Fundamentos de Matemática
Lista 3 – 04/04/2024

A consulta é livre, mas você deve entregar suas soluções escritas de próprio punho e mencionar as fontes de consulta.

63. Em uma progressão aritmética de 17 termos, o sétimo termo é igual a 13 e o décimo primeiro termo é igual a 27. A soma dos termos dessa progressão é igual a

64. A soma $\sum_{k=1}^{2019} \dfrac{1}{k(k+1)}$ é igual a

65. A soma $\sum_{k=1}^{100} k(k-2)$ é igual a

66. A sequência (a_k) é tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = (n^2+n+1)3^n + c,$$

para todo inteiro positivo n, sendo c uma constante desconhecida. Então a_k é igual a

67. O somatório $\displaystyle\sum_{j=1}^{18}\sum_{k=1}^{j}(jk-k)$ é igual a

68. O somatório

$$\sum_{i=0}^{19}\sum_{j=2}^{16}\sum_{k=5}^{24} j$$

é igual a

69. Calcule as seguintes somas:

(a) $1+2+3+\cdots+n$

(b) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

(c) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

(d) $1+3+5+\cdots+2n-1$

(e) $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}$ (se x é diferente de 1)

(f) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(g) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(h) $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2$

(i) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(j) $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$

70. Calcule as seguintes somas:

(a) $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}$

(b) $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}2^k$

(c) $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}(-1)^k$

(d) $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k}$

(e) $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k}2^k$

(f) $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k}(-1)^k$

(g) $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}^2$

71. Observe o padrão dos números dispostos nos quadriculados 3×3 e 4×4 a seguir. Seguindo o mesmo padrão, qual será a soma dos números no quadriculado 10×10? E em um quadrado $n \times n$?

1	2	3
1	2	2
1	1	1

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

72. Evaluate the sum

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \cdots$$

(The symbol $[x]$ denotes the greatest integer not exceeding x.)

73. Prove that the number $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ is not divisible by 5 for any integer $n \geq 0$.

74. Let m and n be positive integers such that

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Prove that m is divisible by 1979.

75. Calcule

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}.$$