ÁLGEBRA LINEAR

03/09/24

LISTA 3

1. Ache a decomposição LU da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 2L_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

E

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_2 + 2L_1 \\ L_3 - 4L_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 + 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Ache a decomposição LU da matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

Qual condição para a, b, c, d para que A ter quatro pivots?

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & b & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \\ L_5 - L_1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & c-a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & d-a & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3 - L_2 \\ L_4 - L_2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & c-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & d-b & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 - L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & c-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-c & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

U E

ACHAR L

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_2 + L_1 \\ L_3 + L_2 \\ L_4 + L_3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

L

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}$$

PARA A TER 4 PIVÔS, TEMOS QUE:

$$\boxed{\begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq a \\ c \neq b \\ d \neq c \end{matrix}}$$

3. Ache a uma matriz de permutação P tal que:

(a) P é 3x3, $P \neq I$ e $P^3 = I$.

(b) S é 4x4 e $S^4 \neq I$

(a) PRECISO TROCAR 2 OU 3 LINHAS, DE FORMA QUE EU REPETIR O PROCESSO 3 VEZES EU OBTENHO I.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A MATRIZ $P^3 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^3 = I$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \overset{S}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \xrightarrow{2} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \overset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$I \cdot S = S \quad \therefore \quad S^4 = S \neq I$

4. Seja A uma matriz $4x4$. Quantas entradas de A podem ser escolhidas independentemente caso A seja

(a) simétrica ($A^T = A$)?

(b) anti-simétrica ($A^T = -A$)?

(a) $\begin{bmatrix} a & e & f & h \\ e & b & g & i \\ f & g & c & j \\ h & i & j & d \end{bmatrix} \Rightarrow$ 10 ELEMENTOS

(b) $\begin{bmatrix} 0 & -e & -f & -h \\ e & 0 & g & -i \\ f & g & 0 & -j \\ h & i & j & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ 6 ELEMENTOS

5. Suponha que A já é triangular inferior com 1's na diagonal. Mostre que $U = I$.

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \vdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

→ SABENDO DESSA PROPRIEDADE, NO PROCESSO DE ELIMINAÇÃO, USAMOS DO PIVÔ PARA ELIMINAR OS TERMOS ABAIXO.

COMO HÁ APENAS 1 NA DIAGONAL, TODA ELIMINAÇÃO É FEITA COMO

→ ELIMINAR TERMOS DA COLUNA K: $L_i + x_{ik} \cdot L_k$, ONDE i É CADA LINHA ABAIXO DA LINHA K, PORÉM, TODOS OS ELEMENTOS À DIREITA DO PIVÔ SÃO 0, OU SEJA, NOS ELEMENTOS À DIREITA A CONTA FICA $[\ldots 1, 0, \ldots, 0] + x_{ik}[\ldots, 1, 0, 0, 0]$ OU SEJA OS ELEMENTOS 0 CONTINUAM SEMPRE IGUAL A 0. CONTINUANDO TODAS AS ELIMINAÇÕES CHEGAMOS EM PIVÔS 1 E RESTO 0, OU SEJA, $\boxed{I = U}$

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Qual é o número c que leva o segundo pivô a ser 0? O que podemos fazer para resolver tal problema? Ainda é válido $A = LU$?

(b) Qual é o número c que leva o terceiro pivô a ser 0? É possível resolver esse problema?

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 3 \cdot L_1]{L_2 - 2 \cdot L_1} \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 4-2\cdot c & 1 \\ 0 & 5-3\cdot c & 1 \end{bmatrix}$

→ 2º PIVÔ = 0 → $c = 2$

→ SE $c = 2$, TROCAMOS $L_2 \leftrightarrow L_3$, ASSIM $A = LU$ NÃO VALE, MAS $PA = LU$

(b) $L_3 - \dfrac{(5-3c)}{(4-2c)} L_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 4-2c & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \dfrac{5-3c}{4-2c} \end{bmatrix}$

$$\frac{5-3c}{4-2c} = 1$$

$$5 - 3c = 4 - 2c$$

$$1 = c$$

SE $c = 1$, NÃO HÁ 3º PIVÔ

NÃO, NÃO HÁ MANEIRA DE CONTORNAR ISSO, $\nexists A^{-1}$

7. Se A e B são simétricas, quais dessas matrizes são também simétricas:

(a) $A^2 - B^2$;
(b) $(A+B)(A-B)$;
(c) ABA;
(d) $ABAB$.

$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$\hookrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{jk} = (BA)_{ij}$

(a) $(A^2 - B^2)$

$(A+B)(A-B) \longrightarrow ((A+B)(A-B))^T$

$A^2 - \cancel{AB} + \cancel{BA} - B^2$

$\hookrightarrow$ PODE POIS SÃO SIMÉTRICAS

$(A-B)^T(A+B)^T$

$(A^T - B^T)(A^T + B^T)$

$(A-B)(A+B)$

(b) MESMO RESULTADO (SIMÉTRICA)

(c)

$\hookrightarrow$ COMO A B E A SÃO SIMÉTRICAS, AMBAS COMUTAM:

$(ABA)^T = (BA)^T \cdot A^T = A^T B^T A = ABA$

É SIMÉTRICO

(d)

$ABAB \rightarrow (AB)^T (AB)^T \rightarrow B^T A^T B^T A^T$

$\rightarrow$ SE AB COMUTAREM, É SIMÉTRICA

8. Prove que é sempre possível escrever $A = B + C$, onde B é simétrica e C anti-simétrica. *Dica: B e C são combinações simples de A e A^T.*

$$B = \frac{A + A^T}{2} \qquad C = \frac{A - A^T}{2}$$

9. Seja A uma matriz em blocos:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde cada A_{ii} é quadrada $n \times n$ com A_{11} invertível. Ache L e U em blocos tal que $A = LU$:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},$$

onde L_{11}, L_{22} são triangulares inferiores com 1's na diagonal e U_{11}, U_{22} são triangulares superiores.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{21}]{L_2 - A_{21}(A_{11})^{-1} L_1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1} \cdot A_{12} \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}(A_{11})^{-1} & I \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{JORDAN}]{\text{GAUSS}} \left[\begin{array}{cc:cc} I & 0 & I & 0 \\ -A_{21}(A_{11})^{-1} & I & 0 & I \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 + A_{21}(A_{11})^{-1} L_1]{} \left[\begin{array}{cc:cc} I & 0 & I & 0 \\ 0 & I & A_{21}(A_{11})^{-1} & I \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} I & 0 \\ A_{21}(A_{11})^{-1} & I \end{matrix}}_{L}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}(A_{11})^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1} \cdot A_{12} \end{bmatrix}$$