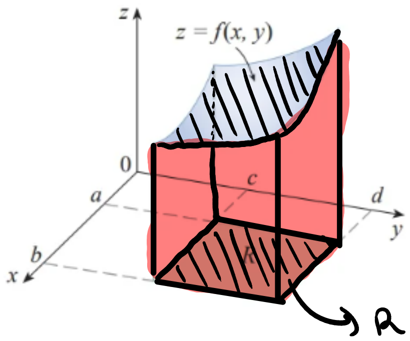
Integrais duplas sobre retângulos

Considere uma função $f(x,y)$ definida em um retângulo fechado $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, supondo $f(x,y) \geq 0$.

O sólido S é a região limitada pelo retângulo R e a curva da função $z = f(x,y)$

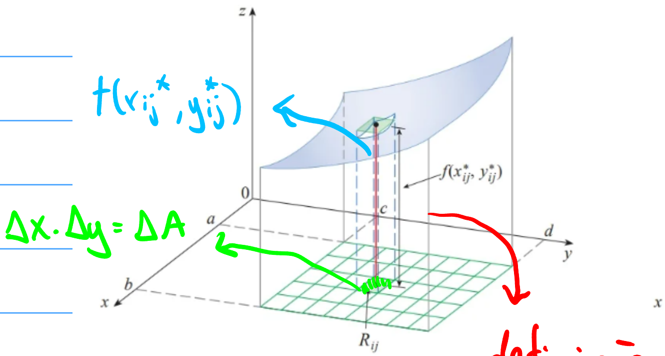


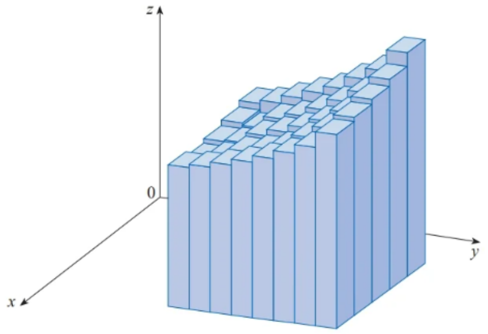
O raciocínio é semelhante ao da determinação da integral simples: dividir o retângulo em partes, ou seja, dividir o intervalo x em m partes de comprimento $(b-a)/m = \Delta x$ e o intervalo y em n partes de comprimento $(d-c)/n = \Delta y$.

Com isso, montaremos os retângulos de área $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$. Além disso, dentro de cada retângulo, devemos escolher pontos amostrais (x_{ij}^*, y_{ij}^*) para determinar $z^* = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$.

Portanto, o volume de S seria:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\,\Delta A \quad \text{(soma dupla de Riemann).}$$





definição do ponto amostral $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$

visualização de $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(x_{ij}, y_{ij})\,\Delta A$

Portanto, chegaríamos no volume S se fizermos

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(x^*, y^*)\,\Delta x . \Delta y = \lim_{n\to\infty}\left(\lim f(x^*, y^*)\,\Delta x\right)\Delta y$$

e

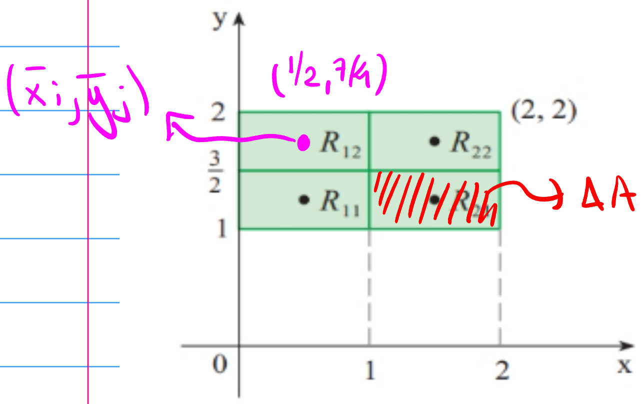
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \boxed{\int_{y=c}^{y=d}\int_{x=a}^{x=b} f(x,y) . dx\,dy} \;//.$$

Regra do ponto médio

Assim como nas integrais simples, podemos aproximar os valores das integrais duplas escolhendo o ponto médio dos subintervalos.

Sejam $\bar{x}_i$ e $\bar{y}_j$ pontos médios de $[x_{i-1}, x_i]$ e $[y_{j-1}, y_j]$ respectivamente. Logo,

$$\iint_R f(x,y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$



Integrais Iteradas

A ideia seria calcular duas integrais unidemensionais (como um somatório duplo)

Seja $f(x,y)$ integrável em $[a,b]\times[c,d]=R$

Agora, fazendo $A(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$, sabemos

(mantendo x constante).

que $V=\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$

Do mesmo modo: $A(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ (mantendo

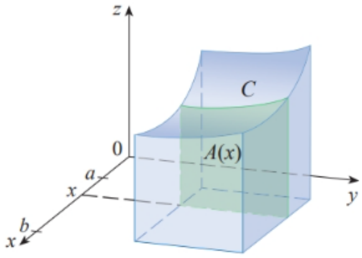
y constante). Logo, $V=\int_d^c A(y)\,dy = \int_d^c \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$

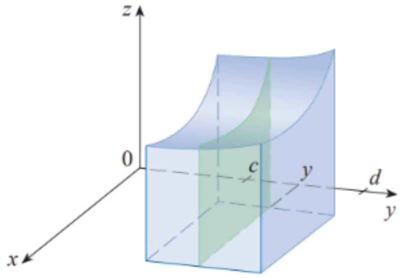
e $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_d^c \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$

$= \iint_R f(x,y)\,dA$.

Teorema de Fubini: Se f é contínua em $R=\{(x,y) \mid a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$, então:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$





Caso especial: se $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ contínua em $R = [a,b] \times [c,d]$, então pelo teorema de Fubini:

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_c^d \left(\int_a^b g(x)h(y)\, dx \right) dy$$

$$= \int_c^d \left(h(y) \left(\int_a^b g(x)\, dx \right) \right) dy \;=\; \int_c^d h(y)\, dy \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

Valor Médio

No cálculo em uma variável, o valor médio de uma função $y = f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$ é $f_{méd} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

De modo semelhante:

$$f_{méd} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)\,dA.$$