Geometria analítica – **Lista 1**

• Nesta lista o plano tem uma origem *O*. Assim, identificamos qualquer vetor $\overrightarrow{OP}$ com sua extremidade *P* e escrevemos $\overrightarrow{OP} = P$.
• Dados dois pontos *A* e *B*, o vetor de origem *A* e extremidade *B* é $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ e, portanto, escrevemos $\overrightarrow{AB} = B - A$.
• Dados dois pontos *A* e *B*, se *M* é o ponto médio do segmento *AB* então $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. De acordo com a convenção acima, escrevemos $M - A = B - M$, ou seja, $M = \frac{A+B}{2}$.

Vetores

1) São dados dois pontos *A* e *B*. Os pontos *P* e *Q* do segmento *AB* são tais que $AP = PQ = QB$. Determine *P* e *Q* em função de *A* e *B*.

2) São dados dois pontos *A* e *B*. O ponto *P* da reta *AB* é tal que *B* está entre *A* e *P*, e de forma que $BP = 2{,}5AB$. Determine *P* em função de *A* e *B*.

3) São dados dois pontos *A* e *B*. O ponto *M* é médio de *OA*, o ponto *N* é médio de *BM*, e ponto *P* é médio de *NA*. Determine *P* em função de *A* e *B*.

4) São dados os pontos *A*, *B* e *C*. O ponto *D* do lado *AB* é tal que $AD = \frac{1}{3}AB$ e o ponto *P* é médio do segmento *CD*. Determine *P* em função de *A*, *B* e *C*.

5) Seja *G* o baricentro do triângulo *ABC*. Se *M* é o ponto médio do lado *BC* demonstre que $GA = 2\cdot MG$. Use esta propriedade e mostre que:

a) $G = \frac{A+B+C}{3}$ b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$

6) Dado o triângulo *ABC* seja *M* o ponto médio de *AC* e seja *N* o ponto do lado *BC* tal que $CN = \frac{CB}{3}$. Os segmentos *AN* e *BM* cortam-se em *P*. Calcule as razões:

a) $\frac{AP}{AN}$ b) $\frac{BP}{BM}$

Sugestão: adote um dos vértices do triângulo como origem dos vetores.

Vetores e coordenadas

7) Sejam $A = (-2, 1)$ e $B = (1, 3)$. Prolongue o segmento *AB* de um comprimento $BP = 6AB$. Determine o ponto *P*.

8) Sejam $A = (1,\ 2)$ e $B = (9,\ 6)$. Determine o ponto *P* do segmento $\overline{AB}$ tal que
$\frac{AP}{2} = \frac{PB}{3}$.

9) Dados os pontos $A = (1, 2)$, $B = (10, -1)$ e $C = (4, 8)$ determine:

a) o baricentro *G* do triângulo *ABC*.

b) os vetores $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ e $\overrightarrow{GC}$.

10) Dados os pontos $A = (-1,\ 6)$ e $B = (5,\ 4)$, determine o ponto *P* da reta *AB* que tem coordenadas iguais.

11) Dados os pontos $A = (-1,\ 8)$ e $B = (2,\ 6)$, determine o ponto de interseção da reta *AB* com o eixo *X*.

12) No paralelogramo *ABCD*, $A = (1,\ 1)$, $B = (7,\ 3)$ e $C = (9,\ 7)$. Determine o vértice *D*.

13) Dados $A = (3,\ 6)$, $B = (8,\ 0)$, $M = \frac{2A}{3}$, $N = \frac{B}{2}$. As retas *AB* e *MN* cortam-se em *P*. Determine *P*.

Vetores, coordenadas, distâncias

14) No paralelogramo *OABC*, $A = (6,\ 3)$ e $C = (2,\ 4)$. Calcule os comprimentos dos lados e das diagonais.

15) O ponto $P = (6,\ y)$ é equidistante dos pontos $A = (0,\ 1)$ e $B = (4, -1)$. Calcule *y*.

16) Determine a equação satisfeita pelos pontos que são equidistantes de $(1,\ 2)$ e $(5,\ 0)$.

17) Determine a equação da circunferência de centro na origem e raio 1.

18) Determine a equação dos pontos cuja distância ao ponto $(0, 1)$ é igual à sua distância ao eixo *X*.

19) O ponto *P* do eixo *X* é tal que a sua distância à origem é o dobro da sua distância ao ponto $(3,\ 0)$. Fazendo um desenho, determine onde pode estar *P*.

20) Determine a equação dos pontos cuja distância à origem é o dobro da distância ao ponto $(3,\ 0)$.

Demonstrações

21) Os pontos $O = (0,\ 0)$, $A = (a,\ b)$ e $B = (c,\ d)$ são vértices de um triângulo equilátero. Prove que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 2(ac + bd)$.

22) Prove que em qualquer paralelogramo, a soma dos quadrados dos quatro lados é igual à soma dos quadrados das diagonais.
Sugestão: escolha um sistema de coordenadas conveniente.

23) Prove que em qualquer trapézio, o segmento que une os pontos médios das bases passa pelo ponto de interseção das diagonais.

Respostas

1) $P = \dfrac{2A + B}{3}$

2) $P = \dfrac{7B - 5A}{2}$

3) $P = \dfrac{5A + 2B}{8}$

4) $P = \dfrac{2A + B + 3C}{6}$

6) a) 3/5 b) 4/5

7) $P = (19,\ 15)$

8) $P = (\dfrac{21}{5},\ \dfrac{18}{5})$

9) a) $G = (5,\ 3)$ b) $\overrightarrow{GA} = (-4, -1)$, $\overrightarrow{GB} = (5, -4)$, $\overrightarrow{GC} = (-1, 5)$

10) $(\dfrac{17}{4},\ \dfrac{17}{4})$

11) $(11,\ 0)$

12) $D = (3,\ 5)$

13) $P = (-2,\ 12)$

14) $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 3\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{OC}\right| = 2\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{113}$, $\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{17}$

15) 8

16) $2x - y = 5$

17) $x^2 + y^2 = 1$

18) $x^2 - 2y + 1 = 0$

19) (2, 0) ou (6, 0)

20) $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$