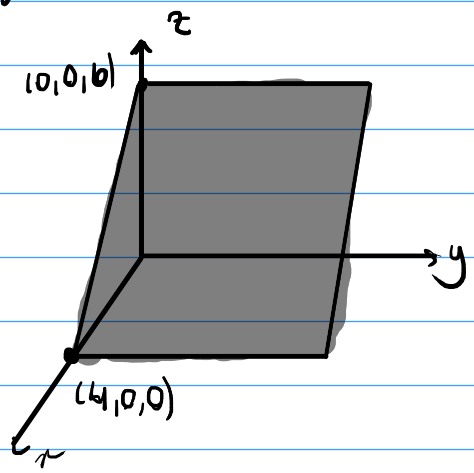
1) Faça um desenho mostrando do plano $3x+2z=12$.

Interseções com os eixos:

Eixo x: $(4,0,0)$

Eixo y: Não há

Eixo z: $(0,0,6)$



2) Sendo $A=(-1, 3, 0)$ e $B=(3, 1, 4)$ determine a equação do plano mediador do segmento AB.

$\frac{A+B}{2} = (1,2,2)$.

$\vec{AB} = (4,-2,4) \to (2,-1,2)$. (Normal ao plano)

Plano: $2x-y+2z=d$

$2.1-2+2.2=d=4$

$$\boxed{\therefore \text{ Plano: } 2x-y+2z=4}$$

//

3) Determine a equação do plano que contém os pontos $(1,\ 0,\ 1)$, $(-1,\ -2,\ 3)$ e $(2,\ 3,\ 1)$.

$\vec{u} = (-2, -2, 2) \Rightarrow (-1, -1, 1)$

$\vec{v} = (1, 3, 0)$

$\vec{u} \times \vec{v} \Rightarrow - \begin{Bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{Bmatrix} = (-3, 1, -2)$ vetor normal ao plano

$-3x + y - 2z = d$

$-3 - 2 = d = -5$

$\Rightarrow -3x + y - 2z = -5$

$\boxed{3x - y + 2z = 5}$

4) Determine a equação do plano que contém os pontos $(1,\ -2,\ 1)$, $(2,\ 0,\ 3)$ e $(3,\ 2,\ 6)$.

Mesma coisa:

$\vec{u} = (1, 2, 2)$

$\vec{v} = (2, 4, 5)$

$\vec{u} \times \vec{v} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 \end{Bmatrix} = (2, -1, 0)$

vetor normal ao plano

$2x - y = d$ $\qquad 2 + 2 = d$

$\boxed{2x - y = 4}$

5) São dados, $\alpha = \{(x, y, z)\ ;\ x - 2y + 4z = -1\}$ e $r = \{(-1+2t,\ 3t,\ 2-t)\ ; t \in \mathbb{R}\}$. Determine $r \cap \alpha$.

$\alpha: x - 2y + 4z = -1$
$r: \{(-1+2t, 3t, 2-t)\}$

$\alpha \cap r \Rightarrow (-1+2t) - 2\cdot 3t + 4(2-t) = -1$
$-\cancel{1} + 2t - 6t + 8 - 4t = -\cancel{1}$
$t = 1$

$\boxed{\text{Ponto: } (1, 3, 1)}$ //.

6) Determine k para que a reta $r = \{(-8+2t,\ 5+t,\ -2+kt)\ ; t \in \mathbb{R}\}$ seja paralela ao plano $3x + 2y - z = 0$.

diretor de r: $(2, 1, k)$
normal do plano: $(3, 2, -1)$

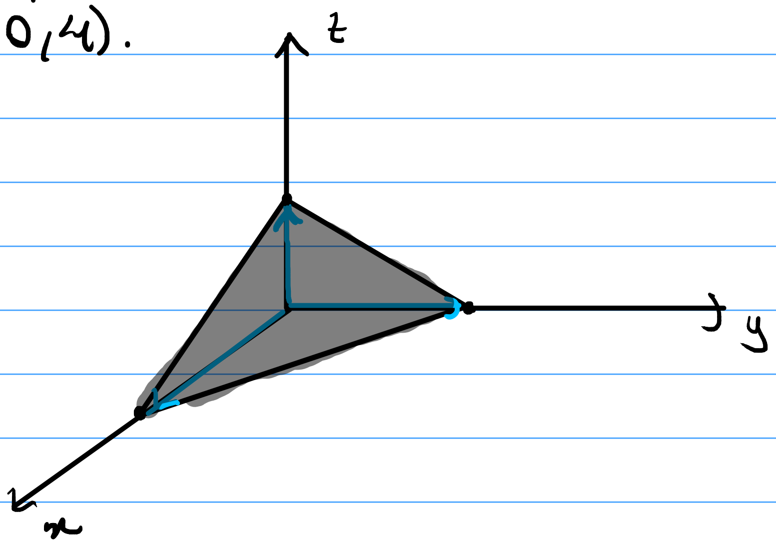
são perpendiculares:

$2.3 + 2.1 - k.1 = 0$
$\boxed{k = 8}$ //

7) O plano $3x+4y+6z=24$ e os planos XY, YZ e ZX delimitam um tetraedro. Determine seu volume.

Interseção do plano com os eixos

$$\begin{cases} x:(8,0,0) \\ y:(0,6,0) \\ z:(0,0,4). \end{cases}$$



$\vec{u}=(8,0,0)$; $\vec{v}=(0,6,0)$; $\vec{w}=(0,0,4)$

$$\boxed{V=\frac{1}{6}\det[u,v,w]} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 8 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right| = 8\cdot 6\cdot 4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$= 8\cdot 6\cdot 4$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 6\cdot 4 = \boxed{32}$$

8) São dados os pontos $A = (1,\ 2,\ 0)$ e $B = (3,\ 1,\ 3)$. Determine o ponto onde a reta AB intersecta o plano $2x + 4y - z = 1$.

Reta AB: $\vec{AB} = (2, -1, 3)$.

Reta: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases} \Rightarrow \{(1+2t, 2-t, 3t)\}$.

Substituindo no plano:

$$2(1+2t) + 4(2-t) - 3t = 1$$
$$2 + \cancel{4t} + 8 - \cancel{4t} - 3t = 1$$
$$9 = 3t \Rightarrow \boxed{t = 3}, \quad \boxed{\text{Ponto} = (7, -1, 9)}.$$

9) Determine a equação do plano que contém o ponto $P = (4, -2, 3)$ e a reta r definida pelas equações $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4t - 1 \\ z = t - 2 \end{cases}$

Vetor diretor da reta: $(2, 4, 1)$

Ponto da reta: $(1, 3, -1) = Q$

Fazendo $\vec{QP} = (3, -5, 4)$.

Agora fazendo $(3, -5, 4) \times (2, 4, 1)$

$$= \begin{matrix} 3 & -5 & 4 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{matrix} = (-21, 5, 22) \text{ (vetor normal)}.$$

Plano: $-21x + 5y + 22z = d$

Substituindo P: $\boxed{21x - 5y - 22z = 28}$.

10) Determine os pontos onde a reta $r = \{(3-2t,\ -1+t,\ 2+t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ intersecta a esfera de centro $(1,\ 3,\ 0)$ e raio $2\sqrt{6}$.

Esfera: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 24$

Substituindo: $(2-2t)^2 + (t-4)^2 + (t+2)^2 = 24$

$\cancel{4} - 8t + 4t^2 + t^2 - 8t + \cancel{16} + t^2 + 4t + \cancel{4} = \cancel{24}$

$6t^2 - 12t = 0$

$t(t-2) = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow\ t = 0 &\Rightarrow (3, -1, 2) \\ t = 2 &\Rightarrow (-1, 1, 4) \end{aligned}}$$

11) Determine o raio da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 10z - 11 = 0$.

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 10z + 25) = 4 + 9 + 25 + 11$

$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+5)^2 = (7)^2$

$$\boxed{\text{Centro: } (2, 3, -5) \qquad \text{raio: } 7}$$

12) O ponto $P = (3,\ 4,\ k)$ pertence à esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 8 = 0$. Determine k.

Esfera: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 14$

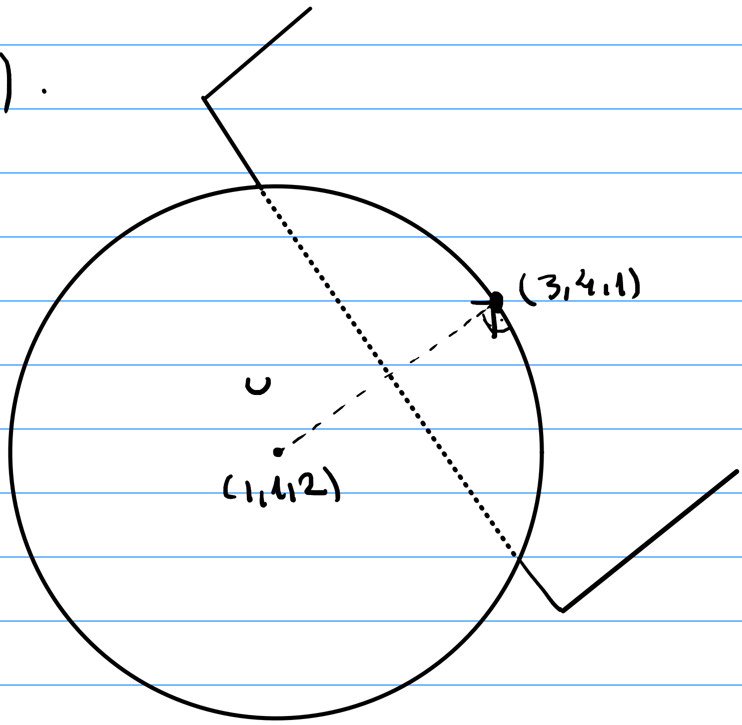
Substituindo: $(2)^2 + (3)^2 + (k-2)^2 = 14$

$(k-2)^2 = 1$

$\boxed{k = 3}$ ou $\boxed{k = 1}$

13) Para o menor valor de k encontrado no exercício anterior, determine a equação do plano tangente à esfera no ponto P.

$P = (3,4,1)$.



$\vec{v} = (2,3,-1)$ (vetor normal ao plano)

Plano: $2x + 3y - z = d$

Substituindo P: $\boxed{2x + 3y - z = 17}$

14) Determine dois pontos distintos que estejam na interseção dos planos $x + y + z = 3$ e $2x - y - 6z = 0$.

Faça $z = t$ (parâmetro)

$$\begin{cases} 2x - y = 6t \\ x + y = 3 - t \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3+5t}{3} \,;\; y = \frac{6-8t}{3} \,;\; z = t}$$

$$\boxed{\text{Pontos: } (1,2,0) \text{ e } (6,-6,3)}$$ //

15) Encontre dois planos diferentes que passem pelos pontos $(-2,\ 1,\ 5)$ e $(4,\ 3,\ 1)$.

I) Pontos $(-2,1,5)$, $(4,3,1)$ e $(0,0,0)$.
II) Pontos $(-2,1,5)$, $(4,3,1)$ e $(1,1,1)$.

I) $\vec{u} = (4,3,1)$ $\Rightarrow$ $\vec{u} \times \vec{v} = \left\{\begin{array}{cccccc} 4 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right\}$
$\vec{v} = (-2,1,5)$.

$= (7,-22,10)$

$$\boxed{\text{Plano: } 7x - 22y + 10z = 0}$$ //.

II) $\vec{u} = (3,2,0)$ $\quad \vec{u} \times \vec{v} = \left\{\begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right\}$
$\vec{v} = (-3,0,4)$

$(8,-12,6) = (4,-6,3)$

$$\boxed{\text{Plano: } 4x - 6y + 3z = 1}$$ //.

16) Verifique se os vetores $u = (5, 7, 1)$, $v = (4, 2, -3)$ e $w = (-1, 1, 2)$ são coplanares ou não.

$$\det[u,v,w] = \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 7 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right|$$

$$= 20 + 21 + 4 + 2 + 15 - 56$$
$$= 47 + 15 - 56 = \boxed{6}$$

$\boxed{\text{Não são}}$

17) Determine o cosseno do ângulo entre os planos $x + y - z = 2$ e $2x + y + z = 0$.

vetores normais: $(1,1,-1)$, $(2,1,1)$.

$$\cos\theta = \frac{(1,1,-1)\,(2,1,1)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2 + \cancel{1 - 1}}{3\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

18) Determine o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ cujo valor de z é máximo.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$$

Pontos: $(1, -2, 3 \pm 4)$

Mas $(1,-2,-1)$ Não está na esfera:

$\boxed{\text{Ponto } (1,-2,7)}$

19) Determine a equação da esfera de centro $C = (1, 1, 1)$, tangente ao plano $x - 2y + 2z + 8 = 0$.

Vetor normal ao plano: $(1, -2, 2)$.

$P \in$ plano.

$$\vec{CP} = \alpha(1, -2, 2)$$
$$P = (1,1,1) + \alpha(1,-2,2) = (1+\alpha,\ 1-2\alpha,\ 1+2\alpha)$$

$$\Rightarrow (1+\alpha) - 2(1-2\alpha) + 2(1+2\alpha) + 8 = 0$$
$$1 + \alpha - \cancel{2} + 4\alpha + \cancel{2} + 4\alpha + 8 = 0$$
$$9\alpha = -9$$
$$\boxed{\alpha = -1}$$

$$\vec{CP} = (-1, 2, -2)$$
$$|\vec{CP}| = \sqrt{1+4+4} = 3 \text{ (raio)}$$

$$\boxed{\text{Esfera: } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9}$$

20) A reta r é a interseção dos planos $2x - y = 1$ e $3x - z = 2$. A reta s é definida por $x = y = z$. Essas retas possuem algum ponto comum?

$\boxed{x = t}$. $\quad z = 3t - 2$, $\quad y = 2t - 1$ $\quad \Rightarrow \boxed{\text{reta } r: \{(t,\ 2t-1,\ 3t-2)\}}$

$$\boxed{\text{reta } s: \{(k, k, k)\}}$$

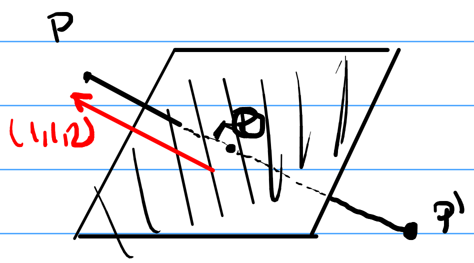
Faça $t = k$. $\therefore$ $2t - 1 = k$

e $\boxed{t = k = 1}$

$\boxed{\text{Sim, possuem. Ponto } (1,1,1)}$

21) Determine o simétrico do ponto $P = (-2, -3, 1)$ em relação ao plano $x + y + 2z = 3$.

Vetor normal ao plano: $(1,1,2)$.



$\boxed{P' = 2O - P}$

$O = P + \alpha(1,1,2) = (-2+\alpha, -3+\alpha, 1+2\alpha)$.

substituindo: $(-2+\alpha) + (-3+\alpha) + 2(1+2\alpha) = 3$

$\boxed{\alpha = 1}$

$\boxed{O = (-1, -2, 3)}$

$P' = (-2, -4, 6) - (-2, -3, 1) \boxed{= (0, -1, 5)}$.

22) Seja $r = \{(2t+1,\ -2t+1,\ t+1)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$. Determine a distância do ponto $P = (2,-1,1)$ à reta r.

$Q \in r \Rightarrow Q = (2t+1, 1-2t, t+1)$.

Vetor diretor da reta: $(2,-2,1)$.

$\vec{PQ} = (2t-1, 2-2t, t)$

$(2t-1, 2-2t, t) \perp (2,-2,1)$

$\Rightarrow 2(2t-1) + (-2)(2-2t) + t \cdot 1 = 0$

$4t - 2 - 4 + 4t + t = 0$

$9t = 6$

$\boxed{t = 2/3}$.

$\vec{PQ} = (1/3, 2/3, 2/3) \Rightarrow \boxed{|\vec{PQ}| = 1}$

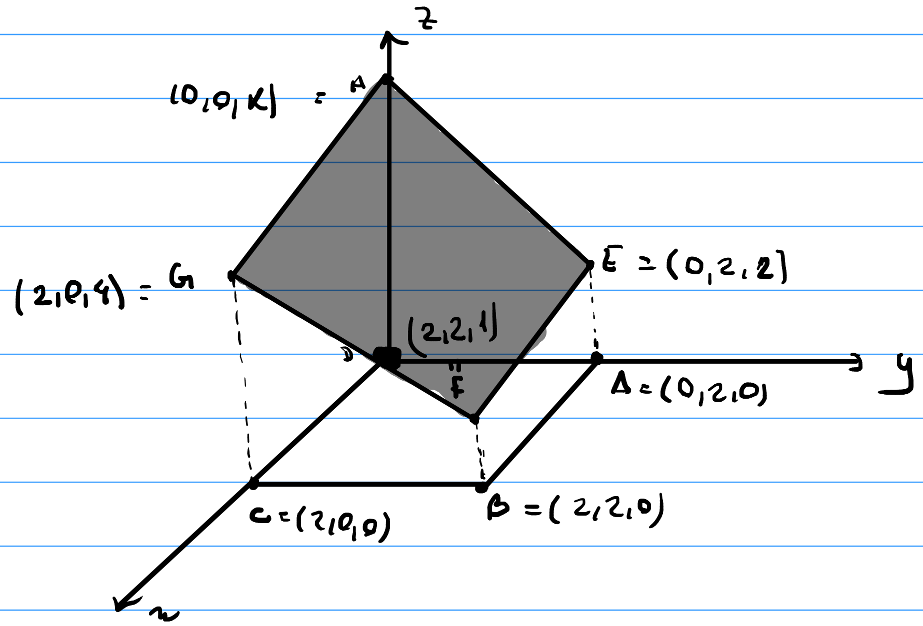
23) Considere o quadrado *ABCD* de lado 2. De um mesmo lado do plano do quadrado considere os segmentos *AE*, *BF*, *CG* e *DH*, perpendiculares a esse plano. Sabe-se que $AE = 2$, $BF = 1$, $CG = 4$ e que os quatro pontos *E*, *F*, *G* e *H* são coplanares. Calcule:

a) o comprimento de *DH*.

b) a área do quadrilátero *EFGH*.

c) o cosseno do ângulo entre os planos *ABCD* e *EFGH*.

a) Vamos fazer um sistema ordenado conveniente:



Equação do plano: $\vec{FG} = (0,-2,3)$

$\vec{FE} = (-2,0,1)$

$\vec{FG} \times \vec{FE} \Rightarrow$ $\begin{matrix} 0 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{matrix} = (-2,-6,-4)$ $\boxed{= (1,3,2)}$.

$\boxed{\Rightarrow x + 3y + 2z = 10}$

$\Rightarrow 0 + 0 + 2 \cdot K = 10$

$\boxed{K = 5}$.

$\therefore \boxed{\overline{DH} = 5}$

b) EFGH, pela configuração do problema e pelas medidas dos lados é um paralelogramo

$$\text{Área} = |\vec{FG} \times \vec{FE}| = 2|(1,3,2)| = \boxed{2\sqrt{14}}$$

Lembre-se $\vec{FG} \times \vec{FE} = (-2,-6,-4)$, a transformação para $(1,3,2)$ foi uma facilitação para achar a equação do plano.

c) Plano ABCD: vetor normal: $(0,0,1)$
Plano EFGH: vetor normal: $(1,3,2)$

$$\cos\theta = \frac{(0,0,1)\cdot(1,3,2)}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+9+4}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{7}}$$