Reta, plano e esfera – 1

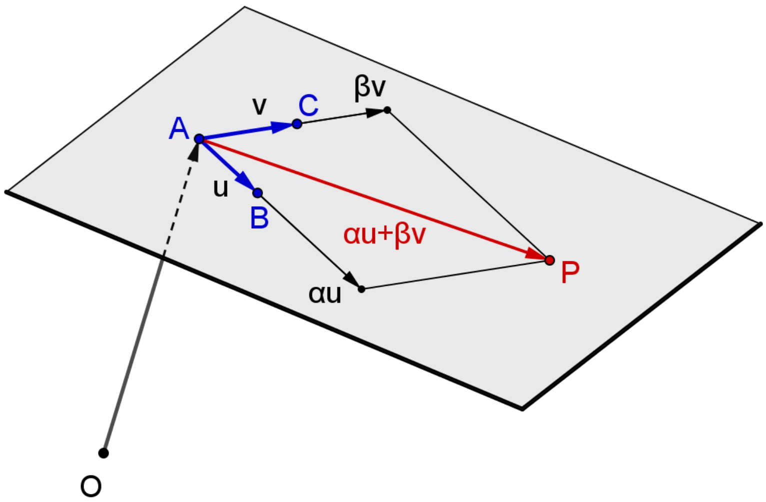
Equação do plano

Um plano fica definido por três pontos não colineares.

Por exemplo, dados os pontos A, B e C, não colineares, definimos dois vetores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$ e o plano que contém esses três pontos é o conjunto dos pontos

$$P = A + \alpha u + \beta v$$

onde α e β são números reais.



Exemplo

Determine a equação do plano que contém os pontos $A = (3, 1, 2)$, $B = (5, 2, -1)$ e $C = (4, 3, 1)$.

Solução

Não sabemos ainda que forma tem a equação de um plano no espaço, mas vamos descobrir. Seguindo os passos acima,

$$u = \overrightarrow{AB} = (2, 1, -3) \quad e \quad v = \overrightarrow{AC} = (1, 2, -1)$$

A equação vetorial do plano fica:

$$P = A + \alpha u + \beta v$$

$$P = (x, y, z) = (3, 1, 2) + \alpha(2, 1, -3) + \beta(1, 2, -1)$$

Exercício

O ponto $P = (8, -1, -7)$ pertence a esse plano?

Solução

Vamos ver se existem reais α e β tais que

$$(8, -1, -7) = (3, 1, 2) + \alpha(2, 1, -3) + \beta(1, 2, -1)$$

Ou ainda,

$$(5, -2, -9) = \alpha(2, 1, -3) + \beta(1, 2, -1)$$

Essa equação vetorial implica o sistema

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 5 \\ \alpha + 2\beta = -2 \\ 3\alpha + \beta = 9 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $\alpha = 4$ e $\beta = -3$.

O ponto P pertence ao plano (ABC), pois

$$P = A + 4u - 3v$$

Continuando.

A partir da equação do exemplo: $(x, y, z) = (3, 1, 2) + \alpha(2, 1, -3) + \beta(1, 2, -1)$

vamos eliminar os parâmetros c para obter uma equação cartesiana

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = x - 3 \\ \alpha + 2\beta = y - 1 \\ -3\alpha - \beta = z - 2 \end{cases}$$

Consideremos a primeira e terceira equações

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = x - 3 \\ -3\alpha - \beta = z - 2 \end{cases}$$

Resolvendo nas incógnitas α e β encontramos $\alpha = -x - z + 5$ e $\beta = 3x + 2z - 13$.

Substituindo na segunda equação temos

$$\alpha + 2\beta = y - 1$$

$$-x - z + 5 + 2(3x + 2z - 13) = y - 1$$

Arrumando,

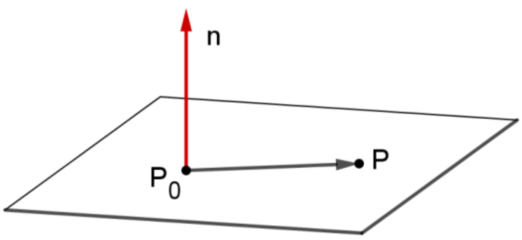
$$5x - y + 3z = 20$$

A equação do plano é do primeiro grau nas três variáveis,

O vetor normal

Vamos agora definir o plano de outra forma; por um ponto de passagem e um vetor perpendicular.

O plano passará por um ponto dado $P_0 = (x_0, y_0, z_o)$ e será perpendicular ao vetor dado $n = (a, b, c)$.



Para todo ponto P desse plano, o vetor n será perpendicular ao vetor $\overrightarrow{P_0P}$.

Fazendo $P = (x, y, z)$ temos $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e $n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Desenvolvendo e arrumando,

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

ou

$$ax + by + cz = d$$

Todo plano tem uma equação da forma $ax + by + cz = d$ onde $n = (a, b, c)$ é um *vetor normal*.

Retomamos então o exemplo anterior, agora sob outro ponto de vista.

Exemplo

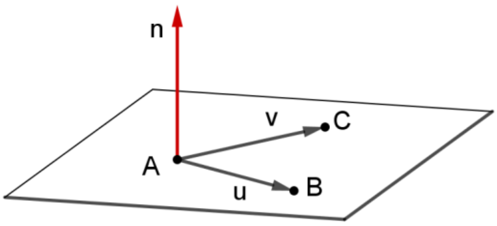
Determine a equação do plano que contém os pontos $A = (3, 1, 2)$, $B = (5, 2, -1)$ e $C = (4, 3, 1)$.

Solução

Determinamos os vetores

$u = \overrightarrow{AB} = (2, 1, -3)$ e $v = \overrightarrow{AC} = (1, 2, -1)$

e adotamos $n = u \times v$.



$$\begin{matrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Encontramos $n = (5, -1, 3)$. Assim, a equação desse plano é $5x - y + 3z = d$ e substituindo, por exemplo, $A = (3, 1, 2)$, obtemos $5 \cdot 3 - 1 + 3 \cdot 2 = 20 = d$

Assim, a equação do plano que passa pelos pontos dados A, B e C é

$$5x - y + 3z = 20$$

Exercício

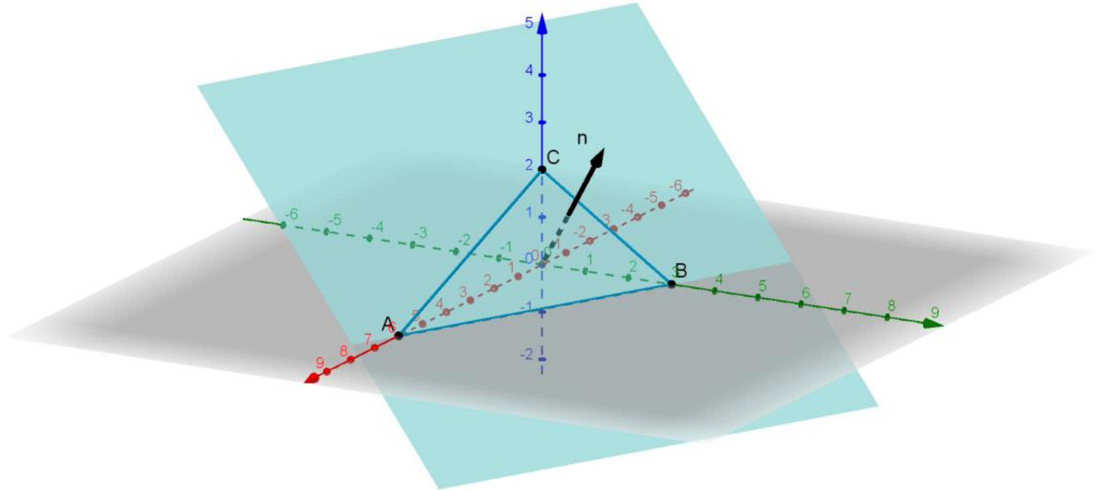
Determine os pontos de interseção do plano $x + 2y + 3z = 6$ om os eixos.

Solução

$$y = z = 0 \quad \rightarrow \quad x = 6$$
$$x = z = 0 \quad \rightarrow \quad y = 3$$
$$x = y = 0 \quad \rightarrow \quad z = 2$$

Os pontos são $A = (6, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$, $C = (0, 0, 2)$.

Visualização



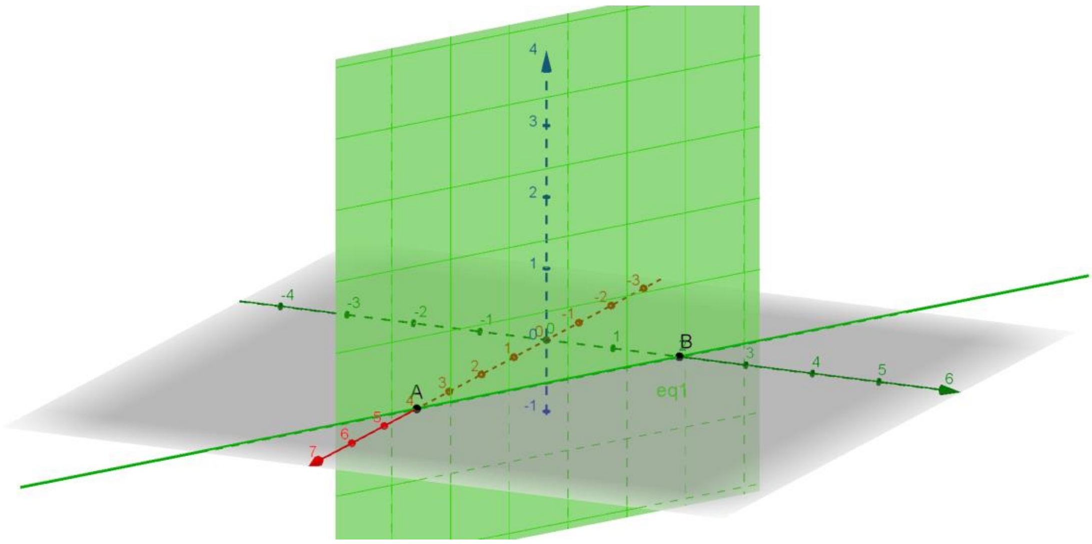
Exercício

O que representa no espaço a equação $x + 2y = 4$?

Solução

Um plano que corta o eixo X em $(4, 0, 0)$, o eixo Y em $(0, 2, 0)$ e é paralelo ao eixo Z.

Visualização

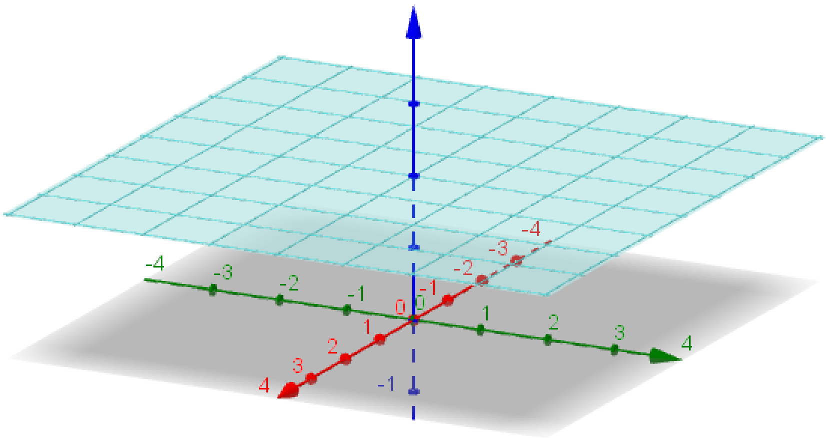


Exercício

O que representa no espaço a equação $z = 2$?

Solução

Um plano que contém o ponto $(0,0,2)$ e é paralelo aos eixos X e Y. Esse plano é, portanto, perpendicular ao eixo Z



Posições relativas entre reta e plano

Dados uma reta e um plano, a reta pode estar *contida* no plano, pode ser *secante* ao plano ou pode ser *paralela* ao plano. Veremos esses casos com exemplos (exercícios).

Exercício

A reta r passa pelos pontos $A = (1,2,-5)$ e $B = (2,1,-3)$ e o plano Π tem equação $2x + 3y - 4z = 1$. Determine $r \cap \Pi$.

Solução

Vamos determinar as equações paramétricas da reta r.

Temos o vetor diretor $v = \overrightarrow{AB} = (1,-1,2)$. Então todo ponto P da reta r é tal que

$$P = A + tv$$

$$(x,y,z) = (1,2,-5) + t(1,-1,2)$$

As equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$$

Vamos agora ver para que valor de t um ponto de r pertence a Π.

$$2(1+t) + 3(2-t) - 4(-5+2t) = 1$$

$$2 + 2t + 6 - 3t + 20 - 8t - 1 = 0$$

$$-9t = -27 \quad \rightarrow \quad t = 3$$

$$\begin{cases} x = 1 + 3 = 4 \\ y = 2 - 3 = -1 \\ z = -5 + 2 \cdot 3 = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad P = (4, -1, 1)$$

Exercício

Determine k para que a reta r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -5 + kt \end{cases}$ seja paralela ao plano $3x + 4y - 2z = 0$.

Solução 1

Podemos usar o mesmo método anterior e impor a condição que a interseção seja vazia.

$$3x + 4y - 2z = 0$$

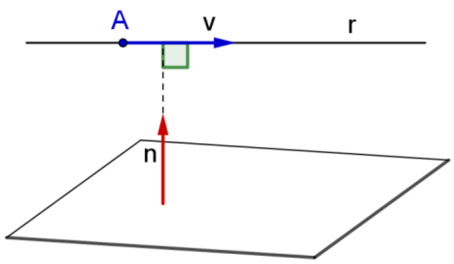
$$3(1+2t) + 4(3-t) - 2(-5+kt) = 0$$

$$3 + 6t + 12 - 4t + 10 - 2kt = 0$$

$$(2 - 2k)t = -25$$

Para que não exista solução devemos ter $k = 1$.

Solução 2



Reta $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -5 + kt \end{cases}$

Plano: $3x + 4y - 2z = 0$

O ponto $A = (1, 3, -5)$ pertence à reta e não pertence ao plano. Além disso, o vetor diretor da reta, $v = (2, -1, k)$ é perpendicular ao vetor normal do plano $n = (3, 4, -2)$.

$$v \cdot n = 0 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + k \cdot (-2) = 0 \quad \rightarrow \quad k = 1$$

Exercício

Determine os parâmetros a e b para que a reta $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + at \\ z = b + t \end{cases}$ fique contida no plano $x + 2y - z = 6$.

Resposta

$a = 6, \; b = -7$

Posições relativas entre dois planos

Dois planos distintos ou são paralelos ou se intersectam segundo uma reta.

É fácil reconhecer planos paralelos.

Os planos $\Pi_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e $\Pi_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ são paralelos se, e somente se,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

Com coeficientes não nulos.

Se os vetores normais dos dois planos não forem proporcionais, os planos são secantes e sua interseção é uma reta Como encontrar essa reta?

Exemplo

Dados $\Pi_1: 2x - 3y + z = 1$ e $\Pi_2: x + y - 2z = 3$, determine $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

Solução

A reta de interseção desses planos é o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Temos aqui 1 liberdade, o que é natural. Fazendo $z = t$ ficamos com

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 - t \\ x + y = 3 + 2t \end{cases}$$

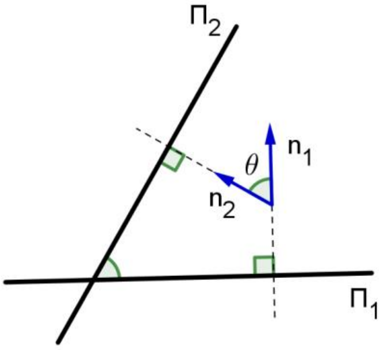
Resolvendo nas incógnitas x e y encontramos o conjunto solução:

$$\mathrm{r} = \Pi_1 \cap \Pi_2 = \{(2 + t, 1 + t, t); t \in \mathbb{R}\}$$

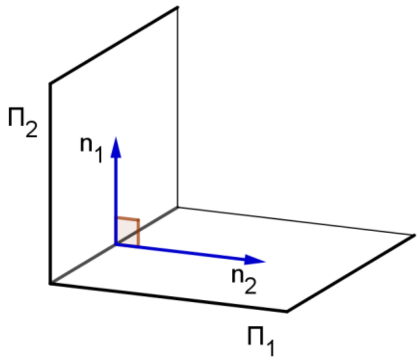
Ângulo entre dois planos

O ângulo entre dois planos é o menor ângulo formado por seus vetores normais. O esquema abaixo permite visualizar esse ângulo.

$$\cos\theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|}$$

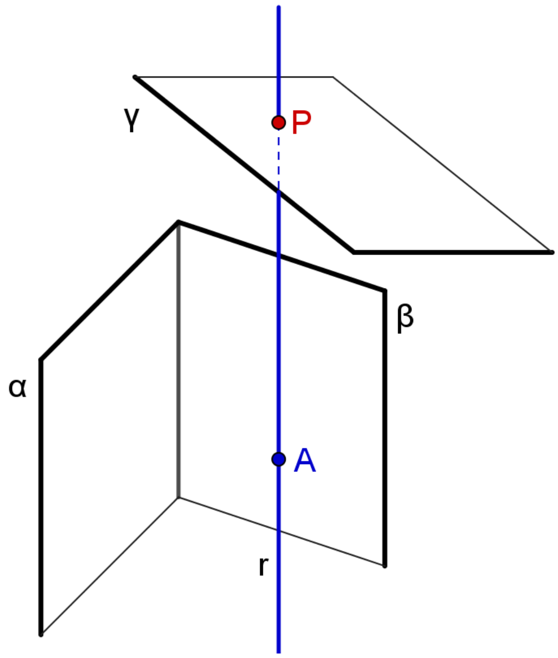


Dois planos são *perpendiculares* quando seus vetores normais são perpendiculares.



Problema

A reta r contém o ponto $A = (3, 4, 5)$ e é paralela aos planos $\alpha: x - y + 2z = 3$ e $\beta: 2x + y + z = 4$. Determine o ponto onde a reta r fura o plano $\gamma: x + 2y - 3z = 0$.



Solução

Os vetores normais dos planos α e β são $n_\alpha = (1, -1, 2)$ e $n_\beta = (2, 1, 1)$.

Seja $v = (a, b, c)$ um vetor diretor da reta r.

Se uma reta é paralela a um plano então seu vetor diretor é perpendicular ao vetor normal do plano. Portanto, $n_\alpha \cdot v = 0 \;\; e \;\; n_\beta \cdot v = 0$. Assim,

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases}$$

Uma solução particular é $v = (1, -1, -1)$.

A reta r tem equação vetorial

$$(x, y, z) = (3, 4, 5) + t(1, -1, -1)$$

e equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

Um ponto do tipo $P = (3 + t, 4 - t, 5 - t)$ deve pertencer ao plano $x + 2y - 3z = 0$.

Daí,

$$3 + 3t + 2(4 - t) - 3(5 - t) = 0$$

Resolvendo, encontramos $t = 2$.

Daí, $P = (5, 2, 3)$.