1) Mostre que $f(x) = x^3 + x - 1$ tem exatamente uma raiz:

$f'(x) = 3x^2 + 1$. Observe que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f' > 0$, logo, f é sempre crescente.

Fazendo $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$. Pelo teorema do valor intermediário, $\exists c \in (0,1) \mid f(c) = 0$. Contudo, como f é sempre crescente, então $f(x)$ possui apenas uma raiz.

2) Seja $f(x)$ derivável em (a,b) e contínua em $[a,b]$. Suponha que $f(x)$ possui k raízes distintas. Quantas raízes possui $f'(x)$?

Suponha que $x_1 < x_2 < \dots < x_k \in [a,b]$ e $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_k) = 0$

Agora vamos analisar os intervalos abertos (x_1, x_2), (x_2, x_3)... (x_{k-1}, x_k), todos contidos em $[a,b]$

Como f é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), pelo teorema de Rolle existe pelo menos um $c \in (x_n, x_{n+1})$ tal que $f'(c) = 0$.
Como existem $k-1$ intervalos, então existem $k-1$ pontos em que $f'(x) = 0$.

3) Calcule os limites

a) $\lim_{x \to 0} (1+ax)^{b/x}$ $\qquad b/x = m.$

$$= \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{ab}{m}\right)^m$$

Sabemos que $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k.$

$$\therefore \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{ab}{m}\right)^m = \boxed{e^{ab}}$$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{e^x}(1 - 1/e^{2x})}{\cancel{e^x}(1 + 1/e^{2x})} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{e}{x}\right)^x$

$g(x) = x \ln(e/x)$

$$g(x) = x(1 - \ln x).$$

$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} (\ln f(x)) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{-\infty} = 1/e^{\infty} = \boxed{0}_{h}.$$

Vendo se $\exists \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2}$. Como $x\to\infty$, então tal limite é ∞. Logo $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \infty$ e $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty}$ //

(L'Hospital duas vezes).

4) Quem cresce mais rápido, x^2 ou $x\ln x$?

Vamos observar o $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{x\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x}$

Aplicando L'Hospital (caso ∞/∞) e vendo se existe:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Logo, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\ln x} = \infty$, Logo x^2 cresce mais rápido

(5) Seja $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^4} = x^{1/3} - x^{4/3}$

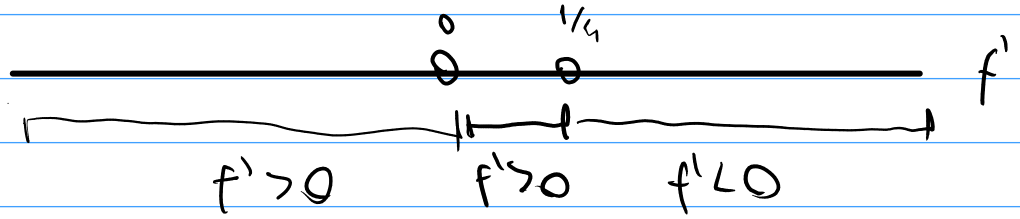
a) dom f: $\mathbb{R}$

b) $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{4}{3}x^{1/3} = \boxed{\frac{1}{3}\left(\frac{1-4x}{\sqrt[3]{x^2}}\right)}$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3}\cdot 4\sqrt[3]{x} =$

$$\begin{array}{ll} f'(x)=0 \Rightarrow & \boxed{x = 1/4} \\ \nexists\, f'(x) \Rightarrow & \boxed{x = 0} \end{array}$$

c) Vamos analisar o sinal de $f'(x)$:
(tendo em mente o teorema do valor médio)



Como $f' > 0$ e $f' > 0 \Rightarrow x = 0$ não é extremo
Como $f' > 0$ e $f' < 0 \Rightarrow x = 1/4$ é extremo

d)