FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
Avenida Praia de Botafogo, 190
Botafogo - Rio de Janeiro - RJ

Disciplina: Geometria Analítica	**Professor:** Eduardo Wagner	**Data:** 28/05/2024
Monitores: Matheus Carvalho e Henzo Felipe		
Nome:		

1. Vamos começar fazendo a translação.

$$\begin{aligned} 5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16x - 16y &= 0 \\ 5(x' + a)^2 - 6(x' + a)(y' + b) + 5(y' + b) + 16(x' + a) - 16(y' + b) &= 0 \\ 5x'^2 - 6x'y' + 5y'^2 + x'(10a - 6b + 16) + y'(10b - 6a - 16) + 5a^2 - 6ab + 5b^2 + 16a - 16b &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10a - 6b &= -16 \\ a &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 10b - 6a &= 16 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

$$5x'^2 - 6x'y' + 5y'^2 = 16$$

Agora, vamos rotacionar. Note que A e C são iguais, logo $\tan(2\theta)$ não está definida, portanto, $2\theta = 90 \rightarrow \theta = 45$.

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y}) \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y})\right)^2 - 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y})\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y})\right) + 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y})\right)^2 &= 16 \\ \frac{5}{2}(\overline{x} - \overline{y})^2 - \frac{6}{2}(\overline{x} - \overline{y})(\overline{x} + \overline{y}) + \frac{5}{2}(\overline{x} + \overline{y})^2 &= 16 \\ 5(\overline{x}^2 - 2\overline{xy} + \overline{y}^2) - 6(\overline{x}^2 - \overline{y}^2) + 5(\overline{x}^2 - 2\overline{xy} + \overline{y}^2) &= 32 \\ 4\overline{x}^2 + 16\overline{y}^2 &= 32 \\ \frac{\overline{x}^2}{8} + \frac{\overline{y}^2}{2} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 = 8 &\rightarrow a = 2\sqrt{2} \\ b^2 = 2 &\rightarrow b = \sqrt{2} \\ c^2 = 6 &\rightarrow c = \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\overline{F_1} = (\sqrt{6}, 0) \qquad \overline{F_2} = (-\sqrt{6}, 0) \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$$

Agora, vamos encontrar as coordenadas no sistema inicial. Primeiramente, temos que ter em mente, de forma bem clara, os nossos passos.

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y}) \qquad\qquad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y})$$

$$F_1' = \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2}\right) = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \qquad F_2' = \left(\frac{\sqrt{2}(-\sqrt{6})}{2}, \frac{\sqrt{2}(-\sqrt{6})}{2}\right) = \left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$$

Agora que revertemos a rotação, vamos reverter a translação e chegar no sistema de coordenadas original.

$$x = x' + a = x' - 1 \qquad y = y' + b = y' + 1$$

$$F_1 = (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1) \qquad F_2 = (-\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} + 1)$$

2. Vamos começar definindo o ponto $H = (0,0,0)$, portanto, $E = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a)$, $C = (0, a, a)$ e $G = (\frac{a}{2}, a, \frac{a}{2})$.

Temos que, agora, calcular o ponto F.

$$F = \frac{C+G}{2} = \left(\frac{a}{4}, a, \frac{3a}{4}\right)$$

Agora, basta calcular a distância entre o ponto F e o ponto E.

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - a\right)^2 + \left(a - \frac{3a}{4}\right)^2}$$
$$\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2}$$
$$\sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}}$$
$$\frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Sabemos que o vetor $\vec{FE} = (\frac{a}{4}, -\frac{a}{2}, \frac{a}{4})$ e que o vetor $\vec{FH} = -F = (-\frac{a}{4}, -a, -\frac{3a}{4})$, visto que no nosso sistema de coordenadas o H é a origem. Tendo os dois vetores em mãos, vamos agora encontrar o cosseno entre eles aplicando a fórmula.

$$= \frac{-\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{16}}{\sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}}\sqrt{\frac{a^2}{16} + a^2 + \frac{9a^2}{16}}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{4}\frac{a\sqrt{26}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{26}} = \frac{2}{\sqrt{39}}$$

3. Note que a cônica é da forma

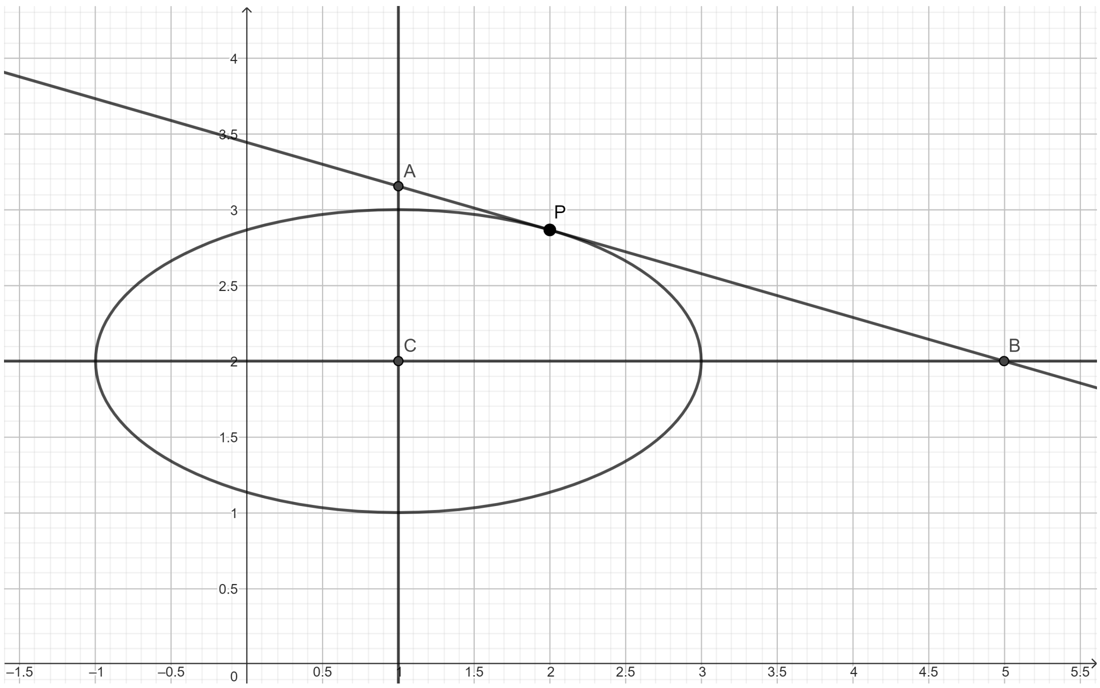
$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

ou seja, é uma elipse. Sua reta tangente naquele ponto tem equação

$$\frac{x-1}{4} + \frac{(\sqrt{3})(y-2)}{2} = 1$$

E, dessa forma, sua intersecção com as outras duas retas serão os pontos $A = (1, 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3})$ e $B = (5, 2)$ (verifique). Ademais, o último ponto é dado pela interseção de $x = 1$ e $y = 2$, i.e., $C = (1, 2)$. Por fim, a área é calculada por meio do produto vetorial de quaisquer dois vetores dado por estes pontos:

$$Area = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 3 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{matrix}\right\| = \sqrt{3}$$



4. Questão anulada: no lugar do vértice era para ser o foco.

5. Faça o eixo Oy coincidir com d e trace Ox passando por F. Desta forma, com $p = d(F, d)$, tem-se $F = (p, 0)$ e $P = (x, y)$ um ponto qualquer. Basta agora trabalhar na equação:

$$d(P, F) = ed(P, d) \implies (x - p)^2 + y^2 = e^2x^2 \iff x^2(1 - e^2) - 2px + p^2 + y^2 = 0$$

Caso $e < 1$, a equação acima pode ser fatorada em uma elipse.

Caso $e = 1$, ela se torna uma parábola.

Por fim, quando $e > 1$ teremos uma hipérbole.

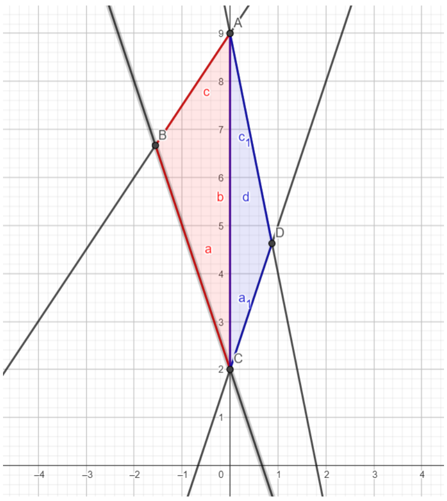
6. (Extra) Vamos começar fatorando a primeira equação.

$$\begin{aligned} -15x^2 + 2xy + y^2 + 17x - 11y + 18 = 0 \\ (y - 3x - 2)(y + 5x + -9) = 0 \end{aligned}$$

Vamos, agora, fatorar a segunda equação.

$$\begin{aligned} -\frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}xy + y^2 - 24x - 11y + 18 = 0 \\ (y + 3x - 2)(y - \frac{3x}{2} - 9) = 0 \end{aligned}$$

Temos em mãos as equações das quatro retas. Vamos, nesse momento, calcular a área do quadrilátero delimitado por elas. Vamos dividí-la em duas áreas menores, dois triângulos, e calcular as áreas desses triângulos separadamente.



Temos os pontos $A = (0, 9)$ e $C = (0, 2)$, vamos encontrar os pontos B e D encontrando a interseção entre as retas. O ponto B é a inteseção entre as retas $y + 3x - 2$ e $y - \frac{3x}{2} - 9$. O ponto D é a interseção das duas outras retas $y - 3x - 2$ e $y + 5x + -9$.

$$B = \left(-\frac{14}{9}, \frac{20}{3}\right) \qquad D = \left(\frac{7}{8}, \frac{37}{8}\right)$$

Vou calcular passo a passo a área do triângulo vermelho (A_1), mas para o triângulo azul (A_2) vou colocar apenas o valor. Os dois cálculos são análogos e não diferem em nada além dos valores envolvidos.

Vamos começar calculando os vetores $\vec{BA} = (\frac{14}{9}, \frac{7}{3})$ e $\vec{BC} = (\frac{14}{9}, -\frac{14}{3})$. Sabemos que a área do triângulo delimitado por dois vetores é a metade do módulo do determinante da matriz composta por suas componentes.

$$A_1 = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 14/9 & 7/3 \\ 14/9 & -14/3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{98}{9}\right) = \frac{49}{9} \qquad A_2 = \frac{49}{16}$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{49}{9} + \frac{49}{16} = \frac{1225}{144}$$

7. (a) Pelo enunciado, sabe-se que $C = (0, \frac{a+b}{2})$ é o centro da elipse e seus parâmetros são $a' = \frac{a+b}{2}$, $b' = \sqrt{ab}$ e $c' = \frac{b-a}{2}$. Então teremos a equação

$$\frac{(y - \frac{a+b}{2})^2}{(\frac{a+b}{2})^2} + \frac{x^2}{ab} = 1$$

que, após simplificada, chega-se ao resultado desejado.
A parábola tem foco $F = (0, a)$, portanto seu parâmetro é $p = 2a$. A equação então é imediata.

(b) Tomando o limite sobre

$$y_e = \frac{1}{a+b} y_e^2 + \frac{1}{4a} \frac{a+b}{b} x^2$$

vemos que $y_e \to \frac{1}{4a} x^2 = y_p$, como queríamos.