Área de Superfícies

Vamos aplicar um raciocínio parecido com os anteriores e de cálculo do comprimento de um arco (cálculo I).

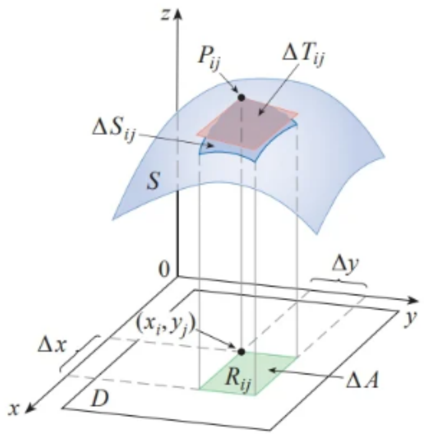
A ideia é aproximar os planos tangentes à curva S de uma equação $z = f(x,y)$ que está acima de uma região D.

Primeiro, dividimos D em pequenos retângulos R_{ij} de área $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$. Seja (x_i, y_j) o canto de R_{ij} mais próximo da origem, seja $P_{ij} = (x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ o ponto em S diretamente acima dele.

Assim, o plano tangente de S em P_{ij} é uma aproximação linear de S numa vizinhança de P_{ij}. Logo, a área ΔT_{ij} (paralelogramo) é uma aproximação da parte correspondente da área ΔS_{ij} exata em S.

Portanto, $\sum\sum \Delta T_{ij}$ é uma aproximação à área de S.

$$E \quad \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij} = A(S)$$



Para encontrar uma fórmula explícita para ΔT_{ij} podemos considerar dois vetores a, b que iniciam em P_{ij} e ficam ao longo dos lados do paralelogramo de área ΔT_{ij}. Assim $\Delta T_{ij} = |a \times b|$ (módulo do produto vetorial).

Logo $\begin{cases} a = \Delta x \hat{i} + f_x(x_i, y_i)\, \Delta x\, \hat{k} \\ b = \Delta y \hat{j} + f_y(x_i, y_i)\, \Delta y\, \hat{k}. \end{cases}$

e $|a \times b| = \sqrt{f_x(x_i,y_i)^2 + f_y(x_i,y_i)^2 + 1}\ \Delta A$

e $A(s) = \lim\limits_{m,n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{f_x(x_i,y_i)^2 + f_y(x_i,y_i)^2 + 1}\ \Delta A$

$$\boxed{A(s) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 + 1}\ dA}$$