Transformações 1

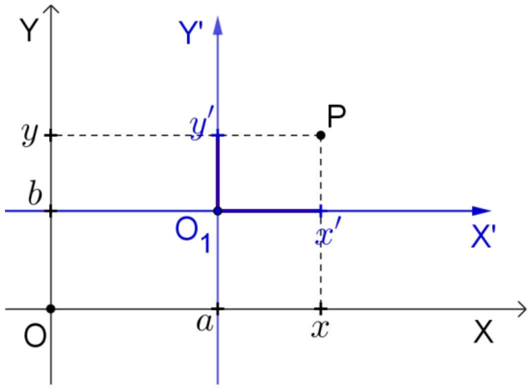
Translação

Imagine uma figura no plano cartesiano. Seus pontos são descritos por equações, nem sempre agradáveis. O objetivo deste capítulo é o de mover os eixos coordenados e colocá-los em posição mais favorável para estudar a figura, obtendo equações mais simples. Nesta primeira parte do capítulo vamos abordar a **translação** dos eixos.

Na translação, os eixos são mantidos nas mesmas direções, mas a origem muda de lugar. A origem O move-se para outro lugar do plano e passa a se chamar O_1. Os eixos antigos são chamados de X e Y e, os novos, de X' e Y', que são paralelos aos primeiros.

Considere o sistema de coordenadas tradicional com $O = (0,0)$ e eixos X e Y, e um novo sistema de coordenadas com origem $O_1 = (a,b)$ e eixos X' e Y'.

No sistema original temos $P = (x,y)$.



Observe as coordenadas de P no novo sistema. Escrevemos $P = (x', y')'$.

A relação entre as coordenadas novas em função das antigas é bem clara.

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

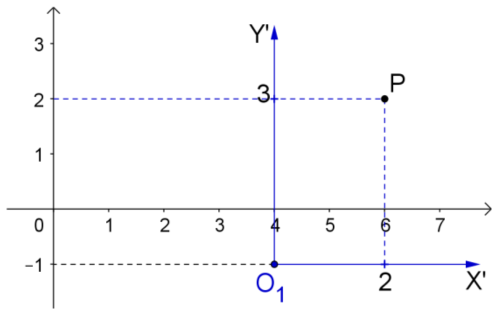
A relação entre as coordenadas antigas em função das novas é evidente.

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

Identificamos as duas representações para o mesmo ponto: $P = (x,y) = (x', y')'$.

Exemplo 1

$P = (6, 2)$. Transladando a origem para $O_1 = (4, -1)$ quais são as novas coordenadas de P?



Solução

$$\begin{cases} x' = 6 - 4 = 2 \\ y' = 2 - (-1) = 3 \end{cases}$$

Então $P = (2, 3)'$

Exemplo 2

A reta r tem equação $2x + 3y = 7$. Transladando a origem para $O_1 = (2, 1)$ qual é sua nova equação?

Solução

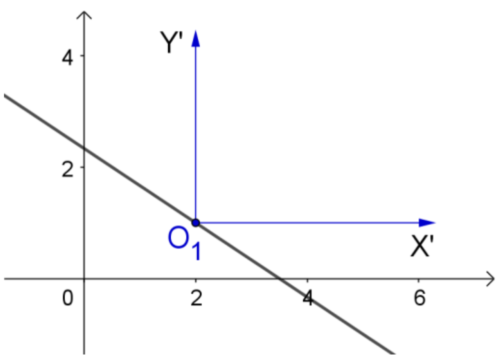
Vamos usar agora as relações $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$, ou seja, $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$

$$2(x' + 2) + 3(y' + 1) = 7$$

$$2x' + 4 + 3y' + 3 = 7$$

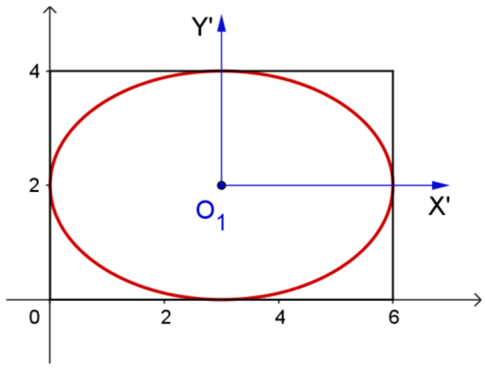
$$2x' + 3y' = 0$$

Repare que o vetor normal é o mesmo (é claro) e que apenas o termo independente muda. No caso, a nova origem pertence à reta r.



Exemplo 3

Determine a equação da elipse da figura ao lado.



Solução

Pelo desenho, vemos que o centro da elipse é o ponto $O_1 = (3, 2)$. Vamos colocar novos eixos com essa nova origem.

Pelo desenho, vemos também que $2a = 6$ e $2b = 4$. Assim, nos eixos novos a equação dessa elipse é

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

ou seja, $4x'^2 + 9y'^2 = 36$.

Vamos então usar as relações $\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$, ou seja, $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$.

Daí a equação fica assim:

$$4(x-3)^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

Desenvolvendo,

$$4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0$$

Exemplo 4

Determine os focos da elipse $5x^2 + 8y^2 - 30x + 16y + 13 = 0$

Solução

Observe a forma de completarmos os quadrados:

$$5(x^2 - 6x + \quad) + 8(y^2 + 2y + \quad) = -13 + \quad +$$

$$5(x^2 - 6x + \mathbf{9}) + 8(y^2 + 2y + \mathbf{1}) = -13 + \mathbf{45} + +\mathbf{8}$$

$$5(x-3)^2 + 8(y+1)^2 = 40$$

Com a translação $\begin{cases} x' = x-3 \\ y' = y+1 \end{cases}$ e dividindo por 40 ficamos com a equação:

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{5} = 1$$

A nova origem é, portanto, $O_1 = (3, -1)$.

Da equação da elipse temos $a^2 = 8$, $b^2 = 5$ e, consequentemente, $c^2 = 3$, ou seja, $c = \sqrt{3}$.

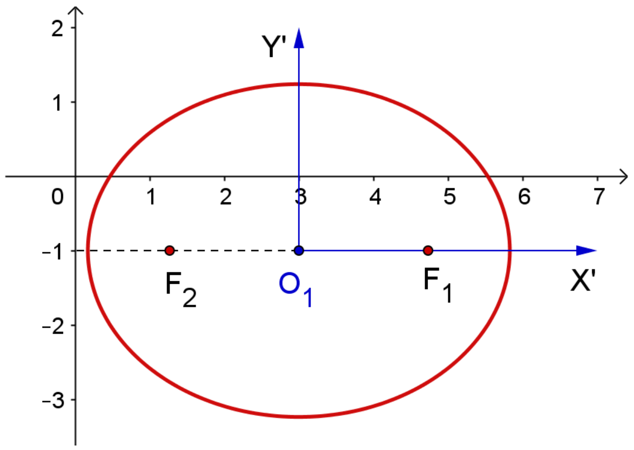
Chamaremos os focos de F_1 e F_2.

Nas novas coordenadas temos $F_1 = (\sqrt{3}, 0)'$ e $F_2 = (-\sqrt{3}, 0)'$.

Voltando ao sistema original, temos para o primeiro foco:

$$\begin{cases} x = x' + 3 = 3 + \sqrt{3} \\ y = y' - 1 = 0 - 1 = -1 \end{cases}$$

Dai, $F_1 = \left(3+\sqrt{3}, -1\right)$ e, da mesma forma, $F_2 = \left(3-\sqrt{3}, -1\right)$.



Exemplo 5

$$C: \ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$$

$$r: \ x - 3y + 14 = 0$$

Determine $r \cap C$.

Solução

Esse é um problema bem conhecido. Basta resolver o sistema formado pelas duas equações. Certo, mas vamos fazer uma preparação antes, para diminuir nossos cálculos.

Vamos colocar uma nova origem em $O_1 = (3, 4)$. Daí, com

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 4 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' + 4 \end{cases}$$

temos:

$$C: \quad x'^2 + y'^2 = 5$$

$$r: \quad x' + 3 - 3(y' + 4) + 14 = 0$$

$$r: \quad x' - 3y' + 5 = 0$$

Fazendo em C a substituição $x' = 3y' - 5$ ficamos assim:

$$(3y' - 5)^2 + y'^2 = 5$$

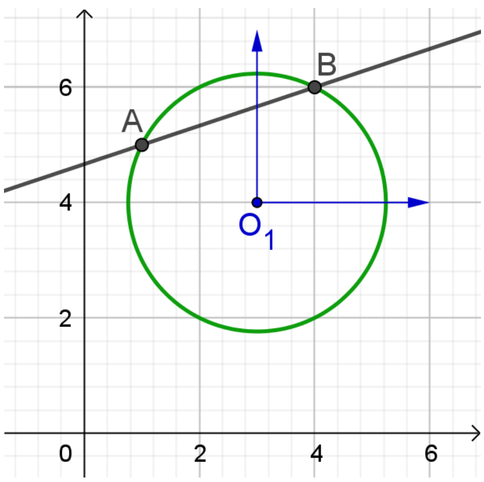
$$9y'^2 - 30y' + 25 + y'^2 = 5$$

$$10y'^2 - 30y' + 20 = 0$$

$$y'^2 - 3y' + 2 = 0$$

$$y' = 1 \quad \rightarrow \quad x' = -2 \quad \rightarrow A = (-2, 1)' = (1, 5)$$

$$y' = 2 \quad \rightarrow \quad x' = 1 \quad \rightarrow B = (1, 2)' = (4, 6)$$



Exemplo 6

O que representa a equação $y^2 - 6x - 8y + 22 = 0$?

Solução

Completamos um quadrado:

$$y^2 - 8y + 16 = 6x - 22 + 16$$
$$(y-4)^2 = 6(x-1)$$

Façamos agora:

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 4 \end{cases}$$

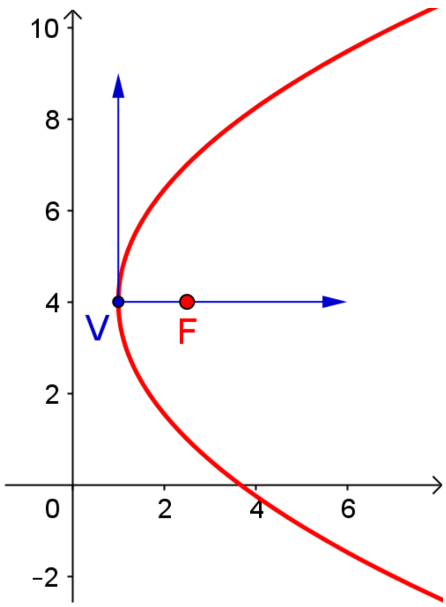
Ficamos com

$$y'^2 = 6x'$$

Uma parábola com a concavidade voltada para a direita, $2p = 6$, $p = 3$.

Vértice $V = (0,0)' = (1,4)$

Foco $F = \left(\frac{3}{2}, 0\right)' = \left(1 + \frac{3}{2}, 4\right) = \left(\frac{5}{2}, 4\right)$



Exemplo 7

Eliminar os termos do primeiro grau de $x^2 + 4xy + y^2 - 14x - 16y + 33 = 0$

Solução

Vamos verificar se alguma translação faz o que se deseja.

Transladando os eixos para uma nova posição com origem $O_1 = (a, b)$ temos

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

$$x^2 + 4xy + y^2 - 14x - 16y + 33 = 0$$

Fazendo as substituições

$$(x' + a)^2 + 4(x' + a)(y' + b) + (y' + b)^2 - 14(x' + a) - 16(y' + b) + 33 = 0$$

Desenvolvendo e arrumando,

$$x'^2 + 4x'y' + y'^2 + (2a + 4b - 14)x' + (4a + 2b - 16)y' + a^2 + 4ab + b^2 - 14a - 16b + 33 = 0$$

Para tentar eliminar os termos de primeiro grau o sistema abaixo deve ter solução:

$$\begin{cases} 2a + 4b - 14 = 0 \\ 4a + 2b - 16 = 0 \end{cases}$$

A solução é $a = 3$, $b = 2$.

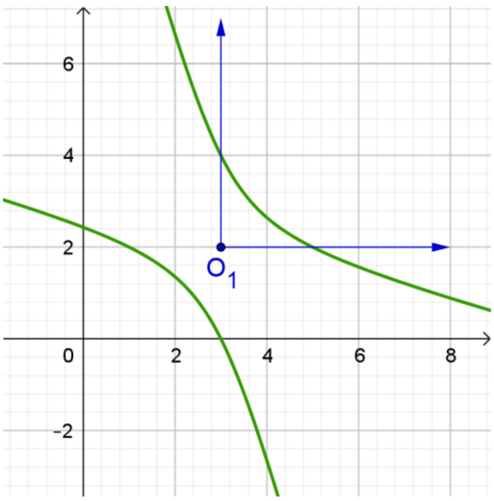
Então, transladando os eixos e colocando a origem em $O_1 = (3, 2)$ a equação torna-se

$$x'^2 + 4x'y' + y'^2 + 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2 - 14 \cdot 3 - 16 \cdot 2 + 33 = 0$$

$$x'^2 + 4x'y' + y'^2 - 4 = 0$$

Conseguimos uma equação mais simples colocando a nova origem no centro da curva. Para eliminar o termo $x'y'$ será necessário girar os eixos de certo ângulo.

Esse será o assunto da próxima aula.



Exemplo 8

Eliminar os termos do primeiro grau de $x^2 + 6xy + 9y^2 - 8x - 4y - 9 = 0$

Solução

Vamos verificar se alguma translação faz o que se deseja.

Transladando os eixos para uma nova posição com origem $O_1 = (a, b)$ temos

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

$$x^2 + 6xy + 9y^2 - 8x - 4y - 9 = 0$$

Fazendo as substituições

$$(x' + a)^2 + 6(x' + a)(y' + b) + 9(y' + b)^2 - 8(x' + a) - 4(y' + b) - 9 = 0$$

Desenvolvendo e arrumando,

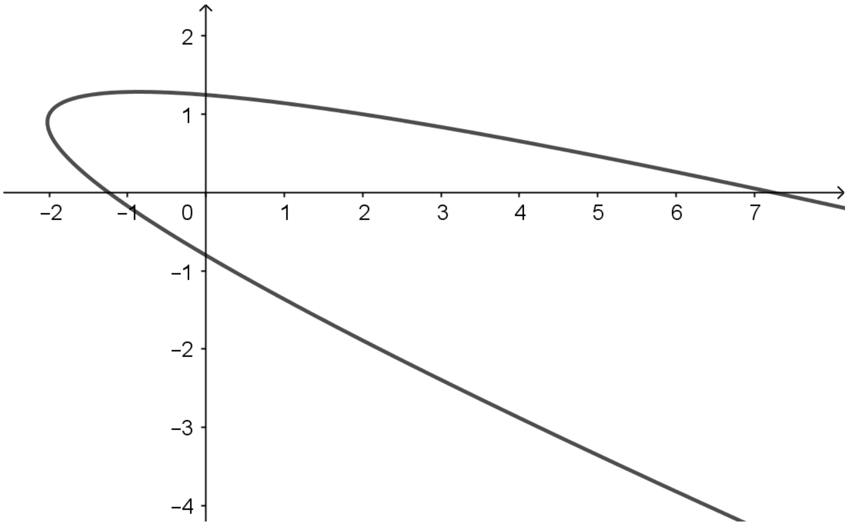
$$x'^2 + 6x'y' + 9y'^2 + (2a + 6b - 8)x' + (6a + 18b - 4)y' + a^2 + 6ab + 9b^2 - 8a - 4b - 9 = 0$$

Para tentar eliminar os termos de primeiro grau o sistema abaixo deve ter solução:

$$\begin{cases} 2a + 6b - 8 = 0 \\ 6a + 18b - 4 = 0 \end{cases}$$

Mas, esse sistema é impossível!

O que isso significa?



2
1
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
−1
−2
−3
−4