Fundação Getúlio Vargas

Matemática Aplicada
Nome:
Monitores: Cleyton e Jeann

Exercício 1 - O Teorema do Valor Intermediário

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(c) > 0$ e $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$?

(b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $g(x) \geq 0, \forall x > 0$ e $g(x) \leq 0, \forall x < 0$. Quais os possíveis valores de $g(0)$?

(c) Seja $h : [0,1] \to [0,1]$ uma função tal que $|h(x) - h(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in [0,1]$. Se for "$<$"em vez de "$\leq$", mostre que existe um único $x_0 \in [0,1]$ tal que $h(x_0) = x_0$.

Exercício 2 - A Continuidade Preserva Intervalos

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se I é um intervalo, então $f(I)$ é um intervalo.

Reciprocamente, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que se I é um intervalo, então $f(I)$ é um intervalo e, além disso, para cada $a \in \mathbb{R}$, suponha que $\{x \in \mathbb{R} | f(x) = a\}$ é finito. Então, mostre que f é contínua.

O que acontece se existir algum $a \in \mathbb{R}$ tal que $\{x \in \mathbb{R} | f(x) = a\}$ não seja finito?

Exercício 3 - O Teorema de Weierstrass

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Mostre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercício 4 - A Descontinuidade Enumerável

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função decrescente. Mostre que

(a) existem os limites laterais em todo ponto de f

(b) para cada ponto de descontinuidade de f, existe um intervalo aberto no qual a função faz um (ou dois) "salto(s)"e estes intervalos são disjuntos para cada ponto.

(c) o conjunto $D \subset \mathbb{R}$ dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.

(Sugestão: Você talvez precise usar que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$...)

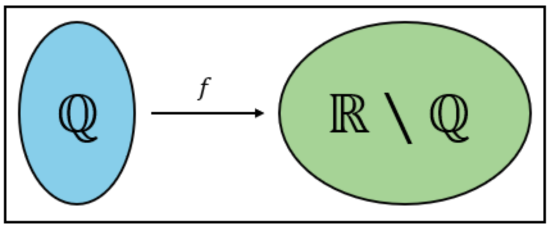
Exercício 5 - Limites Laterais Distintos

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitado e $a < c < b$ tal que $\lim_{x \to c} f(x)$ não existe. Mostre que existem $(x_n), (y_n)$ sequências em $[a, b]$ tais que $x_n, y_n \to c$, mas $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$.

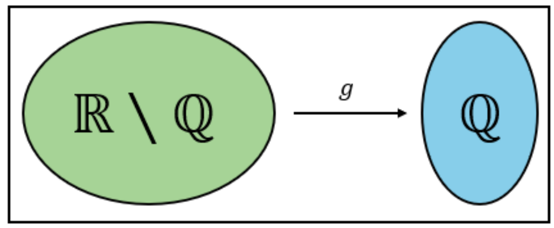
Exercício 6 - Mind-Blowing... (⊙_⊙;)

Gustavo e Murilo, amigos de Nati e Robertinha, estavam estudando funções em seu curso de Análise.

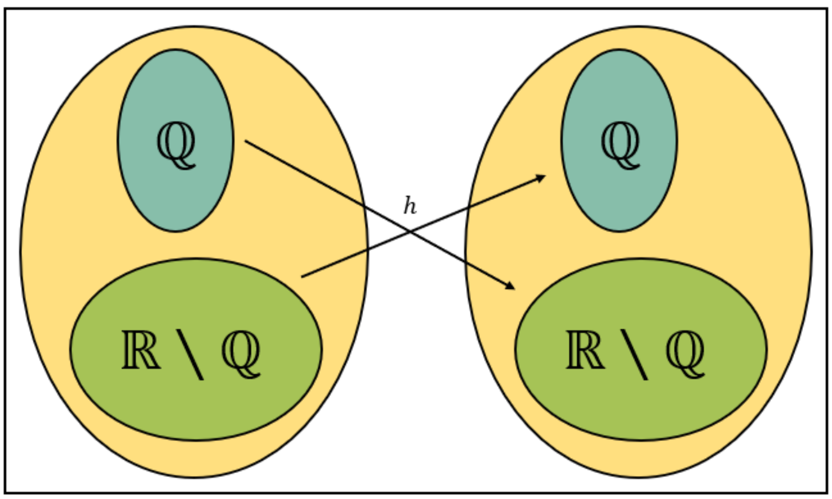
Gustavo pensou em uma função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ e Murilo pensou em uma função $g : \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Então, eles resolveram juntar as duas funções, obtendo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x)$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $h(x) = g(x)$ se $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.



FUNÇÃO DE GUSTAVO



FUNÇÃO DE MURILO



FUNÇÃO DE GUSTAVO-MURILO

Mas eles se perguntaram se h era contínua. Ajude-os respondendo se h pode ou não ser contínua e (obviamente) por quê?

Exerício 1 - Solução

(a) Não. Com efeito, pelo Teorema do Valor Intermediário, se existisse $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$ e, supondo $x < c$, então, existiria $a \in (x, c)$ tal que $f(a) = 0$, o que é um absurdo. Análogo para $x > c$.

(b) $g(0) = 0$. Com efeito, $g\left(-\frac{1}{n}\right) \leq 0 \leq g\left(\frac{1}{n}\right)$. Logo, tomando o limite em g, temos que $g(0) \leq 0 \leq g(0)$, ou seja, $g(0) = 0$.

(c) Temos que h é contínua. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, seja $\delta = \varepsilon$, donde $|x - y| < \delta \Rightarrow |h(x) - h(y)| \leq |x - y| < \delta = \varepsilon$. Agora, considere a função $F : [0, 1] \to [-1, 1]$ dada por $F(x) = h(x) - x$, que também será contínua. Veja que $F(0) = h(0) \geq 0$ e $F(1) = h(1) - 1 \leq 0$. Se for $F(0) = 0$ ou $F(1) = 1$ está feito. Caso contrário, teremos $F(0) > 0$ e $F(1) < 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (0, 1)$ tal que $F(c) = 0$, donde $h(c) = c$. Agora, se existirem dois pontos x_0 e y_0 tais que $h(x_0) = x_0$ e $h(y_0) = y_0$ e $|h(x_0) - h(y_0)| < |x_0 - y_0|$, teríamos $|x_0 - y_0| < |x_0 - y_0|$, que é um absurdo!

Exerício 2 - Solução

- Suponha que $f(I)$ é limitado. Então existem sequências $(x_n), (y_n)$ tais que $f(x_n) \to \inf\limits_{x \in I} f(x)$ e $f(y_n) \to \sup\limits_{x \in I} f(x)$. Desde que $\inf\limits_{x \in I} f(x) \leq \sup\limits_{x \in I} f(x)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) \leq f(y_n), \forall n > n_0$. Para cada $n > n_0$, dado algum $c_n \in [f(x_n), f(y_n)]$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $d_n \in I$ tal que $f(d_n) = c_n$, donde $[f(x_n), f(y_n)] \subset f(I)$. Daí, $\bigcup\limits_{n > n_0} [f(x_n), f(y_n)] \subset f(I)$. Na verdade, $\bigcup\limits_{n > n_0} [f(x_n), f(y_n)] = f(I)$, pois todo elemento de $f(I)$ está entre $\inf\limits_{x \in I} f(x)$ e $\sup\limits_{x \in I} f(x)$. Mas, esta união constrói um intervalo (A saber, um dentre as opções $\left[\inf\limits_{x \in I} f(x), \sup\limits_{x \in I} f(x)\right]$, $\left(\inf\limits_{x \in I} f(x), \sup\limits_{x \in I} f(x)\right]$, $\left[\inf\limits_{x \in I} f(x), \sup\limits_{x \in I} f(x)\right)$ e $\left(\inf\limits_{x \in I} f(x), \sup\limits_{x \in I} f(x)\right)$). Para o caso $f(I)$ ilimitado, o raciocínio é similar, bastando trocar $\inf\limits_{x \in I} f(x) = -\infty$ ou $\sup\limits_{x \in I} f(x) = +\infty$.

- Se f não fosse contínua em algum ponto a, existiria um $\varepsilon > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, existiria x_n tal que $x_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$, mas $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$, donde $f(x_n) \geq f(a) + \varepsilon$ ou $f(x_n) \leq f(a) - \varepsilon$. Para os infinitor valores de n, temos a ocorrência de infinitas vezes de pelo menos uma destas expressões. Suponha, sem perda de generalidade, que seja $f(x_n) \geq f(a) + \varepsilon$. Como $f\left(\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)\right)$ é um intervalo que contém $f(a)$ e $f(x_n)$ em infinitos valores de n, contém também $f(a) + \varepsilon$ que está entre $f(a)$ e $f(x_n)$. Mas isto é um absurdo, pois isto implicaria que o conjunto dos valores x tais que $f(x) = f(a) + \varepsilon$ é infinito. Logo, f é contínua.

- Neste caso, a função pode não ser contínua. Por exemplo, seja $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. A função não é contínua em 0, mas $f(I) = [-1, 1]$, para todo intervalo contendo 0 e, certamente é intervalo para intervalos I que não contém 0, pois a função é contínua nestes pontos. Além disso, para $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, temos que $f(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exerício 3 - Solução

$A = f(1)$. Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, temos que existe $M > 0$ tal que se $|x| > M$, tem-se $f(x) < A$. Como, f é contínua, temos que f assume valor máximo em $[-M, M]$, isto é, existe $x_0 \in [-M, M]$ tal que $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in [-M, M]$. Além disso, $f(x) < A = f(1)$ para $x \in \mathbb{R}\backslash[-M, M]$, donde $1 \in [-M, M]$. Logo, $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}\backslash[-M, M]$ e, consequentemente, $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Exerício 4 - Solução

(a) Vamos provar apenas a existência de um dos limites laterais. O outro é análogo. Dado $c \in \mathbb{R}$, seja $L_c^- = \inf\{f(x) | x < c\}$. Vamos mostrar que $L_c^- = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, pela definição de L_c^-, deve existir $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) \leq f(x_0) < f(c) + \varepsilon$. Como a função é decrescente, $x_0 < c$. Além disso, se $x_0 < x < c$, então $f(c) - \varepsilon < f(c) \leq f(x) \leq f(x_0) < f(c) + \varepsilon$. Assim, basta tomar $c - \delta = x_0$, ou seja, $\delta = c - x_0$. O limite lateral à esqueda é dado por $L_c^+ = \sup\{f(x) | x > c\}$.

(b) Isto equivale a mostrar que nestes pontos de descontinuidade, digamos $c \in \mathbb{R}$, temos $L_c^+ < L_c^-$. Com efeito, como a função é decrescente, obtemos que se $x < c < y$, então $f(x) > f(c) > f(y)$, donde $\inf\limits_{x<c} f(x) \geq f(c) \geq \sup\limits_{x>c} f(x)$. Ou seja, $L_c^- \geq c \geq L_c^+$. Se for $L_c^- = L_c^+ = c$, teremos que a função será contínua em c, o que contradiz o fato de c ser ponto de descontinuidade. Logo, deve ser $L_c^+ < L_c^-$. Além disso, dado $d < c$ outro ponto de descontinuidade de f, vem que $L_c^- \leq L_d^+$, já que f é decrescente. Analogamente para um ponto de descontinuidade maior que c.

(c) Como cada ponto de descontinuidade de f tem um intervalo aberto associado que é disjunto dos demais, podemos estabelecer uma bijeção entre tais pontos e estes intervalos. Cada intervalo, por ser não-degenerado, admite um número racional. Logo, podemos estabelecer uma bijeção entre os intervalos e um subconjunto dos números racionais, que é enumerável. Logo, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.

Exerício 5 - Solução

Dadas (c_n) e (d_n) em $[a, b]$ tais que $c_n, d_n \to c$, com $c_n < c < d_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Como f é limitada, temos $(f(c_n))$ limitada, portanto, por Bolzano-Weierstrass, existe subsequência (x_n) de (c_n) tal que $f(x_n)$ é convergente para algum valor L. Além disso, se toda subsequência convergente (existe pelo menos uma, por Bolzano-Weierstrass) de $(f(d_n))$ convergir para L, pelo item (d) do Exercício 1 da Lista 2, teremos que $f(d_n)$ é convergente e converge para L. Aplicando o mesmo raciocínio a $(f(c_n))$, se toda subsequência convergente convergir para L, teremos $f(c_n)$ convergente com limite L. Mas, como (c_n) e (d_n) são tomados arbitrariamente, seguiria que $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$, ou seja, existe o limite $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, que é um absurdo. Logo, devemos ser capazes de extrair uma subsequência, seja de $(f(c_n))$ ou de $(f(d_n))$, convergente para algum valor $M \neq L$.

Exerício 6 - Solução

Escrevendo $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, obtemos que a imagem de f será o conjunto $f(\mathbb{Q}) = \{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)\}$, que é enumerável. Além disso, a imagem de g é $g(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, que também é enumerável. Logo, a imagem de h é $A \cup B$, que é ainda enumerável. Se h fosse contínua, levaria intervalos em intervalos (pelo Exercício 2). Como $h(\mathbb{R}) = A \cup B$, que é enumerável, deve ser um intervalo degenerado e, portanto, h é constante. Mas isto implicaria que $f(x) = c = g(y), \forall x \in \mathbb{Q}$ e $\forall y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, que é um absurdo. Logo, h nunca será contínua.