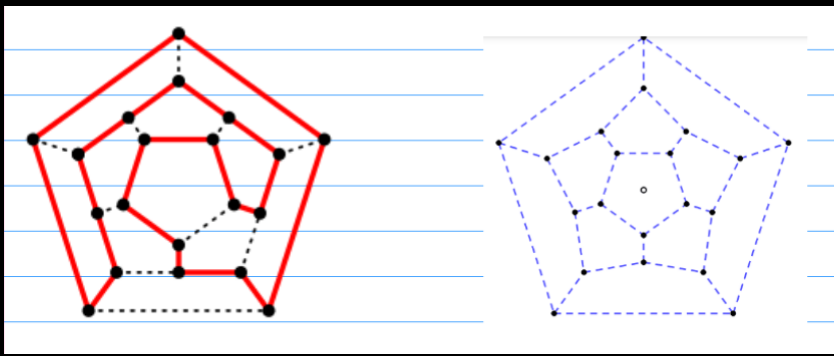
Matemática Discreta 22/08/2024

Ciclos Hamiltonianos

- Um ciclo é chamado hamiltoniano se ele passa por todos os vértices de G sem repetições, com excessão do inicial e do final



Teorema

[Ore-1960] ⇒ Se $G=(V,E)$ é um grafo simples, com $n \geq 3$ vértices que satisfaz:

$$\delta(v) + \delta(w) \geq n$$

para todo par de vértices não adjacentes v, w, então G é Hamiltoniano

Dem

Supomos que G satisfaz as hipóteses de teorema, mas G não é hamiltoniano.

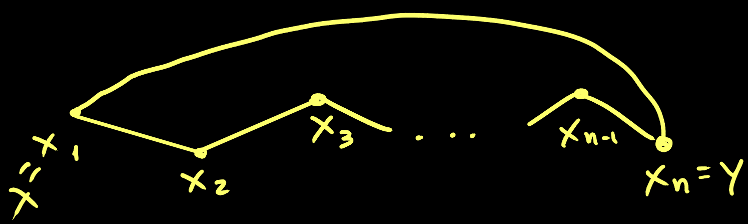
Adicionamos arestas entre vértices não-adjacentes até obter um grafo hamiltoniano

$$\underset{\text{não H.}}{G} \xrightarrow{+\text{aresta}} \underset{\text{não H.}}{\tilde{G}} \xrightarrow{+\text{aresta}} \cdots \xrightarrow{+\text{aresta}} \underset{\text{não H.}}{\bar{G}} \xrightarrow{+\text{aresta}} G_F$$

Observação ⇒ Todo K_n é Hamiltoniano

Todo grafo simples é subgrafo de K_n

Seja H um ciclo Hamiltoniano em G_F, necessariamente H contém a última aresta adicionada, que chamamos $\{x, y\}$



Se $\exists\, x_i, i \in \{2, \dots, n\} \,/\, x \in N(x_i) \wedge y \in N(x_{i-1})$, então $(x = x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{n-1}, \dots, x_i, x)$ é um ciclo Hamiltoniano em $\overline{G}$, o que contradiz a hipótese que G_F é o primeiro hamiltoniano.

Vamos provar que tal índice i existe

$A := \{ i \in \{2, \dots, n\} \,/\, x \in N(x_i) \text{ em } G \}$ (vizinhos de x em G)

$B := \{ j \in \{2, \dots, n\} \,/\, y \in N(x_{j-1}) \text{ em } G \}$ (vizinhos de y em G)

$$\boxed{\delta(v) + \delta(w) \geq n, \ \forall v, w \,/\, v \notin N(w)}$$

Dado que x e y não são adjacentes em G, tem-se que

$$\boxed{\delta(x) + \delta(y) \geq n}$$

ESSA CONDIÇÃO IMPLICA QUE

$$|A| + |B| \geq |A \cup B| \text{ ou } n$$

SE $A \cap B = \emptyset$, CHEGAMOS A UMA CONTRADIÇÃO DADO QUE

$$A \cup B \subseteq \{2, \dots, n\}$$

LOGO DEVE-SE

$$|A \cup B| \leq n-1$$

TEOREMA

[DIRAC - 1952] ⇒ SE $G(V,E)$ É SIMPLES COM $|V| \geq 3$ E $\delta(v) \geq \frac{n}{2}, \forall v \in V$ ENTÃO G É HAMILTONIANO

DEM

SE $\delta(v) \geq n/2, \forall v \in V$ ENTÃO $\forall v, w \in V$

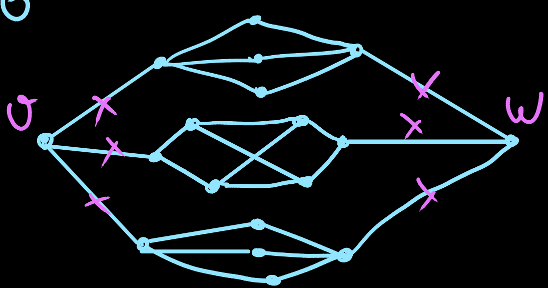
$$\delta(v) + \delta(w) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$$

APLICANDO O TEOREMA DE ORE, CONCLUÍMOS QUE G É HAMILTONIANO

TEOREMA

⟶ SE G É HAMILTONIANO, ENTÃO $\forall S \subseteq V$ NÃO VAZIO, O SUBGRAFO DE G OBTIDO REMOVENDO OS VÉRTICES DE S POSSUI NO MÁXIMO $|S|$ COMPONENTES CONEXOS

EXEMPLO



$v, w \in S$, $|S| = 2$ → NÃO HAMILTONIANO

↳ REMOVENDO S, O GRAFO OBTIDO TEM 3 COMPONENTES CONEXOS.

DEM

SEJA $S \subseteq V$ NÃO VAZIO DENOTAMOS COM "G/S" O SUB-GRAFO DE G REMOVENDO S. SEJA H UM CICLO HAMILTONIANO DE G.

AO PERCORRER O CICLO H, CADA VEZ QUE PASSAMOS POR UM COMPONENTE CONEXO DE G/S, AO SAIR, TEMOS QUE IR PARA UM VÉRTICE DE S, LOGO, NÃO PODE HAVER MAIS COMPONENTES G/S DO QUE VÉRTICES EM S.