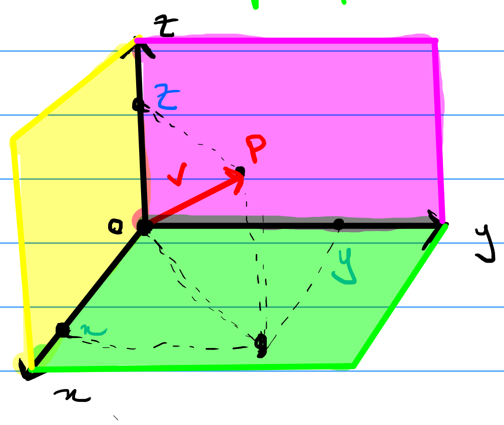
GEOMETRIA NO ESPAÇO:

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \ , \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$

(x,y,z) é um terno ordenado (tripla ordenada)

- Operações: $(x,y,z)+(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$.
  $(x,y,z)-(x',y',z') = (x-x', y-y', z-z')$.
  $\alpha(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.

- vetores no espaço:

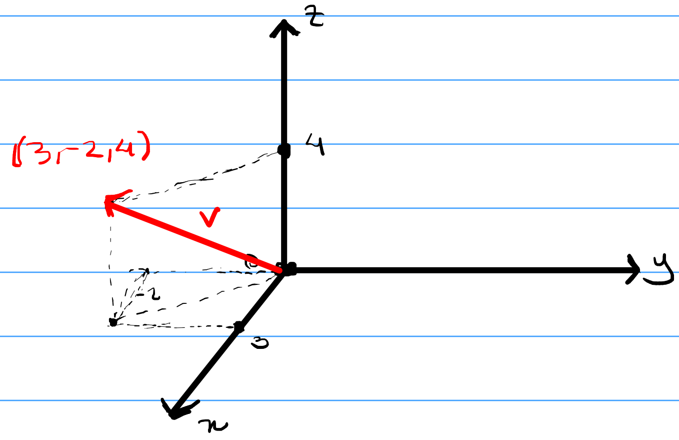


Plano XY: plano $z=0 \Rightarrow (x,y,0)$
Plano XZ: plano $y=0 \Rightarrow (x,0,z)$
Plano YZ: plano $x=0 \Rightarrow (0,y,z)$

O ponto $P=(x,y,z)$ define o vetor $\vec{OP} = v = (x,y,z)$.

Por exemplo: o vetor $v=(3,-2,4)$.

$$=(3,0,0)+(0,-2,0)+(0,0,4).$$



• Módulo: $|v|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Equação de uma esfera centrada na origem e de raio 1: $x^2+y^2+z^2=1$.

• Distância entre pontos: $A=(x_1,y_1,z_1)$; $B=(x_2,y_2,z_2)$

$$d=|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

• Vetores paralelos (colineares 3D): Dois vetores são paralelos (ou colineares) quando um é múltiplo do outro.

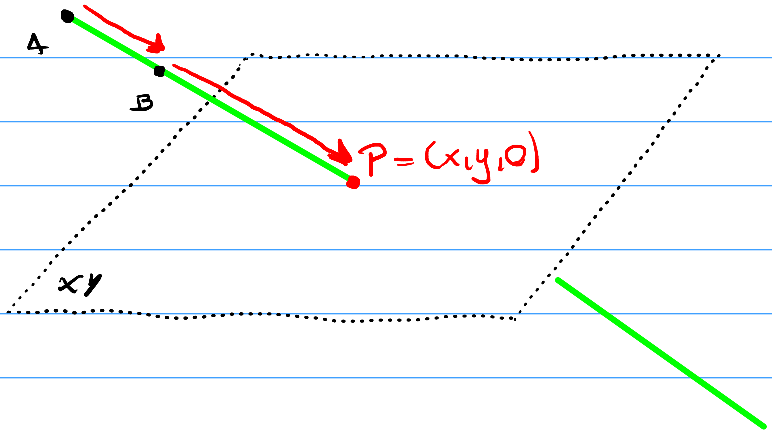
$u=(x,y,z)$, $v=(x',y',z')$, $u\neq 0 \wedge v\neq 0$.

$u \parallel v \Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \mid v=\alpha u$.

Além disso, $x,x',y,y',z,z' \neq 0 \wedge u\parallel v \Rightarrow \dfrac{x}{x'}=\dfrac{y}{y'}=\dfrac{z}{z'}$

Ex: $A=(1,2,8)$, $B=(4,3,6)$

Determine o ponto onde a reta AB fura o plano xy.

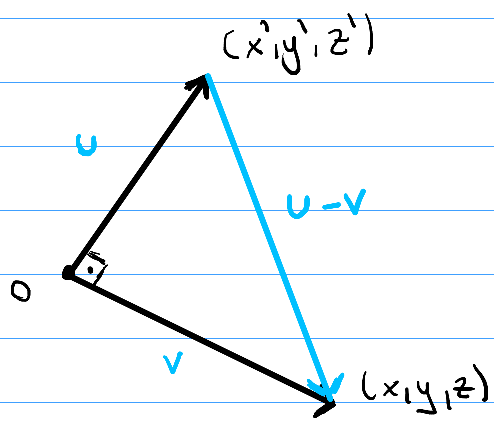


Vetor $\vec{AB} = B - A = (3, 1, -2)$
Vetor $\vec{BP} = P - B = (x-4, y-3, -6)$

$$\vec{AP} \parallel \vec{BP} \Rightarrow \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{-6}{-2}$$

$\boxed{x = 13}$, $\boxed{y = 6}$, $\boxed{P = (13, 6, 0)}$.

- Condição de perpendicularismo:



$$|u-v|^2 = |v|^2 + |u|^2$$

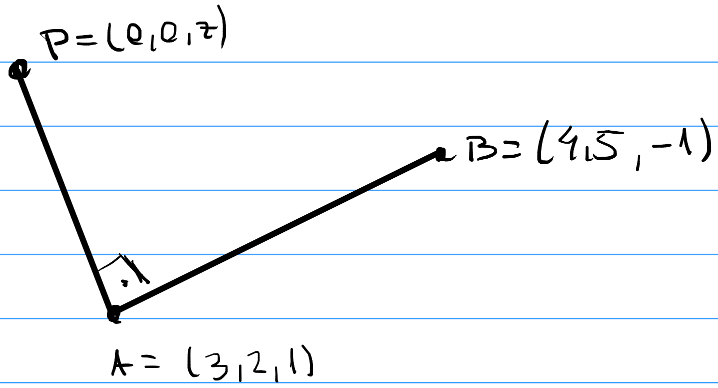
$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 = x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2$

$-2xx'-2yy'-2zz'=0$

$$\boxed{\Rightarrow xx'+yy'+zz'=0}$$

EX: $A=(3,2,1)$; $B=(4,5,-1)$

Determine P do eixo z tal que
$P\hat{A}B = 90°$



$\overrightarrow{AP} = (-3,-2,z-1)$
$\overrightarrow{AB} = (1,3,-2)$

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow (-3)\cdot 1 + (-2)\cdot 3 + (z-1)(-2) = 0$

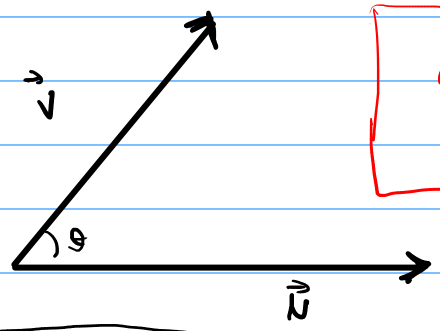
$z = -7/2 \Rightarrow \boxed{P = (0,0,-7/2)}$

• Produto escalar: $v = (x, y, z)$; $u = (x', y', z')$

$$v.u = xx' + yy' + zz'$$

• Baricentro ΔABC: $G = \frac{A+B+C}{3}$.

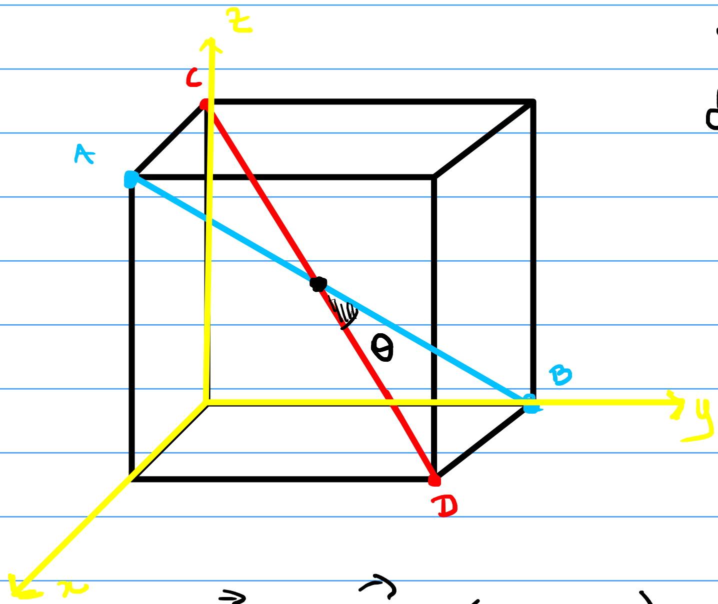
• Angulação:



$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}}$$

$u, v \neq 0$ e $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0}$.

Ex: Determine o ângulo formado por 2 diagonais de um cubo.



Vamos usar a aresta do cubo como 1.

$$\begin{cases} A = (1,0,1) \\ B = (0,1,0) \\ C = (0,0,1) \\ D = (1,1,0) \end{cases}$$

$\vec{u} = \vec{AB} = (-1, 1, -1)$

$\vec{v} = \vec{CD} = (1, 1, -1)$

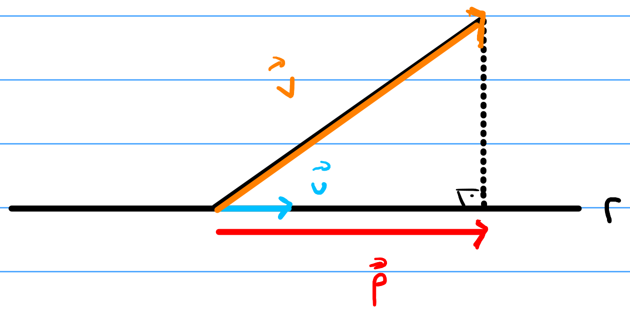
Fazendo $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1).1 + 1.1 + (-1)(-1) = \boxed{1.}$

$|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{3}$.

Logo, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = \arccos 1/3}$

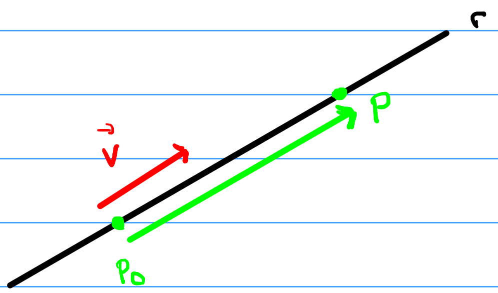
• Projeção de um vetor sobre uma reta:

Igual à geometria no plano:



$$\vec{p} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}.\vec{u}$$

• Equação da reta:



$v = (a, b, c)$ - vetor diretor

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$P = (x, y, z) \in r$

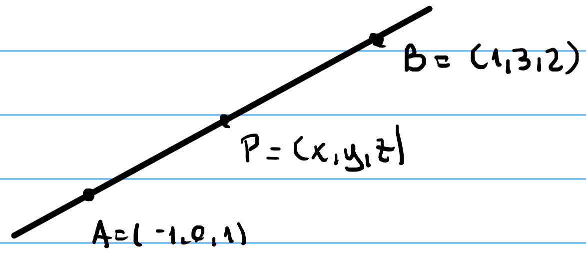
$\vec{P_0P} = t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$

$\therefore P = P_0 + t\vec{v}$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$

$$\begin{cases} x = x_0 + a.t \\ y = y_0 + b.t \\ z = z_0 + c.t \end{cases}$$

Ex: Determine a reta que passa por $A = (-1,0,1)$ e $B = (1,3,2)$.



$\vec{AB} = (2,3,1) = v$

$\therefore \vec{AP} = \alpha \vec{AB}$

$P = A + \alpha \vec{AB}$

$(x,y,z) = (-1,0,1) + \alpha (2,3,1)$

$$\boxed{\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 3\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

$r = \{(-1+2\alpha, 3\alpha, 1+\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

• Posições relativas:

Duas retas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas

Ex: Determine a posição relativa das retas:

$$r: \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+2t \\ z = 2 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = 6-s \\ y = 2+s \\ z = -1+3s \end{cases}$$

diretor: $(1,2,0)$ diretor: $(-1,1,3)$.

Como os vetores diretores são diferentes, elas não são paralelas.

Fazendo

$$3+t = 6-s \rightarrow t+s = 3$$
$$-1+2t = 2+s \rightarrow 2t-s = 3$$
$$2 = -1+3s \rightarrow \boxed{s = 1}$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} t+s = 3 \\ 2t-s = 3 \end{cases}$ $\boxed{t = 2,\ s = 1}$.

Com $t=2$ e $s=1$, as retas se encontram em $(5,3,2)$, logo, elas são concorrentes

OBS: Se os valores de z, neste caso, fossem diferentes, as retas seriam reversas.

OBS: Se as retas formam 90°, elas são chamadas de ortogonais.

• Combinação Linear:

Sejam $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$. Uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é um vetor do tipo
$w = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
w está no mesmo plano de u e v.

Ex: Verifique se $w = (4, 9, -5)$ é combinação linear de $u = (2, 1, -1)$ e $v = (1, -3, 1)$

$$(4, 9, -5) = \alpha(2, 1, -1) + \beta(1, -3, 1)$$

$$\begin{cases} 4 = 2\alpha + \beta \\ 9 = \alpha - 3\beta \\ -5 = -\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha = 3 \quad \beta = -2}$$

Determinantes:

Definição: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix} = \begin{matrix} (aei + bfg + cdh) \\ - \\ (ceg + afh + bdi) \end{matrix}$$

Determinante formado por 3 vetores:

$u = (a_1, b_1, c_1)$
$v = (a_2, b_2, c_2)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\det[u, v, w] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$
$w = (a_3, b_3, c_3)$

$\det[u, v, w] = a_1b_2c_3 + b_1a_2c_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3.$

Desenvolvimento de Laplace pela 1ª linha

$$\det[u,v,w] = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Propriedades:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D \rightarrow \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -D$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D \rightarrow \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha D.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$ (linhas múltiplas)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' & c_1+c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\det[u, v, \alpha u + \beta v] = \det[u, v, \alpha u] + \det[u, v, \beta v] =$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

Calculo:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \det(u, v, 2v - u) = 0$$

Produto vetorial:

$u = (a_1, b_1, c_1)$; $v = (a_2, b_2, c_2)$

$$u.v = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Exemplo: $u = (2, 3, -1)$; $v = (1, 0, 2)$, $u \times v$:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{matrix}$$

$u \times v = (6-0, -1-4, 0-3)$
$\boxed{= (6, -5, -3)}$

Agora veja:

$(6,-5,-3)(2,3,-1) = 12-15+3=0$

$(6,-5,-3)(1,0,2)=6+0-6=0.$

Perpendiculares

Propriedades

$v \times u = -u \times v$

$u \times (v+v') = u \times v + u \times v'$

$(\alpha u) \times v = \alpha (u \times v) \quad , \alpha \in \mathbb{R}$

$u=(a_1,b_1,c_1) \quad , v=(a_2,b_2,c_2) \quad , w=(a_3,b_3,c_3)$

$$u \times v \cdot w = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (a_3,b_3,c_3)$$

$= b_1c_2a_3 - b_2c_1a_3 + c_1a_1b_3 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3$

$= \det[u,v,w].$

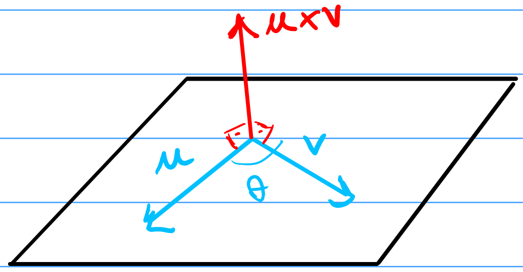
PROPRIEDADES DO PRODUTO VETORIAL

- $u \times v \cdot w = \det[u, v, w]$.

- $u \times v \perp u$
  $u \times v \perp v$.

u, v, w formam um triedro positivamente orientado quando $\det[u,v,w] > 0$

- $u, v, u \times v$ é positivamente orientado.

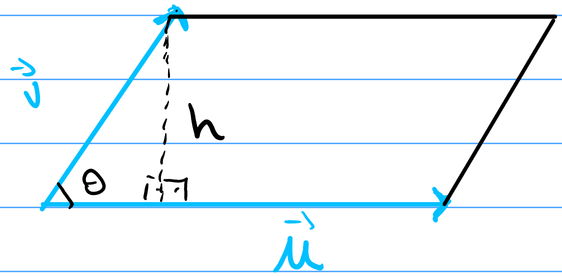


- $u \times v = 0 \iff u, v$ são colineares

- $|u \times v| = |u||v| \operatorname{sen}\theta$

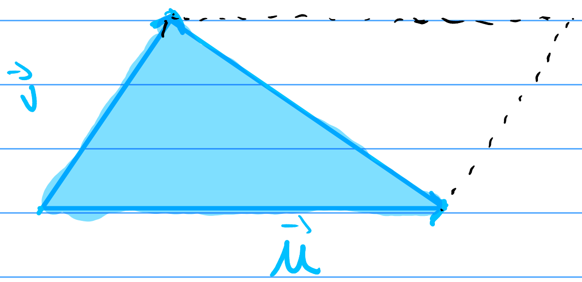
ÁREAS

Paralelogramo:



$A = |u| \cdot h = |u| \cdot |v| \cdot \operatorname{sen}\theta \boxed{= |u \times v|.}$ //.

Triângulo:



$\boxed{A = \frac{1}{2} |u \times v|}$ //.

Ex: Calcule a área do triângulo ABC.

$A = (1,0,1)$, $B = (3,4,-1)$, $C = (2,1,-3)$

$\vec{AB} = (2,4,-2)$

$\vec{AC} = (1,1,-4)$

$\vec{AB} \times \vec{AC} \Rightarrow$

$$\begin{matrix} \cancel{2} & 4 & -2 & 2 & 4 & \cancel{-2} \\ \cancel{1} & 1 & -4 & 1 & 1 & \cancel{-4} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow [-16-(-2)] + [-2-(-8)] + [2-4]$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-14, 6, -2) = 2(-7, 3, -1)$$

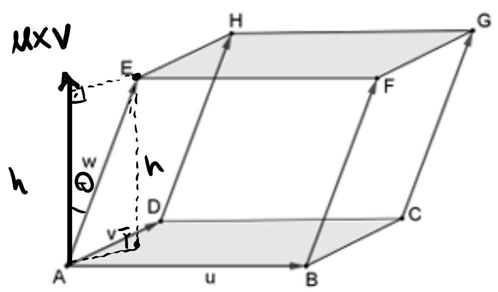
$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{49+9+1} = \boxed{\sqrt{59}}$$ //.

Produto Misto: Produto misto de u, v, w (nessa ordem) é $[u,v,w] = u \times v \cdot w = \det[u,v,w]$.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} u = (a_1, b_1, c_1) \\ v = (a_2, b_2, c_2) \\ w = (a_3, b_3, c_3) \end{array} \Rightarrow [u,v,w] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

VOLUMES:

Paralelepípedo:



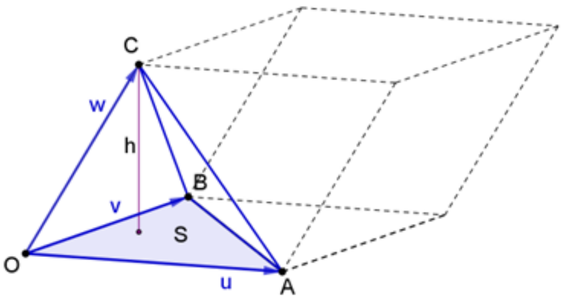
volume = (área base).(altura)

(área base) = $|u \times v|$

(altura) = $|w| \cos\theta$

$$\text{volume} = |u \times v||w| \cos\theta$$
$$= ||u \times v||w| \cos\theta|$$
$$= |u \times v \cdot w|$$
$$\boxed{= |[u \times v \cdot w]|}$$ //

Tetraedro:



$$\text{volume} = \frac{1}{3}(\text{altura})(\text{base})$$

$$\boxed{\text{volume} = \frac{1}{6}\left|[u,v,w]\right|}$$ //

$2 \times (\text{base}).h = |[u,v,w]|$ (já vimos).

Equação do plano:

Dados $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$; $n = (a,b,c)$ [vetor normal]
$P = (x,y,z)$ [ponto qualquer do plano]

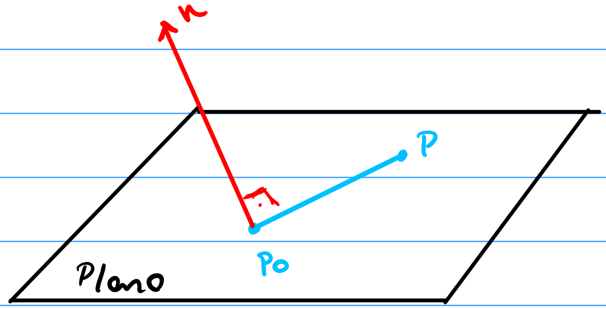
$$\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$n \perp \vec{P_0P}$$

$$\therefore \quad a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

e $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$ // Vetor normal

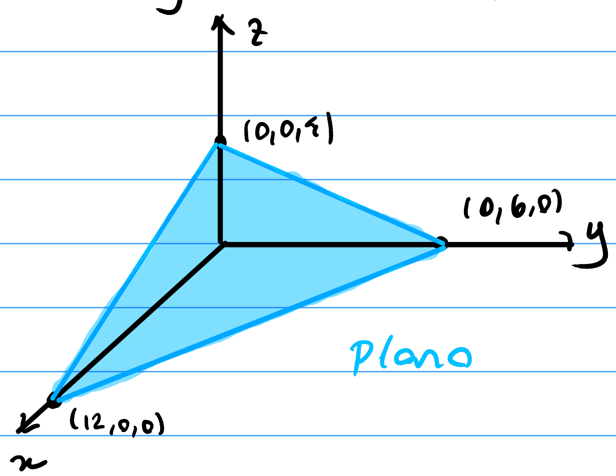


Ex 1: $x+2y+3z=12$. Descubra as interseções com os eixos:

Eixo x: $y=z=0 \Rightarrow (12,0,0)$

Eixo y: $x=z=0 \Rightarrow (0,6,0)$

Eixo z: $x=y=0 \Rightarrow (0,0,4)$

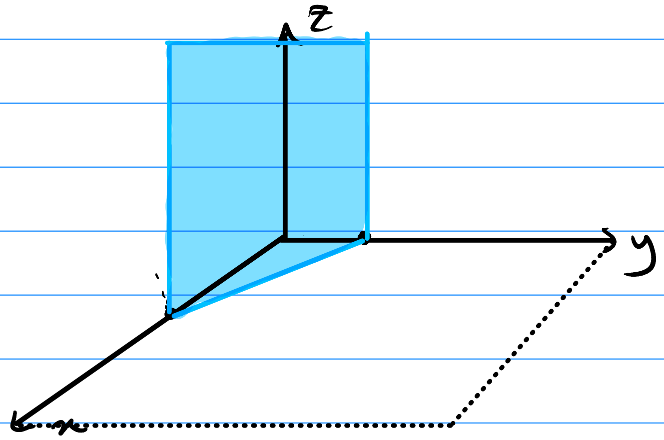


Ex: O que representa no espaço $2x+3y=6$.

Interseções: Eixo x $\Rightarrow (3,0,0)$

Eixo y $\Rightarrow (0,2,0)$

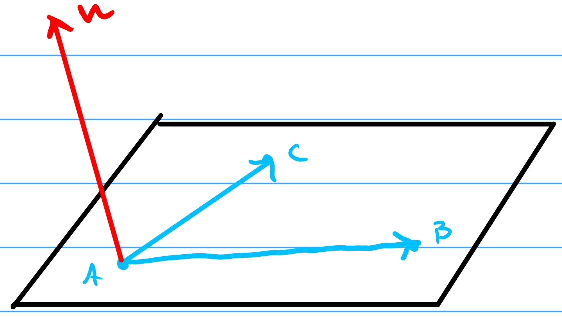
Eixo z $\Rightarrow$ Não corta



O plano z
fica "atrás"

Ex: Equação do plano por 3 pontos:

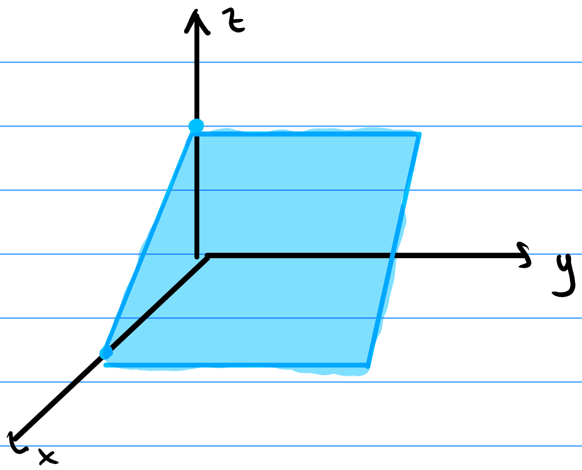
$A = (2, 0, 3)$
$B = (1, -1, 1)$
$C = (0, 2, -1)$



$\vec{AB} = (-1, -1, -2)$
$\vec{AC} = (-2, 2, -4)$
$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{matrix} -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & -2 & 2 & -4 \end{matrix} = (8, 0, -4)$

Adotando $n = (2, 0, -1)$

$\therefore$ Plano: $2x + 0y - z = d \Rightarrow$ Substituindo $A = (2, 0, 3)$
$\Rightarrow \boxed{2x - z = 1}$



Posições relativas:

Paralelos: mesmo vetor normal
Secantes: a interseção é uma reta.

Ex: Encontre a interseção de

$$\begin{cases} \pi_1: 2x - 3y + z = 1 \\ \pi_2: x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

→ Chute valores para uma das incógnitas e resolva o sistema. Você tem dois pontos na interseção. Faça a interseção.

→ Faça $z = t$ (parâmetro)

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 - t \\ x + y = 3 + 2t \end{cases}$$

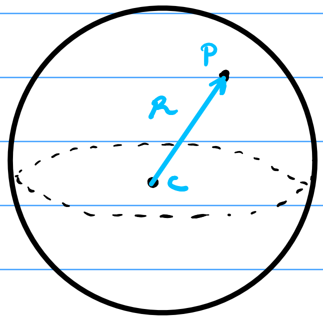
$\Rightarrow x = 2 + t$

$\Rightarrow y = 1 + t$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Equação da esfera:

$C: (x_0, y_0, z_0)$
R: raio
$P: (x, y, z)$ (ponto qualquer da esfera)



$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2}$$

Ex: Determine o centro e o raio de

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z - 14 = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 10z + 25) = 25 + 9 + 1 + 14$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 49$$

$\boxed{\text{centro: } (3, -1, 5) \quad , \text{ raio } 7}$

Ex: A reta r passa pelo ponto $A=(3,4,5)$ e é paralela aos planos

$\alpha = x-y+2z=3$
$\beta = 2x+y+z=4$

Determine o ponto onde essa reta fura o plano $\gamma = x+2y-3z=0$

$n_\alpha=(1,-1,2)$
$n_\beta=(2,1,1)$ $\Rightarrow$ produto vetorial $n_\alpha \times n_\beta=(-3,3,3)$
diretor: $(-1,1,1)$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

$\therefore\ r: \begin{cases} x=3-t \\ y=4+t \\ z=5+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$

$3-t+2(4+t)-3(5+t)=0$
$t=-2$

$\Rightarrow$ Ponto $P=(5,2,3)$