Vetores no espaço – 2

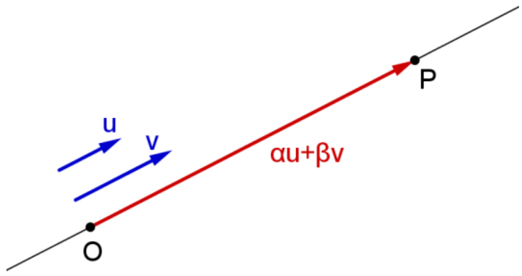
Combinação linear

Dados dois vetores u e v uma *combinação linear* desses vetores é um vetor w definido por

$$w = \alpha u + \beta v$$

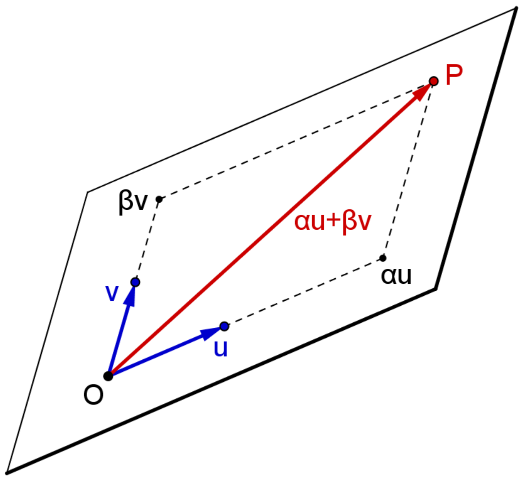
onde α e β são números reais quaisquer.

Se u e v forem colineares (e não nulos) então qualquer combinação linear deles é colinear com eles.



Nesse caso, as combinações lineares de u e v geram a reta que passa pela origem e tem a direção dos vetores dados: $P = \alpha u + \beta v$.

Se u e v não forem colineares então qualquer combinação linear deles é um vetor situado no plano que contém a origem e esses dois vetores: $P = \alpha u + \beta v$.



Exemplo
Verifique se $w = (4, 9, -5)$ é combinação linear de $u = (2, 1, -1)$ e $v = (1, -3, 1)$.

Solução
Vamos escrever $w = \alpha u + \beta v$ e verificar se existem α e β reais que satisfazem essa igualdade.

$$(4, 9, -5) = \alpha(2, 1, -1) + \beta(1, -3, 1)$$

Essa equação vetorial é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha - 3\beta = 9 \\ -\alpha + \beta = -5 \end{cases}$$

Temos mais equações que incógnitas. Vamos então escolher duas delas, resolver encontrando os valores de α e β. Se esses valores satisfizeram a terceira equação então eles serão a solução do sistema e a combinação linear está estabelecida Caso contrário, não há solução e o vetor w não é combinação linear de u e v.

Vamos escolher a segunda e terceira equações do sistema acima:

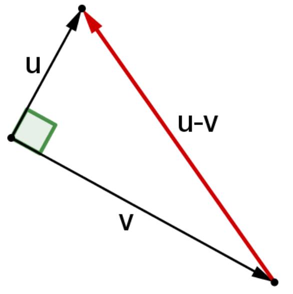
$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = 9 \\ -\alpha + \beta = -5 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $\alpha = 3,\ \beta = -2$.
Verificando esses valores na primeira equação,

$$2\alpha + \beta = 4 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 3 + (-2) = 4 \qquad ok!$$

Concluímos, então que $w = 3u - 2v$.

A condição de perpendicularismo



Estaremos, aqui, seguindo os passos do que fizemos no plano. Consideremos, então dois vetores perpendiculares $u = (x, y, z)$ e $v = (x', y', z')$, nenhum deles nulo.

O teorema de Pitágoras fornece:

$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Desenvolvendo e simplificando chegamos a:

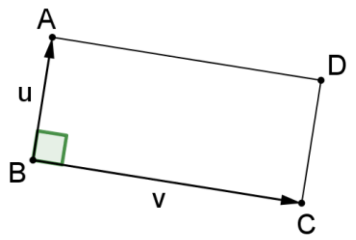
$$xx' + yy' + zz' = 0$$

Vetores perpendiculares satisfazem essa relação e se essa relação é satisfeita para vetores não nulos, então esses vetores são perpendiculares.

Exemplo

Os pontos $A = (5, 1, 4)$, $B = (2, -1, 3)$ e $C = (-1, 2, k)$ são vértices do retângulo $ABCD$. Calcule a área desse retângulo.

Solução



Observe a figura. Temos:

$u = \overrightarrow{BA} = (3, 2, 1)$ e $v = \overrightarrow{BC} = (-3, 3, k - 3)$ são perpendiculares. Pela relação acima,

$$3 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (k - 3) = 0$$

Daí $k = 6$.

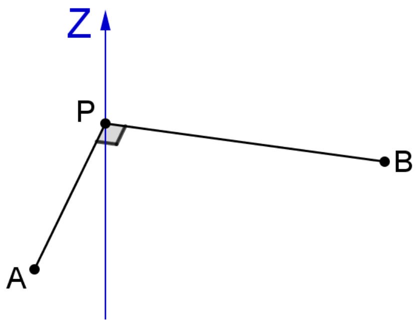
Assim, $|u| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$ e $|v| = \sqrt{9 + 9 + 9} = 3\sqrt{3}$.

A área do retângulo é $S = \sqrt{14} \cdot 3\sqrt{3} = 3\sqrt{42}$.

Exercício

Dados $A = (4, 1, 2)$ e $B = (1, -1, 6)$ determine o ponto P do eixo Z de forma que o ângulo APB seja reto.

Solução



Temos $P = (0, 0, k)$.

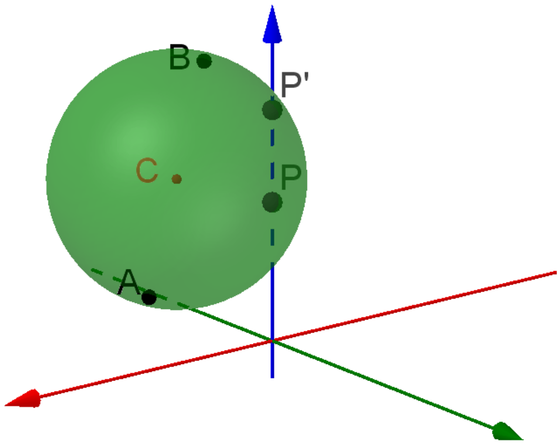
$\overrightarrow{PA} = (4, 1, 2 - k)$ e $\overrightarrow{PB} = (1, -1, 6 - k)$

Pela condição de perpendicularismo,

$$4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (2 - k)(6 - k) = 0$$

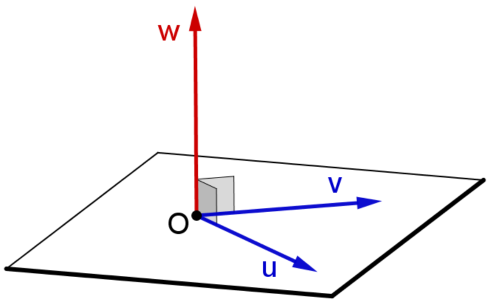
Resolvendo, encontramos $k = 3$ e $k = 5$.

Há duas soluções: $P = (0, 0, 3)$ e $P' = (0, 0, 5)$.



Exercício

Determine um vetor w simultaneamente perpendicular aos vetores $u = (1, -2, -3)$ e $v = (4, 1, -1)$.



Solução

Seja $w = (a, b, c)$

Como w é simultaneamente perpendicular aos vetores $u = (1, -2, -3)$ e $v = (4, 1, -1)$ aplicamos a condição de perpendicularismo no espaço duas vezes. Obtemos

$$\begin{cases} a - 2b - 3c = 0 \\ 4a + b - c = 0 \end{cases}$$

Temos 1 grau de liberdade. Escrevemos

$$\begin{cases} a - 2b = 3c \\ 4a + b = c \end{cases}$$

Resolvendo,

$$\begin{cases} a - 2b = 3c \\ 8a + 2b = 2c \end{cases}$$

Somando,

$$9a = 5c \quad \rightarrow \quad a = \frac{5c}{9}$$

Escolho $c = 9$ e, portanto tenho $a = 5$ e, consequentemente, $b = -11$.

O vetor $w = (5, -11, 9)$ é simultaneamente perpendicular aos vetores $u = (1, -2, -3)$ e $v = (4, 1, -1)$.

O produto escalar

Seguindo o que fizemos no $\mathbb{R}^2$ definimos o produto escalar dos vetores $u = (x, y, z)$ e $v = (x', y', z')$ por

$$u \cdot v = xx' + yy' + zz'$$

O produto escalar de dois vetores possui as (já conhecidas) propriedades.

$u \cdot v = v \cdot u$

$u \cdot (v_1 + v_2) = u \cdot v_1 + u \cdot v_2$

$(u_1 + u_2) \cdot v = u_1 \cdot v + u_2 \cdot v$

$(\alpha u) \cdot v = \alpha(u \cdot v) = u \cdot (\alpha v), \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$u \cdot u = |u|^2$

Já sabemos que para vetores não nulos u e v,

$$u \cdot v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \perp v$$

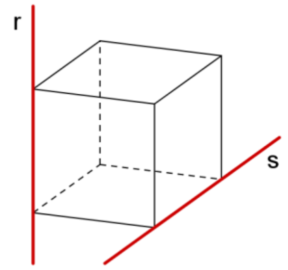
Continuaremos, então, a obter no espaço os resultados que são análogos aos obtidos no plano; a projeção de um vetor sobre outro e o cosseno do ângulo entre dois vetores.

Perpendicularismo entre retas e planos

Vamos recordar um conceito e um teorema da geometria no espaço.

1. <u>Retas ortogonais</u>

Duas retas são ortogonais quando formam ângulo reto. Essas retas podem ser concorrentes ou reversas. Se forem concorrentes elas também são chamadas de perpendiculares. Para verificar se duas retas do espaço são ortogonais calcule o produto escalar de seus vetores diretores. Se o resultado for zero, elas são ortogonais.



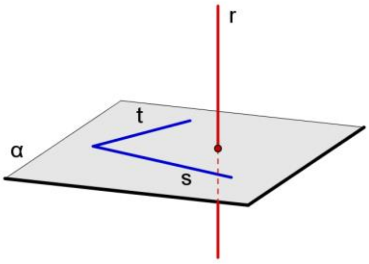
Por exemplo, considerando o cubo da figura acima, as retas r e s são ortogonais. Quando as retas r e s são ortogonais escrevemos $r \perp s$, independente de serem concorrentes ou não.

2. <u>Perpendicularismo entre reta e plano</u>

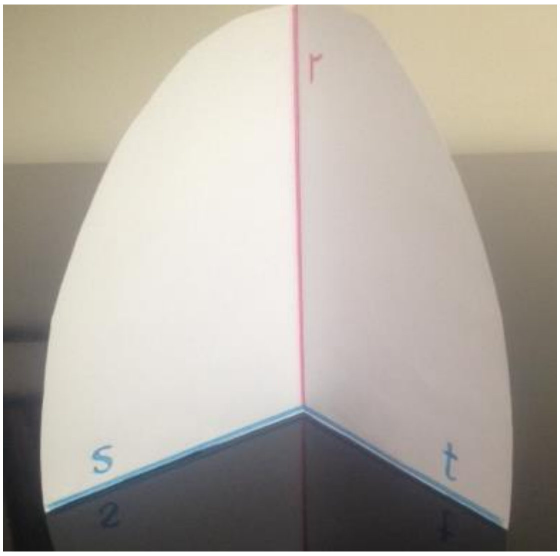
Uma reta é perpendicular a um plano quando ela for ortogonal a todas as retas do plano. Um importante teorema da geometria espacial (que vamos demonstrar mais adiante) diz que “ *se uma reta for ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, ela é perpendicular a esse plano*”.

Na figura ao lado, as retas s e t são concorrentes e α é o plano definido por elas.

$$r \perp s \;\; e \;\; r \perp t \quad \Rightarrow \quad r \perp \alpha$$

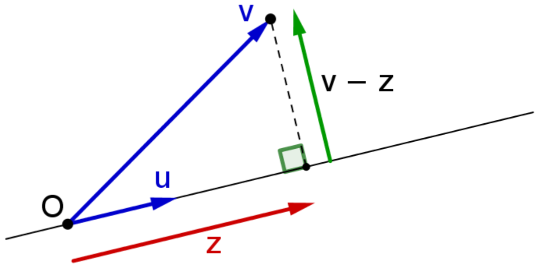


Intuitivamente...



Projeção de um vetor sobre outro

Na figura abaixo o vetor z é chamado de vetor projeção do vetor v sobre a reta que contém o vetor u.



Observe que z é colinear com u. Então, $z = \alpha u$ para algum α real.

A projeção (ortogonal) do vetor v sobre a reta que contém o vetor u mostra que o vetor $v - z$ é perpendicular a u. Então, $(v - z) \cdot u = 0$

Temos então:

$$(v - z) \cdot u = 0$$

$$v \cdot u - z \cdot u = 0$$

$$v \cdot u - (\alpha u) \cdot u = 0$$

$$v \cdot u - \alpha(u \cdot u) = 0$$

$$v \cdot u = \alpha(u \cdot u)$$

$$\alpha = \frac{v \cdot u}{u \cdot u}$$

Assim, a projeção de v sobre u é o vetor

$$z = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

Exemplo

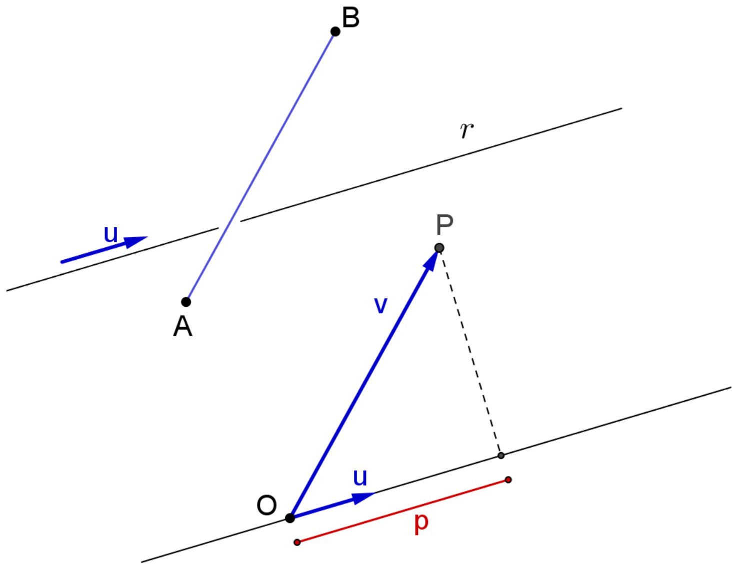
São dados os pontos $A = (0, 3, -2)$ e $B = (3, 5, 2)$ e a reta $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Determine o comprimento da projeção do segmento AB sobre a reta r.

Solução

A figura a seguir mostra a reta r e o segmento AB. Para o observador da situação a reta r está atrás do segmento AB.

Mas isso não importa, pois a solução de um problema no espaço não pode depender da posição de um observador. A figura é apenas uma fantasia para auxiliar o raciocínio e a aplicação das ferramentas desenvolvidas.



Devemos entender a situação da seguinte forma.

A partir da origem do espaço consideremos a reta r', paralela à reta r dada com seu vetor diretor $u = (2, 1, 1)$.

Também, a partir da origem, traçamos o vetor $v = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

$$v = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, 2, 4)$$

O comprimento da projeção do segmento AB sobre a reta r é o comprimento da projeção do vetor v sobre a reta que contém u. E isso, sabemos fazer.

O vetor projeção de v sobre u é

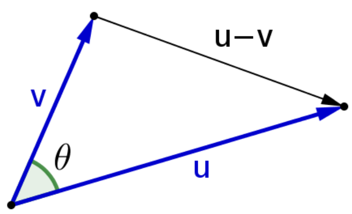
$$z = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

$$z = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}(2, 1, 1) = \frac{12}{6}(2, 1, 1) = 2(2, 1, 1)$$

O comprimento p dessa projeção é o módulo do vetor z. Assim,

$$p = |z| = 2\sqrt{4 + 1 + 1} = 2\sqrt{6}$$

Ângulo entre dois vetores



Seja θ o ângulo entre dois vetores u e v.

A lei dos cossenos fornece

$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta$$

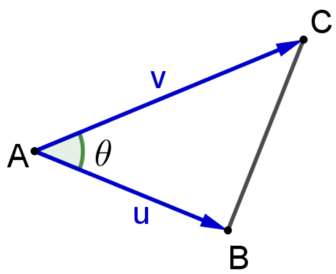
Utilizando propriedades anteriores,

$$(u - v) \cdot (u - v) = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta$$
$$u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta$$
$$|u|^2 - u \cdot v - u \cdot v + |v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta$$
$$2u \cdot v = 2|u||v| \cos \theta$$
$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

Exemplo

Dados os pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 3, 1)$ e $C = (7, 5, 1)$ determine o cosseno do ângulo $\theta = BAC$.

Solução



Pelo vértice do ângulo desenhamos dois vetores:

$$u = \overrightarrow{AB} = (2, 1, -2)$$

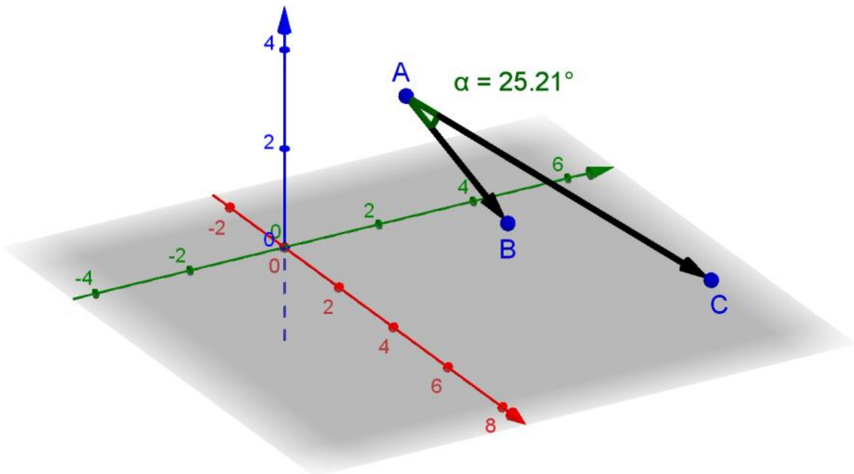
$$v = \overrightarrow{AC} = (6, 3, -2)$$

O ângulo formado por eles é tal que

$$\cos\theta = \frac{2\cdot 6 + 1\cdot 3 + (-2)(-2)}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{36+9+4}} = \frac{19}{21}$$

Obs

Os desenhos são apenas esquemas. Não há, nesse caso, a menor necessidade de tentar exibir a posição real dos objetos.

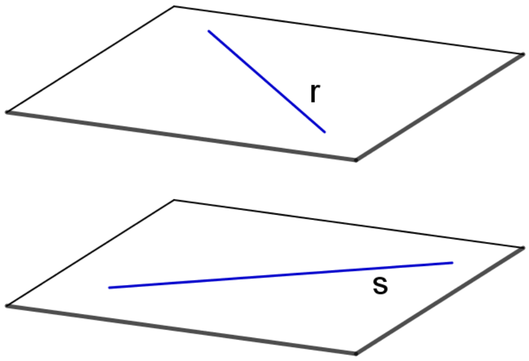


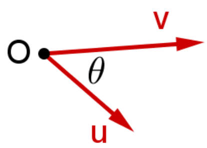
Ângulo entre duas retas

O ângulo entre duas retas no espaço é o menor ângulo formado por dois vetores paralelos a elas. Quando as retas são reversas, o ângulo não é visível, mas está definido.

Portanto, se u e v são vetores diretores das retas r e s, o ângulo θ formado por elas é definido por:

$$\cos\theta = \frac{|u\cdot v|}{|u||v|}$$





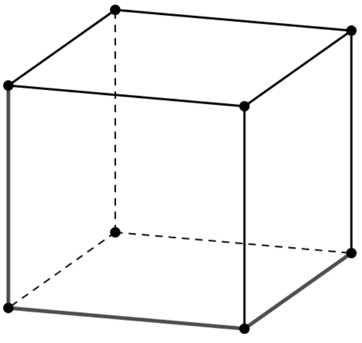
Exercício

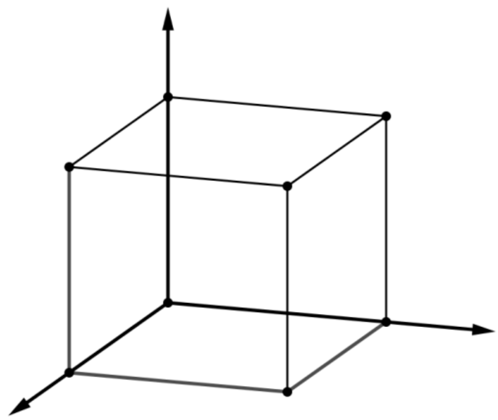
Usando coordenadas calcule o ângulo entre duas diagonais de um cubo.

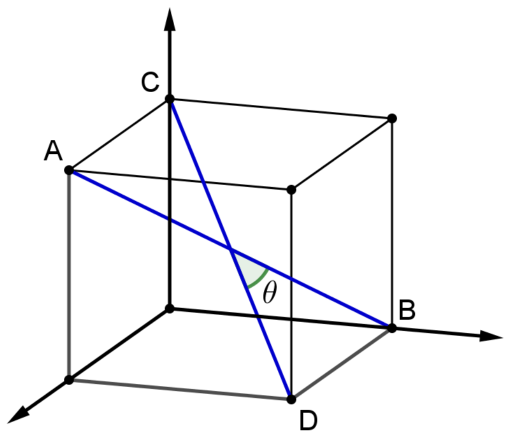
Desenhe um cubo. Ponha, por exemplo, aresta 1.

Estabeleça um sistema de coordenadas.

Desenhe duas diagonais e observe o ângulo que você deseja calcular.







Solução

$$A = (1, 0, 1), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1), \quad D = (1, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -1), \quad \overrightarrow{CD} = (1, 1, -1)$$

$$\cos\theta = \frac{-1 + 1 + 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\theta \cong 70{,}53°$$