Análise Real – Exercícios

① Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua, duas vezes derivável em (a,b). Suponha que o segmento que liga $(a,f(a))$ a $(b,f(b))$ corta o gráfico de f num terceiro ponto $(c,f(c))$ onde $a<c<b$. Mostre que $f''(\bar{t})=0$ para algum $\bar{t}\in(a,b)$

② Mostre que (a) $|\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y|\le|x-y|$

(b) $ny^{n-1}(x-y)\le x^n-y^n\le nx^{n-1}(x-y)$ se $0<y\le x$, $n\in\mathbb{N}$

③ Mostre que $x^2=x\operatorname{sen} x+\cos x$ para exatamente 2 valores de x.

④ Sejam $f:I\to J$, $g:J\to\mathbb{R}$ funções deriváveis em $a\in I$ e $f(a)\in J$, respectivamente (I, J intervalos)

(i) Seja $x_n\to a$ sequência com $x_n\neq a$ para todo n.

- se $f(x_{n_k})=f(a)$ para uma subsequência (x_{n_k}), então $f'(a)=0$
- se $A=\{n\in\mathbb{N};\ f(x_n)=f(a)\}$, $B=\{n\in\mathbb{N};\ f(x_n)\neq f(a)\}$ (A e B dependem da sequência)

e A é infinito, mostre que

$$\lim_{\substack{x_n\to a\\ n\in A}}\frac{g(f(x_n))-g(f(a))}{x_n-a}=0,\quad \lim_{\substack{x_n\to a\\ n\in B}}\frac{g(f(x_n))-g(f(a))}{x_n-a}=0$$

Conclua que $$\lim_{x_n\to a}\frac{g(f(x_n))-g(f(a))}{x_n-a}=0$$

(ii) mostre que $g\circ f$ é derivável em $\underline{a}$ e que

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a)$$

<u>sugestão</u>: tome $x_n\to a$, $x_n\neq a$; há duas possibilida

* para qualquer uma destas sequências, A é finito

** para alguma subsequência, A é infinito

① Segmento que liga $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ (reta secante):

$$\ell(x) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right) x + \left(\frac{f(a)\,b - f(b)\,a}{b-a}\right)$$

Temos que
$$\ell(a) = f(a)$$
$$\ell(b) = f(b)$$
$$\ell(c) = f(c)$$

Faça $\psi(x) = f(x) - \ell(x)$, logo $\psi(a) = \psi(c) = \psi(b) = 0$. com $a < c < b$.

Pelo Teorema de Rolle, $\exists\, x \in (a,c) \mid \psi'(x) = 0$.
Além disso, novamente pelo Teorema de Rolle $\exists\, w \in (c,b) \mid \psi'(w) = 0$.

Novamente, pelo teorema de Rolle, $\exists\, z \in (x, w) \subset (a,b)$ $\psi''(z) = 0$.

Contudo, $\psi'(x) = f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ ↰ constante

e $\psi''(x) = f''(x)$.

Logo, $\exists\, \bar{t} \in (a,b) \mid f''(\bar{t}) = 0$, basta tomar $\bar{t} = z$.

Teorema de Rolle:

② a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x-y|$

Por Lipschitz e Holder, sabemos que se $f: I \to \mathbb{R}$ e f tem derivada limitada, então $\exists\, \lambda > 0$ t.q
$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x-y|$

Como $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, vale que $\exists \lambda > 0$
$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq \lambda |x-y|$.

Fazendo $\lim_{x \to y} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq \lim_{x \to y} \lambda |x-y|$

$\lim_{x \to y} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq \lambda \lim_{x \to y} |x-y|$

$\lim_{x \to y} \left| \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x-y} \right| \leq \lambda$

$|\cos x| \leq \lambda \Rightarrow \lambda = 1$, pois $|\cos x| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Assim, $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x-y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) $n y^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq n x^{n-1}(x-y)$ com $0 \leq y \leq x$ e $n \in \mathbb{N}$.

$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
Como $0 \leq y \leq x$, vale que:

$x^n - y^n \geq (x-y)(y^{n-1} + y^{n-1} + \dots + y^{n-1} + y^{n-1})$
$x^n - y^n \geq (x-y)\, n \cdot y^{n-1}$
Analogamente, temos $n y^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq n x^{n-1}(x-y)$

Lipschitz e Holder:

(3)

Considere $f(x) = x^2 - x\,\text{sen}x - \cos x$. Sabemos que $f(x) = f(-x)$ (f é uma função par). Temos que:

$f'(x) = 2x - \text{sen}x - x\cos x + \text{sen}x = x(2-\cos x)$.

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ então $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Além disso, $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$ e $2 - \cos x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Assim, o sinal de f' é determinado pela parcela x.

Como $f'(x) > 0$ para $(0, \infty)$, f é estritamente crescente em $(0, \infty)$. Como $f'(x) < 0$ para $(-\infty, 0)$, f é estritamente decrescente em $(-\infty, 0)$.

Além disso, sabemos que $f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$ e $f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, $\exists t \in (-\pi, 0) \mid f(t) = 0$ e $\exists w \in (0, \pi) \mid f(w) = 0$.
Logo, pelo o que foi provado anteriormente, existem apenas duas raízes de $f(x)$. Caso contrário, pelo Teorema de Rolle, $\exists g \neq 0 \mid f'(g) = 0$, o que é um absurdo.

Logo, $x^2 = x\,\text{sen}x + \cos x$ para apenas 2 valores de x.

TVI :

4