Vetores – 2

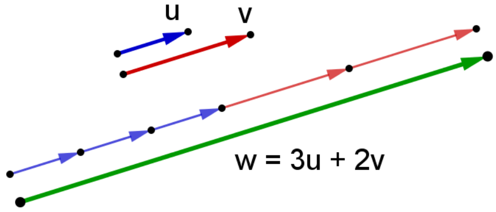
Definição

Dados dois vetores u e v uma *combinação linear* deles é qualquer vetor da forma

$$w = \alpha u + \beta v$$

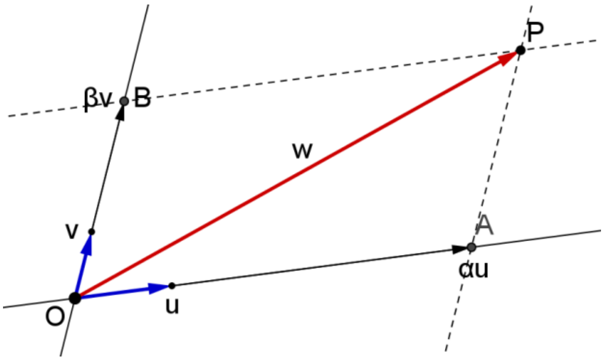
onde α e β são números reais.

Se os vetores u e v são colineares então qualquer combinação linear deles está na mesma reta.



Teorema

Se os vetores u e v não são colineares então qualquer vetor do plano é combinação linear deles.



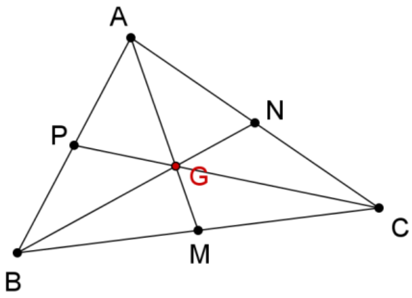
Sejam u e v vetores não colineares e O a origem do plano. Seja $w = \overrightarrow{OP}$ um vetor qualquer do plano.

Traçando por P retas paralelas às retas que contém u e v obtemos nas interseções os pontos $A\ e\ B$ tais que $\overrightarrow{OA} = \ \alpha u$ e $\overrightarrow{OB} = \beta v$. Como essas interseções são únicas e $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \ \overrightarrow{OB}$ temos $w = \alpha u + \beta v$ de forma única.

Propriedade do baricentro de um triângulo

O baricentro de um triângulo é o ponto de interseção de suas medianas.

O baricentro do triângulo divide cada mediana em duas partes sendo uma o dobro da outra.



$$AG = 2GM$$

$$BG = 2GN$$

$$CG = 2GP$$

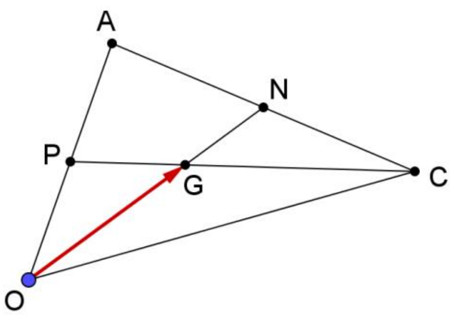
Vamos demonstrar isso com nossas novas ferramentas vetoriais.

Para isso vamos escolher um ponto para ser a origem do nosso plano e dois vetores não colineares que será chamado de *base*. Vamos escrever todos os demais vetores do problema em função desses dois.

Solução 1

Escolho o ponto B como origem (que será representado por O) e os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ para formar nossa base. Escrevemos assim: $base = \{A, C\}$.

Saindo da origem vamos chegar ao ponto G por dois caminhos diferentes. Observe que $\overrightarrow{OG}$ é uma fração de $\overrightarrow{ON}$. Chamaremos essa fração de α e escrevemos assim:

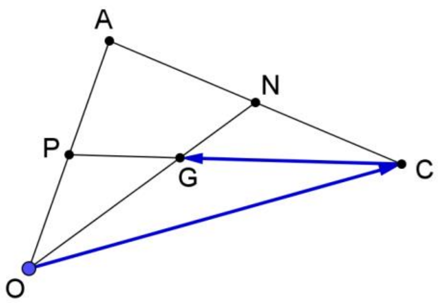


$$G = \alpha N$$

$$G = \alpha \frac{A + C}{2}$$

$$G = \frac{\alpha}{2} A + \frac{\alpha}{2} C$$

Escrevemos G como combinação linear de A e C. Façamos agora o caminho sugerido na segunda figura.



$$G = C + \overrightarrow{CG}$$

$$G = C + \beta \overrightarrow{CP}$$

$$G = C + \beta (P - C)$$

$$G = C + \beta P - \beta C$$

$$G = C + \beta\frac{A}{2} - \beta C$$

$$G = \frac{\beta}{2}A + (1-\beta)C$$

Novamente escrevemos G como combinação linear de A e C. Mas, pelo teorema anterior essa representação é <u>única</u>. Então, se:

$$G = \frac{\alpha}{2}A + \frac{\alpha}{2}C \quad \text{e} \quad G = \frac{\beta}{2}A + (1-\beta)C$$

devemos ter

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{2} = 1-\beta$$

Daí, $\alpha = \beta$ e

$$\frac{\alpha}{2} = 1-\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = 2-2\alpha \quad \rightarrow \quad 3\alpha = 2 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}$$

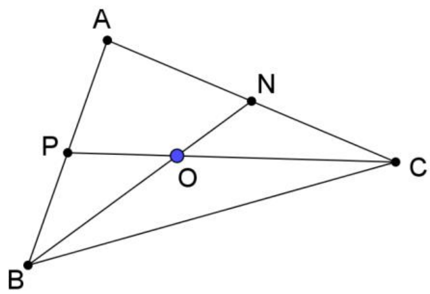
Com isso demonstramos que a distância do baricentro a um vértice é igual a $2/3$ do comprimento da respectiva mediana.

Vamos resolver novamente colocando a origem em outro lugar.

Solução 2

Escolho o ponto G como origem e os vetores $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ para formar nossa base.

$$base = \{B, C\}$$



$$N = \alpha B \quad \text{e} \quad P = \beta C$$

$$\frac{A+C}{2} = \alpha B \quad \text{e} \quad \frac{A+B}{2} = \beta C$$

$$A = 2\alpha B - C$$

$$A = -B + 2\beta C$$

Assim, A está aparentemente escrito como combinação linear de B e C de duas formas diferentes. Mas como a combinação linear é única devemos ter $2\alpha = -1 = 2\beta$, ou seja, $\alpha = \beta = -1/2$ que é um resultado análogo ao da solução anterior.

Vetores e coordenadas

Para trabalhar com vetores no plano cartesiano é necessário definir, inicialmente, as operações básicas com pares ordenados. São as seguintes:

Adição: $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

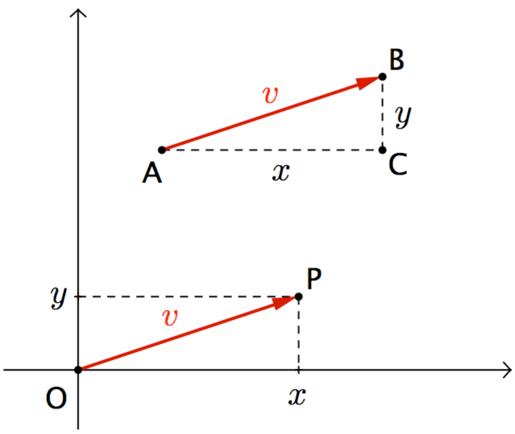
Subtração: $(x, y) - (x', y') = (x - x', y - y')$

Multiplicação por número real: Se a Î R, $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

Um par ordenado representa um vetor.

No nosso plano estabelecemos um sistema de coordenadas formado por dois eixos perpendiculares e graduados na mesma unidade. Esse é o plano cartesiano. Nesse plano, a origem $O = (0,0)$ e o ponto $P = (x, y)$ definem o vetor $v = \overrightarrow{OP} = (x, y)$. Dizemos que *x* e *y* são as coordenadas do ponto *P* e, ao escrever $v = (x, y)$, dizemos que *x* e *y* são as coordenadas do vetor *v*. Observe, então, que o par ordenado que representa o ponto *P*, representa também o vetor $\overrightarrow{OP}$. Essa dupla função do par ordenado permitirá a rica construção de uma álgebra diretamente conectada com a geometria (esse é o espírito da geometria analítica), propiciando recursos úteis e elegantes na resolução de problemas geométricos.

Considere agora, como na figura a seguir, um vetor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ e o triângulo retângulo *ABC* com os catetos paralelos aos eixos. As medidas algébricas dos catetos *AC* e *CB* desse triângulo são exatamente *x* e *y*.



Na figura acima, x é a diferença entre a abscissa de B e a abscissa de A enquanto que y é a diferença entre a ordenada de B e a ordenada de A.
Assim, se $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ então $x = x_B - x_A$ e $y = y_B - y_A$. Levando em conta as operações básicas com pares ordenados, temos que:

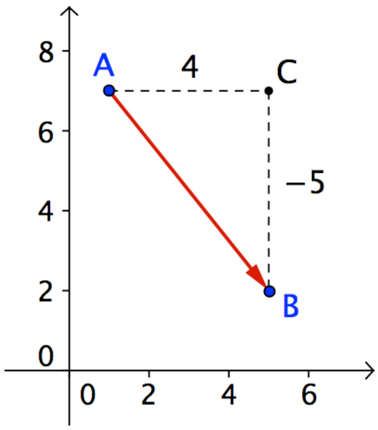
$$\overrightarrow{AB} = (x, y) = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (x_B, y_B) - (x_A - y_A) = B - A$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

A relação acima significa que as coordenadas de um vetor são as diferenças entre as coordenadas de suas extremidades. Por exemplo, se $A = (1,7)$ e $B = (5,2)$ então as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são dadas por:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5,2) - (1,7) = (4, -5)$$

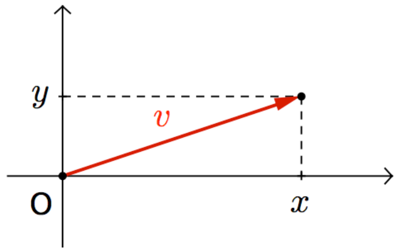
O vetor $\overrightarrow{AB}$ pode ser visualizado na figura a seguir.



Módulo e distância entre dois pontos

O *módulo* de um vetor é o seu comprimento. Observando a figura a seguir, o módulo do vetor $v = (x, y)$, que representaremos por $|v|$, é calculado pelo teorema de Pitágoras, e é dado por.

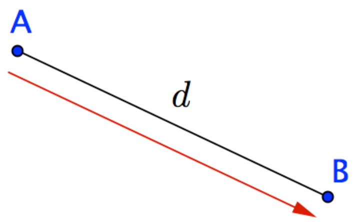
$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Obs

Dizemos que v é unitário quando $|v| = 1$. Todo vetor da forma $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ é unitário. Além disso, para qualquer vetor v não nulo, o vetor $u = v/|v|$ é unitário com mesma direção e sentido que v.

No plano cartesiano, a *distância* entre dois pontos A e B é o módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$. A distância entre os pontos A e B é representada por $d(A,B)$ ou, simplesmente, por AB.



Assim, se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ então $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e a distância entre A e B é

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemplo

Qual é a distância entre os pontos $(-2, 8)$ e $(4, 0)$?

Solução

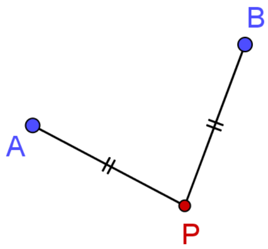
$$d = \sqrt{(4-(-2))^2 + (0-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

Exercício

Determine o ponto do eixo X equidistante dos pontos $A = (0, 2)$ e $B = (2, 6)$?

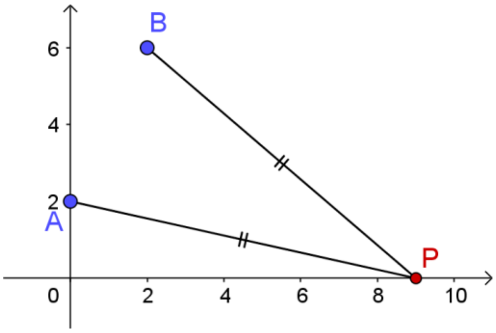
Solução

Demos encontrar o ponto $P = (x, 0)$ de forma que se tenha $PA = PB$.



$$A = (0, 2), \ B = (2, 6)?$$

$$\sqrt{(0-x)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(2-x)^2 + (6-0)^2}$$
$$x^2 + 4 = 4 - 4x + x^2 + 36$$
$$x = 9 \quad \rightarrow \quad P = (9, 0)$$



Vetores paralelos (ou colineares)

Dizer que dois vetores são paralelos ou colineares é a mesma coisa. Vetores não possuem posição fixa no plano e podem ser desenhados em qualquer lugar. Se vetores tiverem mesmo módulo, direção e sentido então essas imagens representam o mesmo vetor.

Se dois vetores são paralelos (ou colineares) um é múltiplo do outro.
Assim, se os vetores $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$, com nenhuma coordenada zero, são colineares então existe um número real α tal que $u = \alpha v$, ou seja, $(x, y) = \alpha(x', y')$ que acarreta $x = \alpha x'$ e $y = \alpha y'$. Portanto,

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$$

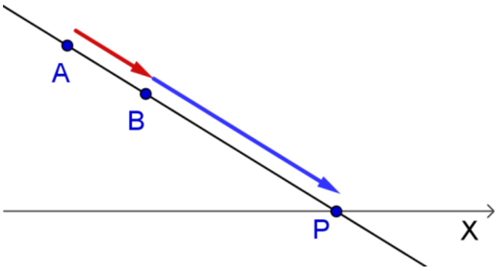
o que quer dizer que vetores paralelos possuem coordenadas proporcionais.

Exemplo

A reta r contém os pontos $A = (1,5)$ e $B = (3,4)$. Determine o ponto onde a reta r corta o eixo X.

Solução

Seja $P = (x, 0)$ o ponto onde a reta r corta o eixo X. Fazendo um desenho da situação



vamos construir os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BP}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -1)$

$\overrightarrow{BP} = P - B = (x - 3, -4)$

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BP}$ são colineares e, portanto, suas coordenadas são proporcionais.

$$\frac{2}{x-3} = \frac{-1}{-4}$$

Daí, $x = 11$ e $P = (11, 0)$.