Exercícios

① Analise a convergência das seguintes sequências:

(i) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(ii) $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$

(iii) $x_0 = 1, \ x_1 = 1, \quad \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}$

(IV) a_1, a_2 dados,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}, \quad n \geq 2$$

② Seja (b_n) crescente. Se houver subsequência convergente, então (b_n) é convergente.

Analise o caso (b_n) decrescente

③ Seja (x_n) sequência

Se $\underline{a}$ é valor de aderência, mostre que para todo $\varepsilon > 0$ e todo $K \in \mathbb{N}$ existe $n > K$ t.q. $|x_n - a| < \varepsilon$.

Analise a recíproca.

① i) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Como $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

Analisando $|a_n - 0|$: $|a_n - 0| = \dfrac{1}{|\sqrt{n+1} + \sqrt{n}|} < \dfrac{1}{n}$

Ou seja, dado $\varepsilon = 1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, podemos ter um erro $\varepsilon > 0$ pequeno o quanto quisermos.
Portanto, dado $N \in \mathbb{N} \mid n > N$ temos que $\exists \varepsilon \mid |a_n - 0| < \varepsilon$.
Logo, $\lim a_n = 0$ e a_n é convergente.

ii) $x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$.

Suponha L o limite de x_n. Logo, satisfazem $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$ e $L = \sqrt{1+L}$. Fazendo:

$$|x_{n+1} - L| = |\sqrt{1+x_n} - \sqrt{1+L}| = |x_n - L| \cdot \frac{1}{|\sqrt{1+x_n} + \sqrt{1+L}|}$$

Como $x_n, L > 1$, temos

$$|x_n - L| \cdot \frac{1}{|\sqrt{1+x_n} + \sqrt{1+L}|} < |x_n - L| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+L}} < \frac{1}{2}|x_n - L|$$

Como $|x_{n+1} - L| < \frac{1}{2}|x_n - L|$ e $L > 0$, então $0 < 1/2 < 1$. Pela propriedade:

$$\lim (x_{n+1} - L) = 0 \qquad e \quad \lim x_{n+1} = L.$$

Portanto, x_n é convergente.

iii) $x_0 = 1, x_1 = 1 \qquad \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}$

$$x_{n+2} = \frac{x_n \cdot x_{n+1}}{x_{n+1} + x_n}$$

$$\frac{x_{n+3}}{x_{n+2}} = \frac{x_{n+1} \cdot \cancel{x_{n+2}}}{(x_{n+1} + x_{n+2})\cancel{x_{n+2}}} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+1} + x_{n+2}}$$

Como $x_{n+1} + x_{n+2} > x_{n+1}$, então $\frac{x_{n+3}}{x_{n+2}} < 1$.

pelo teste de D'Alembert (com a $x_n > 0$), x_n é convergente

iv) a_1, a_2 dados e $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$

1) sequência de Cauchy ou $a_1 < \frac{a_1 + a_2}{2} < a_2$.

2) Seja a sequência $x_n = (1/2, 2/3, 3/4, \dots, k/(k+1), \dots, 1, 2, 3, \dots)$.

Temos que x_n é crescente (ou seja, $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$). Além disso, $\exists\, x_{n_k}$ convergente. Contudo x_n não é limitada superiormente e, portanto, não é convergente.

Seja $x_{n_k} = \frac{k}{k+1}$. Fazendo $|x_{n_{k+1}} - 1|$ e $|x_{n_k} - 1|$ temos:

$$|x_{n_{k+1}} - 1| = \frac{1}{k+2} < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} \quad \text{(já que } x_{n_k} > 0\text{)}$$

$$|x_{n_k} - 1| = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$$

Como, por transitividade $|x_{n_{k+1}} - 1| < \frac{1}{k} |x_{n_k} - 1|$

então $\lim (x_{n_{k+1}} - 1) = 0$ e $\lim x_{n_{k+1}} = \lim x_{n_k} = 1$.

Para o caso decrescente é análogo (só considerar a sequência $y_n = -x_n$).

③ Considere o conjunto X tal que $X = \{x_i;\ \forall r = \{1, \dots, n\}\}$ e seja "a" ponto de aderência de X.

Teorema: Um ponto $\underline{a}$ é aderente se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X.

Dem:

($\Rightarrow$) Seja $\underline{a}$ aderente a X. Então $a = \lim x_n$ onde $x_n \in X\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dada uma vizinhança $V \mid a \in V$, temos que $x_n \in V$ para todo n suficientemente grande e $V \cap X \neq \emptyset$, pois $|x_n - a| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

($\Leftarrow$) Se toda vizinhança de a contém pontos de X, podemos escolher em $V = (a - 1/n, a + 1/n)$ $n \in \mathbb{N}$, um $x_n \in X$. Portanto, $|x_n - a| < 1/n$ e $\lim x_n = a$ para $n \in \mathbb{N}$. Logo, a é ponto de aderência de X.