Análise Real - Exercícios

① Seja $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ contínua e localmente constante, isto é, dado $x_0 \in (a,b)$, existe intervalo em torno de x_0 onde f é constante. Mostre que f é constante.

② Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua t.q. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

③ Seja $f: I \to \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade (*): "dados $x, y \in I$ quaisquer, o intervalo entre $f(x)$ e $f(y)$ está na imagem de f." Se, para cada $c \in \mathbb{R}$, existe somente um número finito de valores $x \in I$ t.q. $f(x) = c$, mostre que f é contínua.

Dê um exemplo de função com a propriedade (*) mas que não é contínua

④ Sejam $f: I \to J$ e $g: J \to \mathbb{R}$ funções contínuas, onde I, J são intervalos. Se f é contínua em $a \in I$ e g é contínua em $f(a)$, mostre que $g \circ f$ é contínua em a.

⑤ Sejam $f, g: I \to \mathbb{R}$ contínuas em $a \in I$. Suponha que em cada intervalo contendo a existem x, y t.q. $f(x) < g(x)$ e $f(y) > g(y)$. Mostre que $f(a) = g(a)$

⑥ Seja $f: I \to \mathbb{R}$ limitada, I intervalo. Dado $c \in I$, definimos para cada $\varepsilon > 0$:

$$M(\varepsilon) = \sup\{f(x);\ x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)\}$$
$$m(\varepsilon) = \inf\{f(x);\ x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)\}$$

Mostre que existe (a oscilação de f em c)

$$\operatorname{osc}(f,c) = \lim_{\varepsilon \to 0} M(\varepsilon) - m(\varepsilon)$$

e que f é contínua em c se e somente se $\operatorname{osc}(f,c) = 0$