Matemática Discreta

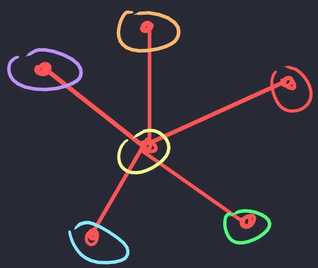
24/09

Coloração

Teorema

Se G é conexo simples, então G é $(\Delta(G)+1)$-colorível

Exemplo



→ 6 colorível

$\Delta(G) = 5$

Demonstração

Indução no número de vértices

$n=1$ G $\cdot$ $\Delta(G)=0$ $\chi(G)=1$

Supomos que a tese vale para todo grafo com até n vértices (conexos simples)

Seja G conexo simples com $n+1$ vértices

Seja v um vértice qualquer de G. Consideramos o grafo $G/\{v\}$ obtido de G removendo v

C_k

Cada componente satisfaz uma hipótese diferente, portanto C_k é $(\Delta(C_k)+1)$-colorível, porém $\Delta(C_k)+1 \leq \Delta(G)$, logo G é $(\Delta(G)+1)$-colorível.

TEOREMA

(Brook, 1941) Se G é simples não-completo com $\Delta(G) \geq 3$ então G é $\Delta(G)$-colorível.

DEM

Pág. 82 - R. Wilson

TEOREMA

Se G é simples, conexo e planar, então G é 5-colorível

Indução nos vértices

→ Para $n \leq 5$, vale trivialmente

→ Supondo que vale para $k \leq n$ e consideramos G como $n+1$ vértices. Seja v vértice de G com $\delta(v) \leq 5$ e G' o subgrafo de G obtido removendo $v \Rightarrow G' = G / \{v\}$

G' admite 5-coloração pela hipótese indutiva

1º → $\delta(v) < 5$

v tem no máximo 4 vizinhos, logo, pela 5-coloração de G', temos trivialmente uma 5-coloração em G

2º → $\delta(v) = 5$

Sejam $v_1, \dots, v_5$ os vizinhos de v, sem perca de generalidade, supondo que todos usam cores diferentes na 5-coloração de G.

DADO QUE G É PLANAR, ELE NÃO CONTÉM UM K_5, ENTÃO EM $\{v_1, \dots, v_5\}$ EXISTE UM PAR NÃO ADJASCENTE.

I) O PAR NÃO-ADJASCENTE SÃO NÃO-CONSECUTIVOS

SEM PERDER GENERALIZAÇÃO, VAMOS SUPOR QUE v_1 E v_3 NÃO SÃO ADJASCENTES. CONSIDERAMOS TODOS OS CAMINHOS EM G' QUE COMEÇAM EM v_1 E ALTERNAM AS CORES C_1, C_3.

SE NENHUM DESSES CAMINHOS CHEGA EM v_3, PODEMOS ALTERAR AS CORES DE TODOS OS VÉRTICES ENVOLVIDOS NESSE CAMINHO: TROCANDO C_1 POR C_3 E VICE-VERSA. OBTEMOS ASSIM UMA NOVA 5-COLORAÇÃO DE G' NA QUAL $v_1, \dots, v_5$ USAM SÓ 4 CORES.

II) O PAR NÃO-ADJACENTE SÃO CONSECUTIVOS

SEM PERDER GENERALIZAÇÃO, SUPOMOS QUE v_1 E v_2 SÃO NÃO-ADJACENTES E TODOS OS PARES NÃO CONSECUTIVOS ESTÃO CONECTADOS (VALE II, MAS NÃO VALE I)

LOGO, NÃO PODE EXISTIR UM CAMINHO PARTINDO DE v_2 E ALTERNANDO C_2 E C_4. OU SEJA, PODEMOS APLICAR O RACIOCÍNIO ANTERIOR PARA OBTER A 5-COLORAÇÃO DE G.

TEOREMA

SEJA G UM GRAFO PLANAR, ENTÃO $\chi(G) \leq 6$

DEM

INDUÇÃO NO NÚMERO DE VÉRTICES $(n = |E|)$

RESULTADO VALE PARA $n \leq 6$

Suponha que o resultado vale para $n-1$ arestas, segue da planaridade que $\exists v \in V$ com $\delta(v) \leq 5$.

Dado G planar com n vértices, consideramos o subgrafo $G' = G \setminus \{v\}$, então G' é planar e 6-colorível

Uma coloração de G é obtida ao pintar v com uma cor diferente das, no máximo, 5 cores dos vértices adjacentes a v.