(a) n^2 é ímpar $\Leftrightarrow$ n é ímpar.

($\Leftarrow$) $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

$\therefore$ $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$.

$\bar{k} = 2k^2 + 2k \Rightarrow n^2 = 2\bar{k} + 1$ (ímpar).

($\Rightarrow$) n^2 ímpar $\Rightarrow$ n ímpar

Por absurdo, seja n par. Logo, $n = 2a$

$\therefore$ $n^2 = n \cdot n = 2a \cdot 2a = 2 \cdot 2a^2$ $(2a^2 = a')$ $= 2a'$.

$\therefore$ n^2 seria par, o que é um absurdo

($\Rightarrow$) n^2 ímpar $\Rightarrow$ n ímpar equivale a contrapositiva:

$\sim(p \Rightarrow q) = \sim q \Rightarrow \sim p$. $\therefore$ n par $\Rightarrow$ n^2 par. (Já feito).

:

n^2 é ímpar.

$n^2 - 1$ é par.

$(n-1)(n+1)$ é par.

Se n for par: $(n-1)$ é ímpar; $(n+1)$ é ímpar

e $(n-1)(n+1)$ é ímpar. ABSURDO!

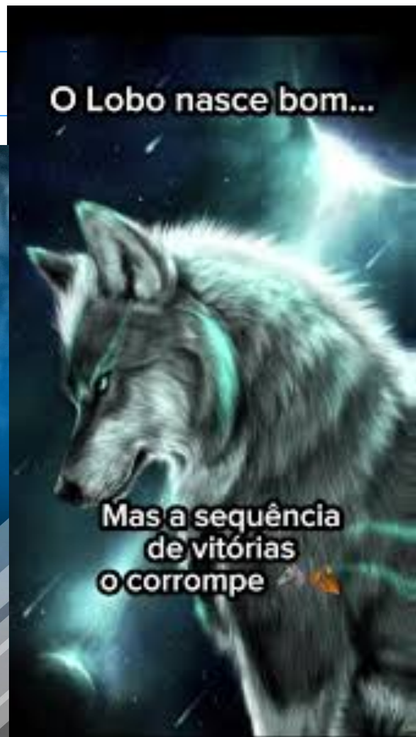
O erro está no alicerce. O argumento prova que não existe um maior inteiro.

Suponha, por absurdo, que $\exists n$ que é o maior inteiro. Pelo argumento, $n=1$. Mas, $2>1$. Logo, o argumento é falso.

Ele começa supondo que $\exists n$ que é maior elemento de $\mathbb{N}$, mas isso é falso.

"Todas as pessoas jogam no PAYSANDUUU!"

Hein, Em todo conjunto de n elementos que possua um jogador do Paysandu todos os elementos desse conjunto são jogadores de Paysandu.



→ Prova: Faremos indução para n.

Para $n=1$, é trivial

Seja S um conjunto de 1 elemento com um jogador do Paysandu. Se S é um conjunto $|S|=1$ e $x \in S$, então S só tem um jogador. Logo, todos os elementos jogam no Paysandu.

Passo indutivo: suponha para n. Vamos provar para $n+1$

$|S|=n+1$ e possua um jogador do Paysandu, que chamemos $x \in S$.

Seja $S' \subseteq S$ e $S'' \subseteq S$, $|S'|=|S''|=n$, tais que $x \in S'$ e $x \in S''$ e $S = S' \cup S''$.

Por hipótese de indução, S' e S'' só têm jogadores do Paysandu. O erro está quando $x=1$

$S(1) \Rightarrow S(2) \Rightarrow S(3) \Rightarrow S(4) \Rightarrow \ldots$

X ✓ ✓

Maior n | $n^3 > 2^n$. $\boxed{n=9}$

· Vamos provar que se $n \geq 10$ então $2^n \geq n^3$.

A prova se dá por indução em n.

Caso base: $n=10 \Rightarrow 2^{10} \geq 10^3$ ✓.

Passo indutivo: Suponha que $2^n \geq n^3$ seja verdade par $n \geq 10$

Queremos provar que $2^{n+1} \geq (n+1)^3$.

Sabemos que $2^n \geq n^3$ e $2^{n+1} \geq 2n^3$.

Basta provar que $2n^3 \geq (n+1)^3$, para $n \geq 10$.

Então, $2 \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$

Como, se $n \geq m$, então $\frac{1}{m} \geq \frac{1}{n}$.

Fazendo para $n=10 \therefore 2 \geq (1,1)^3$ ✓.

Logo, para $n \geq 10$ é verdade que $2 \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^3$ ✓.

Indução forte.

$n=1$, Segue por hipótese e $x+\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

Passo por indução forte para $k \leq n$.
Suponha que $x^k + \frac{1}{x^k} \in \mathbb{Z}$

Logo $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right) \in \mathbb{Z}$

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+\underbrace{\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}.$$

$$\therefore \boxed{x^n+\frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}}$$

Prove que $\forall a,b \in \mathbb{Z}$, p primo

$$p \mid (a+b)^p-(a^p+b^p)$$

$$(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}b + \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 + \dots + \binom{p}{p-1}ab^{p-1} + b^p$$

$$(a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}a^{p-j}b^j = p\cdot\sum\frac{(p-1)!}{(p-j)!}\cdot a^{p-j}\cdot b^j$$

Como o $\binom{p}{j}$ é inteiro, então

$\frac{p!}{(p-j)!\,j!} = \frac{p(p-1)!}{(p-j)!\,j!}$. Como p é primo, $(p-j)!\,j! \mid (p-1)!$

e $\frac{(p-1)!}{(p-j)!\,j!} \in \mathbb{Z}$. $\therefore \boxed{p \mid (a+b)^p - (a^p + b^p)}$

$p \mid (a+b)^p - (a^p + b^p)$

p primo e $a,b \in \mathbb{Z}$

Demonstre o Binômio de Newton:

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\therefore$ Por indução $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Queremos verificar que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$

Sabemos que $(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b).(a+b)^n$$

$$= (a+b)\left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n\right]$$

$$= \binom{n}{0} \cdot a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \dots + \binom{n}{n-1}a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n}ab^n + \binom{n}{0}a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}.$$

$$\binom{n}{0}a^{n+1} + a^n b\left(\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right) + a^{n-1}b^2\left(\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right) + \dots + ab^n\left(\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right) + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

• Lembre-se $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$

Dem: $\dfrac{n!}{m!(n-m)!} + \dfrac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}$

$$\frac{n!(m+1)}{(m+1)!(n-m)!} + \frac{n!(n-m)}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{n!(n+1)}{(m+1)!(n-m)!} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Voltando,

$$\binom{n}{0}a^{n+1} + a^n b\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right) + a^{n-1}b^2\left(\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\right) + \dots + ab^n\left(\binom{n}{n}+\binom{n}{n-1}\right) + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

$$\Rightarrow (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot a^{n+1-k}\cdot b^k$$

cqd $\blacksquare$

10. Para todo natural maior que 1, prove que $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Meu mano Gabriel:

$$\frac{1+2+3+\dots+n}{n} \geq \sqrt[n]{n(n-1).(n-2).\dots.2.1} \qquad MA \geq MG$$

$$\frac{\cancel{n}(n+1)}{2\cancel{n}} \geq \sqrt[n]{n!}$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$$

A igualdade ocorre para $n=1$ ∴

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 1 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!}.$$

12. Calcule $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$, ou seja, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! \cdots + n \cdot n!$.

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$$

- $(k+1)k! = (k+1)!$

$$\hookrightarrow \cancel{2!} + \cancel{3!} + \cancel{\cdots} + (n+1)! - 1! - \cancel{2!} - \cancel{\cdots} - \cancel{n!}$$

$$\boxed{\therefore \sum_{k=1}^{n} k k! = (n+1)! - 1}$$

10. Prove que a seqüência $11, 111, 1111, \ldots$ não contém quadrados.

- K^2, $K \in \mathbb{Z}$ $K^2 \equiv 1$ ou $K^2 \equiv 0 \pmod 4$.

$\underbrace{111\ldots1} = \dfrac{10^n - 1}{9}$

Sabemos que, para $n \geq 2$ $10^n \equiv 0 \pmod 4$

$\therefore 10^n - 1 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$

$\therefore \dfrac{10^n - 1}{9}$, para $n \geq 2$ não é quadrado perfeito.