Derivadas Direcionais

A derivada direcionada de uma função f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $u = (a, b)$ é

$$\boxed{D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

Além disso, percebemos que as derivadas parciais são casos especiais da derivada direcional. $D_u f = f_x$ se $u = (1, 0)$ e $D_u f = f_y$ se $u = (0, 1)$.

Se f é diferenciável em x, y, então f tem derivada direcional de qualquer vetor unitário $u = (a, b)$:

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot a + f_y(x_0, y_0)\, b$$

vetor gradiente:

Observe que podemos escrever a derivada direcional como o produto escalar de dois vetores.

$$D_u(x_1, \dots, x_n) = f_{x_1}(x_1, \dots, x_n) \cdot a_1 + \dots + f_{x_n}(x_1, \dots, x_n) a_n$$

$u = (a_1, \dots, a_n)$

$$D_u(x_1, \dots, x_n) = \langle (f_{x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{x_n}(x_1, \dots, x_n)), u \rangle$$

$$D_u(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), u \right\rangle.$$

O vetor $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ é chamado de vetor gradiente de f. Sua notação é $\nabla f(x_1, \dots, x_n)$.

vetor u unitário

$$\boxed{\text{e } D_u f = \langle \nabla f, u \rangle}$$

Derivada direcional

vetor gradiente

Maximizando a Derivada Direcional

Teorema: O valor máximo da Derivada direcional é $\|\Delta f\|$, ou seja, quando u está na mesma direção de ∇f.

Sabemos que $D_u f = \langle \nabla f, u \rangle = \|\nabla f\| \cdot \|u\| \cdot \cos\theta$. (álgebra linear). Como $\|u\| = 1$, então $D_u = \|\nabla f\| \cdot \cos\theta$.

Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, o valor máximo de $D_u f$ é $\|\nabla f\|$ e $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, u está na mesma direção de ∇f.

Planos Tangente à Superfícies de Nível.

Suponha a superfície de nível $F(x,y,z)=K$. e o ponto $P(x_0,y_0,z_0)$ um ponto dessa superfície.

Sabemos que uma curva pode ser escrita por uma função "diretora" vetorial $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Se $t=t_0$ for o parâmetro correspondente ao ponto P $(r(t_0)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0)))$ então qualquer ponto da curva satisfaz:

$$F(x(t),y(t),z(t))=K$$

Fazendo a regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0$$

Podemos entender o resultado como,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)=0$$

e $$\left\langle\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right),\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)\right\rangle=0$$

$$\langle \nabla F, r'(t) \rangle = 0$$

e $\langle \nabla F(x_0, y_0, z_0), r'(t_0) \rangle = 0$

$$\boxed{\text{e } \nabla F(x_0, y_0, z_0) \perp r'(t_0)}$$

Portanto, o plano tangente à superfície de nível $F(x, y, K) = K$ em $P(x_0, y_0, z_0)$ é o plano que passa por P e é normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

Portanto, o plano tangente pode ser escrito como:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Já a reta normal é definida também pelo vetor gradiente no ponto (x_0, y_0, z_0), que possui a direção deste. Portanto, a reta normal no ponto (x_0, y_0, z_0) é:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$