Álgebra Linear 06/10/24

Rushadão Simulados

Simulado 1

Problema 2

Sejam

- Y uma matriz $n \times k$ e
- U uma matriz $k \times k$ inversível;
- R uma matriz $k \times n$.
- I a matriz identidade $n \times n$;

Suponha que a matriz $U^{-1} + RY$ é inversível. Mostre que

$$(YUR + I)^{-1} = I - Y\left(U^{-1} + RY\right)^{-1} R.$$

$$(YUR + I)(I - Y(U^{-1} + RY)^{-1}R)$$

$$YUR + YURY(U^{-1} + RY)R + I - Y(U^{-1} + RY)^{-1}R$$

$$(I - Y(U^{-1} + RY)^{-1}R)(YUR + I)$$

$$YUR + I - Y(U^{-1} + RY)^{-1}RYUR - Y(U^{-1} + RY)^{-1}R$$

$N = A - UW^{-1}V$ é dada por $N^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$

$$N = YUR + I \longrightarrow \underset{n\times n}{A = I} \quad \underset{n\times k}{U = -Y} \quad \underset{k\times n}{V = R} \quad \underset{k\times k}{W^{-1} = U}$$

Inversa é

$$\underbrace{N^{-1} = I - Y(U^{-1} + RY)^{-1}R}$$

Problema 3

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2023 & 1 & 3158 \\ 2024 & 2 & 2272 \\ 2025 & 4 & 498 \end{pmatrix} \text{ e } B = [A\ A] = \begin{pmatrix} 2023 & 1 & 3158 & 2023 & 1 & 3158 \\ 2024 & 2 & 2272 & 2024 & 2 & 2272 \\ 2025 & 4 & 498 & 2025 & 4 & 498 \end{pmatrix}.$$

(a) Encontre dois vetores que estão no núcleo da matriz B.

(b) Sabendo que o núcleo de A é

$$N(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 888 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \right\},$$

encontre o núcleo de B.

a) $B = [A\,A]$, $x \in N(B) \Leftrightarrow Bx = 0$

$$[AA]\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [Ax\ \ Ax] = 0$$

$$N(B) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix};\ x \in N(A) \right\}$$

b) $$N(B) = \left\{ \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 888 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha \\ \begin{pmatrix} -2 \\ 888 \\ 1 \end{pmatrix}\beta \end{bmatrix};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Problema 4

Seja u um vetor de $\mathbb{R}^2$. Seja $A = uu^T$. Prove que $Ax = b$ tem solução se, e somente se, b for múltiplo de u.

$Ax = b \Leftrightarrow b = \alpha u$

$$Ax = b \Leftrightarrow u\underbrace{u^T x}_{\in\mathbb{R}} = b \Leftrightarrow \boxed{u\alpha = b}$$

SIMULADO 2

Problema 2

Sejam A e B matrizes reais 3×3 invertíveis. Mostre que se

$$\begin{cases} (AB)^{2022} = A^{2022}B^{2022} & \rightarrow B^{-2022}\ A^{-2022} \\ (AB)^{2023} = A^{2023}B^{2023} & \rightarrow B^{-2023}\ A^{-2023} \\ (AB)^{2024} = A^{2024}B^{2024}, & \rightarrow B^{-2024}\ A^{-2024} \end{cases}$$

então $AB = BA$.

$(AB)^{2024}\cdot(AB)^{-2023} = A^{2024}\cdot B^{2024}\cdot B^{-2023}\cdot A^{-2023}$

$\Rightarrow A^{2024}\cdot B\cdot A^{-2023} \rightarrow$ PARA ISSO SER IGUAL A AB

TEMOS QUE $A^{2023}\cdot A\cdot B\cdot A^{-2023}$, SE $AB = BA$,

PODEMOS FAZER $A^{2023}\cdot B\cdot A^{-2022}$, ASSIM PODEMOS

CONTINUAR ATÉ: $A^{2}BA^{-1} \Leftrightarrow \boxed{AB}$, OU SEJA, PARA

A PRIMEIRA IGUALDADE SER VERDADEIRA, $AB = BA$

Problema 3

Dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tais que $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = \mathbf{v}^T\mathbf{v}$, é definida a matriz

$$H = I - 2\frac{(\mathbf{u}-\mathbf{v})(\mathbf{u}-\mathbf{v})^T}{(\mathbf{u}-\mathbf{v})^T(\mathbf{u}-\mathbf{v})}.$$

(a) Mostre que $H^TH = I$.

(b) Mostre que $H\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

a) $$H^T = I - \left(2\cdot\frac{(u-v)(u-v)^T}{\underbrace{(u-v)^T(u-v)}_{\mathbb{R}}}\right)^T = I - 2\cdot\frac{(u-v)(u-v)^T}{(u-v)^T(u-v)}$$

$$\left(I - 2\cdot\frac{(u-v)(u-v)^T}{(u-v)^T(u-v)}\right)\left(I - 2\cdot\frac{(u-v)(u-v)^T}{(u-v)^T(u-v)}\right)$$

$$I - 2\cdot\cancel{\frac{(u-v)(u-v)^T}{(u-v)^T(u-v)}} - 2\cdot\cancel{\frac{(u-v)(u-v)^T}{(u-v)^T(u-v)}} + 4\cdot\cancel{\frac{(u-v)(u-v)^T}{(u-v)^T(u-v)}\cdot\frac{(u-v)(u-v)^T}{(u-v)^T(u-v)}}$$

$$I$$

SIMULADO 4

Problema 2

Considere o seguinte produto interno em $\mathbb{R}^2$:

$$\langle u, v\rangle = u^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} v.$$

(a) Mostre que $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ para quaisquer vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$.

(b) Encontre a matriz de projeção ortogonal em $\text{span}\{(1 \ \ -1)\}$ com relação a esse produto interno.

a) $\langle u, v\rangle = u^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ -v_1 + 2v_2 \end{bmatrix}$

$= u_1 v_1 - v_2 u_1 - v_1 u_2 + 2 v_2 u_2$

$\langle v, u\rangle = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 \\ -u_1 & 2u_2 \end{bmatrix}$

$= v_1 u_2 - u_2 v_1 - u_1 v_2 + 2 u_2 v_2$

b) $\text{proj}_{\langle u, v\rangle}^{\text{span}\{1, -1\}} =$

SIMULADO 5

24/10

Problema 1

Sejam A e P matrizes $n \times n$ e x um autovetor de A para o autovalor λ. Seja $c \in \mathbb{R}$. Suponha que P é inversível. Demonstre que:

(a) $c\lambda$ é autovalor de cA.

(b) Px é autovetor de PAP^{-1}.

(c) λ^2 é autovalor de A^2.

a) $Ax = \lambda x \Rightarrow \boxed{cAx = c\lambda x}$

b) $PAP^{-1}(Px) = PAx = \boxed{\lambda Px}$

c) $Ax = \lambda x \Leftrightarrow A^2 x = \lambda A x \Leftrightarrow \boxed{A^2 x = \lambda^2 x}$

Problema 2

Sejam Q uma matriz $n \times n$ ortogonal e I a matriz identidade $n \times n$.

(a) Suponha que a matriz $I - Q$ é ortogonal. Mostre que $I - Q = Q^T$.

(b) Suponha que Q é simétrica. Prove que os autovalores de Q estão, todos, no conjunto $\{-1, 1\}$.

a) $(I-Q)(I-Q^T) = I - Q^T - Q + I \Rightarrow 2I - Q^T - Q = I$

$-Q^T - Q = -I \Rightarrow Q^T + Q = I \Rightarrow \underline{Q^T = (I-Q)}$

b) $\det QQ^T = \det I \Leftrightarrow \det Q \cdot \det Q^T = 1 \Leftrightarrow |\det Q| = 1$

$Qx = \lambda x$

$x^T Q^T = \lambda x^T$

$\rightarrow \quad x^T \cancel{Q^T Q} x = \lambda^2 x^T x$

$x^T x = \lambda^2 x^T x$

$\underline{|\lambda_i| = 1}$

Problema 3

Sejam A, P e D matrizes $n \times n$ com $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonal.

Suponha que $AP = PD$ e que as colunas de P são não-nulas. Demonstre que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são autovalores de A.

$$A \cdot \begin{bmatrix} | & & | \\ p_1 & \cdots & p_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ p_1 & \cdots & p_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ p_1\lambda_1 & \cdots & p_n\lambda_n \\ | & & | \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{Ap_i = \lambda_i p_i}$$

Problema 4

(a) Verifique que a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ não é o quadrado de nenhuma matriz.

(b) Mostre que toda matriz diagonalizável é a potência 2023-ésima de uma matriz.

a) $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \to 0$, mas $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável vista que $MA_0 = 2$ e $MG_0 = 1$, logo nenhuma potência de matriz pode resultar nela.

b) $A = S\Lambda S^{-1} \to A^k = S\Lambda^k S^{-1}$

$$\Rightarrow A^{2023} = S\Lambda^{2023} S^{-1}$$

SIMULADO 6

Problema 2

(a) Se Q é quadrada e ortogonal, mostre que Q^T também é ortogonal.

(b) Mostre que se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal para $\mathbb{R}^n$, então $v_1v_1^T + \dots + v_nv_n^T = I$.

(c) Sejam P uma matriz ortogonal $m \times m$ e A uma matriz $m \times n$ com decomposição em valores singulares $A = U\Sigma V^T$. Encontre uma decomposição em valores singulares para PA.

a) $Q^T \cdot (Q^T)^T = Q^TQ = 1 \Rightarrow Q^T$ ortogonal

b) $Q = S\Lambda S^{-1}$, $S = \begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $S^{-1} = \begin{bmatrix} - & y_1 & - \\ & \vdots & \\ - & y_n & - \end{bmatrix}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i^T \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j x_j^T \Rightarrow (\lambda_1 x_1 y_1^T + \dots \lambda_n x_1 y_n^T)(\lambda_1 y_1 x_1^T + \dots + \lambda_n y_n x_n^T)$$

se $x_i y_i^T \cdot y_j x_j^T$, $i \neq j \Rightarrow y_i y_j^T = 0$, o que só deixa os termos tais que $i = j$, onde eu tenho a seguinte soma:

$$\lambda_1^2 x_1 \overset{1}{\cancel{y_1^T y_1}} x_1^T + \dots + \lambda_n^2 x_n \overset{1}{\cancel{y_n^T y_n}} x_n^T \Rightarrow x_1x_1^T + \dots + x_1x_1^T = I,$$

$|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda^2 = 1$, e sabemos que S é ortogonal, logo $\{x_1, \dots, x_n\}$ é ortonormal.

c) Ver depois

Problema 3

Seja A uma matriz quadrada.

(a) Seja λ um autovalor de A^2. Suponha que μ satisfaz $\lambda = \mu^2$. Prove que algum dentre μ e $-\mu$ é autovalor de A.

(b) Suponha que os vetores não-nulos x, y e o escalar γ satisfazem $Ax = \gamma y$ e $Ay = \gamma x$. Prove que algum dentre γ e $-\gamma$ é autovalor de A.

(c) Mostre que, se A é simétrica, então os valores singulares de A são os valores absolutos dos autovalores de A.

a) $Ax = \pm\mu x \Leftrightarrow A^2 x = \pm\mu Ax \Leftrightarrow A^2 x = (\pm\mu)(\pm\mu)x$

$\Rightarrow A^2 x = \lambda x$, logo, $-\mu$ ou μ são autovalores de A

b) $Ax = \gamma y \quad \frac{1}{\gamma} Ay = x \Rightarrow A \cdot \frac{1}{\gamma} Ay = \gamma y$

$A^2 y = \gamma^2 y$ (Pelo que provamos em A, μ ou $-\mu$ é autovalor de A)

Problema 4

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Determine o valor de $\det(I + xy^T)$.

$\det(EA) = \det A$, $\quad E \cdot xy^T = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ & & 0 & \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \det(I + xy^T) = \det\left(E + \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ & & 0 & \end{bmatrix}\right)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ & \ddots & & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}\right)$$

SIMULADO 7

Problema 1

Sejam $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $C = vv^T$.

(a) Ache o posto de C.

(b) Ache a dimensão de $N(C)$.

(c) Ache uma base para o espaço coluna de C.

a) Posto 1

b) $n-1$

c) span $\left\{ \begin{bmatrix} | \\ v_1 \cdot v \\ | \end{bmatrix} \right\}$

Problema 2

Seja A uma matriz 2×2.

(a) Se $\det(A) = 6$ e $\mathrm{Tr}(A) = 5$, encontre os autovalores de A.

(b) Se A é simétrica, possui dois autovalores iguais a 1 e possui alguma entrada nula, encontre A.

a) $\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3$

b)

Problema 3

Sejam A, B matrizes $n \times n$ que comutam. Mostre que

(a) se A e B são nilpotentes, então AB é nilpotente.

(b) $A + B$ é inversível se, e só se, $A^2 + 2AB + B^2$ é inversível.