Exercício 1 Em cada item a seguir, diga se os caminhos dados no grafo são:

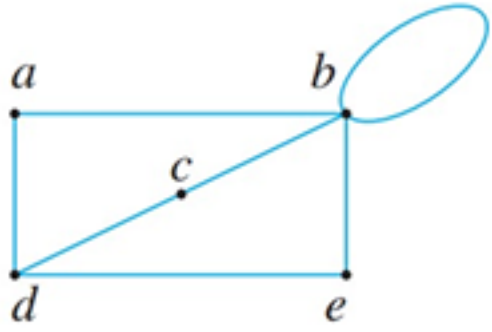
- Um caminho simples
- Um ciclo
- Um ciclo simples

(a) (b, b)

(b) $(b, c, d, a, b, e, d, c, b)$

(c) (a, d, c, b, e)

(d) (d)



Vamos revisar os conceitos:

1) Caminho: Um caminho é uma sequência de vértices ligados por uma aresta em que estas são todas diferentes

2) Caminho simples é um caminho que não há repetição dos vértices

3) Ciclo: Ciclo é um caminho fechado, ou seja, não há repetições de arestas e começa e termina no mesmo vértice

4) Ciclo simples não possui vértices repetidos (exceto o primeiro e o último)

a) ciclo simples.

b) Ciclo

c) caminho simples

d) caminho simples

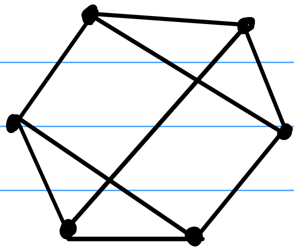
Exercício 2 Nos itens a seguir, desenhe um grafo tendo as propriedades dadas ou explique por que não existe tal grafo.

(a) Seis vértices, cada um com grau 3.

(b) Grafo simples; seis vértices tendo sequência de graus (5, 5, 4, 3, 2, 1).

(c) Grafo simples; cinco vértices tendo sequência de graus (4, 4, 4, 2, 2).

a)

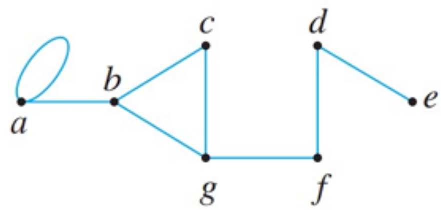


arestas $= \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$

b) Como o grafo é simples de 6 vértices teremos que dois vértices teriam uma aresta incidente nele e em todos os outros, fazendo com que todos tenham ao mínimo grau 2, o que é um absurdo. Logo, é impossível

c) Pelo mesmo motivo da letra b), mas agora o grau mínimo seria 3.

Exercício 3 Encontre todos os subgrafos conexos do grafo seguinte contendo todos os vértices do grafo original e tendo o mínimo de arestas possível. Quais desses subgrafos são caminhos simples? Quais são ciclos? Quais são ciclos simples?

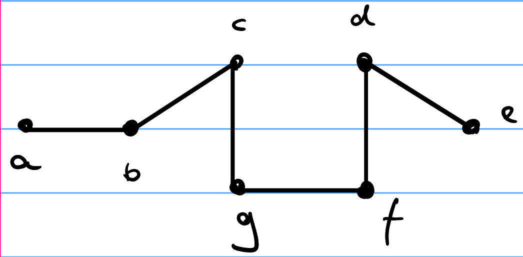


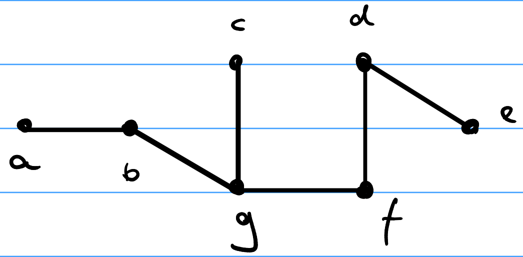
Vamos revisar os conceitos:

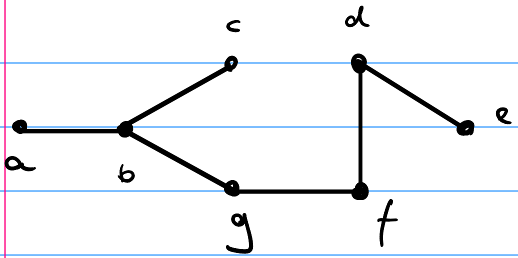
Grafo conexo = Existe um caminho entre cada par de vértices do grafo.

Subgrafo: um grafo H é subgrafo de

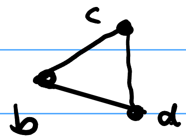
um grafo G se todo vértice de H é vértice de G e toda aresta de H é aresta de G.





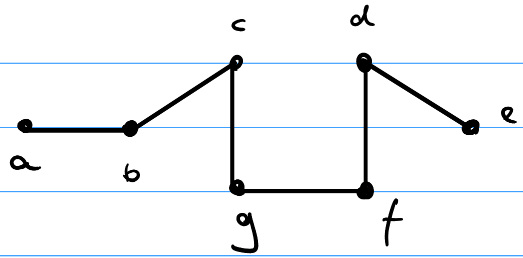


Tiramos o loop e uma das arestas da estrutura



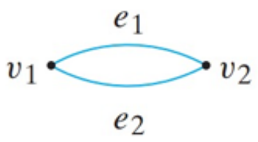
todos esses subgrafos contêm caminhos simples e nenhum deles são ciclos (o grafo original também não é um ciclo)

Agora, o único subgrafo que é, em si, um caminho simples é:

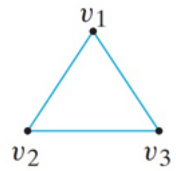


Exercício 4 Nos itens a seguir, encontre todos os subgrafos não-vazios dos grafos dados.

(a)



(b)

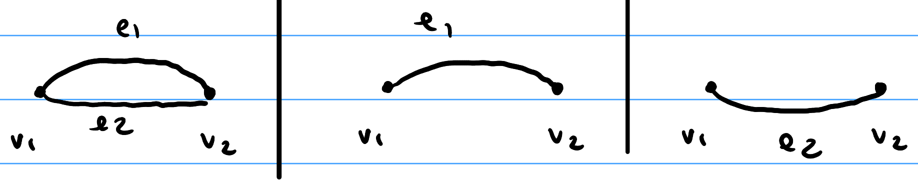


Vamos relembrar o conceito:

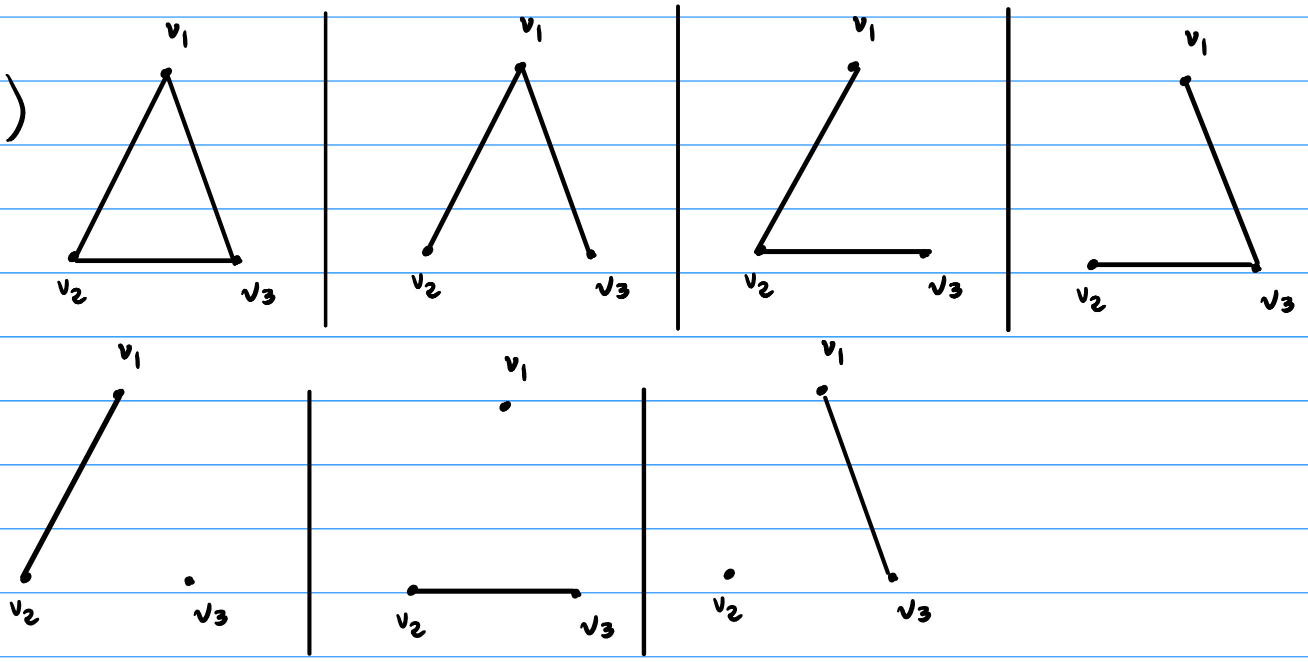
Grafo vazio: grafo vazio é aquele que o conjunto de arestas é 0

Grafo nulo: grafo que $|V| = 0$, consequentemente $|A| = 0$.

a)

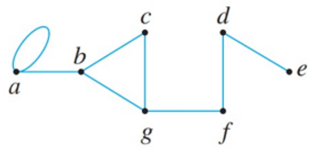


b)

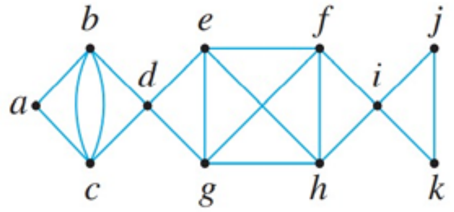


Exercício 5 Nos itens a seguir, decida se o grafo tem um ciclo euleriano. Se o grafo tiver um ciclo euleriano, exiba um.

(a) Grafo do Exercício 3



(b)

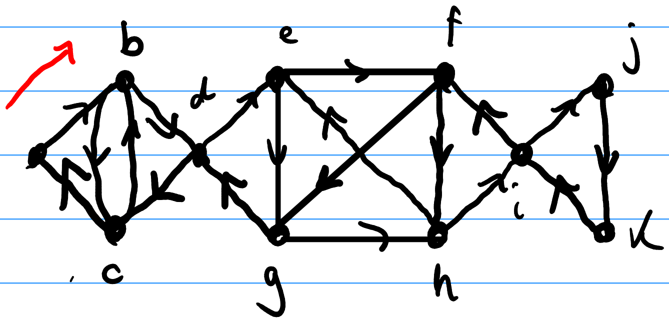


Vamos revisar o conceito:

ciclo euleriano = É um ciclo que contém todas as arestas (exatamente uma vez) e todos os vértices (podendo repetições.

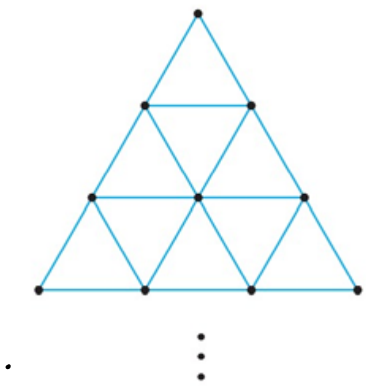
a) Não há (teorema: o grafo G possui ciclo euleriano se, e somente se, G é conexo e todos os seus vértices têm grau par).

b)



Começa no a

Exercício 6 O grafo a seguir continua até uma profundidade arbitrária finita. Este grafo contém um ciclo euleriano? Em caso positivo, descreva um.

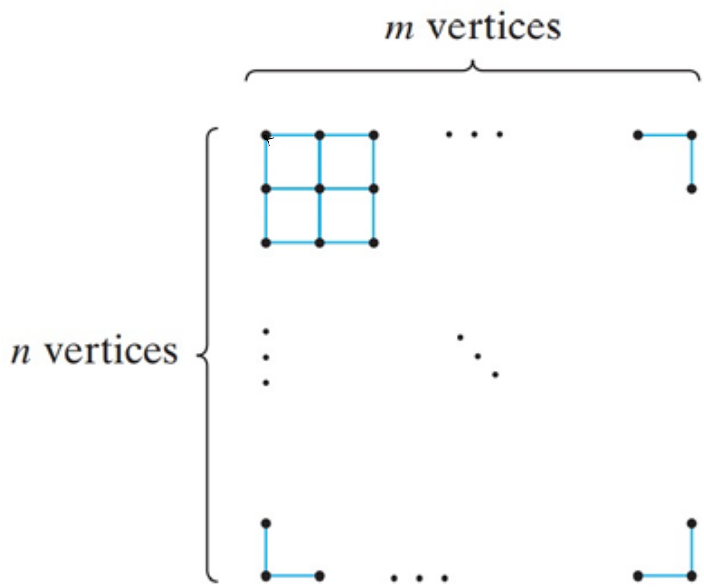


Se o padrão continuar, o vértice do topo e os vértices extremos da "base" da construção têm grau 2. O resto dos vértices da base têm grau 4. Os vértices do canto, exceto os extremos da base e o vértice do topo têm grau 4. O restante possui grau 6.

Portanto, como o grafo é conexo e os graus de todos os vértices são pares, existe um ciclo euleriano na construção.

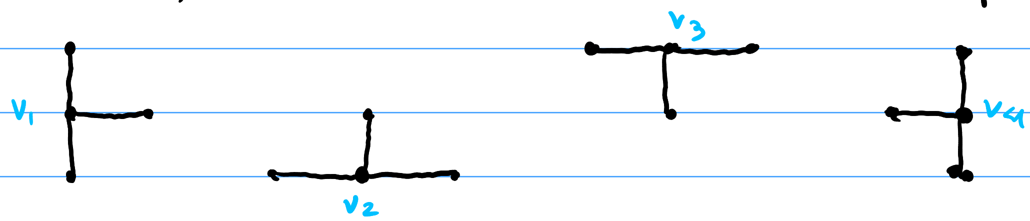
Para obter o ciclo comece do vértice do topo e percorra todos os vértices da lateral até chegar ao extremo da base. Depois vá para o próximo vértice da base e faça o seguinte "zigue-zague": suba a diagonal esquerda e vá para a esquerda. Faça esse processo até chegar em um vértice do "lado oposto" do grafo. Desça pela diagonal esquerda até chegar ao outro vértice da base. Repita o processo até chegar no vértice da outra extremidade da base. Após isso suba pelo "lado" e chegue ao vértice do topo novamente.

Exercício 7 Para quais valores de m e n o grafo a seguir contém um ciclo euleriano?



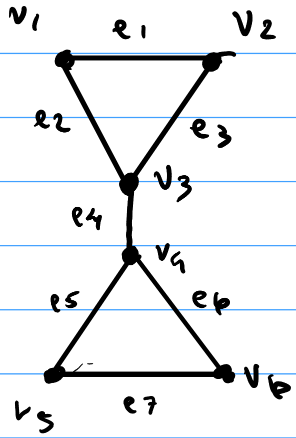
Pelo teorema, para ter um ciclo euleriano, devemos ter um grafo conexo e todos os seus vértices de grau par.

Os casos triviais são $m=n=1$ e $m=n=2$. Contudo, são os únicos casos, isso pois, para $m,n \geq 3$, teremos estruturas do tipo:



e perceba que v_1, v_2, v_3, v_4 têm grau ímpar, contrariando o teorema.

Exercício 8 Dê um exemplo de um grafo conexo tal que a remoção de uma aresta qualquer resulta em um grafo que não é conexo. (Assuma que a remover uma aresta não remove nenhum vértice).



G

G é conexo. Tirando e_4 teremos outro grafo que não é conexo.

Exercício 9 Mostre que se G' é um subgrafo conexo de G, então G' está contido em uma componente conexa de G.

Vamos relembrar os conceitos:

Super grafo: Se H é subgrafo de G, então G é supergrafo de H, ou seja $(G \supseteq H)$.

Grafo maximal: Considere H subgrafo de G. Um grafo é maximal em relação a uma propriedade P se H possui a propriedade e nenhum outro subgrafo de G possui a propriedade.

Componentes conexas: São os subgrafos conexos maximais

Só fazer por absurdo.

Exercício 10 Mostre que o número máximo de arestas em um grafo simples e desconexo com n vértices é $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

· Dado o grafo $G=(V,E)$, sabemos que:

$$|E| = \frac{\sum_{v \in V} \delta(v)}{2}$$

O maior número de arestas ocorre quando o grafo é regular, mais precisamente $(n-1)$-regular, pois cada par de vértices terão uma aresta adjacente.

Por que não pode ser n-regular ($|V|=n$)? Pq o grafo é simples. Senão teríamos que criar arestas paralelas entre dois vértices.

Além disso, a configuração de um grafo desconexo com o maior número de arestas é um $(n-1)$-regular, mas com um vértice $v \mid \delta(v)=0$. Se retirarmos mais de um, ficaríamos com pelo menos $2(n-1)$ arestas faltando.

Portanto, o número máximo de arestas de um grafo desconexo é $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

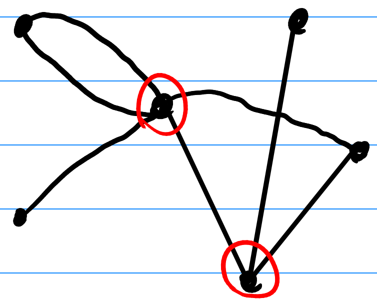
Definição. Um vértice v em um grafo conexo G é um *ponto de articulação* se a sua remoção (e a de todas as arestas incidentes nele) torna o G desconexo.

Exercício 11 Dada a definição acima, resolva os itens a seguir.

(a) Dê um exemplo de um grafo com seis vértices que tem exatamente dois pontos de articulação.

(b) Mostre que um vértice v em um grafo conexo é um ponto de articulação se, e somente se, existem vértices w e x em G tais que qualquer caminho de w a x passa por v.

a)



b) ($\Rightarrow$) v é vértice de um grafo conexo e ponto de articulação $\Rightarrow$ existem vértices w e x em G tais que qualquer caminho de w a x passa por v.

Se G é conexo, dado qualquer par de vértices x, y existe um caminho entre eles. Se v é ponto de articulação de G, então se retirarmos v e todas as arestas incidentes em v, G fica desconexo.

Tal definição implica que, dados os vértices w e x, todo o caminho entre eles passaria por v. Se isso não ocorresse, v não seria ponto de articulação, se retirássemos v e todas as arestas incidente, G continuaria conexo, ou G não seria conexo, pois não existiria caminho entre v e x ou entre v e w.

($\Leftarrow$) w e x vértices de G tais que qualquer caminho de w a x passa por v $\Rightarrow$ G conexo e v ponto de articulação

Como todos os caminhos entre w e x passam por v, se retirássemos v e todas as arestas incidentes, G seria desconexo (caso já não fosse).

Além disso, como existe w e x tais que qualquer caminho entre eles passa por v obriga G a ser conexo, pois, caso contrário, não existiria nenhum caminho entre w e x.

Definição. Um *caminho fechado* é um caminho de v a v.

Exercício 12 Dada a definição acima, mostre que um grafo conexo G é bipartido se e somente se todo caminho fechado em G tem tamanho par.

Vamos revisar os conceitos:

1) Grafo bipartido: Um grafo é bipartido se existe uma bipartição dos seus vértices, de modo que a interseção seja nula e a união contenha todos os vértices do grafo, e toda aresta tem uma ponta em um conjunto e outra ponta em outro.

($\Rightarrow$) Grafo conexo e bipartido $\Rightarrow$ todo caminho fechado tem tamanho par.

Se G é conexo, então para todo par de vértices existe um caminho. Se G é bipartido, toda aresta

ter uma ponta num vértice de um conjunto e outra no outro conjunto de vértices.
Como cada ponta de uma aresta está em um conjunto diferente de vértices, para fazer um caminho fechado, devemos passar duas vezes por cada aresta do caminho fechado.
Tal fato ocorre pela divisão dos vértices em dois conjuntos disjuntes

($\Leftarrow$) Todo caminho fechado em G tem tamanho par $\Rightarrow$ G conexo e bipartido.

Por absurdo, suponha que exista pelo menos um caminho de tamanho ímpar e G seja conexo e bipartido.
Não é possível, pela parte da ida.

Exercício 13 Mostre que se um grafo G contém um ciclo de v a v, então G contém um *ciclo simples* de v a v.

ciclo $\Rightarrow$ pode repetir vértice, mas não aresta.
ciclo simples $\Rightarrow$ não pode repetir vértice

Seja $c = \{v, e_1, \ldots, e_k, v\}$ um ciclo de v a v, logo todas as arestas são distintas

Caso 1: se c for simples, não há o que provar

Caso 2: se c não for simples, então

$c = \{v, e_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, e_k, v\}$.

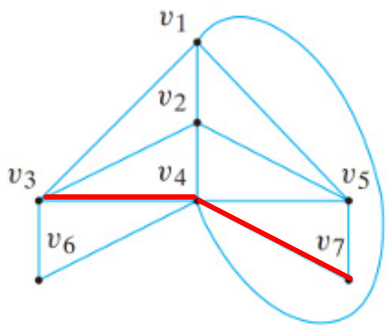
Retirando a parte verde do ciclo, teremos um ciclo simples. Raciocínio análogo para mais de um vértice repetido.

Definição. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e v, w vértices de G. A *distância* entre v e w, $dist(v, w)$, é o comprimento do caminho mais curto de v para w. O diâmetro de G, denotado por $d(G)$, é definido como

$$d(G) = \max_{v,w \in V} dist(v, w)$$

Exercício 14 Dada a definição, faça o que se pede:

(a) Encontre o diâmetro do grafo abaixo.

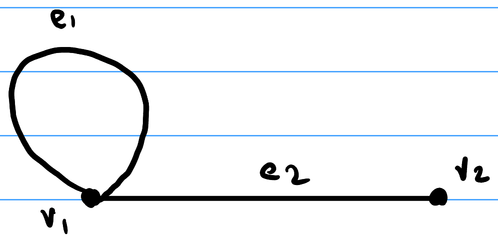


(b) Encontre o diâmetro de K_n, o grafo completo de n vértices.

a) Diâmetro é 2

b) Diâmetro é 1, já que um vértice é adjacente a todos os outros

Exercício 15 Mostre que o número de caminhos começando e terminando em v_1 que têm comprimento n no grafo a seguir é igual ao $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci f_{n+1}.



$n=1$: $\{v_1, e_1, v_1\}$

$n=2$: $\{v_1, e_1, v_1, e_1, v_1\}$

$\{v_1, e_2, v_2, e_2, v_1\}$

$n=3$: $\{v_1, e_1, v_1, e_1, v_1, e_1, v_1\}$

$\{v_1, e_1, v_1, e_2, v_2, e_2, v_1\}$

$\{v_1, e_2, v_2, e_2, v_1, e_1, v_1\}$

fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, \ldots, f_{n-2} + f_{n-1}, \ldots$

Vamos fazer indução no comprimento do caminho. Vemos que para $n=1$, $n=2$ e $n=3$ funciona.
Nossa hipótese é que o número de caminhos de tamanho n é o $(n+1)$ésimo número de Fibonnaci ($f_{n-1} + f_n = f_{n+1}$).
Vamos verificar se o número de caminhos de tamanho $n+1$ é o $(n+2)$ésimo número de Fibonnaci ($f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$)

Dos casos iniciais, temos as seguintes estruturas: $\{v_1, e_1, v_1\}$ ou $\{v_1, e_2, v_2, e_2, v_1\}$.

Ou seja, temos certeza que o número de caminhos de tamanho $n+1$ é maior ou igual aos de tamanho n, bastaria acrescentar a estrutura $\{v_1, e_1, v_1\}$.

Contudo, podemos ainda adicionar a segunda estrutura $\{v_1, e_2, v_2, e_2, v_1\}$, retirando uma aresta dos ciclos de tamanho n, temos os ciclos de tamanho $n-1$, os quais poderíamos adicionar a estrutura. Portanto, o número de caminhos de tamanho $n+1$ é a soma dos caminhos de tamanho n e $n-1$.

Portanto, o número de caminhos de tamanho $n+1$ é o $(n+2)$ésimo termo de Fibonnaci.