# Fundamentos de Matemática
## Lista 6 - 28/05/2024

A consulta é livre, mas você deve entregar suas soluções escritas de próprio punho e mencionar as fontes de consulta.

**120.** Sendo $n$ inteiro, determine se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. Justifique.

(a) $n = 2$ somente se $n^2 - n - 2 = 0$.
(b) $n = 2$ se $n^2 - n - 2 = 0$.
(c) $n = 2$ é suficiente para $n^2 - n - 2 = 0$.
(d) $n = 2$ é necessário para $n^2 - n - 2 = 0$.
(e) $n^2 - n - 2 = 0 \implies (n = 2 \text{ e } n = -1)$.
(f) $n^2 - n - 2 = 0 \implies (n = 2 \text{ ou } n = -1)$.

**121.** Considere as seguintes (aparentes) equivalências lógicas:

$$x = 1 \iff$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff$$
$$x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \iff$$
$$x^2 - 1 = 0 \iff$$
$$x = \pm 1$$

Onde está o erro?

**122.** Demonstre que $n^3 - n$ é múltiplo de 6 para todo natural $n$.

**123.** Prove que $n^7 - n$ é múltiplo de 7 para todo natural $n$.

**124.** Prove que para todo natural $n$ o número $4^n + 15n - 1$ é divisível por 9.

**125.** Qual é o maior inteiro positivo $n$ tal que os restos das divisões de $154$, $238$ e $334$ por n são iguais?

**126.** Hoje é sábado. Que dia da semana será daqui a $99$ dias?

**127.** Qual é o dígito das unidades do número $3^{1998}$? E o das centenas?

**128.** Prove que as expressões $2x + 3y$ e $9x + 5y$ são divisíveis por $17$ para o mesmo conjunto de valores inteiros de $x$ e $y$.

**129.** Determine todos os valores inteiros de $x$ tais que $\dfrac{15x^2 - 11x + 37}{3x + 2}$ é inteiro.

**130.** Encontre todas as soluções inteiras positivas para as equações

(a) $x^2 - y^2 = 31$;
(b) $x^2 - y^2 = 303$;
(c) $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$;
(d) $xy - x - y - 6 = 0$;
(e) $xy - 3x - 2y - 11 = 0$.
(f) $x^2 + y^2 = 2023$.

**131.** Determine todos os primos que são soma e diferença de dois primos.

**132.** Prove que a fração $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$ é irredutível para todo inteiro positivo $n$.

**133.** Se $n$ é um inteiro positivo tal que $\frac{n(n+1)}{3}$ é inteiro e quadrado perfeito, prove que $n$ é múltiplo de 3 e que tanto $n + 1$ como $\frac{n}{3}$ são quadrados perfeitos.

**134.** Os números na sequência $101, 104, 109, 116, \ldots$ são gerados pela fórmula $a_n = 100 + n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Sendo $d_n = (a_n, a_{n+1})$, qual é o valor máximo assumido por $d_n$?

**135.** Prove que, para $x$ e $y$ inteiros, $x + 4y$ é múltiplo de 13 se, e somente se, $4x + 3y$ é múltiplo de 13.

**136.** Seja $m$ o máximo divisor comum entre os números 2 231 e 989. Encontre inteiros $\alpha$ e $\beta$ tais que $2\,231\alpha + 989\beta = m$.

**137.** Resolva as seguintes equações em congruências

(a) $2x \equiv 1 \pmod{17}$
(b) $3x \equiv 6 \pmod{18}$
(c) $25x \equiv 15 \pmod{29}$
(d) $36x \equiv 8 \pmod{102}$
(e) $14x \equiv 36 \pmod{18}$

**138.** Encontre todas as soluções inteiras das equações

(a) $48x + 7y = 17$
(b) $9x + 16y = 35$
(c) $5x - 53y = 17$
(d) $75x - 131y = 6$
(e) $12x + 25y = 331$

**139.** Resolva o sistema de congruências $\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{9} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$

**140.** Encontre todos os inteiros positivos $a, b, c$, com $a \leq b \leq c$, tais que $a + b + c = abc$.

**141.** Dado um inteiro $a_0 > 1$, define-se a sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ da seguinte maneira: para cada $k \geq 0$, $a_{k+1}$ é o menor inteiro maior que $a_k$ tal que $\operatorname{mdc}(a_{k+1}, a_0 a_1 \cdots a_k) = 1$. Determine todos os valores de $a_0$ para os quais todos os termos da sequência são primos ou potências de primos.

**142.** Determine todos os pares de inteiros $(x, y)$ tais que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**143.** Determine o último dígito do número $\left\lfloor \frac{10^{1992}}{10^{83}+7} \right\rfloor$.

**144.** Prove que a seqüência $11, 111, 1111, \ldots$ não contém quadrados.

**145.** Seja $p$ um número primo e seja $\mathcal{U}(p)$ o conjunto das classes de $\mathbb{Z}_p$ que têm inverso multiplicativo (invertíveis), ou seja, $\mathcal{U}(p) = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}\right\} \subset \mathbb{Z}_p$.

(a) Prove que $\overline{1}$ e $-\overline{1}$ são os únicos elementos de $\mathcal{U}(p)$ que são inversos de si mesmos, ou seja, são as únicas soluções da equação $x^2 = 1$ em $\mathbb{Z}_p$.

(b) Conclua que os elementos de $\mathcal{U}(p)$ diferentes de $\pm\overline{1}$ podem ser agrupados em pares $\left(\overline{a}, \overline{b}\right)$ tais que $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$.

(c) Prove que o produto de todos os elementos de $\mathcal{U}(p)$ é igual a $-\overline{1}$, ou seja, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ (este resultado é conhecido como *Teorema de Wilson*).

(d) Prove que

$$\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

(e) Prove que se $p \equiv 1 \pmod{4}$, então existe um inteiro $x$ tal que $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$.