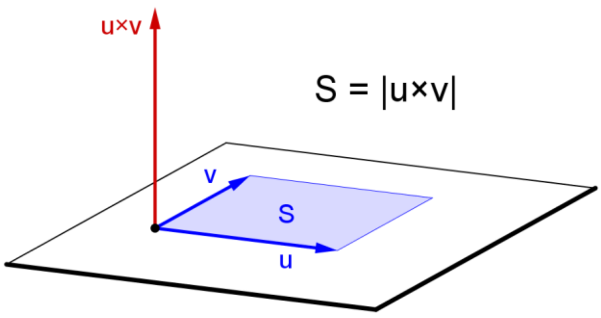
Seja S a área do paralelogramo.

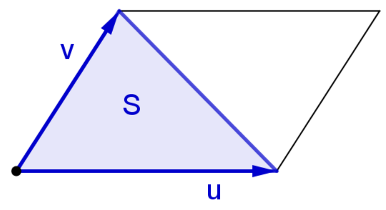
$$S = (base) \times (altura)$$

$$S = |u| \cdot h = |u||v| \sin\theta$$

$$S = |u \times v|$$

O módulo do produto vetorial de u por v é numericamente igual à área do paralelogramo.





A área do triângulo determinado por dois vetores é a metade a área do paralelogramo definido por eles.

$$S = \frac{1}{2}|u \times v|$$

O produto misto

O produto misto dos vetores u, v e w, nessa ordem é definido por

$$[u, v, w] = u \times v \cdot w$$

Entretanto, se $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$, $w = (a_3, b_3, c_3)$, pela propriedade 4 do produto vetorial, temos

$$u \times v \cdot w = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

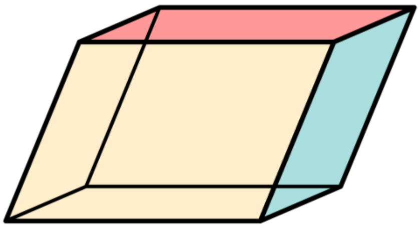
Assim, o produto vetorial de três vetores em uma dada ordem é o determinante cujas linhas são as coordenadas desses determinantes, nessa ordem. A notação fica um pouco estranha, mas reflete o que dissemos.

$$[u, v, w] = u \times v \cdot w = \det{[u, v, w]}$$

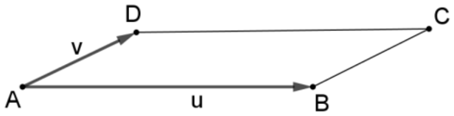
O produto misto tem relação como o volume de um paralelepípedo. Vamos então recordar: o que é esse sólido.

O paralelepípedo

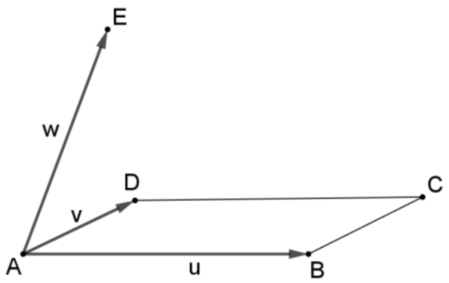
Paralelepípedo é um poliedro de 8 faces, todas paralelogramos.



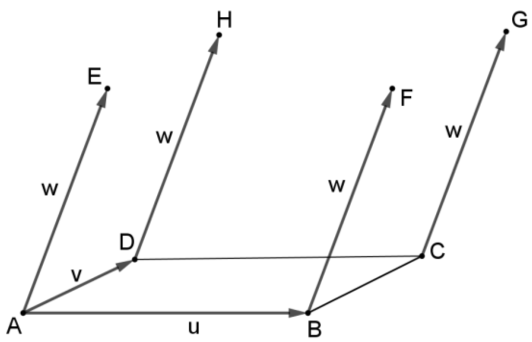
Estão naturalmente incluídos nessa definição os paralelogramos especiais como o retângulo, o losango e o quadrado. Para construir um paralelepípedo, considere dois vetores u e v, não colineares, e o paralelogramo definido por eles. Na figura a seguir o paralelogramo $ABCD$ foi definido pelos vetores $\overrightarrow{AB} = u$ e $\overrightarrow{AD} = v$.



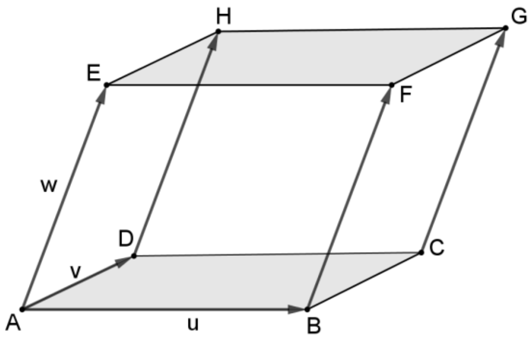
Em seguida, considere um vetor w que não seja combinação linear de u e v. Na figura a seguir vemos o vetor $\overrightarrow{AE} = w$.



Construa, a seguir, os pontos F, G, H tais que $F = B + w, G = C + w, H = D + w$.



Trace o quadrilátero $EFGH$, que é um paralelogramo congruente e paralelo a $ABCD$.

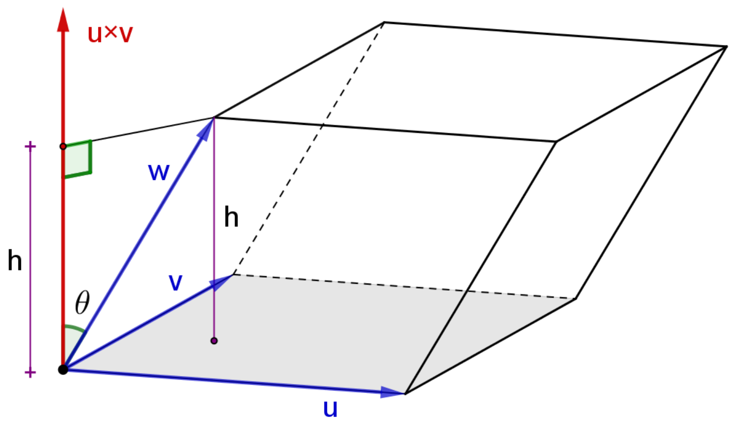


O poliedro $ABCD - EFGH$ é o paralelepípedo definido pelos vetores u, v, w.

O volume do paralelepípedo e do tetraedro

Considere os vetores u, v, w como na figura a seguir. Nenhum deles é combinação linear dos outros dois e, portanto, eles definem um paralelepípedo.

O paralelepípedo é um prisma e como tal, seu volume é o produto da área da base pela altura. No paralelepípedo, qualquer paralelogramo pode ser adotado como base e então escolhemos como base o paralelogramo definido pelos vetores u e v. A altura do sólido relativa a essa base é a distância de qualquer ponto da face oposta a essa base. Na figura, h é a altura do paralelepípedo.



Vamos calcular o volume desse paralelepípedo.

Traçamos uma reta perpendicular ao plano da base (reta que contém $u \times v$) e projetamos o vetor w sobre essa reta. O comprimento da projeção de w sobre a reta perpendicular ao plano da base é a altura h do paralelepípedo.

Seja θ o ângulo que w faz com $u \times v$. Temos então que

$$h = |w| \cdot |\cos\theta|$$

Assim, o volume V do paralelepípedo é

$$V = (\acute{a}rea\ da\ base)(altura)$$

$$V = |u \times v||w||\cos\theta|$$

$$V = \big||u \times v||w|\cos\theta\big|$$

$$V = |u \times v \cdot w|$$

$$V = |[u, v, w]|$$

Concluímos, então, que o volume do paralelepípedo definido por três vetores é o valor absoluto do produto misto deles.

Este é o significado de um determinante de 3ª ordem:

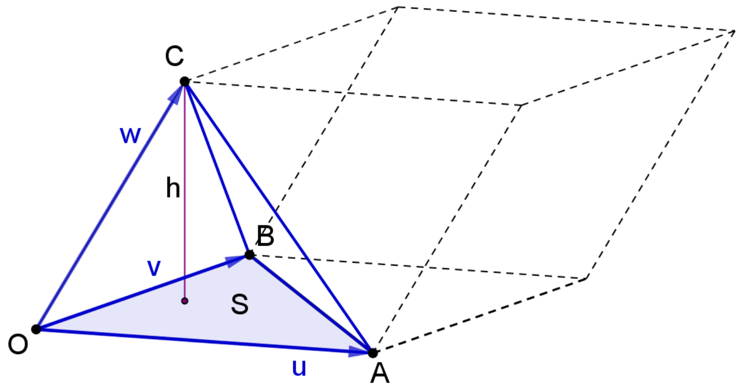
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\pm) volume\ do\ paralelep\acute{i}pedo\ definido\ pelos\ vetores$$

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)$$

Exercício

Interprete, do ponto de vista geométrico a propriedade dos determinantes: se uma linha for combinação linear de outras duas o determinante é nulo.

Vamos, a seguir considerar três vetores não coplanares $u = \overrightarrow{OA},\ v = \overrightarrow{OB},\ w = \overrightarrow{OC}$ e o tetraedro definido por eles. Completemos, também, o paralelepípedo definido por esses três vetores. A situação pode ser vista na figura abaixo.



Na figura, a base do tetraedro $OABC$ é o triângulo OAB, de área S definido pelos vetores $u = \overrightarrow{OA},$ e $v = \overrightarrow{OB}$. A altura h do tetraedro é a distância do vértice C ao plano da base.

O volume do tetraedro definido pelos vetores u, v, w é uma fração do volume o paralelepípedo definido por esses mesmos vetores. Que fração é essa?

A distância h do ponto C ao plano OAB é a altura do tetraedro e também a altura do paralelepípedo definido pelos vetores $u = \overrightarrow{OA},\ v = \overrightarrow{OB},\ w = \overrightarrow{OC}$. Porém, a base do paralelepípedo tem área igual a $2S$. Assim, o volume do paralelepípedo é

$$2S \cdot h = |[u, v, w]|$$

O tetraedro é uma pirâmide e, por isso, seu volume é a terça parte do produto da área da base pela altura. Então, sendo V o volume do tetraedro temos:

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2S \cdot h$$

$$V = \frac{1}{6} |[u, v, w]|$$

Exemplo

Determine o volume do tetraedro cujos vértices são $A = (1, 1, -1)$, $B = (3, 2, 3)$, $C = (6, 2, 1)$ e $D = (1, 7, 6)$

Solução

Consideremos os vetores $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (5, 1, 2)$ e $\overrightarrow{AD} = (0, 6, 7)$.

O volume do tetraedro $ABCD$ é

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \end{matrix}\right\| = \frac{25}{2}$$

Exercício

Determine uma condição necessária e suficiente para que os pontos $A, B, C. D$ do espaço sejam coplanares.

Solução

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = 0$$