Prove que $2+3=5$

I) $1+1=2$ é por definição.

$3=2+1=1+1+1$

$4=3+1=1+1+1+1$

$5=4+1=1+1+1+1+1$

$2+3=(1+1)+(1+1+1)=1+1+1+1+1=5.$

$\therefore\ 2+3=5.$

II) Axioma de Peano sobre função sucessor.

Defina uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função sucessor, então $s(n) \neq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. e defina a soma como

$m+0=m \ \wedge \ m+s(n)=s(m+n).$

$\therefore\ m+s(0)=s(m).$

Defina também $s(0)=1$.

$\therefore\ 1+s(0)=s(1)=2$

$2+s(0)=s(2)=3$

$3+s(0)=s(3)=4$

$4+s(0)=s(4)=5.$

Provar que $s(4)=s(2)+s(1) \iff 5=3+2.$

$s(4)=s(3)+s(0)$

$s(4)=3+s(0)+s(0).$

$s(4)=3+1+s(0)=3+s(1)$

$s(4)=s(2)+s(1)$

$\therefore\ 5=3+2.$

Um corpo K é um conjunto $\neq \emptyset$ com as operações $+$ e $\cdot$ que satisfazem para x, y, $z \in K$:

S$_1$ $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associatividade de $+$).

S$_2$ Existe um elemento em K, denotado por 0, tal que $x + 0 = 0 + x = x$ (elemento neutro de $+$). É possível mostrar que existe um único 0.

S$_3$ Para todo $x \in K$ existe $y \in K$ tal que $x + y = y + x = 0$ (existência de oposto). (Pode-se provar que x admite um único oposto. Ele é denotado por $-x$)

S$_4$ $x + y = y + x$ (comutatividade de $+$)

M$_1$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (associatividade de $\cdot$)

M$_2$ Existe um elemento em K, denotado por 1, tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (elemento neutro de $\cdot$). (É possível mostrar que existe um único 1.)

M$_3$ Para todo $x \in K$, $x \neq 0$ existe $y \in K$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$ (existência de inversa). Pode-se provar que $x \neq 0$ admite uma única inversa, que é denotada por x^{-1} ou por $1/x$.

M$_4$ $x \cdot y = y \cdot x$ (comutatividade de $\cdot$)

SM $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

I) Provar que $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

$m + 0 = m$

$\therefore \quad 0 + 0 = 0.$

Comutatividade:

$x \cdot y = y \cdot x \quad \therefore \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a$

$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ Erro aqui!

$a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + (-a \cdot 0) + a \cdot 0$

$0 = 0 + a \cdot 0$

$\therefore \boxed{a \cdot 0 = 0}$ $_{cqd}$.

VI) Provar que $(-a)b = -ab = a(-b)$

- $m \cdot 1 = m = 1 \cdot m$
- $a \cdot 0 = 0$

$a \cdot 0 = 0$

$a \cdot (1 + (-1)) = 0$

$a \cdot 1 + a \cdot (-1) = 0$

$a \cdot (-1) = -a$

$\therefore (-a) \cdot b = (-1) \cdot a \cdot b = a \cdot (-1) \cdot b = a(-b).$

$\therefore (-a) \cdot b = (-1)(a \cdot b) = -ab.$

VII) Provar que $(-a)(-b) = ab$

- $\sqrt{a^2} = |a|$ (Axioma) Provei de outro jeito, melhor.

$\therefore \sqrt{(-1)^2} = |-1|$

$(-1)^2 = 1.$

$\therefore (-a)(-b) = (-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot b = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot b$

$\Rightarrow (-1)^2 \cdot ab = 1 \cdot ab = ab.$

Ache uma raiz da equação

$$x^3 + px + q = 0.$$

$$x^3 + px + q = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$\Rightarrow a^3 - a \cdot 3bc + (b^3 + c^3)$$

$$\begin{cases} -3bc = p \\ b^3 + c^3 = q \end{cases}$$

$$b = -\frac{p}{3c} \Rightarrow \frac{-p^3}{27c^3} + c^3 = q \Rightarrow 27c^6 - p^3 = 27c^3 q$$

$$27\alpha^2 - 27q\alpha - p^3 = 0$$

$$\alpha = \frac{27q \pm \sqrt{27^2 q^2 + 4 \cdot 27 p^3}}{2 \cdot 27}$$

$$\alpha = \frac{\cancel{27}q \pm \cancel{27}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2 \cdot \cancel{27}}$$

$$\alpha_1 = \frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = c^3$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} \qquad b = -\frac{p}{3c}$$

Uma raiz seria $-(b+c)$

$$-\left(\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}}\right)$$

$$\frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}} - 3\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

Tá na mão chefe ü

Tartaglia - Cardano!

Questão 7

Mostre que para todo natural $n \geq 2$,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{\cancel{6}\ 3}$$

$$\sum_{K=1}^{n-1} K\cdot(K+1) = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$(n-1)n\left[\frac{1}{2} + \frac{2n-1}{6}\right] = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Questão 8

Mostre que para todo natural n, o número $5^n + 2 \cdot 11^n$ é múltiplo de 3.

$5^n \equiv (-1)^n \pmod 3$

$11^n \equiv (-1)^n \pmod 3$

$\therefore\ 5^n + 2\cdot 11^n \equiv (-1)^n + 2\cdot(-1)^n \equiv 3\cdot(-1)^n \equiv 0 \pmod 3$

Indução em n:

$n=1$: $5^1 + 2\cdot 11 = 27$ (múltiplo de 3).

Passo indutivo em n:

Supor que $5^n + 2\cdot 11^n = 3\alpha$ $(\alpha, n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1)$.

Verificar se $5^{n+1} + 2\cdot 11^{n+1} = 3\beta$ ($\beta \in \mathbb{Z}$ e $\beta > \alpha$).

$5^{n+1} + 10\cdot 11^n = 15\alpha$

$5^{n+1} + 22\cdot 11^n = 3\beta$

$12\cdot 11^n = 3\beta - 15\alpha$

$3\beta = 12\cdot 11^n + 15\alpha$

$\therefore\ \beta = \cancel{3}\cdot(4\cdot 11^n + 5\alpha) = 4\cdot 11^n + 5\alpha$

$\in \mathbb{Z}$

$> \alpha$.

Questão 9
Mostre que se a, b e c são inteiros ímpares, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raízes racionais.

Faça $a = 2\alpha + 1$, $b = 2\beta + 1$ e $c = 2\varphi + 1$ $(\alpha, \beta, \varphi \in \mathbb{Z})$.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$
as raízes seriam da forma: $ax^2 + bx + c = 0$

$\therefore\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Para $x \in \mathbb{Q}$, então $b^2 - 4ac$ deve ser um quadrado perfeito.

Faça: $n^2 = b^2 - 4ac \therefore b^2 - n^2 = 4ac$

$(2\beta + 1)^2 - (2\theta + 1)^2 = 4\beta^2 + 4\beta - 4\theta^2 - 4\theta = 4(\beta^2 + \beta - \theta^2 - \theta)$

$$4(\underbrace{\beta^2 + \beta}_{par} - \underbrace{\theta^2 - \theta}_{par}) = 4ac$$

par = ímpar (ABSURDO).

1ª QUESTÃO

Um *corpo* $\mathbb{K}$ é um conjunto (não vazio e não unitário) munido de duas operações, soma $(+)$ e produto$(\cdot)$ para as quais são válidas as seguintes 9 propriedades, também conhecidas como *axiomas de corpo*:

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{K}$.

2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{K}$.

3) $a + b = b + a$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{K}$.

4) $a \cdot b = b \cdot a$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{K}$.

5) Existe um elemento de $\mathbb{K}$, denotado por 0, tal que $a + 0 = 0 + a = a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{K}$.

6) Existe um elemento de $\mathbb{K}$, denotado por 1, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{K}$.

7) Para todo $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento de $\mathbb{K}$, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

8) Para todo $a \in \mathbb{K}$, se $a \neq 0$, existe um elemento de $\mathbb{K}$, denotado por a^{-1}, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{K}$.

Prove que as seguintes proposições são verdadeiras para quaisquer elementos a, b, c de um corpo $\mathbb{K}$.

(a) $0 \cdot a = 0$.

(b) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

(c) Há no máximo dois valores de $x \in \mathbb{K}$ tais que $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ (a notação x^2 significa, como de costume, $x^2 = x \cdot x$).

O termo *refurbished* diz respeito a um produto que foi devolvido à fabricante (em geral por ter sido utilizado como peça de mostruário), passou por reparos técnicos e pode ser vendido novamente, com o preço reduzido.

Um adolescente, aproveitando os descontos desse tipo de produto, adquiriu um console de videogame e um jogo que seria utilizado neste console, ambos com a denominação *refurbished*. Sabe-se que, para produtos desse tipo, 10% dos consoles de videogame apresentam um erro na sua inicialização, impossibilitando a leitura do jogo e que, nos casos em que o console possibilita a leitura do jogo, 5% das unidades do jogo adquirido pelo adolescente com a denominação *refurbished* apresentam erro na inicialização.

Ao tentar utilizar o jogo pela primeira vez no console adquirido, a tela apresenta um erro de inicialização.

A probabilidade de que o adolescente tenha adquirido um console de videogame com problema de erro na inicialização é igual a

R: $\frac{20}{29}$.

I) Erro no console, apenas
II) Erro no jogo apenas
III) Erro nos dois

I) $P_1 = 10\% \cdot 95\%$
II) $P_2 = 90\% \cdot 5\%$
III) $P_3 = 10\% \cdot 5\%$

$$\frac{10 \cdot 95 + 90 \cdot 5 + 10 \cdot 5}{100 \cdot 100}$$

$$P_f = \frac{\overset{2}{\cancel{10}} \cdot \overset{19}{\cancel{95}} + \overset{2}{\cancel{10} \cdot \cancel{5}}}{\underset{2}{\cancel{10}} \cdot \underset{19}{\cancel{95}} + \underset{18}{\cancel{90} \cdot \cancel{5}} + \underset{2}{\cancel{10} \cdot \cancel{5}}} = \frac{40}{58} = \frac{20}{29}$$

$$P_F = \frac{P_1 + P_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

1ª QUESTÃO

Um *corpo* $\mathbb{K}$ é um conjunto (não vazio e não unitário) munido de duas operações, soma $(+)$ e produto$(\cdot)$ para as quais são válidas as seguintes 9 propriedades, também conhecidas como *axiomas de corpo*:

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{K}$.

2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{K}$.

3) $a+b = b+a$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{K}$.

4) $a \cdot b = b \cdot a$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{K}$.

5) Existe um elemento de $\mathbb{K}$, denotado por 0, tal que $a+0 = 0+a = a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{K}$.

6) Existe um elemento de $\mathbb{K}$, denotado por 1, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{K}$.

7) Para todo $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento de $\mathbb{K}$, denotado por $-a$, tal que $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

8) Para todo $a \in \mathbb{K}$, se $a \neq 0$, existe um elemento de $\mathbb{K}$, denotado por a^{-1}, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

9) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{K}$.

Prove que as seguintes proposições são verdadeiras para quaisquer elementos a, b, c de um corpo $\mathbb{K}$.

(a) $0 \cdot a = 0$.

(b) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

(c) Há no máximo dois valores de $x \in \mathbb{K}$ tais que $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ (a notação x^2 significa, como de costume, $x^2 = x \cdot x$).

a) $0 \cdot a = 0$.

Sabemos que $a \cdot 0 = 0 \cdot a$. e $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$

$\Rightarrow \quad a \cdot 0 = a \cdot 0 + a + (-a)$.

$a \cdot 0 = a \cdot (0+1) + (-a) \Rightarrow a(b+c) = ab+ac.$

$a \cdot 0 = a \cdot 1 + (-a) \Rightarrow a \cdot 1 = a$

$a \cdot 0 = a + (-a) \qquad a + (-a) = 0$

$\boxed{a \cdot 0 = 0}$

b) $(-a)(-b) = ab$

• $a \cdot 0 = 0$

$a \cdot (1 + (-1)) = 0$

$a \cdot 1 + a \cdot (-1) = 0$

$a + a(-1) = 0$.

$a + (-a) + a(-1) = (-a)$

$0 + a(-1) = -a \Rightarrow (-1) \cdot a = -a$.

$$(-a)(-b) = (-1)(a)(-1)(b)$$
$$= (-1) \cdot a \cdot b \cdot (-1)$$
$$= (-ab)(-1) = (-1) \cdot (-ab) = (-(-ab)) = \underline{ab}$$

- $-(-a) = a$

$$(-a) + (-(-a)) = 0$$
$$a + (-a) + (-(-a)) = a$$
$$0 + (-(-a)) = a$$
$$(-(-a)) = \underline{a}$$

c) $ax^2 + bx + c = 0$

Para $a = 0 \Rightarrow bx + c = 0$

Para $b = 0$, então implica em $c = 0$

Para $b \neq 0$, a única solução é $x = -c/b$.

Para $a \neq 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$.

$$\frac{1}{a}\left(ax^2 + bx + c\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$b \cdot \frac{1}{c} = k \ (c \neq 0)$$

$$b \cdot 1 = kc$$

$$\frac{b}{c} = \frac{kc}{c}$$

$$\frac{b}{c} = k \cdot 1$$

$$\frac{b}{c} = k$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Logo, para $a\neq 0$, $ax^2+bx+c=0$ possui, no máximo, 2 soluções. Em particular, isso ocorre quando $b^2-4ac\geq 0$. Se $b^2-4ac<0$, entraremos no campo complexo.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2} + \frac{C}{k+3}$$

$$A(k+2)(k+3) + B(k+1)(k+3) + C(k+1)(k+2)$$

$$A(k^2+5k+6) + B(k^2+4k+3) + C(k^2+3k+2)$$

$$k^2(A+B+C) + k(5A+4B+3C) + (6A+3B+2C).$$

$$\begin{cases} A+B+C = 0. \\ 5A+4B+3C = 1. \\ 6A+3B+2C = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A+B = 1. \\ 4A+B = 0. \end{cases}$$

$$2A = -1$$

$$\boxed{A = -1/2} \qquad \boxed{B = 2.} \qquad \boxed{C = -3/2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2(k+1)} + \frac{2}{k+2} - \frac{3}{2(k+3)} \right)$$

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3}$$

$$2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}$$

$$2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+2}-\frac{3}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k+2}$$

$$2\cdot\left(\frac{1}{1+2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{0+2}+\frac{1}{1+2}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k+2}\right)-$$

$$-\frac{3}{2}\cdot\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k+2}$$

$$2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n+2}+\cancel{\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k+2}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cancel{\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k+2}}\right)-$$

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}+\cancel{\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k+2}}\right).$$

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{n+2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{3}{2(n+3)}-\frac{3}{2(n+2)}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{n+2}-\frac{3}{2(n+3)}-\frac{3}{2(n+2)}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{n+2} - \frac{3}{2(n+3)} - \frac{3}{2(n+2)}$$

$$\frac{(n+2)(n+3) + 8(n+3) - 6(n+2) - 6(n+3)}{4(n+2)(n+3)}$$

$$n^2 + \cancel{5n} + \cancel{6} + \cancel{8n} + \cancel{24} - \cancel{6n} - \cancel{12} - \cancel{6n} - \cancel{18}$$

$$n^2 + n = n(n+1).$$

$$\boxed{S = \frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}}$$

(d) ao expressarmos o resultado da soma $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k(p-k)}$ como uma fração irredutível, o numerador é múltiplo de p;

(e) ao expressarmos o resultado da soma $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$ como uma fração irredutível, o numerador é múltiplo de p^2.

e)

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} = \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} \right] = \left(\frac{p-1+1}{1(p-1)} + \frac{p-2+2}{2(p-2)} + \cdots + \frac{\frac{p-1}{2} + \frac{p+1}{2}}{(\quad)(\quad)} \right)$$

$$= \left[\frac{p}{1(p-1)} + \frac{p}{2(p-2)} + \cdots + \frac{4p}{} \right]$$

$$\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \cdots + \frac{1}{p-1} \right] = \left[\frac{p-1+1}{1(p-1)} + \frac{p}{2(p-2)} + \cdots + \frac{\frac{p+1}{2} + \frac{p-1}{2}}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)} \right.$$

$$= p \left[\frac{1}{1(p-1)} + \frac{1}{2(p-2)} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{p+1}{2}\right)\left(p - \frac{p+1}{2}\right)} \right]$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k(p-k)} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} \frac{1}{k(p-k)}$$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k(p-k)} = \frac{1}{p} \cdot \left[\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{p-k} \right]$

$$\frac{1}{p}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} + \dots + \frac{1}{1}\right]$$

$$\frac{2}{p}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}\right] = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}$$

De exercício anterior, temos que o numerador é $p \cdot \alpha$, portanto p^2 deve ser um fator da soma $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$, mais especificamente no numerador do somatório.

Provar que $a.b=0$, se e somente se $a=0 \vee b=0$.

$(\Rightarrow)$ $a.b=0 \Rightarrow a=0$ ou $b=0$

Suponha, por absurdo, $a.b=0$ e $a\neq 0$ e $b\neq 0$.

$$ab=0$$

$$2ab=ab \quad (a\neq 0 \text{ e } b\neq 0)$$

$$2=1 \quad (\text{Absurdo})$$

- $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$.

$\therefore$ $a=0$ ou $b=0$

$(\Leftarrow)$ $a=0$ ou $b=0 \Rightarrow a.b=0$

Sabemos que $m.0=0$ e $0.0=0$

Logo, fazendo $a\neq 0 \Rightarrow b=0$; fazendo $b\neq 0 \Rightarrow a=0$ e fazendo $a=0$ e $b=0$, então $0.0=0$, o que é verdadeiro. Logo se $a=0$ ou $b=0$, então $ab=0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} = S$$

- $S = 0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \frac{36}{64} + \cdots$

- $\frac{S}{2} = 0 + \frac{1}{4} + \frac{4}{8} + \frac{9}{16} + \frac{16}{32} + \frac{25}{64} + \frac{36}{128} + \cdots$

$S - \frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \frac{11}{64} + \cdots = \frac{S}{2}$

- $\frac{S}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{7}{32} + \frac{9}{64} + \frac{11}{128} + \cdots$

$\frac{S}{2} - \frac{S}{4} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \frac{2}{32} + \frac{2}{64} + \cdots$

- $\frac{S}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

- Soma de PG com razão entre $0 < q < 1$

$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ $\quad q^n \to 0 \quad \therefore S = \frac{a_1}{1-q}$.

$\frac{S}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \quad \therefore \boxed{S = 6}$