Exercício 1 - Limite de Subsequências

(a) Se uma sequência é convergente para L, toda subsequência também é convergente para L? A recíproca é verdadeira?

(b) Se alguma subsequência de uma sequência converge para L, então a sequência converge para L?

(c) Se (x_n) é uma sequência tal que a subsequência formada pelos índices pares x_{2n} e a formada pelos índices ímpares x_{2n-1} de (x_n) são convergentes para um mesmo limite L, então (x_n) é convergente e $x_n \to L$.

(d) Uma sequência limitada é convergente se, e somente se, existe um único valor L que é limite de alguma subsequência.

Exercício 2 - Frações Contínuas

Nati, amiga de Robertinha, soube que sua amiga conseguiu escrever 2 com a construção de radicais aninhados, ou seja

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$$

Mas, Nati queria uma forma de obter $\sqrt{2}$. Então, ela considerou o conjunto

$$X = \left\{ 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} \ldots \right\}$$

(a) Deduza a sequência (x_n) que descreve esse conjunto e, em seguida, descreva as subsequências $(y_n) = (x_{2n})$ e $(z_n) = (x_{2n-1})$.

(b) Mostre que $y_n < \sqrt{2} < z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Mostre que y_n é crescente e z_n é decrescente e, portanto, conclua a existência dos limites $\lim y_n$ e $\lim z_n$.

(d) Quais são os limites $\lim y_n$ e $\lim z_n$?

(e) Conclua que (x_n) é convergente. Qual é o limite $\lim x_n$?

Exercício 3 - Fatoriais e Logaritmos

Mostre a convergência (se existir) e, neste caso, calcule $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!}$ e $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\log n}{n}$.

Exercício 4 - O Número de Euler

Análise a convergência das sequências (x_n) e (y_n) dadas por

(a) $x_0 = 1, x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n!}$

(b) $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

O limite destas sequências é igual?

Exercício 5 - Aproximação Racional

Seja $A > 0$ um número irracional e $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números racionais tais que $p_n, q_n > 0$ e $\lim \frac{p_n}{q_n} = A$. Mostre que $\lim q_n = +\infty$.

1 a) Se uma seqüência x_n é convergente para L, então dado $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande em que $n > m$ e dado $\varepsilon > 0$ qualquer, temos $|x_n - L| < \varepsilon$.

Escolhendo $n = n_k$: $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$. Então se x_n é convergente a L, toda subseqüência x_{n_k} também é convergente.

A recíproca vale pois a seqüência é uma subseqüência de la mesma.

b) Falso. Tome $x_n = (0, 1, 0, 1, \ldots)$
$x_{2k+1} \to 0$, mas x_n é divergente.

c) Temos que dados $m_1, m_2 \in \mathbb{N} \mid n > m_1, m_2$ e $\varepsilon > 0$ que satisfazem $|x_{2n+1} - L| < \varepsilon$, $n > m_1$, e $|x_{2n} - L| < \varepsilon$, $n > m_2$.
Tomando $m = \max\{m_1, m_2\}$, temos que $|x_n - L| < \varepsilon$ para $n > m \in \mathbb{N}$.

d) Pelo item a), se uma sequência x_n é convergente para L, então toda subsequência é convergente para L.

Se x_n é limitada e $\exists\, y_n$ subsequência de x_n t.q. $\lim y_n = L$, então $x_n \to L$.
Caso contrário $\exists\, m \mid n > m$ e $|x_n - L| \geq \varepsilon$. Assim, $\exists\, n_1 > 1 \mid |x_{n_1} - L| \geq \varepsilon$. Além disso, $\exists\, n_2 > n_1 \mid |x_{n_2} - L| \geq \varepsilon$ e assim por diante. Por Bolzano-Wierstrass, existe subsequência z_n de $y_n \mid \lim z_n = L$ pois $\lim y_n = L$. Contudo, z_n também é subsequência de x_n e $\lim z_n \neq L$, o que é um absurdo. Logo, $\lim x_n = L$.

② a) $x_1 = 1 + 1/2$ e $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + x_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$y_n = \boxed{x_{2n} = 1 + \frac{1}{1 + x_{2n-1}}}$$

$$z_n = x_{2n-1} \boxed{= 1 + \frac{1}{1 + x_{2n-2}}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + x_{2n-1}}} \boxed{= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + x_{2n-1}}}}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + y_n} \quad ; \quad y_1 = 7/5$$

$$\Rightarrow z_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + z_n} \quad ; \quad z_1 = 3/2$$

b) Vamos provar por indução que $y_n < \sqrt{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$n=1$: $y_1 = 7/5$. Como $49/25 < 2$, $7/5 < \sqrt{2}$, pois $7/5 > 1$.

Hipótese: $y_n < \sqrt{2}$.

Queremos ver: $y_{n+1} < \sqrt{2}$

$$y_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+y_n} = \frac{y_n+2}{y_n+1} < \frac{y_n+2}{y_n} < y_n+2 > y_n < \sqrt{2}$$

e $\boxed{y_{n+1} < \sqrt{2}}$ e $y_{n+1} > y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Análogo para $\sqrt{2} < z_n$ (já que $z_1 = 3/2 > \sqrt{2}$)

Portanto, $y_n < \sqrt{2} < z_n$.

Além disso, temos y_n é crescente e limitada superiormente e z_n é decrescente e limitada inferiormente.

Como y_n e z_n são monótonas, então são convergentes e $\exists \lim y_n, \lim z_n$.

c) Do item b), temos que $\exists \lim y_n, \lim z_n$.

Como

$$y_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+y_n} \text{ e } z_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+z_n},$$ ambas

satisfazem $L = \lim y_n \Leftrightarrow L = 1 + \frac{1}{1+L} \Rightarrow L = \sqrt{2}$

$L' = \lim t_n \Leftrightarrow L' = 1 + \frac{1}{1+L'} \Rightarrow L' = \sqrt{2}$

e $L = L'$.

d) Do item c) do exercício 1, se $x_{2n} \to L$ e $x_{2n-1} \to L$, então $x_n \to L$. Portanto, se $x_{2n} \to \sqrt{2}$ e $x_{2n-1} \to \sqrt{2}$, então $x_n \to \sqrt{2}$.

3 I) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

Temos que $n! > a^n$ para n grande. Segue que $(n!)^{1/n} > a$, portanto, $(n!)^{1/n}$ não é limitada superiormente.
Além disso

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$$
$$(n!)^{n+1} < (n+1)!^{n}$$
$$\cancel{(n!)^n} \cdot n! < (n+1)^n \cdot \cancel{(n!)^n}$$
$$(n+1)^n > n!$$
$$(n+1)(n+1)\ldots(n+1) > 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n. \checkmark$$

Portanto, a sequência é crescente.
Logo, $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

II) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} \Rightarrow \frac{\log n}{n} = \log n^{1/n}$

Analisando a sequência $n^{1/n}$

temos que $n^{1/n} \geq 1$. Fazendo $\left(\frac{(n+1)^{1/n+1}}{n^{1/n}}\right)^{n(n+1)}$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

Portanto $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} < 1$ e $\frac{(n+1)^{1/n+1}}{n^{1/n}} < 1$

e a sequência é decrescente e limitada inferiormente

Considerando $L^2 = \lim((2n)^{1/2n})^2$
$L^2 = \cancel{\lim 2^{1/n}} \cdot \lim n^{1/n}$
$L^2 = L$ (a sequência é ≥ 1)
$\boxed{L=1}$.

Como $\lim n^{1/n} = 1$, então $\lim \log n^{1/n} = \lim \log e = 0$. Logo, $\lim \frac{\log n}{n} = 0$

(4) a) $x_0 = 1$, $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n!}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n + 1/(n+1)!}{x_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)!\,x_n} > 1$$

$\therefore$ $x_{n+1} > x_n$ (sequência crescente).

Além disso, $n! \geq 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

• Vamos provar por indução que $n! \geq 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Casos base: $\begin{cases} n=1: & 1! \geq 1^1 \checkmark \\ n=2: & 2! \geq 2^{2-1} \checkmark \\ n=3: & 3! \geq 2^{3-1} \checkmark \end{cases}$

Hipótese: $n! \geq 2^{n-1}$

Queremos verificar: $(n+1)! \geq 2^n$

Sabemos que $(n+1)! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1}$ e $(n+1)! \geq \frac{n+1}{2} \cdot 2^n$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $\frac{n+1}{2} \geq 1$ e $(n+1)! \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $n! \geq 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

e $x_n \leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq 1 + 2 = 3$

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$ (série geométrica).

Como x_n é crescente e limitada superiormente, então x_n é convergente.

b) $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Fazendo $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+1/_{n+1}}{1+1/_n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$

Pela desigualdade de Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$

$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = 1$

$\therefore \frac{y_{n+1}}{y_n} \geq 1$ e y_n é crescente.

Além disso $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$

$= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^n}$

Sabemos que $\binom{n}{j}\cdot\frac{1}{n^j} \leq \frac{1}{j!}$

$$\binom{n}{j}\frac{1}{n^j} = \frac{1}{j!}\cdot\frac{\overbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j+1)}^{\leq 1}}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{j \text{ vezes}}} \leq \frac{1}{j!}$$

Logo, $1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq$

$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = x_n \leq 3$.

Como y_n é crescente e limitada superiormente, então y_n é convergente.

Adicional: Como $y_n \leq x_n$, então $\lim y_n \leq \lim x_n$ (acabamos de demonstrar).

Além disso, $x_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)y_n$

e $x_n \leq y_n$. Logo $\lim x_n \leq \lim y_n$

e $\lim x_n = \lim y_n$

(5) I) Temos que p_n deve ser limitada, pois se não $\lim \frac{p_n}{q_n} = \infty$, o que é um absurdo.

II) Por absurdo, suponha q_n limitada. Portanto, por Bolzano-Wierstrass, existe subsequência $q_{n_k} \mid \lim q_{n_k} = K \in \mathbb{N}$. Além disso, como p_n também é limitada, existe subsequência $p_{n_k} \mid \lim p_{n_k} = B \in \mathbb{N}$.

Portanto, $\lim \left(\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right) = \frac{B}{K} \in \mathbb{Q}$, o que é um absurdo, pois $\lim \frac{p_n}{q_n} = A \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Logo, $q_n \to \infty$.