Integral de Riemann

1. Consideremos uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e uma partição $\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b$ do intervalo $[a,b]$, $1 \le i \le n$

definição: a soma inferior de f relativa à partição $\mathcal{P}$ é $s(f,\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} (\inf\{f(t) ; t_{i-1} \le t \le t_i\})(t_i - t_{i-1})$ e

a soma superior de f relativa à partição $\mathcal{P}$ é
$S(f,\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} (\{\sup\{f(t) ; t_{i-1} \le t \le t_i\})(t_i - t_{i-1})$.

Temos $s(f,\mathcal{P}) \le S(f,\mathcal{P})$ para qualquer partição $\mathcal{P}$.

Observemos que se $-M \le f(x) \le M$ em $[a,b]$ então $S(f,\mathcal{P}) \geq -M(b-a)$ e $s(f,\mathcal{P}) \le M(b-a)$. Resulta que existem $\underline{\int_a^b} f := \sup\{s(f,\mathcal{P}) ; \mathcal{P}$ partição$\}$ e $\overline{\int_a^b} f := \inf\{S(f,\mathcal{P}) ; \mathcal{P}$ partição$\}$ (integral inferior de f em $[a,b]$ e integral superior de f em $[a,b]$, respectivamente)

Proposição: $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$.

prova: consideremos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ partições de $[a,b]$, e $\mathcal{R}$ um refinamento comum (isto é, $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ e $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$); podemos tomar por exemplo $\mathcal{R} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$.

Segue-se que $s(f,\mathcal{P}) \le s(f,\mathcal{R}) \le S(f,\mathcal{R}) \le S(f,\mathcal{Q})$, quaisquer que sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$. Resulta daí:
$\sup\{s(f,\mathcal{P}) ; \mathcal{P}$ partição$\} \le \inf\{S(f,\mathcal{Q}) ; \mathcal{Q}$ partição$\}$

<u>definição</u>: f é <u>integrável</u> quando $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$; o valor comum é denotado por $\int_a^b f$.

Convencionamos $\int_b^a f := -\int_a^b f$.

<u>Exemplo 1</u>: seja $f(x) = 1$ se $x \in [a,b]$ é racional, $f(x) = 0$ se $x \in [a,b]$ é irracional. Para qualquer partição $\mathcal{P}$, temos $s(f,\mathcal{P}) = 0$ e $S(f,\mathcal{P}) = 1$, de modo que $\underline{\int_a^b} f = 0$ e $\overline{\int_a^b} = b-a$

<u>Exemplo 2</u>: se $f(x) \equiv \alpha$, então $S(f,\mathcal{P}) = s(f,\mathcal{P}) = \alpha(b-a)$ para qualquer $\mathcal{P}$. Logo, $\int_a^b f = \alpha(b-a)$.

<u>Exemplo 3</u>: sejam $h, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis, com $h(x) \leq f(x)$ em $[a,b]$. Temos que $S(h,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P})$ para toda partição $\mathcal{P}$ $\Rightarrow$ $\int_a^b h \leq \int_a^b f$ (mais precisamente, $s(h,\mathcal{P}) \leq S(h,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P})$ para qualquer partição $\mathcal{P}$; de $s(h,\mathcal{P}) \leq \int_a^b h \leq S(h,\mathcal{P})$, temos que $\int_a^b h \leq S(f,\mathcal{P})$. Mas esta desigualdade vale para qualquer $\mathcal{P}$, resultando $\int_a^b h \leq \inf\{S(f,\mathcal{P});\ \mathcal{P} \text{ partição}\} = \int_a^b f$)

<u>Exercício</u>: seja $g : I \to \mathbb{R}$ função limitada. Então

$$\sup\{g(x);\ x \in I\} - \inf\{g(x);\ x \in I\} = \sup\{|g(x) - g(y)|;\ x, y \in I\}$$

Um dos resultados mais importantes relativos à integração é o seguinte

Teorema: funções contínuas são integráveis.

prova: seja $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua (portanto limitada). Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, pela continuidade uniforme de g sabemos que existe $\delta > 0$ de modo que $|x-y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Consideremos partição $\mathcal{P}$ cujos intervalos possuam comprimento no máximo $\delta/2$. Segue-se que

$$S(g,\mathcal{P}) - s(g,\mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^{n} (\sup\{g(x); x \in [t_{i-1},t_i]\} - \inf\{g(x); x \in [t_{i-1},t_i]\}) \cdot \underbrace{}_{(t_i - t_{i-1})}$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon \quad \square$$

Em outras palavras, denotando por $|\mathcal{P}| = \max\{t_i - t_{i-1};\ 1 \leq i \leq n\}$, temos que $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})$ é pequeno desde que $|\mathcal{P}|$ seja suficientemente pequeno. Se consideramos uma sequência $\mathcal{P}_n$ de partições de $[a,b]$ de modo que $|\mathcal{P}_n| \to 0$, então $\lim_{n\to\infty} s(g,\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} S(g,\mathcal{P}_n) = \int_a^b g$ quando g for contínua.

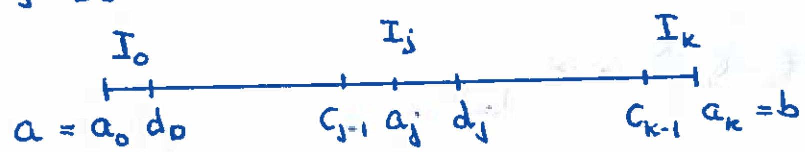
Exemplo: vamos calcular $\int_0^1 g$ e $\int_0^1 h$ onde $g(x) = x$ e $h(x) = x^2$. Consideremos partição $\mathcal{P}_n$ de $[0,1]$ obtida dividindo $[0,1]$ em n intervalos de igual comprimento. No subintervalo $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ temos $\max\{g(x)\} = \frac{i}{n}$ e $\max\{h(x)\} = (\frac{i}{n})^2$. Logo

$$S(g,\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n \quad \text{e}$$

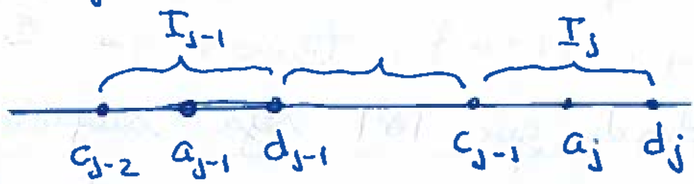
$$S(h,\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

e portanto $\int_0^1 g = \lim_{n\to\infty} S(g, \mathcal{P}_n) = \frac{1}{2}$ e $\int_0^1 h = \lim_{n\to\infty} S(h, \mathcal{P}_n) = \frac{1}{3}$

Podemos relaxar a condição de continuidade do modo seguinte: dizemos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($|f(x)| \leq M$ para $x \in [a,b]$) é <u>contínua por partes</u> quando existe partição $Q = a_0 = a < a_1 < \dots < a_k = b$ tal que f é contínua em cada (a_{j-1}, a_j), $1 \leq j \leq k$. Estas funções são também integráveis. Para ver isso, damos $\varepsilon > 0$ qualquer e fixamos intervalos fechados $I_j = [c_{j-1}, d_j]$ em torno de cada a_j



de modo que $\sum_{j=0}^{k} |I_j| < \frac{\varepsilon}{4M}$.



Em cada intervalo $[d_{j-1}, c_{j-1}]$ temos partição $\mathcal{P}_j$ t.q. $S(f|_{[d_{j-1},c_{j-1}]}, \mathcal{P}_j) - s(f|_{[d_{j-1},c_{j-1}]}, \mathcal{P}_j) < \frac{\varepsilon}{2k}$

Sendo $\mathcal{P}$ a partição obtida reunindo todas as partições $\mathcal{P}_j$, obtemos $S(f, \cup \mathcal{P}_j) - s(f, \cup \mathcal{P}_j)$

$$= \sum_{j=1}^{k} S(f, \mathcal{P}_j) - s(f, \mathcal{P}_j) + \sum \left(\sup\{f(x); x \in I_j\} - \inf\{f(x); x \in I_j\} \right) |I_j|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2k} \cdot k + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon .$$

<u>Exemplo</u>: podemos ter funções integráveis com um conjunto enumerável de pontos de descontinuidade. Seja $h : [1,2] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 0$

se x é irracional e $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ (p e q primos entre si)

Claramente f é descontínua nos racionais, dado que estes são aproximados por irracionais. Porém, f é contínua nos irracionais. De fato, seja x_0 irracional e $x_n \to x_0$. A subsequência (x_{n_k}) de (x_n) formada por irracionais fornece $f(x_{n_k}) = 0$ para todo n_k, logo $\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = 0 = f(x_0)$. Tomemos a subsequência $\left(\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}}\right)$ correspondente aos racionais.

Então $q_{n_j} \to \infty$ quando $n_j \to \infty$ (caso houvesse $\frac{p_m}{q_m} \to x_0$ e $q_m \leq L$ então $\{q_m\}$ e $\{p_m\}$ seriam finitos, absurdo). Resulta que $f\left(\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}}\right) = \frac{1}{q_{n_j}} \to 0 = f(x_0)$.

Se $\mathcal{P}$ é qualquer partição, $s(f,\mathcal{P}) = 0$, portanto $\underline{\int_1^2} f = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, temos $0 \leq f(x) < \varepsilon$ exceto por um nº finito de pontos $x_1, \ldots, x_\ell$ (correspondendo aos racionais $\frac{p}{q}$) t.q. $\frac{1}{q} \geq \varepsilon$. Adaptando o argumento usado na integrabilidade de funções contínuas por partes concluímos que existe partição $\mathcal{Q}$ de modo que $S(f,\mathcal{Q}) < \varepsilon$. Resulta $\overline{\int_a^b} f = 0$.

② Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável.

Lema: para qualquer $c \in (a,b)$, $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis. Além disso, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

<u>prova</u>: dado $\varepsilon>0$, consideremos partição $\bar{\mathcal{P}}$ de $[a,b]$ t.q. $S(f,\bar{\mathcal{P}})-s(f,\bar{\mathcal{P}})<\varepsilon$, e formamos partição $\mathcal{P}$ acrescentando o ponto c; ainda temos $S(f,\mathcal{P})-s(f,\mathcal{P})<\varepsilon$

Designemos por $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ as restrições de $\mathcal{P}$ aos intervalos $[a,c]$ e $[c,b]$. Segue-se que:

$$S(f,\mathcal{P})=S(f|_{[a,c]},\mathcal{P}_1)+S(f|_{[c,b]},\mathcal{P}_2) \text{ e } s(f,\mathcal{P})=$$
$$s(f|_{[a,c]},\mathcal{P}_1)+s(f|_{[c,b]},\mathcal{P}_2) \Rightarrow$$
$$\left[S(f|_{[a,c]},\mathcal{P}_1)-s(f|_{[a,c]},\mathcal{P}_1)\right]+\left[S(f|_{[c,b]},\mathcal{P}_2)-s(f|_{[c,b]},\mathcal{P}_2)\right]$$
$$=S(f,\mathcal{P})-s(f,\mathcal{P})<\varepsilon \Rightarrow$$
$$S(f|_{[a,c]},\mathcal{P}_1)-s(f|_{[a,c]},\mathcal{P}_1)<\varepsilon \text{ e}$$
$$S(f|_{[c,b]},\mathcal{P}_2)-s(f|_{[c,b]},\mathcal{P}_2)<\varepsilon.$$

Conclusão: $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis.

Para mostrar que $\int_a^c f+\int_c^b f=\int_a^b f$, usamos

- $S(f,\mathcal{P})=S(f|_{[a,c]},\mathcal{P}_1)+S(f|_{[c,b]},\mathcal{P}_2) \Rightarrow$
  $S(f,\mathcal{P})\geq \int_a^c f+\int_c^b f \Rightarrow \int_a^b f\geq \int_a^c f+\int_c^b f$ (justifique!)

- .. $s(f,\mathcal{P})=s(f|_{[a,c]},\mathcal{P}_1)+s(f|_{[c,b]},\mathcal{P}_2) \Rightarrow$
  $s(f,\mathcal{P})\leq \int_a^c f+\int_c^b f \Rightarrow \int_a^b f\leq \int_a^c f+\int_c^b f$ (justifique!)

<u>Teorema Fundamental do Cálculo</u>: seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável e $F(x):=\int_a^x f$. Se f é contínua em $c\in[a,b]$ então F é derivável em c e $F'(c)=f(c)$

<u>prova</u>: consideremos $h<0$; $\frac{F(c+h)-F(c)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{c+h}f-\int_a^c f\right]$

Como $\int_a^{c+h}f+\int_{c+h}^c f=\int_a^c$, temos $\frac{1}{h}\left[\int_a^{c+h}f-\int_a^c f\right]=$
$$=\frac{1}{h}\left[-\int_{c+h}^c f\right]=\frac{-1}{h}\int_{c+h}^c f.$$

Em $[c+h, c]$ temos que

$$\inf f|_{[c+h,c]} \leq f(t) \leq \sup f|_{[c+h,c]}$$

$$\Rightarrow \int_{c+h}^{c} (\inf f|_{[c+h,c]}) \leq \int_{c+h}^{c} f \leq \int_{c+h}^{c} (\sup f|_{[c+h,c]})$$

$$\Rightarrow (-h)(\inf f|_{[c+h,c]}) \leq \int_{c+h}^{c} f \leq (-h) \sup f|_{[c+h,c]}$$

$$\Rightarrow \inf f|_{[c+h,c]} \leq \frac{-1}{h} \int_{c+h}^{c} f \leq \sup f|_{c+h,c}$$

Quando $h \to 0$ a continuidade de f em c implica $\lim_{h\to 0} \frac{-1}{h} \int_{c+h}^{c} = f(c)$ ☒

Este Teorema é usado principalmente quando $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua; então $F(x) = \int_a^x f$ satisfaz $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

definição: $G: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável é primitiva de g quando $G'(x) = g(x)$ em $[a,b]$.

Observe que se G_1 e G_2 são primitivas de g existe constante $L \in \mathbb{R}$ de modo que $G_1(x) = G_2(x) + L$ em $[a,b]$.

Quando f é contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo mostra que f possui a primitiva $F(x) = \int_a^x f$. Sendo $\tilde{F}$ qualquer outra primitiva, deduzimos que $\tilde{F}(x) = F(x) + \tilde{F}(0)$, e portanto $\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \int_a^b f$.

Exemplo: seja $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \alpha$ se $x \in [0, 1/2)$ e $g(x) = \beta$ se $x \in (\frac{1}{2}, 1)$

(o valor de g em $1/2$ não tem influência no que se segue). Portanto, podemos definir $G(x) = \int_0^x g$; em $[0, \frac{1}{2}]$ temos $G(x) = \alpha x$, e em $[1/2, 0]$ temos $G(x) = \frac{\alpha}{2} + \beta(x - \frac{1}{2})$.

Exercício: seja $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Então $G(x) = \int_a^x g$ é contínua.

Observe que no exemplo anterior G deixa de ser derivável no ponto $1/2$, onde g não é contínua.

Exercício: seja $g: [-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}] \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, se $x \neq 0$. Mostre que $G(x) = \int_{-1/2\pi}^x g$ é a função $H(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ e $H(0) = 0$.

Exercício: seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável com derivada contínua. Mostre que $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$

Exercício: se $-1 \leq x \leq 1$, mostre que $\operatorname{arc\,cos} x =$
$$= x\sqrt{1-x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Exercício: seja $h: [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Mostre que h é integrável.

Exercício: sejam $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas. Mostre que $\left[\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right]^2 \leq \left[\int_a^b f(t)^2\,dt\right]\left[\int_a^b g(t)^2\,dt\right]$.

Sugestão: use o produto interno em $\mathbb{R}^n$.

Exercício: sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções com derivadas contínuas. Mostre que

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = (f\cdot g)(b) - (f\cdot g)(a) - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

Exercício: sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ com derivada contínua. Mostre que

$$\int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx$$

Exercício: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é derivável com f' integrável, mostre que $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$

(4) Operações com Integrais.

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis.

Proposição: 1) $f+g$ e $f\cdot g$ são integráveis e $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$; 2) se $|f(x)| \geq k > 0$ para todo $x \in [a,b]$ e algum $k > 0$, então $\frac{1}{f(x)}$ é integrável; 3) $|f|$ é integrável e

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

prova: 1) consideremos partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$. Como em cada subintervalo temos

$$\inf\{f(x)\} + \inf\{g(x)\} \leq f(x) + g(x) \leq \sup\{f(x)\} + \sup\{g(x)\},$$

vemos que $\sup\{f(x)+g(x)\} \leq \sup\{f(x)\} + \sup\{g(x)\}$

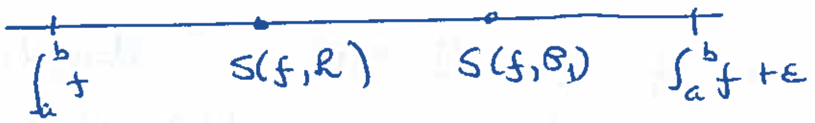
e $\inf\{f(x)+g(x)\} \geq \inf\{f(x)\} + \inf\{g(x)\}$

$$\Rightarrow S(f+g,\mathcal{P}) - s(f+g,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) + S(g,\mathcal{P}) - s(g,\mathcal{P})$$

Segue-se facilmente que $f+g$ é integrável

Quanto à igualdade das integrais: seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Existem partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ de $[a,b]$ de modo que
$$S(f,\mathcal{P}_1) < \int_a^b f + \varepsilon/2$$
$$S(g,\mathcal{P}_2) < \int_a^b g + \varepsilon/2$$

Sendo ℓ refinamento comum de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, temos
$$S(f,\ell) \le S(f,\mathcal{P}_1) < \int_a^b f + \varepsilon/2$$
$$S(g,\ell) \le S(g,\mathcal{P}_2) + \int_a^b g + \varepsilon/2$$



$$\Rightarrow S(f,\ell) + S(g,\ell) \le \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon$$
$$\Rightarrow S(f+g,\ell) \le \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon \quad \text{(porque?)}$$
$$\Rightarrow \int_a^b (f+g) \le \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon .$$

Como a desigualdade vale para todo $\varepsilon > 0$, concluímos que $\int_a^b (f+g) \le \int_a^b f + \int_a^b g$

De modo análogo obtemos $\int_a^b (f+g) \ge \int_a^b f + \int_a^b g$

As afirmativas para $f \cdot g$ e $\frac{1}{f}$ são de demonstração direta (exercício).

3) Temos que $||f(x)| - |f(y)|| \le |f(x) - f(y)|$ para quaisquer x, y. Sendo $\mathcal{P}$ partição, em qualquer subintervalo:
$$\sup\{||f(x)| - |f(y)||\} \le \sup\{|f(x) - f(y)|\}$$
$$\Rightarrow S(|f|,\mathcal{P}) - s(|f|,\mathcal{P}) \le S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}).$$

Resulta daí que $|f|$ é integrável.

Finalmente: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ implica
$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx, \text{ ou } \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx .$$

Exemplo: seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = -1$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Então f não é integrável; mas $|f(x)| = 1$ para todo $x \in [a,b]$, de modo que $|f|$ é integrável.

Exemplo: Integrais Impróprias

Consideremos $f: [a,\infty)$ função contínua, e $\int_a^c f(t)\,dt$ para $c > a$. Caso exista $\lim_{c\to\infty} \int_a^c f(t)\,dt$, definimos $\int_a^\infty f(t)\,dt$ como sendo este limite.

Por exemplo, se $f(t) = \frac{1}{t^2}$, $t \geq 1$, então $\int_a^c \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{c}$.

Logo, $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1$

Outra situação aparece quando temos uma função $g: [a,b) \to \mathbb{R}$ contínua porém não limitada na vizinhança de b. Tomamos a integral $\int_a^{b-\varepsilon} g(t)\,dt$ para $\varepsilon > 0$. Se existir $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} g(t)\,dt$, definimos este limite como $\int_a^b g(t)\,dt$.

Por exemplo, seja $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Temos que $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{arc sen}(1-\varepsilon) - \text{arc sen}\, 0$, de modo que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$

Se $h(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $t \geq 0$, então $\int_0^c \frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg}\, c - \text{arctg}\, 0$

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Quando $\int_0^\infty |f(t)|\,dt$ $\left(\text{ou } \int_a^b |f(t)|\,dt\right)$ existe, dizemos que a integral é <u>absolutamente convergente</u>.

Escrevamos $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$.

Segue-se que $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$ e $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$.

Conclua que se a integral é absolutamente convergente então também é convergente

⑤ Fórmula de Taylor, versão infinitesimal.

Consideremos $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ função $n-1$ vezes derivável em (a,b) e n vezes derivável em $c\in(a,b)$. (por abuso de linguagem diremos que f é n vezes derivável em c). Definimos o polinômio de Taylor de f em ordem n centrado em c como

$$T^n_{f,c}(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j$$

Teorema: seja $r(x):=f(x)-T^n_{f,c}(x)$. Então $\lim_{x\to c}\frac{r(x)}{(x-c)^n}=0$

prova: observemos que r é n vezes derivável em c, com $r^{(j)}(c)=0$ para $0\le j\le n$. Provemos que uma função com tal requisito satisfaz a propriedade enunciada para o limite. Façamos indução em n. Se $n=1$, devemos mostrar que $\lim_{x\to c}\frac{r(x)}{x-c}=0$. Mas $\frac{r(x)}{x-c}=\frac{r(x)-r(c)}{x-c}$, logo $\lim_{x\to c}\frac{r(x)}{x-c}=r'(c)=0$.

Suponhamos o Teorema válido para qualquer função com $g(a,b)\to\mathbb{R}$ derivável $n-1$ vezes em $c\in(a,b)$ com $g^{(j)}(c)=0$, $0\le j\le n-1$. Ora:

$\left|\frac{r(x)}{(x-c)^n}\right|=\left|\frac{r(x)-r(c)}{(x-c)^n}\right|=\left|\frac{r'(t_x)(x-c)}{(x-c)^n}\right|$ para algum t_x entre c e x; portanto, $\left|\frac{r(x)}{(x-c)^n}\right|=\left|\frac{r'(t_x)}{(t_x-c)^{n-1}}\right|\left|\frac{(t_x-c)^{n-1}}{(x-c)^{n-1}}\right|$, e

portanto $\lim_{x\to c}\left|\frac{r(x)}{(x-c)^n}\right|=0$ pois $\lim_{x\to c}\left|\frac{r'(t_x)}{(t_x-c)^{n-1}}\right|=0$ (hipótese de indução aplicada a r') e $\left|\frac{t_x-c}{x-c}\right|\le 1$ ▭

Uma aplicação interessante: seja $f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável em $c\in(a,b)$. Suponhamos n par e $f'(c)=\dots=f^{(n-1)}(c)=0$. Caso $f^{(n)}(c)>0$, então c é ponto de mínimo local.

Basta notar que $f(x)=T^n_{f,c}(x)+r(x)$ com $\lim_{x\to c}\frac{r(x)}{(x-c)^n}$ implica $f(x)=f(c)+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+r(x)$

$$=f(c)+\left[\frac{f^{(n)}(c)}{n!}+\frac{r(x)}{(x-c)^n}\right](x-c)^n$$

e portanto $0<|x-c|$ for suficientemente seque-se que $f(x)-f(c)>0$.

⑥ <u>Fórmula de Taylor</u>, <u>versão integral</u>.

Consiste em encontrar uma expressão integral para o resto $r(x)$. Por exemplo, no intervalo $[0,1]$ podemos escrever $\frac{1}{1+x}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j x^j+\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$

Portanto, $\log(1+x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j x^{j+1}}{j+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$

O termo $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{x^{j+1}}{j+1}$ é o polinômio de Taylor de $x\longmapsto\log(1+x)$ centrado em 0, e $(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$ é o resto em forma integral.

<u>Teorema</u>: seja $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ $n+1$ vezes derivável, e $c\in[a,b]$. Então $f(x)=T^n_{f,c}(x)+r_n(x)$, onde $r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_c^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

<u>Observação</u>: escrevendo $|f^{(n+1)}(t)|\le M$ em $[a,b]$, temos $|r_n(x)|\le\frac{M}{n!}|x-c|^{n+1}\Rightarrow\lim_{x\to c}\frac{r_n(x)}{(x-c)^n}=0$. Recuperamos assim

a versão infinitesimal (porém com hipótese extra)

<u>prova</u>:

1) Façamos indução em n.

Para $n=1$, devemos verificar que

$$f(x) - [f(c) + f'(c)(x-c)] = \int_c^x (x-t)\, f''(t)\, dt .$$

Ora, apliquemos integração por partes para calcular a integral. Fazendo $u = x-t$, $dv = f''(t)\,dt$, temos

$$\int_c^x (x-t) f''(t)\,dt = \int_c^x u\,dv = uv\Big|_c^x - \int_c^x v\,du$$

$$= f'(t)(x-t)\Big|_c^x + \int_c^x f'(t)\,dt = -f'(c)(x-c) + f(x) - f(c).$$

2) Suponhamos o Teorema válido para $n=k$, e provemos para $n=k+1$.

Temos $f(x) = T^k_{f,c}(x) + r_k(x) = T^k_{f,c}(x) + \frac{1}{k!}\int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt$

$$= T^{k+1}_{f,c}(x) - \frac{f^{(k+1)}(c)\,(x-c)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{1}{k!}\int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt.$$

Apliquemos integração por partes à integral: $\left(v = -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}\right)$

$u = f^{(k+1)}(t)$, $dv = (x-t)^k$. Segue-se que

$$\frac{1}{k!}\int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt = \frac{1}{k!}\Big\{\Big[-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} f^{(k+1)}(t)\Big]_c^x$$

$$- \int_c^x -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} \cdot f^{(k+2)}(t)\,dt\Big\}$$

$$= \frac{1}{k!}\Big\{\frac{f^{(k+1)}(c)\,(x-c)^{k+1}}{(k+1)} + \int_c^x \frac{(x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)\,dt}{k+1}\Big\}$$

$$\Rightarrow f(x) = T^{k+1}_{f,c}(x) + \frac{1}{(k+1)!}\int_c^x (x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)\,dt$$

$$= T^{k+1}_{f,c}(x) + r_{k+1}(x) \quad \blacksquare$$

O polinômio de Taylor de ordem n é caracterizado pela propriedade limite do resto, o que é bastante útil como veremos nos exemplos a seguir. Mais precisamente:

Proposição: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $c\in[a,b]$. Se $p(x)$ é polinômio de grau n t.q. $f(x)=p(x)+s(x)$ com $\lim_{x\to c}\frac{s(x)}{(x-c)^n}=0$, então $T^n_{f,c}(x)\equiv p(x)$

prova: $\lim_{x\to c}\frac{T^n_{f,c}(x)-p(x)}{(x-c)^n}=0 \Rightarrow \lim_{x\to c} T_{f,c}(x)-p(x)=0$

$\Rightarrow T^n_{f,c}(c)-p(c)=0$ (continuidade de $T_{f,c}(x)-p(x)$)

$\Rightarrow T^n_{f,c}(x)-p(x)=(x-c)\,p_1(x)$, grau $p_1=n-1$.

De $\frac{T^n_{f,c}(x)-p(x)}{(x-c)^n}=\frac{p_1(x)}{(x-c)^{n-1}}$ concluímos que

$\lim_{x\to c}\frac{p_1(x)}{(x-c)^{n-1}}=0$, de modo que $\lim_{x\to c}p_1(x)=0$ e então

$p_1(c)=0 \Rightarrow p_1(x)=(x-c)\,p_2(x)$, grau $p_2=n-2$

Resulta que $\frac{T^n_{f,c}(x)-p(x)}{(x-c)^n}=\frac{p_2(x)}{(x-c)^{n-2}}$, e, como antes, $p_2(c)=0$

Prosseguindo o raciocínio chegamos a

$$\frac{T^n_{f,c}(x)-p(x)}{(x-c)^n}=a_n(x),\ \text{com } a_n(c)=0 \text{ e grau } a_n=0.$$

Portanto, $T^n_{f,c}(x)\equiv p(x)$ $\square$

Exemplo: como $\frac{1}{1+x}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j x^j+\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$ para $x>-1$,

e $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\left[\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}\right]=0$, temos que $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j x^j$ é o polinômio de Taylor de $\frac{1}{1+x}$ de ordem n centrado em 0.

Integrando esta equação:

$$\log(1+x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j x^{j+1}}{j+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt \quad ,\ x>-1$$

Como $\left|(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt\right|\le\left|\int_0^x t^{n+1}\,dt\right|\le\frac{|x|^{n+2}}{n+2}$, vemos que $\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j x^{j+1}}{j+1}$ é o polinômio de Taylor de $\log(1+x)$

de ordem $n+1$ centrado em 0.

Em $(-1,1]$ temos que $\left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt\right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$.

Fazendo $n\to\infty$ obtemos $\log(1+x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{j+1}}{j+1}$.

Em particular $\log 2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1}$, conhecida como série harmônica.

Nesta mesma linha de idéias façamos $x=y^2$ na identidade $\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^j + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$, obtendo $\frac{1}{1+y^2} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j y^{2j} + \frac{(-1)^{n+1}y^{2(n+1)}}{1+y^2}$ (válida também para $y<0$). Então $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j y^{2j}$ é o polinômio de Taylor de $\frac{1}{1+y^2}$ centrado em 0 de ordem $2n$.

Integrando a expressão acima:

$$\operatorname{arctg} y = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{y^{2j+1}}{2j+1} + (-1)^{n+1}\int_0^y \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,dt$$

Ora, $\left|\int_0^y \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,dt\right| \leq \left|\int_0^y t^{2(n+1)}\,dt\right| = \frac{|y|^{2n+3}}{2n+3}$.

$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{y^{2j+1}}{2j+1}$ é o polinômio de Taylor de $\operatorname{arctg} y$ em torno de zero de ordem $2n+1$.

Tomando $|y|\leq 1$ podemos fazer $n\to\infty$ e obter $\operatorname{arctg} y = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{y^{2j+1}}{2j+1}$; em particular quando $y=1$ encontramos $\frac{\pi}{4} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1}$

Nos exemplos acima representamos as funções $\log(1+x)$ e $\operatorname{arctg} y$ por séries de potências infinitas que são suas <u>séries de Taylor</u>.

<u>Exemplo</u>: consideremos a função exponencial. Então em cada intervalo $[-a,a]$ temos que $e^t \leq M$ e

$$e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt$$ e

$\left|\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt\right| \leq a^{n+1} \cdot M$. Concluímos de

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} \cdot M}{n!} = 0$ que $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$, que é a série de Taylor de e^x centrada em 0.

Vamos mostrar que o número e é irracional.

Observemos inicialmente que no intervalo $[-1,1]$ temos $\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\,dt \leq e - \sum \frac{1}{j!} \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e\,dt$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \leq e - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Suponhamos e racional por absurdo. Escolhendo n suficientemente grande temos que $n!\,e$ seria natural; ora, $n!\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$ também é natural, e

$\frac{1}{n+1} \leq n!\,e - \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!} \leq \frac{3}{n+1}$, o que é impossível: teríamos dois naturais em um intervalo de tamanho inferior a 1.

⑥ Uma aplicação à Física

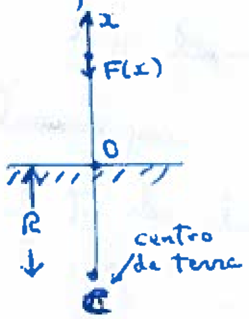
Consideremos uma partícula movendo-se na reta sob ação de uma força $F(x)$; descrevendo a posição da partícula em função do tempo como $x(t)$, temos que a velocidade é dada por $x'(t)$ e a aceleração por $x''(t)$. Definamos o trabalho executado pela força enquanto a partícula muda de um ponto x_0 a um ponto x_1 como $\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx$; a energia cinética de uma partícula de massa m e velocidade v é $\frac{mv^2}{2}$.

Proposição: suponhamos que a partícula nos pontos x_0 e x_1 tenha energia cinética $\frac{mv_0^2}{2}$ e $\frac{mv_1^2}{2}$ respectivamente. Então $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx$.

prova: é uma conseqüência direta da fórmula de mudança de variáveis em integrais. Temos $\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t))\,x'(t)\,dt$, onde $x(t_0)=x_0$ e $x(t_1)=x_1$. Como $F(x(t)) = m\,x''(t)$ (lei de Newton), vemos que $\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} m\,x'(t)\,x''(t)\,dt =$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d}{dt}\left[\frac{x'(t)^2}{2}\right] dt = m\left.\frac{x'(t)^2}{2}\right|_{t=t_0}^{t=t_1} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad \blacksquare$$

Uma aplicação (idealizada) é a seguinte: um corpo de massa m é arremessado verticalmente da superfície da terra com velocidade V_0. Calculemos a altura máxima atingida por ele; sejam R o raio da terra, M sua massa e H a altura máxima.



Sobre o corpo atua a força gravitacional $F(x) = -\frac{GmM}{(x+R)^2}$. Portanto o trabalho executado por ela até o corpo atingir a posição $x = H$ é $\int^{H} -\frac{GmM}{(x+R)^2}\,dx$

$$= -GmM\left(-\frac{1}{x+R}\right)\Big|_{x=0}^{x=H} = -\frac{HGmM}{R(H+R)}$$, onde G é a constante universal de gravitação. Usando a Proposição acima: $-\frac{HGmM}{R(H+R)} = -\frac{mV_0^2}{2} \Rightarrow V_0^2 = \frac{2GMH}{R(H+R)}$

Vê-se que a velocidade mínima de lançamento para que o corpo não retorne é dada por

$$v_{min}^2 = \lim_{H\to\infty} \frac{2GMH}{R(H+R)} = \frac{2GM}{R}.$$