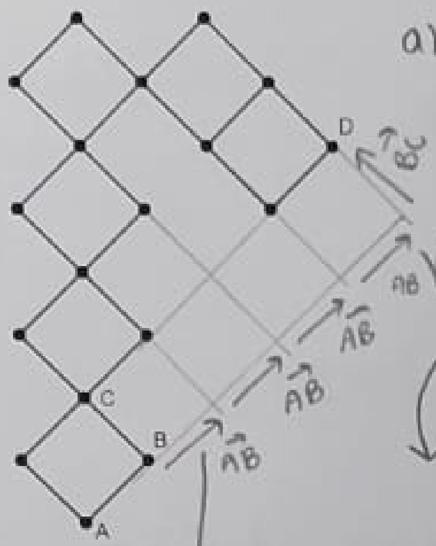
FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
Avenida Praia de Botafogo, 190
Botafogo - Rio de Janeiro - RJ

Disciplina: Geometria Analítica	**Professor:** Eduardo Wagner	**Data:** 19/03/2024
Monitores: Matheus Carvalho e Henzo Felipe		
Nome:		

1. Dados os ponto $A(3,2)$ e $C(7,6)$ e sabendo que todos os quadriláteros abaixo são quadrados idênticos, determine:

   (a) O vetor $\vec{AB}$.

   (b) A distância do ponto A ao ponto D.



a) Vetor $\vec{AB} = (a,b)$ Vetor $\vec{AC} = (4,4)$

Vetor $\vec{BC} = (-b,a)$

↳ Basta Rotacionar 90° o $\vec{AB}$

Vetor $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

$(4,4) = (a,b) + (-b,a)$

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b = 4 \end{cases} \rightarrow a = 4 \quad b = 0$$

$$\boxed{\text{Vetor } \vec{AB} = (4,0)}$$

OLHE NA FIGURA!

$$\vec{AD} = 5 \cdot \vec{AB} + \vec{BC} = 5(4,0) + (0,4) = (20,4)$$

$$|\vec{AD}| = \sqrt{400 + 16} = \sqrt{416} = 4\sqrt{26}$$

2. Dadas as retas $y = mx - 2$ e $y = nx + 6$ e sabendo que elas se interceptam no ponto $(2, 4)$, determine:

(a) A equação cartesiana de ambas as retas.

(b) A equação paramétrica de ambas as retas.

(c) O cosseno do ângulo formado pelas duas retas.

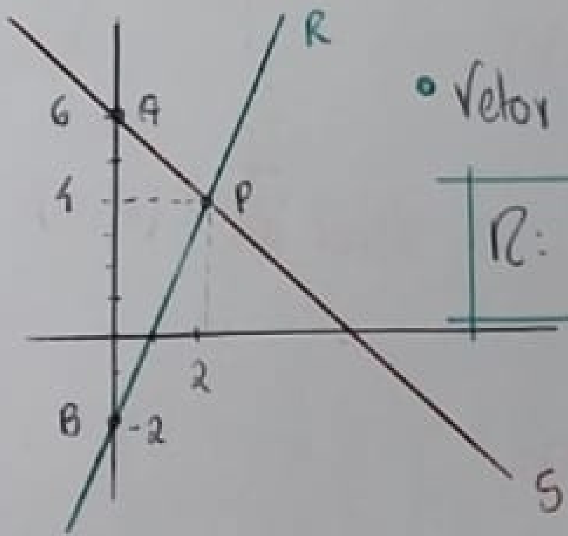
(d) A área do triângulo formado pelas retas dadas acima e a reta $x = 0$.

a) $4 = 2m - 2 \quad m = 3 \rightarrow 3x - y - 2 = 0$ Reta R

$4 = 2n + 6 \quad n = -1 \rightarrow x + y - 6 = 0$ Reta S

---

b) UM PONTO DE AMBAS É O (2,4)



- Vetor $\vec{AP} = (2,4) - (0,6) = (2,-2)$

$$\boxed{R: (x,y) = (2,4) + \alpha(2,-2)}$$

$x = 2 + 2\alpha$
$y = 4 - 2\alpha$

- Vetor $\vec{BP} = (2,4) - (0,-2) = (2,6)$

$$\boxed{S: (x,y) = (2,4) + \beta(2,6)}$$

---

c) Basta achar o cosseno entre os vetores $\vec{AP}$ e $\vec{BP}$

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

- $|\vec{AP}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ $\quad \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 4 - 12 = -8$
- $|\vec{BP}| = \sqrt{4+36}\ \ 2\sqrt{10}$

$$\downarrow$$

$$\frac{-8}{\cancel{2}\sqrt{2} \cdot \cancel{2}\sqrt{10}} \rightarrow \frac{-2}{\sqrt{20}} \rightarrow \quad \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

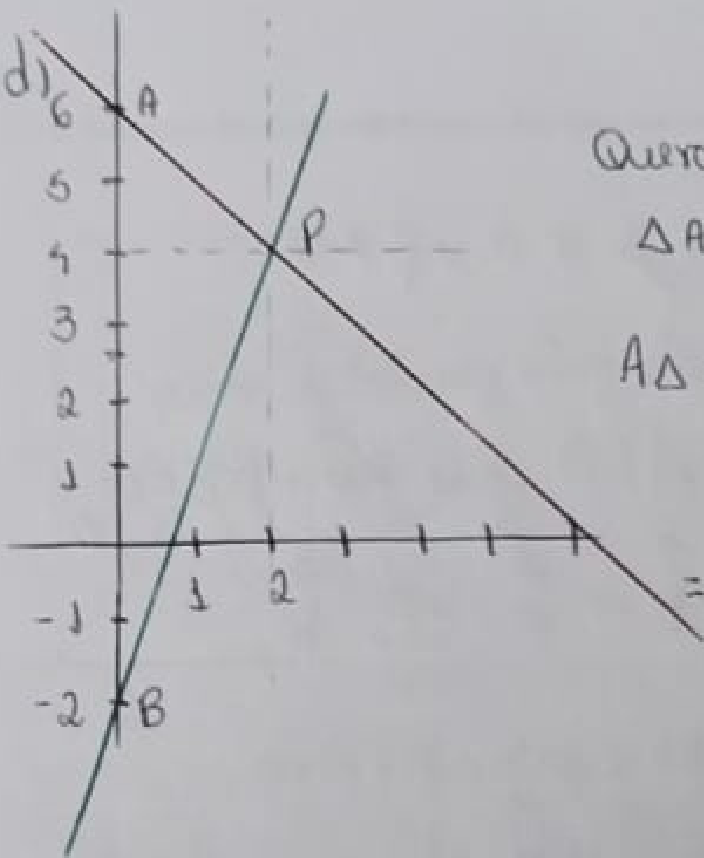
KKKK

Pegamos o maior ângulo, basta multip. por (−1).

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

QUEREMOS O MÓDULO

2) d)



Quero a área do ΔAPB:

Vetor $\vec{PA} = (-2, 2)$

Vetor $\vec{PB} = (-2, -6)$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} |\det| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} (12 - (-4))$$

$$= \frac{1}{2} (12 + 4) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{16} = 8$$

3. Sejam $A(5,3)$, $B(2,1)$ e $C(1,3)$ três pontos no plano xy.

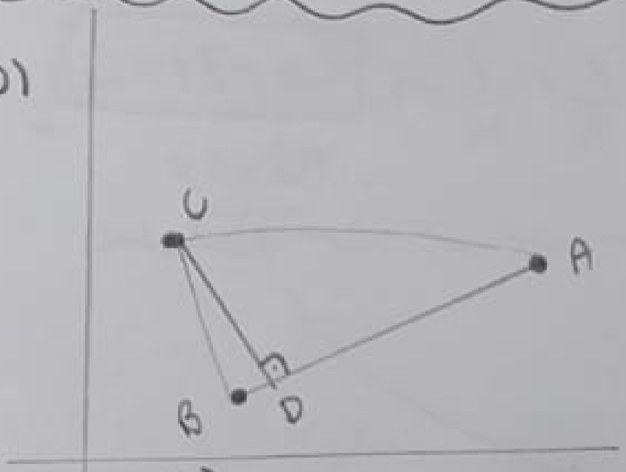
(a) Ache $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

(b) Desenhando a perpendicular de $\overrightarrow{AB}$ que passa por C, sua interseção com $\overrightarrow{AB}$ será o ponto D. Como $\overrightarrow{BD} = s\vec{a}$, ache $\overrightarrow{CD}$ em termos de s.

(c) Usando o fato de $\overrightarrow{CD}$ ser perpendicular a $\vec{a}$ e as propriedades do produto escalar, ache s. Por fim, ache as coordenadas do ponto D.

a) $\overrightarrow{BA} = (3,2) \quad \overrightarrow{BC} = (-1,2)$

b)



$\overrightarrow{BD} = s\,\overrightarrow{BA}$

$(D - B) = s(A - B)$

$D = s(A - B) + B$

$\boxed{D = sA + B(1-s)}$ //

$\overrightarrow{CD} = D - C = [s \cdot A + B(1-s)] - C \rightarrow$

$\rightarrow [s(5,3) + (2,1)(1-s)] - (1,3) \rightarrow$

$\rightarrow (5s + 2 - 2s - 1,\ 3s + 1 - s - 3) = (3s+1,\ 2s-2)$

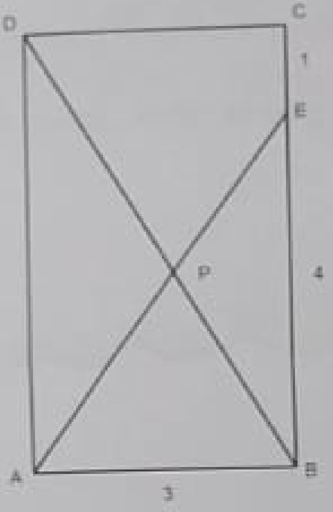
c) $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

$0 = (3s+1,\ 2s-2) \cdot (3,2) = 9s + 3 + 4s - 4 = 13s - 1$

$13s - 1 = 0 \rightarrow 13s = 1 \rightarrow s = 1/13$ //

$\overrightarrow{CD} = \left(\frac{16}{13}, \frac{-24}{13}\right) \quad D = C + CD = (1,3) + CD = \left(\frac{29}{13}, \frac{15}{13}\right)$ //

4. Sendo o quadrilátero ABCD abaixo um retângulo, descubra $|AP|$.



Vamos fixar A na origem e chamar o ponto P de (x,y).

$E=(3,4)$

$\vec{AP} = \alpha \vec{AE}$

$(x,y) = \alpha(3,4)$

$\left.\begin{array}{l} x = 3\alpha \\ y = 4\alpha \end{array}\right\} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \rightarrow \boxed{4x - 3y = 0}$ //

$3y = 4x$

substitui

$\vec{BP} = \beta \cdot \vec{BD}$

$(x-3, y) = \beta(-3,5)$

$\beta = \frac{x-3}{-3} = \frac{y}{5} \rightarrow 5x - 15 = -3y$

$5x - 15 = -4x$

$9x = 15 \quad \boxed{x = 5/3} \,/\!/ \quad \boxed{y = \frac{20}{9}}$

$\vec{AP} = \vec{P} = \left(\frac{5}{3}, \frac{20}{9}\right)$

$|\vec{AP}| = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{400}{81}} = \sqrt{\frac{625}{81}} = \boxed{\frac{25}{9}}$ //

5. Mostre que, se dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são não paralelos e $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$ para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha = \beta = 0$.

Vamos por absurdo: $\nearrow$ e α e $\beta \neq 0$

Suponha que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são não paralelos, mas que exista α e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha\vec{a} + \beta b = 0$,,

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \rightarrow \alpha\vec{a} = -\beta\vec{b} \rightarrow \vec{a} = \frac{-\beta}{\alpha} \cdot \vec{b}.$$

Chegamos num resultado contraditório,
No início afirmamos que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são paralelos, mas mostramos que eles são multiplos, visto que $\frac{-\beta}{\alpha}$ é um escalar. Portanto, por contradição, α e β não podem ser diferentes de 0.

$$\underline{\alpha = \beta = 0}$$