Derivadas e Integrais

(1) Consideremos $f: I \to \mathbb{R}$ função definida no intervalo I; dizemos que f é derivável no ponto $c \in I$ quando existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$. Denotamos por $f'(c)$ (ou $\frac{df}{dx}(c)$) este limite, quando existir. Observe que se $c \in I$ for um extremo do intervalo o limite acima é um limite lateral de fato.

A função f é derivável no intervalo I quando é derivável em todos os pontos de I. Desde já registremos que se f é derivável em $c \in I$ então f é contínua em c: escrevamos $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} := r(h)$, esta nova função definida enquanto $c+h \in I$ (e $h \neq 0$). Segue-se que $\lim_{h\to 0} r(h) = f'(c)$, portanto $r(h)$ é limitada em algum intervalo $0<|h|<\delta$, $c+h \in I$. Como $f(c+h) = f(c) + h\,r(h)$, vemos que $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$.

Exemplo: seja $\begin{cases} g(x) = x^k \operatorname{sen} \frac{1}{x} \\ g(0) = 0 \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$

Consideremos o $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h}$. Se $k=1$, não existe $\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{h}$; se $k \geq 2$, temos que $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$. Portanto, g é derivável em 0 para $k \geq 2$ e $g'(0) = 0$.

Exemplo: seja $h(x) = x^2 \ell(x)$, $\ell(0) = 0$, onde $\ell(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $\ell(x) = -1$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Então h é derivável em 0 e $h'(0) = 0$.

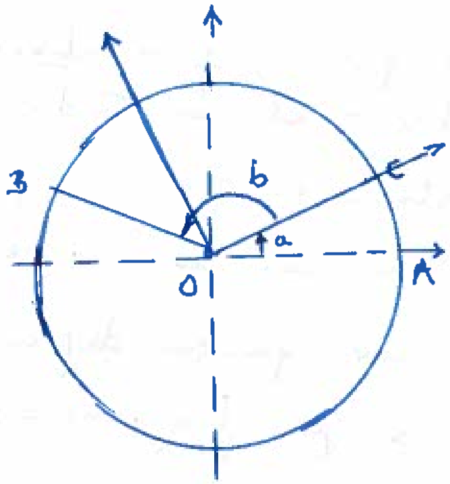
Exemplo: $f(x) = x^n$ definida em $\mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$ é derivável e $f'(x) = n x^{n-1}$. Devemos examinar $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$. Ora, $(x+h)^n =$

$$= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \dots + \binom{n}{j} x^{n-j} h^j + \dots + \binom{n}{n-1} x\, h^{n-1} + h^n,$$

de modo que $\dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1} + h\,\ell(x,h)$, onde $\ell(x,h)$ é polinômio em x, h. Portanto, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1}$.

Exemplo: funções trigonométricas. Vamos verificar antes as seguintes fórmulas:

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \end{cases}$$



Consideremos como na figura os pontos $A = (1,0)$, $C = (\cos a, \operatorname{sen} a)$ e $B = (\cos(a+b), \operatorname{sen}(a+b))$. A distância d entre A e B satisfaz $d^2 = (1-\cos(a+b))^2 + (\operatorname{sen}(a+b))^2 = 2 - 2\cos(a+b)$.

No sistema de coordenadas ortogonal obtido elegendo a reta passando por O e C como eixo das abscissas temos que $A = (\cos(-a), \operatorname{sen}(-a))$ e $B = (\cos b, \operatorname{sen} b)$. Como $A = (\cos a, -\operatorname{sen} a)$, temos que $d^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2 = 2 - 2(\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b)$, de onde se segue a primeira fórmula. Exercício: prove a segunda fórmula.

Para verificar a diferenciabilidade das funções seno e cosseno, devemos estudar os limites $\dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$ e $\dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$. Temos que

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h}$$

$$= (\cos x)\cdot\frac{\cos h - 1}{h} - (\operatorname{sen} x)\frac{\operatorname{sen} h}{h} \to -\operatorname{sen} x \quad \text{quando}$$

$h \to 0$. Do mesmo modo

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h} = \frac{\operatorname{sen}x\cos h+\cos x\operatorname{sen}h-\operatorname{sen}x}{h}$$

$$= (\operatorname{sen}x)\frac{\cos h-1}{h}+(\cos x)\frac{\operatorname{sen}h}{h} \longrightarrow \cos x \quad \text{quando } h\to 0.$$

Finalmente: $\dfrac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg}x}{h} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)}{\cos(x+h)}-\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{h}$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x+h)\cos x-\operatorname{sen}x\cos(x+h)}{h\cos(x+h)\cos x} = \frac{\operatorname{sen}(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{(\cos x)^2} \quad \text{quando } h\to 0.$$

Naturalmente estamos trabalhando no caso de $\operatorname{tg}x$ com os pontos onde $\cos x\neq 0$.

Exemplo: seja $h(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. Então $h'(x)=1$ se $x>0$, $h'(x)=-1$ se $x<0$, e h não é derivável em 0.

② Regras de Operação.

Consideremos funções $f, g: I\longrightarrow\mathbb{R}$ deriváveis. Então:

(i) $f+g$, $f\cdot g$ são deriváveis e

$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$, $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

Para comprovar a segunda fórmula, observamos que $\dfrac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{x}$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}g(x+h) + f(x)\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

Segue-se que $f\cdot g$ é derivável e $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (atenção: usamos a continuidade de g!)

(ii) suponhamos $f(x)\neq 0$ para todo $x\in I$. Então $\dfrac{1}{f(x)}$ é derivável e sua derivada é $\dfrac{-f'(x)}{f(x)^2}$.

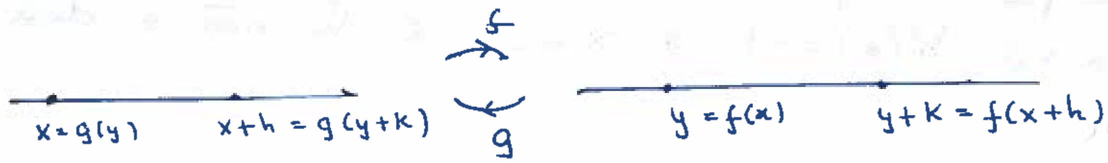
Temos que $\dfrac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h} = -\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h\, f(x+h) f(x)} \to \dfrac{-f'(x)}{f(x)^2}$

quando $h \to 0$.

Como consequência, $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ é derivável e sua derivada é $\dfrac{f(x)\, g'(x) - f'(x)\, g(x)}{f(x)^2}$.

(iii) Seja $f:(a,b) \to (A,B)$ função injetiva e sobrejetiva, e denotemos por $g:(A,B) \to (a,b)$ sua inversa. Se f é derivável e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ então g é derivável em (A,B) e $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$

De fato, seja $k = f(x+h) - f(x)$; se $h \neq 0$ então $k \neq 0$, e se $h \to 0$ temos $k \to 0$ (continuidade de f). Daí:



$$\frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \frac{x+h-x}{f(x+h)-f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Daí g é derivável e $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(g(y))}$

Por exemplo, $\text{sen}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1,1)$ tem por inversa arc sen, a qual é derivável e

$$(\text{arc sen})'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-(\text{sen}\, x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

A função $\cos: (0,\pi) \to (-1,1)$ tem por inversa arc cos, derivável com $(\text{arc cos})'(y) = \dfrac{-1}{\text{sen}\, x} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$

A função $\text{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ tem por inversa arctg, derivável com $(\text{arc tg})'(y) = \dfrac{1}{1/\cos^2 x} = \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\text{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+y^2}$.

Finalmente, $f(x) = x^{1/k}$ para $x \in (0,\infty)$ e $k \in \mathbb{N}$ é derivável e $f'(x) = \frac{1}{k} x^{\left(\frac{1}{k}-1\right)}$

(IV) A regra da cadeia: sejam $f: I \to J$ e $g: J \to \mathbb{R}$ funções deriváveis, I e J intervalos abertos e $f(I) \subset J$. Definimos a composta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ como $(g\circ f)(x) := g(f(x))$.

Afirmativa: $g \circ f$ é derivável e $(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) . f'(x)$.

Seja (h_n) seqüência qualquer tendendo a 0; analisemos $\lim\limits_{h_n \to 0} \dfrac{(g\circ f)(x+h_n) - (g \circ f)(x)}{h_n}$. Se existir, é igual a $(g\circ f)'(x)$.

Temos duas possibilidades:

a) a partir de algum $n_0 \in \mathbb{N}$, $f(x+h_n) \neq f(x)$.

Então $\dfrac{(g\circ f)(x+h_n) - (g\circ f)(x)}{h_n} =$

$$= \frac{g(f(x+h_n)) - g(f(x))}{h_n} = \frac{g(f(x+h_n)) - g(f(x))}{f(x+h_n) - f(x)} . \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}.$$

Segue-se que existe $\lim\limits_{h_n \to 0} \dfrac{(g\circ f)(x+h_n) - (g\circ f)(x)}{h_n}$, e é igual a $g'(f(x)) . f'(x)$ (de novo usamos $\lim\limits_{h_n \to 0} f(x+h_n) = f(x)$)

b) pode ocorrer que o conjunto $\mathbb{N}_1 = \{ n \in \mathbb{N} ; f(x+h_n) = f(x) \}$ seja infinito

Definamos $\mathbb{N}_2 = \{ n \in \mathbb{N} ; f(x+h_n) \neq f(x) \}$

Temos que, enquanto $h_n \in \mathbb{N}_1$,

$\dfrac{(g\circ f)(x+h_n) - (g\circ f)(x)}{h_n} = 0$, de modo que

$\lim\limits_{h_n \to 0} \dfrac{(g\circ f)(x+h_n) - (g\circ f)(x)}{h_n} = 0 = g'(f(x)) . f'(x)$, pois $f'(x) = 0$.

Por outro lado, enquanto $h_n \in \mathbb{N}_2$:

$\lim\limits_{h_n \to 0} \dfrac{(g\circ f)(x+h_n) - (g\circ f)(x)}{h_n} = g'(f(x)) . f'(x) = 0$

(cálculo em (a)). Logo, existe $\lim\limits_{h_n \to 0} \dfrac{(g\circ f)(x+h_n) - (g\circ f)(x)}{h_n}$

e é igual a 0, portanto coincidindo com $g'(f(x)) . f'(x)$.

Exemplo: se $f: I \to \mathbb{R}$ é derivável então $x \mapsto f(x)^n$ também é derivável, e sua derivada é $n f'(x) f(x)^{n-1}$.

④ Relação com Máximos e Mínimos de Funções

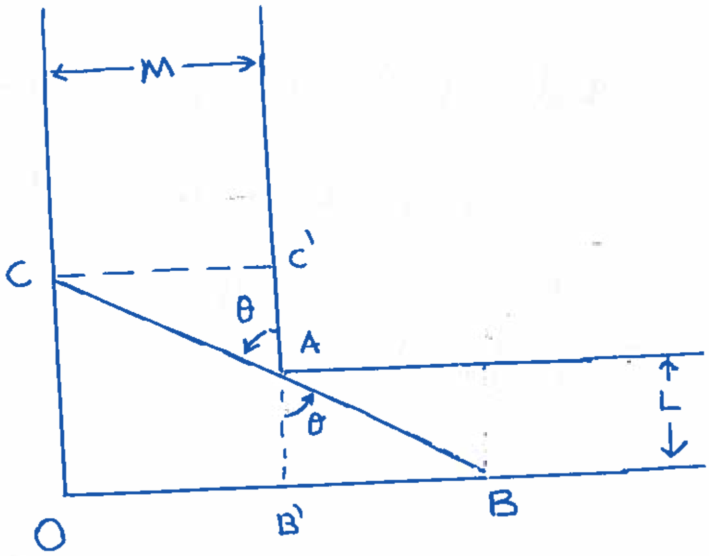
Consideremos uma função $f: I \to \mathbb{R}$ derivável num ponto interior $c \in I$. Suponhamos que exista $\delta > 0$ de modo que $(c-\delta, c+\delta) \subset I$ e $f(x) \leq f(c)$ sempre que $x \in (c-\delta, c+\delta)$; diremos que c é um ponto de máximo local de f.

Teorema: $c \in I$ ponto de máximo local $\Rightarrow f'(c) = 0$

prova: observemos que se $0 < h < \delta$ então $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$, e que se $-\delta < h < 0$ então $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$; a única opção para a $f'(c)$ é o valor 0 $\square$

Resultado análogo vale substituindo máximo local por mínimo local.

Exemplo: consideremos no plano o quadrante de coordenadas positivas e um segundo quadrante, contido no primeiro, de vértice A. Denotemos por L a distância entre as paralelas horizontais e por M a distância entre as paralelas verticais (assim, $A = (M, L)$). Dentre todos os segmentos passando por A com extremos nos lados do primeiro quadrante, desejamos determinar aquele (ou aqueles!) de comprimento mínimo.



Seja θ o ângulo indicado na figura; temos $0 < \theta < \pi/2$. Desejamos estudar o comprimento $|BC|$ em função de θ; observemos que se $\theta \to 0$ então $|BC| \to \infty$ (segmentos cada vez mais verticais), e que se $\theta \to \frac{\pi}{2}$ então $|BC| \to \infty$.

Portanto, existe necessariamente em $(0, \frac{\pi}{2})$ um ponto de mínimo global para a função $\theta \mapsto |BC|$. Vamos localizar este ponto a partir dos zeros de sua derivada. Temos $\frac{|AB'|}{|AB|} = \cos\theta$, logo $|AB| = \frac{L}{\cos\theta}$, e também $\frac{|CC'|}{|AC|} = \operatorname{sen}\theta$, donde $|AC| = \frac{M}{\operatorname{sen}\theta}$. Portanto, $|AC| + |AB| = \frac{M}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{L}{\cos\theta}$, e a nossa função se escreve como $f(\theta) = \frac{M}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{L}{\cos\theta}$ (observe novamente que $\lim_{\theta \to 0} f(\theta) = \lim_{\theta \to \pi/2} f(\theta) = \infty$.

Como vimos no Capítulo anterior, existe um ponto de mínimo global para f; vamos procurá-lo entre as raízes de $f'(\theta) = \frac{-M\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{L\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} =$

$= \frac{L\operatorname{sen}^3\theta - M\cos^3\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\,\cos^2\theta} = 0$; só existe uma raiz dada por $L\operatorname{sen}^3\theta - M\cos^3\theta = 0$, ou seja, $\theta_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{M}{L}\right)^{1/3}$.

Concluímos que θ_0 é o ponto de mínimo global de f.

Outra aplicação desta linha de pensamento é o

<u>Teorema</u> (Rolle): seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que f seja derivável em (a,b). Caso $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ t.q. $f'(c) = 0$.

<u>prova</u>:

1) Seja M o valor de máximo global de f. Caso seja assumido em algum $c \in (a,b)$, temos que $f'(c)=0$. Há também a possibilidade deste valor ser assumido nos extremos: $f(a)=f(b)=M$. Examinamos então o valor m de mínimo global de f. Caso seja assumido em $c \in (a,b)$, encontramos $f'(c)=0$; caso seja assumido nos extremos, de $f(a)=f(b)=M$ e $f(a)=f(b)=m$ concluímos que f é constante, logo $f'(x)=0$ para todo $x \in (a,b)$ $\square$

Como consequência, temos o

<u>Teorema do Valor Médio</u>: seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b). Existe então $c \in (a,b)$ de modo que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>prova</u>: o valor $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é a inclinação da secante ao gráfico de f que liga $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Esta secante tem por equação $\ell(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$; observe-se que $\ell(a)=f(a)$ e $\ell(b)=f(b)$. Portanto, $\varphi(x) = \ell(x) - f(x)$, para $x \in [a,b]$, satisfaz $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Consequentemente, existe $c \in (a,b)$ t.q. $\varphi'(c)=0$ (Teorema de Rolle). Mas $\varphi'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x)$, de onde se segue o Teorema $\square$

Duas aplicações simples mas importantes:

<u>Proposição</u>: seja $f: I \to \mathbb{R}$ função localmente constante. Então f é constante.

<u>prova</u>: sendo f localmente constante, temos que $f'(x)=0$ para todo $x \in I$. Considerando $a, b \in I$, temos que existe $c \in (a,b)$ de modo que $0 = f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, e daí $f(a)=f(b)$ $\square$

<u>Proposição</u>: seja $g: I \to \mathbb{R}$ função derivável.

(i) se $g'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ então g é crescente
se $g'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então g é estritamente crescente.

(ii) se $g'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, então g é decrescente
se $g'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então g é estritamente decrescente.

<u>prova</u>: basta usar o T.V.M. para comparar $f(a)$ e $f(b)$ quando $a, b \in I$ $\square$

Observe que se $g'(x)=0$ para todo $x \in I$ então g é constante.

<u>Exemplo</u>: um polinômio de grau $n \in \mathbb{N}$ possui no máximo n raízes.

Podemos proceder por indução. Se $n=1$, o polinômio é da forma $p(x) = \alpha x + \beta$, portanto possui 1 raiz. Suponhamos a afirmativa válida para polinômios de grau $n = k$; vamos prová-la para polinômios de grau $n = k+1$. Consideremos então $q(x)$ polinômio de grau $k+1$; se possuir pelo menos $k+2$ raízes $a_1 < a_2 < \dots < a_{k+2}$, pelo Teorema de Rolle $q'(x)$ possui uma raiz em cada intervalo (a_j, a_{j+1}).

Mas $q'(x)$ é polinômio de grau k, absurdo

Exemplo: sejam $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que $u' = -v$, $v' = u$, $u(0) = 1$, $v(0) = 0$.

Então $u(x) \equiv \cos x$ e $v(x) \equiv \operatorname{sen} x$.

Para ver isto, definamos

$$\varphi(x) = (u(x) - \cos x)^2 + (v(x) - \operatorname{sen} x)^2$$

Segue-se que

$$\varphi'(x) = 2(u(x) - \cos x)(u'(x) + \operatorname{sen} x) + 2(v(x) - \operatorname{sen} x)(v'(x) - \cos x)$$

$$= 2(u(x) - \cos x)(-v(x) + \operatorname{sen} x) + 2(v(x) - \operatorname{sen} x)(u(x) - \cos x)$$

$$= 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Daí: $\varphi(x)$ é constante; mas $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x) \equiv \cos x$ e $v(x) \equiv \operatorname{sen} x$

Portanto, sempre que definirmos funções u e v com as propriedades acima estamos de fato tratando do seno e do cosseno.

Exemplo: consideremos uma função $f: I \to \mathbb{R}$ derivável em $a \in I$ t.q. $f'(a) > 0$. Então existe $\delta > 0$ de modo que $f(x) > f(a)$ para todo $x \in (a, a+\delta)$. De fato, o limite $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ sendo positivo, não é possível existir sequência $h_n \to 0$, $h_n > 0$ de modo que $f(a+h_n) - f(a) \leq 0$, de modo que $f(x) > f(a)$ se x estiver suficientemente próximo de a (sendo $x > a$).

Mostre que $f(x) < f(a)$ se x estiver suficientemente próximo de a $(x<a)$.

Observe que tais afirmativas não se estendem aos pontos próximos de a. Mais precisamente, no primeiro caso onde $f(x)>f(a)$ para $x>a$ não podemos afirmar que $f(y)>f(x)$ se $y>x>a$ estão no intervalo $(a, a+\delta)$ (ou $f(y)<f(x)$ se $y<x<a$ no intervalo correspondente à esquerda de a). Veja o exemplo

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Temos $f'(0)=1$, mas a função tende a 0 quando $x\to 0$ de forma oscilante

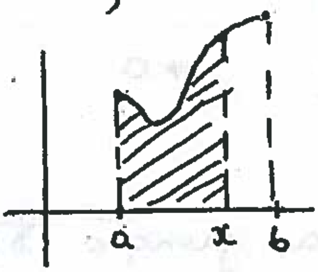
<u>Exercício</u>: seja g derivável, com g' contínua. Se $g'(a)>0$ então g é estritamente crescente numa vizinhança de a.

<u>Exemplo</u>: seja $f: I\to\mathbb{R}$ derivável. Sejam $a<b$ de modo que $f'(a)<0$ e $f'(b)>0$. Vimos que existe $\delta>0$ de modo que $f(x)<f(a)$ se $x\in(a,a+\delta)$ e $f(x)<f(b)$ se $x\in(b-\delta,\delta)$. Segue-se que existe um ponto c de mínimo global em (a,b), portanto $f'(c)=0$.

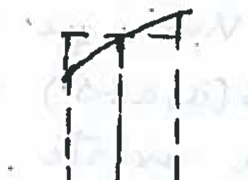
Considere agora mais geralmente $f'(a)<d<f'(b)$. Aplicando o raciocínio acima para $\varphi(x)=f(x)-dx$, concluímos que existe $c\in(a,b)$ de modo que $f'(c)=d$. (refaça o argumento para $f'(a)>d>f'(b)$). Portanto, $f'(x)$, mesmo que não seja contínua, satisfaz a propriedade do valor intermediário.

5. **Áreas e Derivadas**: vamos usar a noção intuitiva de área para regiões associadas ao gráfico de uma função contínua e positiva $f:[a,b] \to \mathbb{R}$.

A região em questão está limitada pelo eixo horizontal, o gráfico de f e as verticais pelos pontos $(a,0)$ e $(x,0)$; denotemos por $A(x)$ sua área.



Afirmativa: $A(x)$ é derivável e $A'(x) = f(x)$.
Para confirmar a afirmativa, observemos que $A(x+h) - A(x)$ é a área da região entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as verticais pelos pontos $(x,0)$ e $(x+h,0)$



Podemos encontrar $x^* \in (x, x+h)$ de modo que $A(x+h) - A(x)$ é igual à área do retângulo h e altura $f(x^*)$: $A(x+h) - A(x) = h\, f(x^*)$.
Logo, $\dfrac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x^*)$, e fazendo $h \to 0$ (e usando a continuidade de f) obtemos $A'(x) = f(x)$.
Mais adiante veremos a formulação rigorosa deste Exemplo por meio da noção de integral.

Um exemplo motivador consiste em tomar f como a velocidade $v(t)$ do movimento de uma partícula no eixo horizontal dependendo do tempo $t \in [t_0, t_1]$. Seja $x(t)$ a coordenada da partícula. A área da região limitada pelo gráfico de v, o eixo horizontal e as verticais por $(t_0, 0)$ e $(t, 0)$ é (esperamos!) $x(t) - x(t_0)$; sua derivada é $x'(t) = v(t)$.

Para verificar que a área é $x(t) - x(t_0)$, tomemos uma partição $t_0 < \bar{t}_1 < \ldots < \bar{t}_n = t$. A região delimitada pelo gráfico de v, o eixo horizontal e as verticais por $(\bar{t}_{j-1}, 0)$ e $(\bar{t}_j, 0)$ tem área $v(t^*_{j-1}) \cdot (\bar{t}_j - \bar{t}_{j-1})$ para algum $t^*_{j-1} \in (\bar{t}_{j-1}, \bar{t}_j)$. Portanto, $x(\bar{t}_j) - x(\bar{t}_{j-1})$ é aproximadamente $v(t^*_{j-1}) \cdot (\bar{t}_j - \bar{t}_{j-1})$, e $x(t) - x(t_0)$ é aproximadamente a soma $\sum_{j=1}^{n} v(t^*_{j-1})(\bar{t}_j - \bar{t}_{j-1})$. Quando o diâmetro da partição (isto é, o comprimento do maior dos subintervalos) tende a 0, o somatório $\sum_{j=1}^{n} v(t^*_{j-1})(\bar{t}_j - \bar{t}_{j-1})$ (o qual é aproximadamente $x(t) - x(t_0)$) tende à área da região descrita.

Vamos introduzir a função logaritmo. Consideremos $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, e tomemos a região delimitada pelo gráfico de g, o eixo horizontal e as verticais por $(1, 0)$ e $(x, 0)$; seja $A(x)$ sua área.

<u>definição</u>: se $x \geq 1$, $\log x := A(x)$, e se $0 < x \leq 1$, $\log x := -A(x)$

Evidentemente $\log 1 = 0$. Pelo que já expusemos, $\log x$ é derivável e $\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}$, mas repetiremos o argumento neste caso especial. Começamos com $x \geq 1$: se $h > 0$, vemos que $h \cdot \frac{1}{x+h} < A(x+h) - A(x) < h\frac{1}{x}$, de modo que $\frac{1}{x+h} < \frac{\log(x+h) - \log x}{h} < \frac{1}{x}$, e portanto $\lim_{h \to 0^+} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$.

Se $h < 0$, temos que $(-h) \cdot \frac{1}{x} < A(x) - A(x+h) < (-h) \cdot \frac{1}{x+h}$, e então $\frac{h}{x} > \log(x+h) - \log x > \frac{h}{x+h}$, logo

$$\frac{1}{x} < \frac{\log(x+h) - \log x}{h} < \frac{1}{x+h} \Rightarrow \lim_{h \to 0^-} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}.$$

Os argumentos são similares para $x \leq 1$.

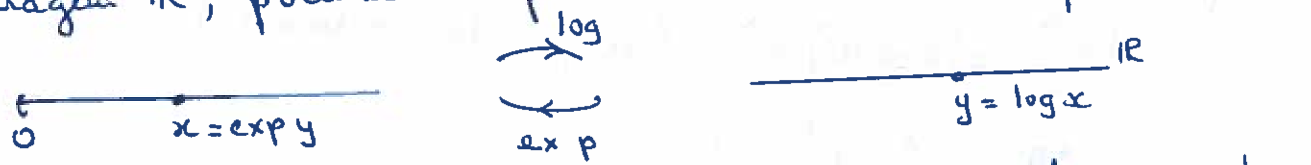
Propriedades: (i) Como $\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x} > 0$, ~~trata-se~~ de uma função estritamente crescente.

(ii) $\log(x \cdot t) = \log x + \log t$, para $x, t > 0$. Fixemos t e consideremos $h(x) = \log(x \cdot t)$. Pela Regra da Cadeia, $h'(x) = \frac{1}{x}$, portanto a função $g(x) = h(x) - \log x$ tem derivada nula e se segue, pelo T.V.M., que $g(x)$ é constante. Esta constante ~~é~~ obtém fazendo $x = 1$: $g(1) = \log t$, de modo que $h(x) - \log x = \log t$ e daí $\log(x \cdot t) = \log x + \log t$.

Como consequência de (ii), temos que $\log x^n = n \log x$, para $n \in \mathbb{Z}$, de modo que se $x > 1$: $\lim_{n \to \infty} \log x^n = \infty$, e se $x < 1$, $\lim_{n \to \infty} \log x^n = -\infty$. Sendo $\log$ função estritamente crescente, concluímos que $\lim_{x \to \infty} \log x = \infty$ e $\lim_{x \to 0} \log x = 0$. Assim, a imagem de $\log$ é $\mathbb{R}$.

Exercício: mostre que $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$, $\lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$

Como $\log x$ é estritamente crescente, de domínio $\mathbb{R}_{>0}$ e imagem $\mathbb{R}$, podemos definir sua inversa $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$



Temos que $\exp(0) = 1$, e $\exp y$ é estritamente crescente.

Como $\frac{d(\exp y)}{dy} = \frac{1}{\frac{d(\log x)}{dx}} = x$, vemos que $\frac{d(\exp y)}{dy} = \exp y$

Além disso, $\lim_{y\to -\infty} \exp y = 0$ e $\lim_{y\to\infty} \exp y = \infty$.

Exercício: mostre que $\lim_{y\to\infty} \frac{y}{\exp y} = 0$. De fato, $\lim_{y\to\infty} \frac{y^k}{\exp y} = 0$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

A função exponencial satisfaz

$$\exp(y+z) = [\exp y][\exp z].$$

Para ver isso, façamos $x = \exp y$ e $t = \exp z$, donde $y = \log x$ e $z = \log t$. Segue-se que $y + z = \log x + \log t = \log xt$, e portanto $xt = \exp(y+z)$.

$\Rightarrow (\exp y)(\exp z) = \exp(y+z)$

Definimos $e := \log 1$ (ou $\exp 1 = e$). Temos o seguinte limite notável: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

De fato, $\lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$; fazendo $h = \frac{1}{n}$, obtemos $\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$, portanto $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

definição: seja $a > 0$; $a^x := \exp(x \log a)$.

Vemos que o domínio desta função é $\mathbb{R}$, seu contradomínio é $\mathbb{R}^+$, $a^0 = 1$, $e^x = \exp x$ (por definição!). Temos que:

(i) $\frac{d(a^x)}{dx} = (\log a)\, a^x$ (regra da cadeia!)

(ii) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(iii) se $a > 1$, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

se $a < 1$, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$

No Capítulo sobre funções contínuas mostramos que uma aplicação contínua $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz $\varphi(x+t) = \varphi(x) + \varphi(t)$ para quaisquer x, t é necessariamente do tipo $\varphi(x) = (\varphi(1))\, x$. A aplicação φ, do ponto de vista algébrico, respeita a operação de soma em $\mathbb{R}$ (e do ponto de vista da Análise, é contínua). Variantes desta situação envolvem também a operação de multiplicação:

Exercício: 1) Seja $\psi: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ função contínua t.q. $\psi(x \cdot t) = \psi(x) + \psi(t)$. Então $\psi(x) = \psi(e) \log x$

2) Seja $\eta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ função contínua t.q. $\eta(y+z) = \eta(y) \cdot \eta(z)$. Então $\eta(y) = [\eta(1)]^y$

3) Descrever $\xi: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ contínua t.q. $\xi(x \cdot y) = \xi(x)\xi(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$

Exercício: estude a função $x \mapsto x^a$, definida para $x > 0$

⑥ Derivadas Sucessivas.

Consideremos uma função $f: I \to \mathbb{R}$, I intervalo.
Diremos que f é k vezes derivável em I se existem as derivadas sucessivas $f', (f')', ((f')')', \ldots$ k vezes; após j derivadas sucessivas, com $1 \leq j \leq k$, denotamos por $f^{(j)}(x)$ a função obtida.

Diremos que f e $(k+1)$ vezes derivável em $c \in I$ quando f for k vezes derivável em I e $f^{(k)}(x)$ for derivável em $c \in I$; escrevemos $f^{(k+1)}(c)$ para esta última derivada.

As funções apresentadas anteriormente (polinômios, funções trigonométricas, funções racionais, logaritmo, exponencial) são infinitamente deriváveis em seu domínio de definição.

Exemplo: seja $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases}$

Então f é infinitamente derivável, e $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Observemos inicialmente que $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-1/x} = \lim\limits_{y \to \infty} \frac{1}{e^y} = 0$, de modo que f é contínua em 0.
Além disso, f é infinitamente derivável em $\mathbb{R}_{>0}$ e $\mathbb{R}_{<0}$. Procedemos então à verificação em 0.

Antes, observemos que $f^{(k)}(x) = \frac{p(x)}{q(x)} e^{-1/x}$ em $\mathbb{R}_{>0}$,

onde p e q são polinômios (que dependem de k).

De fato, $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$, e supondo $f^{(k-1)}(x) = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} e^{-1/x}$,

obtemos $f^{(k)}(x) = \frac{q_1(x) p_1'(x) - p_1(x) q_1'(x)}{q_1^2(x)} e^{-1/x} + \frac{p_1(x)}{x^2 q_1(x)} e^{-1/x}$.

Quanto às derivadas em 0, começamos por observar que $\frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$ se $x<0$ e $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x e^{1/x}}$ se $x>0$.

Logo, $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} = 0$. Logo, f' existe em 0, e $f'(0)=0$

Em geral, suponhamos f k vezes derivável em 0, com $f^{(k)}(0) = 0$. De novo, $\lim_{x\to 0^-} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = 0$ e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{p(x)}{x\, q(x)} e^{-1/x} = \lim_{y\to\infty} \frac{p(1/y)}{1/y\, q(1/y) e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{\tilde p(y)}{\tilde q(y) e^y} = 0$$

($\tilde p$ e $\tilde q$ são também polinômios). Segue-se que $f^{(k+1)}(0)$ existe e $f^{(k+1)}(0) = 0$ □

O seguinte resultado é muito útil na análise do comportamento de funções em viz. de pontos críticos.

<u>Proposição</u>: seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivável, e duas vezes derivável em $c\in(a,b)$. Suponhamos $f'(c)=0$ e $f''(c)>0$ ($f''(c)<0$). Então c é ponto de mínimo local (máximo local)

<u>prova</u>: consideremos o caso $f''(c)>0$. Como $(f')'(c)>0$, temos que $f'(c+h) > f'(c) = 0$ se $h>0$ e $f'(c+h) < f'(c) = 0$ se $h<0$ (h suficientemente pequeno). Logo, $f(c+h)$ é estritamente crescente se $h>0$ e est. decrescente se $h<0$ (h suf. pequeno). Segue-se que c é ponto de mínimo local ■

Veremos mais tarde a situação onde $f'(c) = \dots = f^{(2k-1)}(c) = 0$ e $f^{(2k)}(c) \neq 0$, empregando a Fórmula de Taylor.

7 Convexidade de Funções:

Dizemos que $f: I \to \mathbb{R}$ é estritamente convexa para cima quando para quaisquer $a < b \in I$ temos que
$f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ para todo $x \in (a,b)$;
f é estritamente convexa para baixo quando
$f(x) > f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ para todo $x \in (a,b)$.

Teorema: suponhamos que $f: I \to \mathbb{R}$ seja duas vezes derivável. Se $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) para todo $x \in I$ então f é estritamente convexa para cima (estritamente convexa para baixo).

A prova deste Teorema depende do

Lema: seja $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável. Suponhamos $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ e $\varphi''(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Então $\varphi(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$.

prova: se φ tem algum valor positivo então existe $c \in (a,b)$ ponto de máximo global (portanto $\varphi'(c) = 0$). Como φ' é estritamente crescente vemos que $\varphi'(x) < 0$ se $x < c$. Segue daí que φ é estritamente decrescente em $[a,c]$, absurdo pois c é ponto de máximo.
Logo, $\varphi(x) \le 0$; como $\varphi \equiv 0$ está excluído pois $\varphi''(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$, φ assume algum valor negativo. Afirmamos que $\varphi(x) < 0$ se $x \in (a,b)$. Caso 0 seja assumido como valor em algum $d \in (a,b)$, então d é ponto de máximo global, e repetimos o argumento acima.

A demonstração do Teorema é feita definindo $\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ para $x \in [a,b]$. Temos $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ e $\varphi''(x) = f''(x) > 0$. Aplicando o lema, concluímos que $f(x) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ para $x \in (a,b)$.

Exemplos: 1) $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$ é estritamente convexa para baixo pois $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

2) $tg: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ é estritamente convexa para baixo se $x < 0$ e estritamente convexa para cima se $x > 0$, pois $tg'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ e $tg''(x) = \frac{2\, tg(x)}{\cos^2 x}$.

3) $h(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $x > 0$. Temos $h''(x) = \frac{-2x+1}{x^4} e^{-1/x}$, $x > 0$.
Daí, h é estritamente convexa para cima em $(0, \frac{1}{2})$ e estritamente convexa para baixo em $(\frac{1}{2}, \infty)$.
Observe que $\lim_{x \to \infty} h(x) = 1$

Quando aparecem pontos onde a derivada segunda se anula, faz-se necessária análise mais acurada.
Por exemplo, as derivadas segundas em 0 tanto de $x \mapsto x^3$ quanto de $x \mapsto x^4$ se anulam. No primeiro caso temos mudança de convexidade em 0, e o segundo caso é estritamente convexo para cima.

Exercício: suponha $f: I \to \mathbb{R}$ convexa para cima (isto é, pedimos $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ se $x \in (a,b)$, para quaisquer $a < b$ em I). Mostre que $f''(x) \geq 0$ em I.