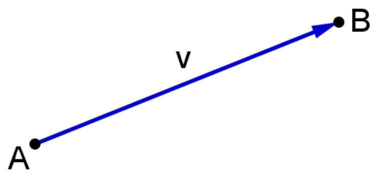
Vetores – 1

Um vetor é um segmento orientado.

$$v = \overrightarrow{AB}$$

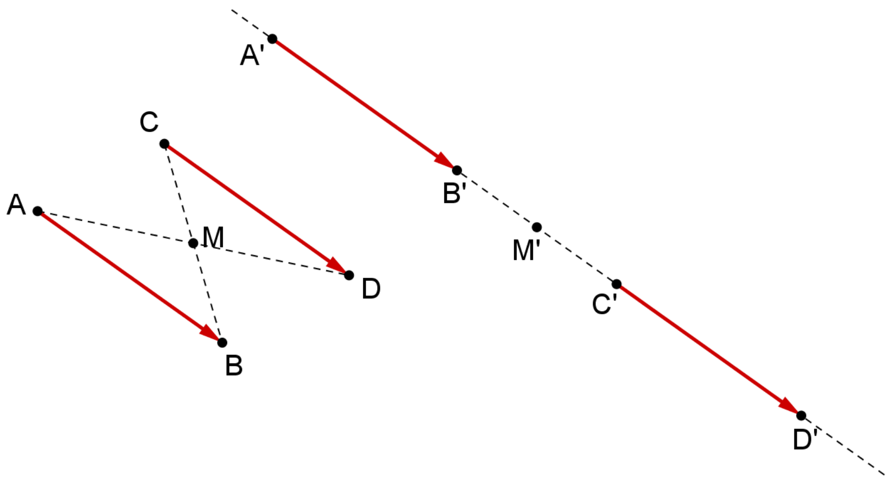


Vetores iguais

Dizemos que dois vetores são iguais (ou que dois segmentos orientados são equipolentes) quando tiveram mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Mesma direção = segmentos contidos na mesma reta ou em retas paralelas.

Uma definição precisa é:

Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais (o que é o mesmo que dizer que os segmentos orientados AB e CD são equipolentes) quando os segmentos AD e BC possuem mesmo ponto médio.



Vetor nulo

Vamos admitir a existência do vetor que não tenha comprimento nem direção, muito menos sentido. O vetor nulo.

$$\overrightarrow{AA} = 0$$

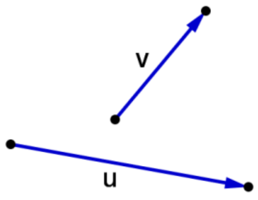
Operações básicas

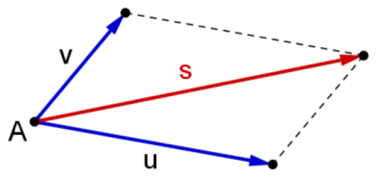
a) Adição

A adição de dois vetores pode ser definida de duas formas equivalentes.

<u>Regra do paralelogramo</u>

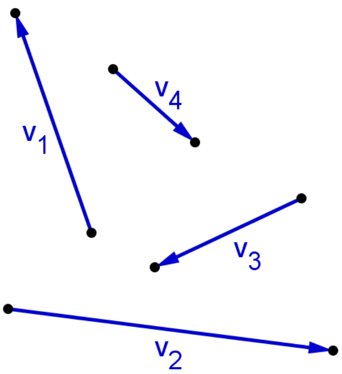
Dados dois vetores u e v assinale um ponto A e, a partir dele, desenhe cópias dos dois vetores dados.

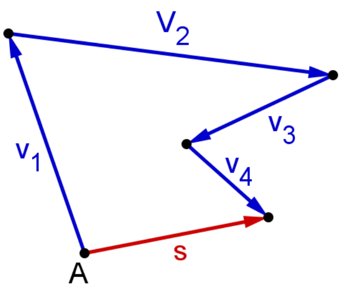




<u>Regra do polígono</u>

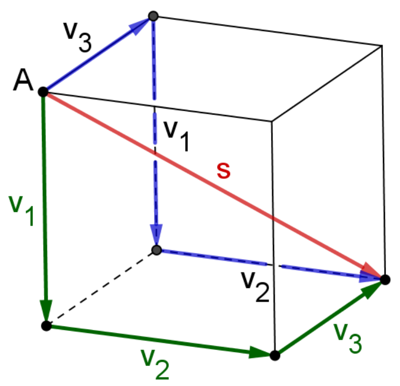
Dados diversos vetores, $v_1, v_2, \cdots, v_n$ assinale um ponto A e, a partir dele desenhe os vetores dados, um após o outro formando uma linha poligonal. O vetor soma é o que liga o ponto A de origem até a extremidade do último vetor.





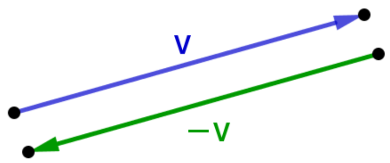
$$s = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

Apesar de estarmos tratando de vetores no plano, a definição de adição vale no espaço (de qualquer dimensão). Por exemplo, no espaço 3D o vetor s é a soma dos vetores v_1, v_2 e v_3.



$$s = v_1 + v_2 + v_3$$
$$s = v_3 + v_1 + v_2$$

Dado um vetor v, o vetor que tem mesmo comprimento, mesma direção, mas sentido contrário ao de v é o seu *inverso aditivo*, representado por $-v$. Naturalmente que a soma de um vetor com seu inverso aditivo é o vetor nulo.



$$v + (-v) = 0$$

Resumindo, para quaisquer vetores u, v e w as propriedades da adição são:

• Comutatividade: $u + v = v + u$

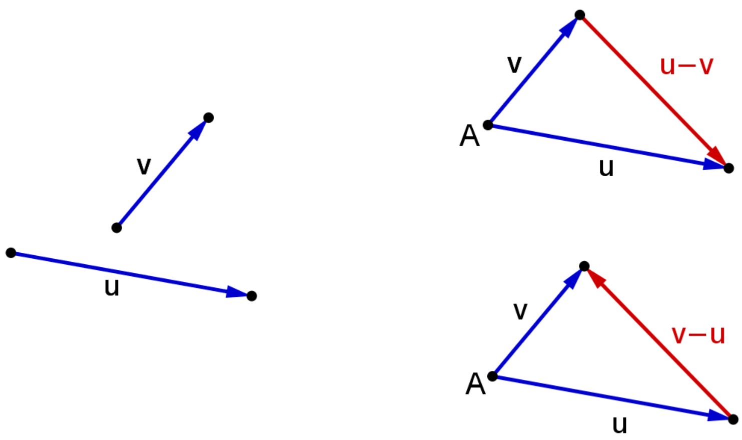
• Associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$

• Elemento neutro: $v + 0 = 0 + v = v$

• Inverso aditivo: $-v + v = v + (-v) = 0$

b) Diferença

Dados dois vetores u e v para visualizar as diferenças $u - v$ e $v - u$ desenhe os dois vetores a partir de um mesmo ponto e complete o triângulo. As duas diferenças possuem sentidos opostos de acordo com as figuras a seguir



c) Multiplicação por número real

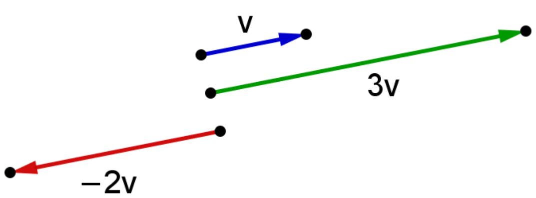
Dado um número real α e um vetor v, definimos o produto αv da seguinte forma:

Se $\alpha = 0$ ou $v = 0$ colocamos $\alpha v = 0$ (vetor nulo).

Se $\alpha > 0$ e $v \neq 0$ então αv é o vetor de mesma direção e sentido que v e cujo comprimento é igual a α vezes o comprimento de v.

Se $\alpha < 0$ e $v \neq 0$ então αv é o vetor de mesma direção que v, sentido contrário ao de v e cujo comprimento é igual a $|\alpha|$ vezes o comprimento de v.

Os exemplos abaixo ilustram a definição.

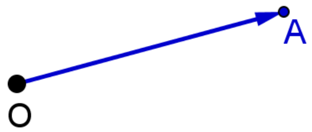


As propriedades dessa operação são:

- Associatividade: $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
- Distributividade: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \;\; \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- Inverso: $(-1)v = -v$

O plano com origem

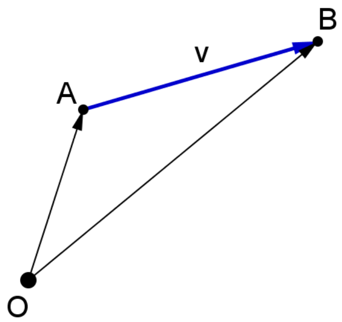
Consideremos no nosso plano um ponto fixo O que chamaremos origem. Dessa forma podemos associar a cada ponto A desse plano o vetor $\overrightarrow{OA}$.



Escrevemos $A = \overrightarrow{OA}$.

Vetor determinado por dois pontos

Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$ em nosso plano com origem O.



Pelas operações temos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

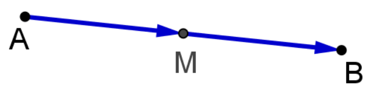
Escrevemos simplesmente:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Escrevendo a relação acima na forma $A + \overrightarrow{AB} = B$ podemos entender o vetor $v = \overrightarrow{AB}$ como o elemento que ***transporta*** o ponto A ao ponto B.

Ponto médio

Considere um segmento AB. Vamos determinar seu ponto médio em função de suas extremidades. Na figura a seguir M é o ponto médio do segmento AB. Dessa forma, os vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{MB}$ são iguais. Temos então:



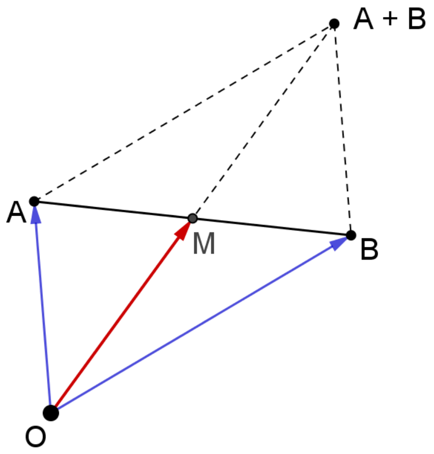
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$$

$$M - A = B - M$$

$$2M = A + B$$

$$M = \frac{A + B}{2}$$

Parece que estamos somando pontos, mas na realidade estamos fazendo operações com vetores. Veja, a seguir, o significado da relação acima.

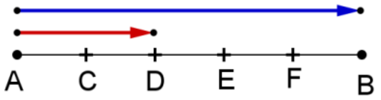


$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

Exercício

O segmento AB está dividido em 5 partes iguais pelos pontos C, D, E, F, nessa ordem. Determine o ponto D em função de A e B.

Solução



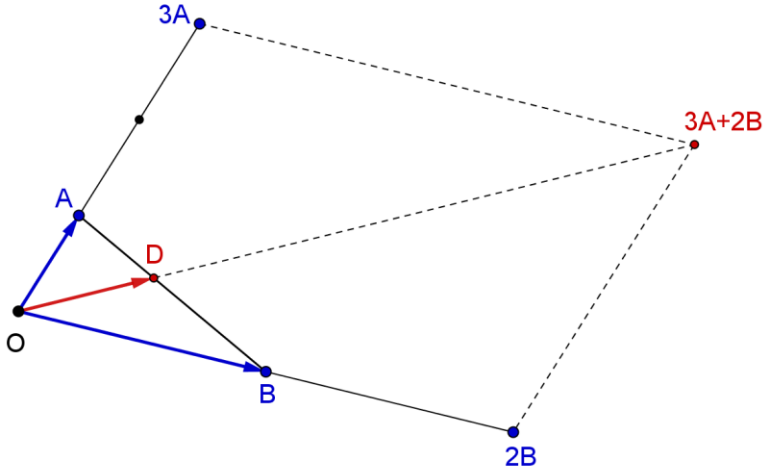
$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$5(D - A) = 2(B - A)$$

$$5D - 5A = 2B - 2A$$

$$5D = 2B + 3A$$

$$D = \frac{3A + 2B}{5}$$



$$D = \frac{3A + 2B}{5}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$$

Problema

Seja $0 < k < 1$. Considere um segmento AB.

Determine o ponto P interior ao segmento AB tal que $\frac{AP}{PB} = k$.