Análise Real – Exercícios

① Se $\mathcal{P}$ é partição de $[a,b]$, defina $|\mathcal{P}|$ como o maior comprimento dos subintervalos.
Seja $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua.
Sendo $\mathcal{P}=\{a=x_0<\dots<x_{i-1}<x_i<\dots<x_m=b\}$, selecione um ponto $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$ para cada i e defina
$L(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{m} g(x_i^*)(x_i-x_{i-1})$ ($L(\mathcal{P})$ depende da escolha dos pontos x_i^*, $1\le i\le m$)
Considere uma sequência de partições $\mathcal{P}_n$ t.q. $|\mathcal{P}_n|\to 0$ quando $n\to\infty$; para cada $\mathcal{P}_n$ faça uma escolha de pontos como acima e tome $L(\mathcal{P}_n)$ para tal escolha. Mostre que $\int_a^b g(x)\,dx=\lim_{n\to\infty} L(\mathcal{P}_n)$

② Seja $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivável t.q. g' é integrável.
Mostre que $g(x)=g(a)+\int_a^x g'(t)\,dt$.

③ Considere a sequência $x_n=\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)-\log n$
Prove que é decrescente e limitada.

④ Prove que $\lim_{x\to 0^+}(x\log x)=0$

⑤ Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Prove que existe $c\in[a,b]$ t.q. $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$.

⑥ Mostre que $\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen} x)^2\,dx=\frac{\pi}{4}$

⑦ Mostre que $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$ e $\lim_{y\to\infty}\int_0^y\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$

(dizemos que $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ e $\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}$ são integrais impróprias)

⑧ Seja $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ contínua, positiva, decrescente.
Se existe $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (isto é, $\lim_{y\to\infty}\int_a^y f(x)\,dx$)
então $\lim_{x\to\infty} x f(x)=0$.