Exercícios

① Prove, usando indução, que:

(a) $(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$

(b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$

Dê outras demonstrações para (a) e (b).

② Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > m$. Mostre que existem $q, r \in \mathbb{N}$ t.q. $n = mq + r$, com $r < m$ (atenção: r pode ser nulo), e que r e q são únicos com esta propriedade.

③ Escreva $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \dots \cup \mathbb{N}_n \cup \dots$ como união infinita de subconjuntos infinitos 2 a 2 disjuntos.

④ Calcule $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)}$

⑤ Mostre que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$

⑥ Mostre que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$\left(\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right)$

⑦ Decida se é verdadeira ou falsa a afirmação:

Seja (a_n) sequência não convergente. Dado $L \in \mathbb{R}$ qualquer, existem $\varepsilon_L > 0$ e subsequência (a_{n_k}) de modo que $a_{n_k} \notin (L - \varepsilon_L, L + \varepsilon_L)$.

① a) $x > -1 \quad \therefore \quad x = -1 + d \quad (d > 0)$

Portanto $1 + x = d$ e $1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 = 1 - n + nd + \frac{n(n-1)}{2}(d-1)^2$

Logo, o problema foi traduzido para provar que

$$d^n \geq 1 - n + nd + \frac{n(n-1)}{2}(d-1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } d > 0$$

Vamos usar o argumento por indução em n:

Caso base: $n=1 \Rightarrow d^1 \geq 1.-1+1d+\frac{1.(1-1)}{2}(d-1)^2 = d$ (OK)

$n=2 \rightarrow d^2 \geq 1-2\ 2.d + \frac{2.(2-1)}{2}(d-1)^2 = d^2$ (OK)

Suponha verdade para $n=k$ que:

$$d^k \geq 1-k+k.d+\frac{k(k-1)}{2}(d-1)^2 \quad (d>0)$$

Agora, vamos provar que $d^{k+1} \geq 1-(k+1)+(k+1)d+\frac{k(k+1)}{2}(d-1)^2$

$$\Rightarrow d^{k+1} \geq k(d-1)+d+\frac{k(k+1)}{2}(d-1)^2$$

$$\boxed{d^{k+1} \geq k(d-1)\left(1+\frac{(k+1)(d-1)}{2}\right)+d.}$$

Sabemos que $d^k \geq 1-k+k.d+\frac{k(k-1)}{2}(d-1)^2 \quad (d>0)$

e $d^{k+1} \geq d-dk+kd^2+\frac{k(k-1)(d-1)^2}{2}.d$

Agora, se provarmos que

$$d - dk + kd^2 + \frac{k(k-1)(d-1)^2}{2}\cdot d \geq k(d-1)\left(1+\frac{(k+1)(d-1)}{2}\right)+d$$

por transitividade $d^{k+1} \geq d - dk + kd^2 + \frac{k(k-1)(d-1)^2}{2}\cdot d$

e $d^n \geq 1 - n + nd + \frac{n(n-1)(d-1)^2}{2}$ $(d>0)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ e

por fim $(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x$ $(x>-1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow -d\cancel{k} + \cancel{k}d^2 + \frac{\cancel{k}(k-1)(d-1)^2 d}{2} \geq \cancel{k}(d-1)\left(1+\frac{(k+1)(d-1)}{2}\right)$$

$(k\in\mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow -d+d^2+\frac{(k-1)d(d-1)^2}{2} \geq d-1+\frac{(k+1)(d-1)^2}{2}$$

$$2(d^2-d) + d(d-1)^2(k-1) \geq 2(d-1) + (k+1)(d-1)^2$$

$$(d-1)\big(2d + d(d-1)(k-1) - 2 - (k+1)(d-1)\big) \geq 0 \quad (1)$$

Aplicando indução em k em (1), chegaremos que a desigualdade é verdadeira para $d>0$.

b) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Caso base: $n=1 \Rightarrow 1^2 = \frac{1.2.3}{6}$ (OK)

Suponha verdade para $n=K$ que $1^2+2^2+\dots+K^2 = \frac{K(K+1)(2K+1)}{6}$

Vamos provar que $1^2+2^2+\dots+K^2+(K+1)^2 = \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$

$\Rightarrow \frac{K(K+1)(2K+1)}{6} + (K+1)^2 = (K+1)\left(\frac{K(2K+1)+6(K+1)}{6}\right)$

$= \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$ $\blacksquare$

c) $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

Caso base $n=1$: $1=1^2$ (OK)

Suponha verdade para $n=K$ que
$1+3+5+\dots+(2K-1) = K^2$

Queremos mostrar que $1+3+5+\dots+(2K-1)+(2K+1) = (K+1)^2$

$\Rightarrow K^2+(2K+1) = (K+1)^2$ $\blacksquare$

② $m, n \in \mathbb{N}$ e $n > m$.

Podemos usar a propriedade arquimediana: ($\forall a, b > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \mid an > b$). e o princípio da Boa Ordem (todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento).

Considere o conjunto $A = \{xm \mid x \in \mathbb{N}$ e $xm > n\}$. Vimos que $A \neq \emptyset$, pois para $x = n+1 \Rightarrow (n+1)m > n$ $\Rightarrow mn > 0$ que é verdade já que $m, n \in \mathbb{N}$ (não vamos considerar que $0 \notin \mathbb{N}$). Logo, pelo princípio da Boa Ordem, A possui um elemento mínimo q tal que $qm \leq n$.

1) Se $n = qm$, não há o que provar.
2) Se $n > qm$, então $\exists r \in \mathbb{N} \mid n = qm + r$.
Se $r \geq m$, teremos $n \geq q(m+1)$, o que seria um absurdo, já que q é mínimo, Logo $r < m$.

Portanto, dado $n > m$, $n, m \in \mathbb{N}$ e $q, r \in \mathbb{N} \mid$ $0 \leq r < m$, então $\boxed{n = qm + r.}$

(3) Naturais como união infinita de conjuntos infinitos disjuntos 2 a 2

$\mathbb{N} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \quad , \quad A_i \subset \mathbb{N} \quad , \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

Ideia 1:

$$
\begin{array}{|llll l}
1 & 2 & 4 & 7 \cdots & \to N_1 \\
3 & 5 & 8 & & \to N_2 \\
6 & 9 & & \ddots & \to N_3 \\
10 & & & & \quad \vdots \\
\vdots & & & & \to N_n
\end{array}
$$

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i = \mathbb{N}$ e $N_i \cap N_j = \emptyset$

Ideia 2: Teorema Fundamental da Aritmética.

Pego os números primos:

$A_1 = \{$ números divisíveis por 2 $\}$

$A_2 = \{$ números divisíveis por 3 e não por 2 $\}$

$\vdots$

(4) $$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{m+1} \frac{1}{k} = 1 + \cancel{\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k}} - \cancel{\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k}} - \frac{1}{m+1}$$

$$\boxed{= \frac{m}{m+1}}$$

(5) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$ (Só fazer indução).

$$\Rightarrow (k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$

$$\begin{cases} 1^4 = 1 \\ (1+1)^4 = 1 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1^4 \\ (1+2)^4 = 1 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 2^4 \\ \vdots \\ (1+(k-1))^4 = 1 + 4(k-1)^3 + 6(k-1)^2 + 4(k-1) + (k-1)^4 \\ (1+k)^4 = 1 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + k^4. \end{cases}$$

$$(k+1)^4 + \cancel{k^4} + \cancel{\cdots} + \cancel{2^4} + \cancel{1^4} = \sum_{n=1}^{k} 1 + 4\sum_{n=1}^{k} n^3 + 6\sum_{n=1}^{k} n^2 + 4\sum_{n=1}^{k} n$$

$$+ 1^4 + \cancel{1^4} + \cancel{2^4} + \cancel{\cdots} + (k-1)^4 + \cancel{k^4}$$

$$\sum_{m=1}^{k} m^3 = \frac{(k+1)^4 - 1 - 4\sum_{m=1}^{k} m - 6\sum_{m=1}^{k} m^2}{4}$$

só fazer as contas.

6) Para demonstrar $(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$

só fazer indução em n.

7) (a_n) sequência não convergente.
Dado $L \in \mathbb{R}$ qualquer, existem $\varepsilon_L > 0$ e subsequência (a_{n_k}) tais que $a_{n_k} \notin (L - \varepsilon_L, L + \varepsilon_L)$.

$$\begin{cases} a_n = 1 + (-1)^n \\ a_n = (0, 2, 0, 2, \ldots) \\ a_{2k+1} = 0 \\ a_{2k} = 2. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Seja } L = 0 \text{ e } \varepsilon_0 = 1 \text{ e } a_{n_k} = a_{2k} = 2 \quad \therefore a_{n_k} \notin (-1, 1).}$

VERDADEIRA.