Prop: seja $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e seja $H:[a,b]\to\mathbb{R}$ | H é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) com $H'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a,b)$

Então $$\int_a^b f(x)\,dx = H(b)-H(a).$$

Dem: $I_i:[x_i,x_{i+1}] \Rightarrow \exists\, c_i\in[x_i,x_{i+1}]$ |

$$\frac{H(x_{i+1})-H(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = H'(c_i) = f(c_i)$$ [teorema do valor médio]

Faça $\Delta x = x_{i+1}-x_i$

$$\Rightarrow f(c_i)\Delta x = H(x_{i+1}) - H(x_i)$$

Faça $$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x = H(b)-H(a)$$

$$\boxed{\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x = H(b)-H(a) = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

$\Rightarrow$ Toda função contínua em $[a,b]$ possui primitiva em $[a,b]$? SIM: Pelo TFC!

- Se f é contínua sobre $[a,c]$ e sobre $[b,c]$ (f contínua em $[a,b]$), então

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

ts.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (TFC):

Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua

Definindo $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$

Então $G'(x) = f(x)$

Dem: $G(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$; $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$$G(x+h) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$\boxed{\therefore\ G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.}$$

ts.

Só demonstramos pela primeira preposição

Ex: Seja $f = 1_{\mathbb{Q}}$ em $[0,1]$, isto é

$f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$

f é integrável sobre $[0,1]$?

$c_i = \inf(f(x))$. Faça $\underline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \Delta x = 0.$
$c_i = 0$

$d_i = \sup(f(x))$ faça $\overline{S_n} = \sum_{n=0}^{n-1} d_i \Delta x = \sum_{n=0}^{n-1} \Delta x$
$d_i = 1.$

$$= \frac{n.(b-a)}{n} = 1 - 0 = 1$$

Como $\underline{S_n} \neq \overline{S_n}$, então $f(x)$ não é integrável em $[0,1]$.
Lembre-se que o número de descontinuidades é não enumerável (Teorema de Lebesgue)

Ex: Derive

a) $g(t) = \int_0^t e^{x^2}\, dx$

b) $h(x) = \int_0^x \frac{t^2}{t^2+1}\, dt$

c) $f(x) = \int_1^x (\operatorname{sen} t^2 + e^{-t^2})\, dt$

d) $q(x) = \int_1^{x^2} \frac{\ln t}{t}\, dt.$

a) $g(t) = \int_0^t e^{x^2}\, dx = H(t) - H(0) \Rightarrow H'(t) = f(t)$

constante.

contínua.

$g'(t) = H'(t) = f(t)$

$g'(t) = f(t)$

$\therefore \boxed{g'(t) = e^{t^2}}$ //.

b) $h(x) = \int_0^x \frac{t^2}{t^2+1}\, dt$ $\boxed{h'(x) = \frac{x^2}{x^2+1}}$ //.

c) $f(x) = \int_1^x (\operatorname{sen} t^2 + e^{-t^2})\, dt$

$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \operatorname{sen} x^2 + e^{-x^2} \quad x \geq 1}$

$\Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x^2 + e^{-x^2}, \quad x < 1.$

d) $g(x) = \int_1^{x^2} \frac{\ln t}{t}\, dt.$

$g(x) = H(x^2) - H(1) \Rightarrow g'(x) = H'(x^2) \cdot 2x$

$g'(x) = \frac{\ln x^2}{x^2} \cdot 2x = \boxed{\frac{2 \ln x^2}{x}} = \frac{4 \ln|x|}{x}$

$|x| \geq 1$

Ex: Seja $g(x) = \int_0^x e^{3t^4 + 4t^3}\, dt$

a) Dom:

b) Pontos de inflexão

c) Intervalos de concavidade.