Graduação

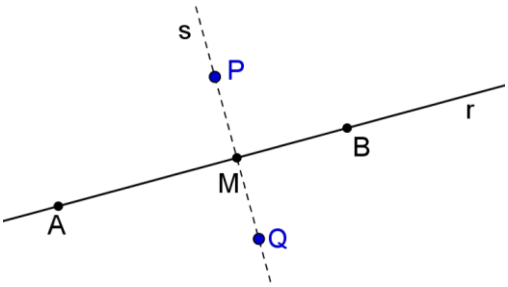
FGV

1º Teste de Geometria Analítica – 29 / março / 2021

Nome: ____ EMAp

Questão 1

A reta r passa pelos pontos $A = (-2,\ 0)$ e $B = (6,\ 4)$. Determine o ponto Q, simétrico do ponto $P = (2,\ 7)$ em relação à reta r.



Solução

$$m_r = \frac{4-0}{6-(-2)} = \frac{1}{2}$$

A equação de r é:

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x+2)$$

ou seja, $\quad -x + 2y = 2$

Seja $s \perp r$ passando por P. Como $m_s = -2$ então a equação de s é

$$y - 7 = -2(x-2)$$

ou seja, $\quad 2x + y = 11$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} -x + 2y = 2 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

encontramos $M = (4, 3)$.

Como $M = (P+Q)/2$ então $Q = 2M - P = 2(4,3) - (2,7)$

$$Q = (6, -1)$$

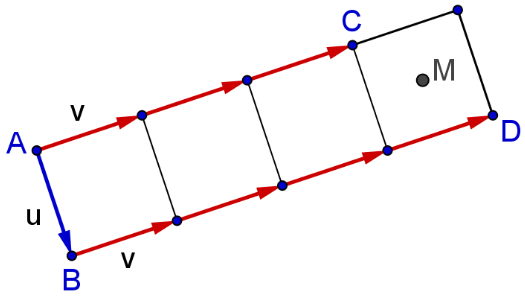
Questão 2

A figura ao lado é formada por quatro quadrados iguais.

São dados dois vértices do primeiro quadrado:

$A = (1,\ 4)$, $B = (2,\ 1)$.

Determine o centro do quarto quadrado.



Solução

$$u = \overrightarrow{AB} = (1, -3) \quad \text{e} \quad v = (3, 1)$$

$$C = A + 3v = (1, 4) + 3(3, 1) = (10, 7)$$

$$D = B + 4v = (2, 1) + 4(3, 1) = (14, 5)$$

$$M = \frac{C + D}{2} = (12, 6)$$

Questão 3
As retas $3x - y - 4 = 0$ e $x + ky - 3 = 0$ formam ângulo de 45°. Calcule k.

Solução

Os vetores normais dessas retas são $u = (3, -1)$ e $v = (1, k)$

Como o ângulo deles é 45° temos:

$$\frac{|u \cdot v|}{|u||v|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{|3 - k|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{1 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|3 - k| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + k^2}$$

Elevando ao quadrado,

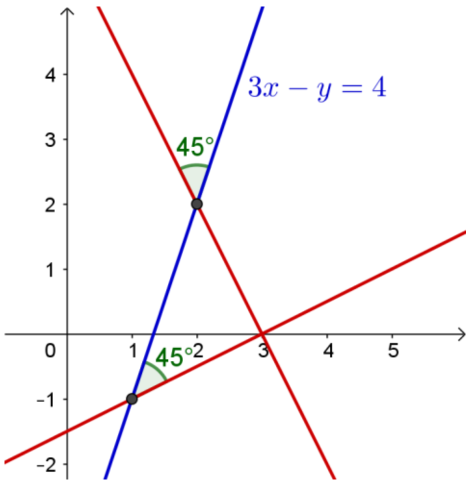
$$9 - 6k + k^2 = 5 + 5k^2$$

$$4k^2 + 6k - 4 = 0$$

$$2k^2 + 3k - 2 = 0$$

Portanto,

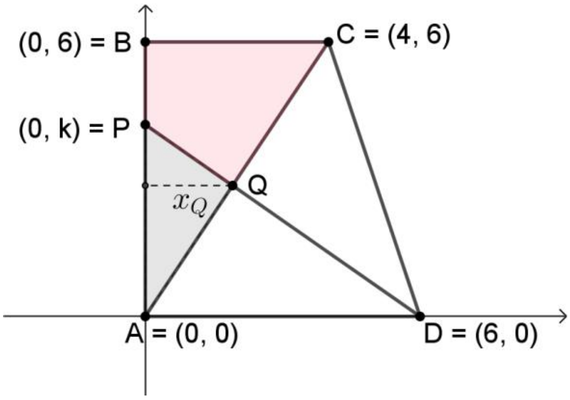
$$k = -2 \quad \text{ou} \quad k = \frac{1}{2}$$



Questão 4

No quadrilátero $ABCD$ os ângulos de vértices A e B são retos, $AD = AB = 6$ e $BC = 4$. O ponto P pertence ao lado AB e a reta DP corta a diagonal AC em Q. Sabendo que a área do quadrilátero $PBCQ$ é o dobro da área do triângulo APQ calcule o comprimento do segmento AP.

Solução

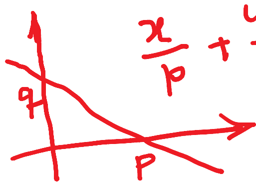


Considere os elementos da figura.

Se a área do quadrilátero $PBCQ$ é o dobro da área do triângulo APQ então a área do triângulo APQ é a terça parte da área do triângulo ABC, ou seja,

$$[APQ] = \frac{1}{3}[ABC] = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \times 4}{2} = 4$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$



A equação da reta AC é

$y = \frac{6}{4}x$ ou seja, $3x - 2y = 0$

A equação da reta PD é

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{k} = 1 \quad \text{ou seja,} \quad kx + 6y = 6k$$

Para a interseção dessas retas resolvemos o sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ kx + 6y = 6k \end{cases}$$

A abscissa do ponto Q é

$$x = \frac{6k}{k+9}$$

Que é a altura do triângulo APQ relativa à base AP. Como sua área é igual a 4, temos

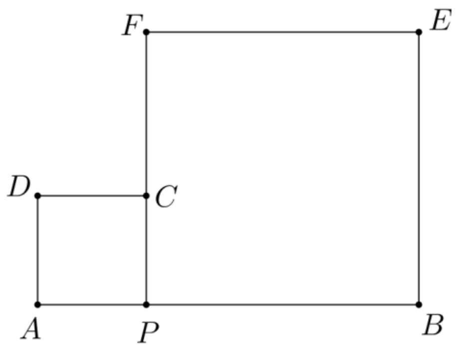
$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{6k}{k+9} = 4 \quad \text{ou seja,} \quad 3k^2 - 4k - 36 = 0$$

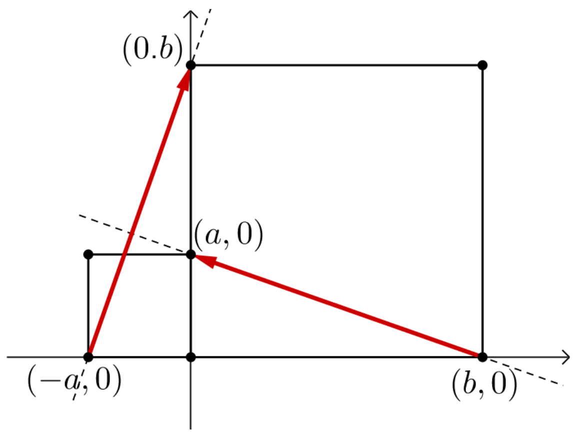
A raiz positiva dessa equação é:

$$k = \frac{4\sqrt{7} + 2}{3}$$

Questão 5

Na figura abaixo, *P* é um ponto qualquer do segmento *AB* e os quadriláteros *APCD* e *PBEF* são quadrados. Prove que as retas *AF* e *BC* são perpendiculares.





Considere o sistema de coordenadas da figura da direita. Temos:

$$\overrightarrow{AF} = (a, b) \text{ e } \overrightarrow{BC} = (-b, a)$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = -ab + ab = 0$$

Logo, as retas *AF* e *BC* são perpendiculares.