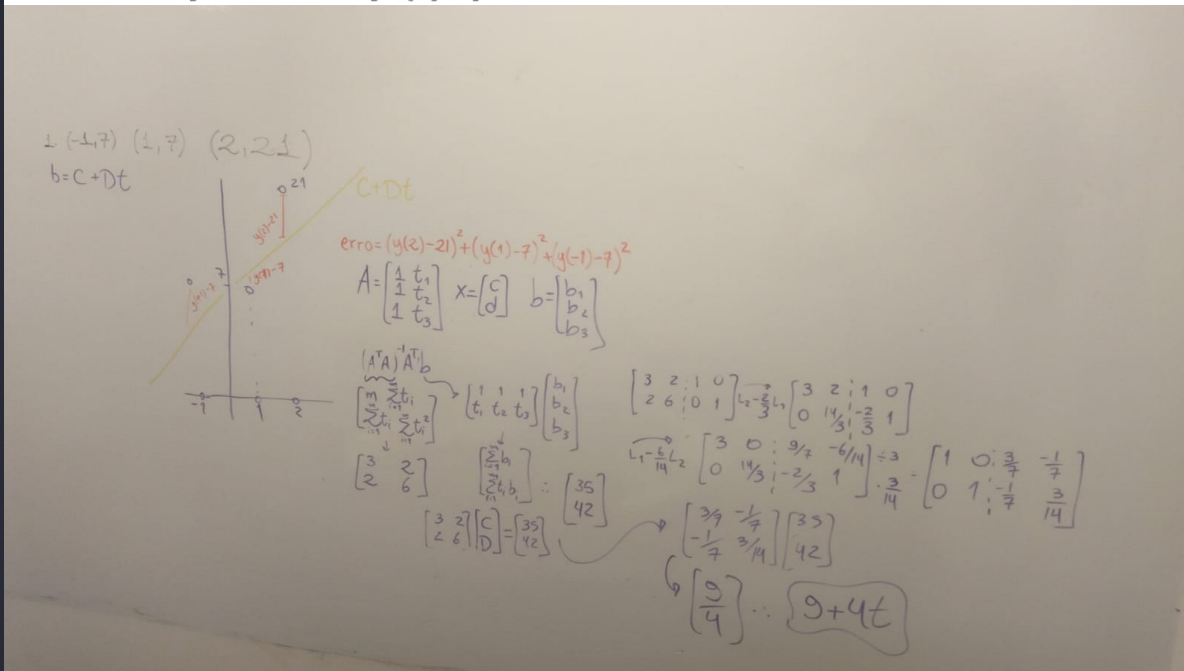
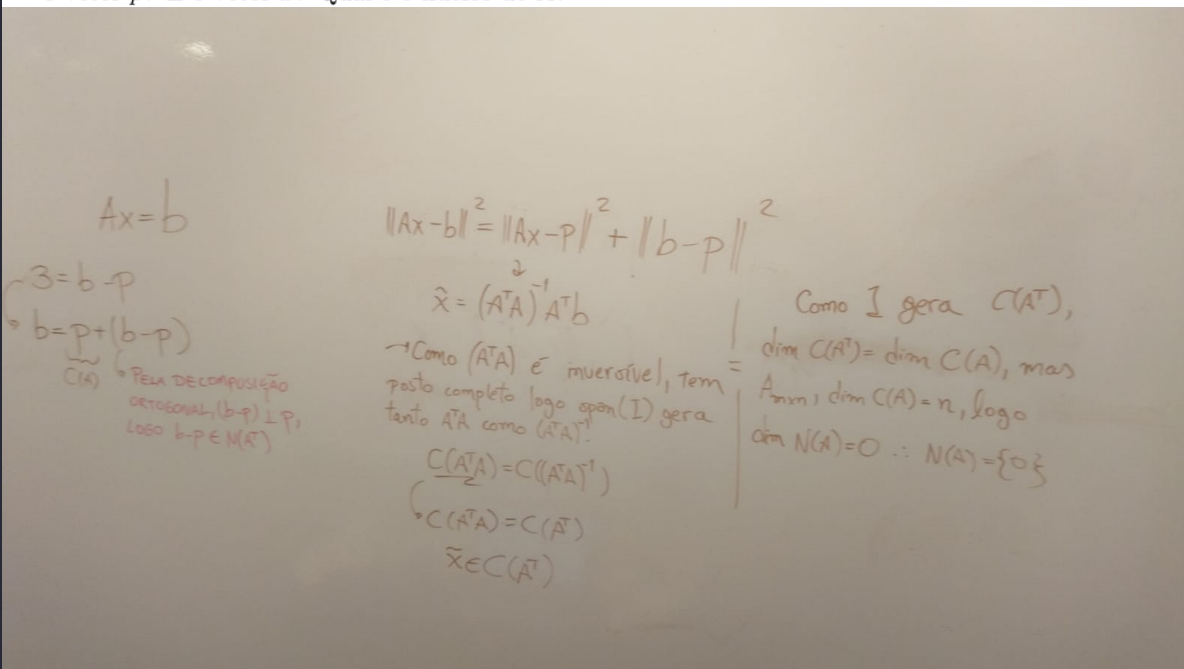


## LISTA 8

1. Escreva as 3 equações para a reta  $b = C + Dt$  passar pelos pontos  $(-1, 7)$ ,  $(1, 7)$ ,  $(2, 21)$ . Ache a solução de mínimos quadrados  $\hat{x}$  e a projeção  $p = A\hat{x}$ .



2. Dado o problema acima, quais dos quatro subespaços fundamentais contêm o vetor erro  $e = b - p$ ? E o vetor  $p$ ? E o vetor  $\hat{x}$ ? Qual é o núcleo de  $A$ ?



3. Ache a melhor reta que se ajusta aos pontos  $t = -2, -1, 0, 1, 2$  e  $b = 4, 2, -1, 0, 0$ .

$$t = -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

$$b = 4 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 0$$

$$Ax = b \rightarrow \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} \sum b_i \\ \sum t_i b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

4. Dados os vetores

$$v_1 = [1 \ -1 \ 0 \ 0], \ v_2 = [0 \ 1 \ -1 \ 0] \text{ e } v_3 = [0 \ 0 \ 1 \ -1],$$

use o método de Gram-Schmidt para achar uma base ortornormal que gera o mesmo espaço de  $v_1, v_2, v_3$ .

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = v_1 \rightarrow \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) \Rightarrow v_2 - \frac{u_1^T v_2}{u_1^T u_1} \cdot u_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{[1 \ -1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \text{proj}_{u_1}(v_3) - \text{proj}_{u_2}(v_3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{[1 \ -1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{[0 \ 1 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 + 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = u_3$$

$$\|u_3\| = \sqrt{\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 + 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

5. Se os elementos de cada linha de uma matriz  $A$  somam zero, ache uma solução para  $Ax = 0$  e conclua que  $\det A = 0$ . Se esses elementos somam 1, conclua que  $\det(A - I) = 0$ .

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$  Como cada linha de  $A$  soma 0.  
elemento  $i$  de  $Ax = \sum \text{elementos da linha } i$

Logo  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in N(A)$ , logo  $N(A) \neq \{0\}$ , ou seja,  $\det(A) = 0$

Se a soma de  $A$  é 1, temos  $(A - I) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

vai ser  $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$  Logo  $N(A - I) \neq \{0\} \Rightarrow \det(A - I) = 0$

6. Use as propriedades do determinante (e não suas fórmulas) para mostrar que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 - \left(\frac{c-a}{b-a}\right)L_2} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) \end{bmatrix}$$

$$(c-a) - \frac{(c-a)(b-a)}{(b-a)}$$

$$(c^2-a^2) - \frac{(c-a)}{(b-a)} \cdot (b-a)(b+a)$$

$$c^2-a^2 - (cb+ac-ab-a^2)$$

$$c^2 - \cancel{a^2} - cb - ac + ab + \cancel{a^2}$$

$$c^2 - cb - ac + ab$$

$$c(c-b) - a(c-b)$$

$$(c-b)(c-a)$$

$\hookrightarrow \det = \prod_{i=1}^n d_i$ ,  $d_i$  são os pivôs, logo

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \right) = (b-a)(c-b)(c-a)$$

7. Calcule

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

→ Matriz de permutação  
última linha troca com todas, logo

há 3 trocas, logo  $\det = -1$

8. Use o fato de que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} = 1$$

para mostrar que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 19 \end{bmatrix} = 0.$$

→ Reduzindo A, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 3L_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 - 3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1$$

Porém se  $a_{44}$  for uma unidade a menos, a redução vai gerar uma linha de 0, logo,  $\det B = 0$

9. Ache o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

usando cofatores. O que acontece quando mudamos o valor 4 para 100?

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$10 - 4 - 0 + 2 = \boxed{3}$$

→ o resultado do determinante não se altera.