1. Dada a elipse $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16x - 16y = 0$. Determine seus focos, no sistema final e no sistema inicial de coordenadas, e sua excentricidade.

Vamos fazer a rotação: $tg 2\theta = \frac{B}{A-C}$.

Como nesse caso $A = C = 5$, então $\theta = 45°$

Logo, podemos escrever x e y desta forma: $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}/2\,(x'-y') \\ y = \sqrt{2}/2\,(x'+y') \end{cases}$.

Substituindo: $\frac{5}{\cancel{2}}(x'-y')^2 - \frac{6}{\cancel{3}}(x'-y')(x'+y') + \frac{5}{\cancel{2}}(x'+y')^2 - \frac{16\sqrt{2}}{\cancel{2}}(2y') = 0$

$$5(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - 6(x'^2 - y'^2) + 5(x'^2 + 2x'y' + y'^2) - 32\sqrt{2}y' = 0.$$

$$4x'^2 + 16y'^2 - 32\sqrt{2}y' = 0.$$

Fazendo a translação: $x' = x'' + a$
$y' = y'' + b$

$$4(x''+a)^2 + 16(y''+b)^2 - 32\sqrt{2}(y''+b) = 0$$

$$4x''^2 + 8x''a + 4a^2 + 16y''^2 + 32y''b + 16b^2 - 32\sqrt{2}y'' - 32\sqrt{2}b = 0$$

$$0 = 4x''^2 + 16y''^2 + x''(8a) + y''(32b - 32\sqrt{2}) + (4a^2 + 16b^2 - 32\sqrt{2}b)$$

$$\boxed{a = 0 \; ; \; b = \sqrt{2}}$$

$$4x''^2 + 16y''^2 + 32 - 64 = 0.$$

$$4x''^2 + 16y''^2 = 32$$

$$\boxed{\frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{2} = 1.}$$

$a^2 = 8 \Rightarrow 2\sqrt{2}$
$b^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{2}$
$c^2 = 6. = \sqrt{6}.$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Focos no sistema final $\boxed{: (\sqrt{6}, 0)'' \text{ e } (-\sqrt{6}, 0)''}$

Focos no segundo sistema: $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{6}, \sqrt{2})$

Focos no sistema original:

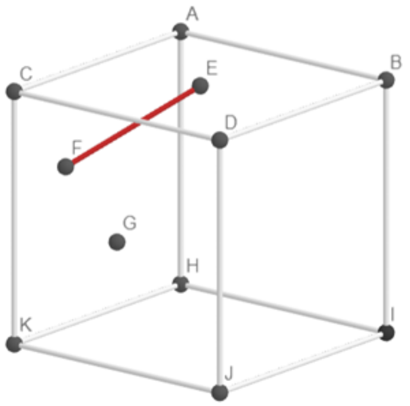
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\right) = \boxed{(\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1)}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{6} - \sqrt{2}), \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{6} + \sqrt{2})\right) = \boxed{(-\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} + 1)}$$

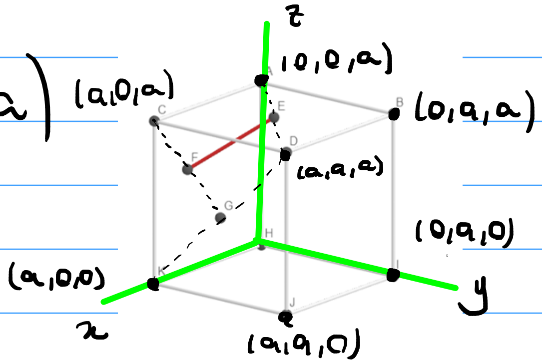
2. O cubo, abaixo, possui arestas com comprimento igual a a. Os pontos E e G são os centros de suas respectivas faces e o ponto F é o ponto médio dos pontos G e C.

   (a) Determine o comprimento do segmento EF em relação a a.

   (b) Determine o cosseno do ângulo $\angle HFE$.



a)



$G = (a, a/2, a/2)$

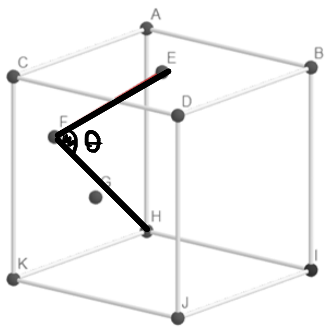
$E = (a/2, a/2, a)$

$F = (a, a/4, 3a/4)$

$$EF = \sqrt{(a/2 - a)^2 + (a/2 - a/4)^2 + (a - 3a/4)^2}$$

$$= \sqrt{a^2/4 + a^2/16 + a^2/16} = \boxed{\frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

b)



$\vec{FE} = (-a/2, a/4, a/4)$

$\vec{FH} = (-a, -a/4, -3a/4)$

$$\cos\theta = \frac{(-a/2, a/4, a/4)(-a, -a/4, -3a/4)}{\sqrt{a^2/4 + a^2/16 + a^2/16} \cdot \sqrt{a^2 + a^2/16 + 9a^2/16}}$$

$$\cos\theta = \frac{a^2/2 - a^2/16 - 3a^2/16}{\frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{26}}{4}} = \frac{\frac{4\cancel{a^2}}{\cancel{16}}}{\frac{\cancel{a^2}\sqrt{6}\,.\sqrt{26}}{\cancel{16}}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{39}}}$$

3. Calcule a área do triângulo formado pela intersecção das retas $x = 1$, $y = 2$ e pela tangente à cônica

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$$

no ponto $(2, \frac{4+\sqrt{3}}{2})$.

Derivando implicitamente em relação a x:

$$2x + 8y \cdot y' - 2 - 16y' + 0 = 0$$

$$x + 4yy' - 1 - 8y' = 0$$

$$y'(8 - 4y) = x - 1$$

$$\boxed{y' = \frac{x-1}{8-4y}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2-1}{8 - 2(4+\sqrt{3})} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$$\left(y - \frac{4+\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6}(x-2)$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}x}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4+\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{12+5\sqrt{3}}{6}}$$

reta tg $\cap$ $y=2 \Rightarrow (5, 2)$

reta tg $\cap$ $x=1 \Rightarrow (1, 2+2\sqrt{3}/3)$

$y=2 \cap x=1 \Rightarrow (1, 2)$

$$A = \frac{1}{2}|\Delta| \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \\ 1 & 2+2\sqrt{3}/3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \cancel{2}+5\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+2 \\ -10-\cancel{2}-(2+2\sqrt{3}/3) \end{matrix}$$

$$\Delta = 4\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) - 8 \Rightarrow \boxed{\frac{8\sqrt{3}}{3}}$$

$$\boxed{A = \frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

5. Dados uma reta d e um ponto F não pertencente a d, determine o conjunto dos pontos P do plano tais que

$$d(P,F) = d(P,d)e$$

onde e é um número real positivo.

Dica: faça $p = d(F,d)$ e analise cada caso de e.

Faça $Oy = d$ e Ox passando por F.

$\therefore F = (K,0)$; $P = (x,y)$

$d(F,P) = e . d(P,d)$

$$(x-K)^2 + y^2 = e^2x^2$$

$$x^2(1-e^2) - 2xK + y^2 + K^2 = 0.$$

$e = 1 \Rightarrow$ parábola $(x^2(1-e^2) = 0 \Rightarrow y^2 = 2xK - K^2)$

$e > 1 \Rightarrow$ hipérbole $(y^2 - x^2 K' - 2xK + K^2 = 0)$

$e < 1 \Rightarrow$ elipse $(y^2 + x^2 K' - 2xK + K^2 = 0)$.

6. (Extra) As equações $(-15x^2+2xy+y^2+17x-11y+18=0)$ e $(-\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{2}xy+y^2-24x-11y+18=0)$ representam duas retas cada.

(a) Determine as equações das quatro retas.

(b) Determine a área do quadrilátero limitado por essas retas.

a) $-15x^2+2xy+y^2+17x-11y+18=0.$

Equação do 2º grau em y:

$$y=\frac{-(2x-11)\pm\sqrt{(2x-11)^2-4.1.(18+17x-15x^2)}}{2}$$

$$y=\frac{-(2x-11)\pm\sqrt{4x^2-44x+121-72-68x+60x^2}}{2}$$

$$y=\frac{-(2x-11)\pm\sqrt{64x^2-112x+49}}{2}$$

$$y=\frac{-(2x-11)\pm(8x-7)}{2}$$

$$y=\frac{-2x+11+8x-7}{2}=\frac{10x-18}{2}=\boxed{3x+2=y}$$

$$y=\frac{-2x+11-8x+7}{2}=\frac{-6x-4}{2}=\boxed{-5x+9=y}.$$

$$-\frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}xy + y^2 - 24x - 11y + 18 = 0$$

$$-9x^2 + 3xy + 2y^2 - 48x - 22y + 36 = 0$$

Equação de segundo grau em y:

$$y = \frac{-(3x-22) \pm \sqrt{(3x-22)^2 - 4.2(36-48x-9x^2)}}{4}$$

$$y = \frac{-(3x-22) \pm \sqrt{9x^2 - 132x + 484 - 288 + 384x + 72x^2}}{4}$$

$$y = \frac{-(3x-22) \pm \sqrt{81x^2 + 252x + 196}}{4}$$

$$y = \frac{-(3x-22) \pm (9x+14)}{4}$$

$$y = \frac{-3x+22+9x+14}{4} = \boxed{\frac{3x}{2} + 9 = y}$$

$$y = \frac{-3x+22-9x-14}{4} = \boxed{-3x+2 = y}$$

b) Retas $\boxed{y = \frac{3x}{2} + 9 ;\ y = 2-3x ;\ y = 3x+2 ;\ y = 9-5x}$

I) $\frac{3x}{2} + 9 = 2 - 3x \Rightarrow 3x + 18 = 4 - 6x \Rightarrow 9x = -14$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -14/9 \\ y &= 20/3 \end{aligned}}$$

II) $\frac{3x}{2} + 9 = 3x + 2 \Rightarrow 3x + 18 = 6x + 4 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} x &= 14/3 \\ y &= 16 \end{aligned}}$

III) $\frac{3x}{2} + 9 = 9 - 5x \Rightarrow 3x + 18 = 18 - 10x$ $\boxed{\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 9 \end{aligned}}$

IV) $2 - 3x = 3x + 2 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 2 \end{aligned}}$

V) $2 - 3x = 9 - 5x \Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} x &= 7/2 \\ y &= -17/2 \end{aligned}}$

VI) $3x + 2 = 9 - 5x \Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} x &= 7/8 \\ y &= 37/8 \end{aligned}}$

Coordenadas do quadrilátero: $(0,2)$, $(0,9)$, $(-14/9, 20/3)$, $(7/8, 37/8)$

Fazendo o algoritmo

$A = \frac{1}{2}|\Delta|$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ -14/9 & 20/3 \\ 0 & 2 \\ 7/8 & 37/8 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 0 - \frac{28}{9} + 0 + \frac{63}{8} + 14 - 0 - \frac{7}{4} - 0$$

$$= -\frac{7}{4} - \frac{35}{9} + \frac{63}{8} + 14 = \frac{-280 + 567 + 1008}{72} \quad -126$$

$$= \frac{1295 - 126}{72}$$

$$\boxed{A = \frac{1169}{144}}$$

7. (Extra) Sejam a e b reais positivos com $b > a > 0$. Sejam também os pontos $B(0,0)$, $B_1(0, a+b)$, $F(0,a)$ e $F_1(0,b)$.

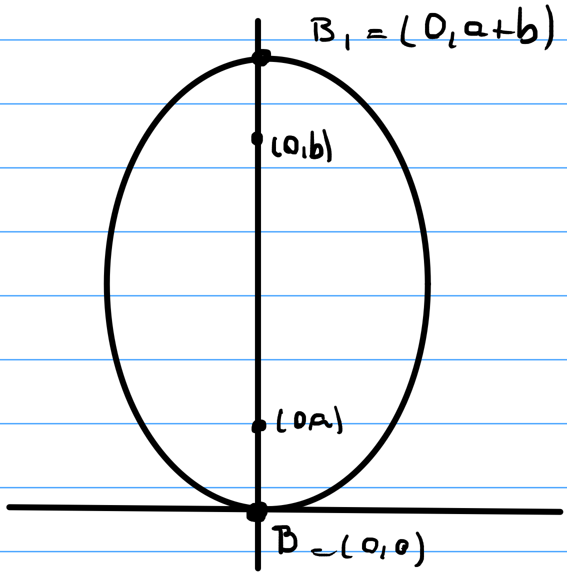
(a) Mostre que a elipse de vértices B e B_1 e focos F e F_1 juntamente com a parábola de vértice B e foco F podem ser escritas, respectivamente, como

$$y = \frac{1}{a+b}y^2 + \frac{1}{4a}\frac{a+b}{b}x^2$$
$$y = \frac{1}{4a}x^2$$

(b) Se (x, y_e) é um ponto da elipse e (x, y_p) é um ponto da parábola, mostre que

$$\lim_{b\to\infty} y_e = y_p$$

a)



semieixo maior: $\frac{a+b}{2}$

centro: $\left(0, \frac{a+b}{2}\right)$

- $\frac{a+b}{2} + c = b \Rightarrow$ semieixo focal $\boxed{= \frac{b-a}{2}}$

- $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = K^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

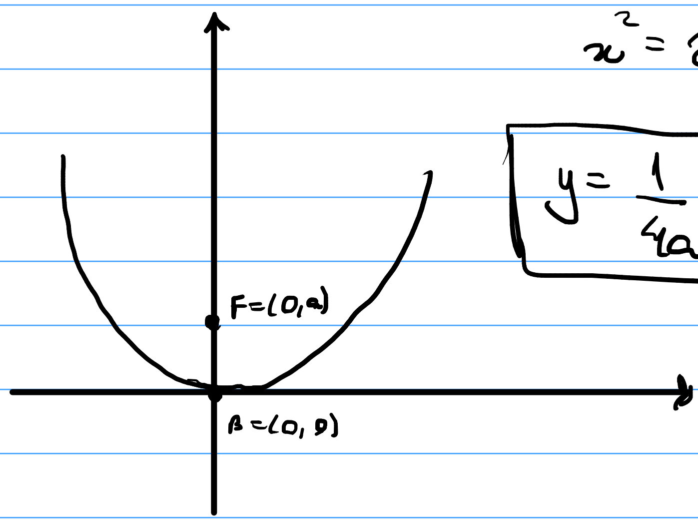
$a^2 + 2ab + b^2 = 4K^2 + b^2 - 2ab + a^2$

$K = \sqrt{ab}$ semieixo menor $\boxed{= \sqrt{ab}}$

A equação seria, nesse caso:

$$\boxed{\frac{x^2}{(\sqrt{ab})^2} + \frac{(y-(a+b)/2)^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = 1} = \frac{x^2}{ab} + \frac{4\left(y-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(a+b)^2} = 1$$

Parábola:



$x^2 = 2py$

$\frac{p}{2} = a$

$\boxed{y = \frac{1}{4a}x^2}$

$p = 2a.$

b) Elipse: (x, y_E)
Parábola: (x, y_P)

$$\left(x, \frac{1}{a+b}y_E^2 + \frac{1}{4a}\frac{(a+b)}{b}x^2\right); \left(x, \frac{1}{4a}x^2\right)$$

$$\lim_{b \to \infty} y_E = \lim_{b \to \infty} \left(\overset{\to 0}{\cancel{\frac{y_E}{a+b}}} + \frac{1}{4a} x^2 \left(1 + \overset{\to 0}{\cancel{\frac{a}{b}}} \right) \right) = \boxed{\frac{1}{4a} x^2 = y_P}$$