Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada
Nome:
Monitores: Cleyton e Jeann

Exercício 1 - Razão e Raiz

Seja (x_n) uma sequência de termos positivos. Mostre que se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, então $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$. Utilize isto para mostrar que $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$. Vale a recíproca?

Exercício 2 - A Exponencial

Eulerverton e seus três amigos, Gabriel Matosmático, Gabriel Π-vanato e Gabriel Cardineiro, estavam estudando uma certa função específica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esta função satisfazia as seguintes propriedades

(i) f é contínua

(ii) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $f(0) > 0$

Ajude-os a descobrir que função é essa, provando as conjecturas deles...

(a) Gabriel Matosmático desconfia que $f(0) = 1$ e que $f(n) = f(1)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

(b) Gabriel Cardineiro desconfia que $f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)^{p/q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$.

(c) Gabriel Π-vanato desconfia que $f(x) = f(1)^x, \forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

(d) Eulerverton desconfia que $f(1) > 0$ e, portanto, que $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $f(1) = e^a$.

Agora, deduza a função f e entenda porque **Euler**verton ficou com os créditos pela descoberta da função.

Comentário: Eulerverton, Matosmático, Π-vanato e Cardineiro são amigos de Robertinha, Nati, Gustavo e Murilo.

Exercício 3 - A Reta

Seja $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $m(x + y) = m(x) + m(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $m(x) = ax$.

Comentário: O procedimento para resolver é similar ao do Exercício 2.

Exercício 1 - Solução

Para a demonstração do resultado, veja Teorema 7 do Capítulo 4 do livro "Análise Real. Funções de Uma Variável. Volume 1"do autor Elon Lages Lima.

Seja $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Então

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e\end{aligned}$$

Do resultado visto acima, segue que $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$.

A recíproca não é necessariamente verdadeira porque a sequência $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ pode não convergir. Com efeito, considere a sequência $(a_n) = (1, 2, 1, 2, 1, 2, ...)$. Então, temos que $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, mas $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}$ se n é par e é $= 2$ se n é ímpar. Observe que se temos a certeza da convergência de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ para algum valor M, então pelo resultado, segue que $\sqrt[n]{a_n} = M$. Ora, mas pela unicidade do limte, temos $M = L$.

Exercício 2 - Solução

(a) $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0) = f(0)^2 \Rightarrow f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Mas, como $f(0) > 0$, segue que $f(0) = 1$. Se $n \in \mathbb{N}$, então podemos escrever $n = 1+1+...+1$ (n vezes). Assim, segue que $f(n) = f(1+1+...+1) = f(1) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(1) = f(1)^n$. Além disso, $f(1)f(-1) = f(1+(-1)) = f(0) = 1$, donde $f(-1) = f(1)^{-1}$. Por fim, se $n \in \mathbb{N}$, então $-n = (-1)+(-1)+...+(-1)$ (n vezes), donde $f(-n) = f((-1)+...+(-1)) = f(-1)^n = f(1)^{-n}$. Portanto, $f(n) = f(1)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

(b) Dado $q \in \mathbb{Z}^*$, temos $f(1) = f\left(\frac{1}{q}+...+\frac{1}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^q \Rightarrow f\left(\frac{1}{q}\right) = f(1)^{1/q}$. Portanto

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}+...+\frac{1}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right)^p = f(1)^{p/q}$$

(c) Dado $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, existe $r_n \in \mathbb{Q}$ tal que $r_n \to x$, donde $f(r_n) \to f(x)$ (já que f é contínua). Mas, como $f(r_n) = f(1)^{r_n} \to f(1)^x$, segue que $f(x) = f(1)^x$.

(d) Se $f(a) = 0$, para algum $a \in \mathbb{R}$, teríamos que

$$f(x) = f(a+(x-a)) = f(a)f(x-a) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

o que é um absurdo, já que $f(0) = 1 > 0$. Logo, $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e como $f(1) > 0$, pelo mesmo raciocínio do item (a) do Exercício 1 da Lista 3, segue que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(1) > 0$. Assim, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $e^a = f(1)$.

Portanto, $f(x) = e^{ax}$ e, observe que e é o número de **Euler**!!

Exercício 3 - Solução

Raciocínio análogo ao Exercício 2, bastando denotar $f(1) = a$ e realizar os seguintes passos:

1. $m(0) = 0$
2. $m(n) = an, \forall n \in \mathbb{N}$
3. $m(-1) = -a$
4. $m(-n) = -an, \forall n \in \mathbb{N}$
5. $m\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{a}{q}$
6. $m\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{ap}{q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$
7. $m(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ (via aproximação de racionais)