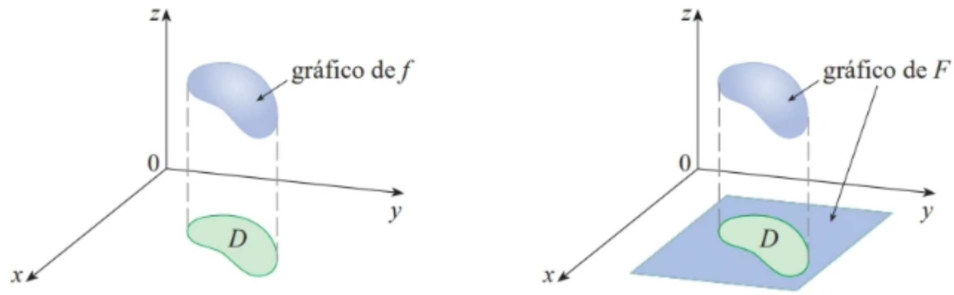
Integrais duplas sobre regiões gerais

Para integrar uma função em uma região geral D, podemos definir uma nova função com domínio no retângulo R dessa forma:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & , (x,y) \in D \\ 0 & , (x,y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Portanto,
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_R F(x,y)\, dA.}$$



Região do tipo I: $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ com g_1, g_2 contínuas em $[a,b]$.

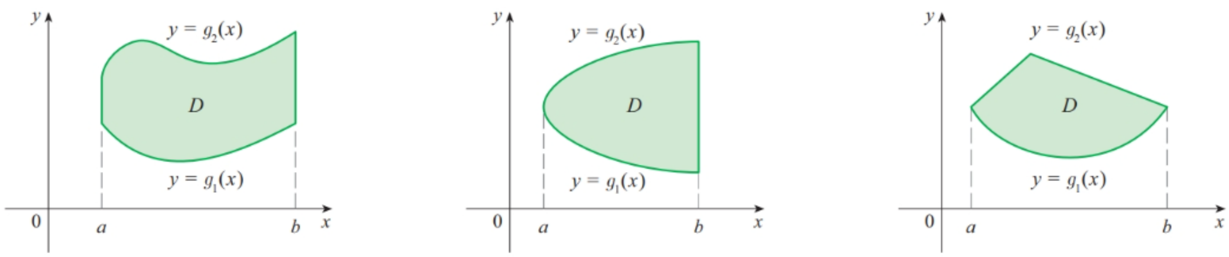
Definimos um retângulo $R = [a,b] \times [c,d] \supset D$ e uma função F do domínio R que nem aquela definida anteriormente. Assim, pelo teorema de Fubini:
$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_R F(x,y)\, dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\, dy\, dx$$

Contudo, $F(x,y) = 0$ se $y > g_2(x) \vee y < g_1(x)$ (fora da região D). Assim,

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dy\,dx$$

$$\boxed{= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx}$$

Observe que $g_1(x)$, $g_2(x)$ seriam constantes em $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$



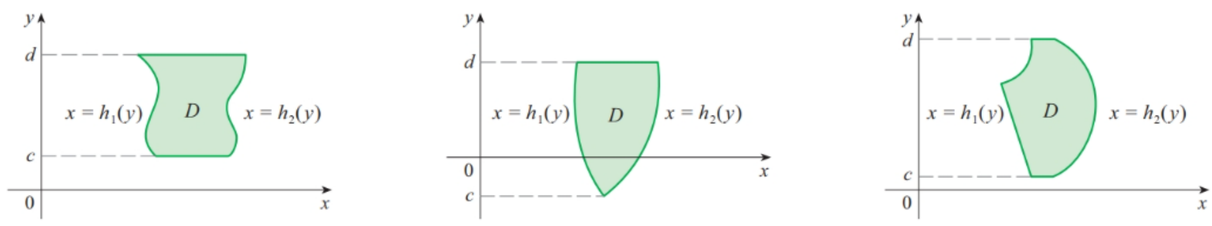
Região do tipo II: $D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$
h_1, h_2 contínuas em $[c,d]$.

Mesma coisa (teorema de Fubini)

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b F(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \boxed{\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy}$$

Observe que $h_1(y)$, $h_2(y)$ seriam constantes em $\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx$



Trocando a ordem de integração

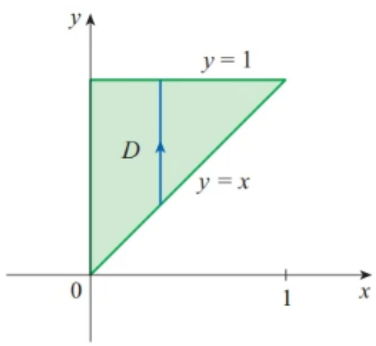
Pelo teorema de Fubini, podemos encarar integrais duplas como integrais iteradas unidimensionais.

Além disso, podemos fazer uma troca das ordem de integração, para resolver contas muito complexas ou, até mesmo, impossíveis.

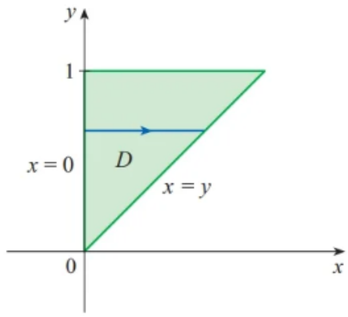
Por exemplo,

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx = \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\,dA$$

$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\}$



Mas, $\int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dy$ é impossível em termos finitos. Contudo, podemos encarar D como $D = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\}$
e $\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\,dx\,dy$



que é possível de resolver.

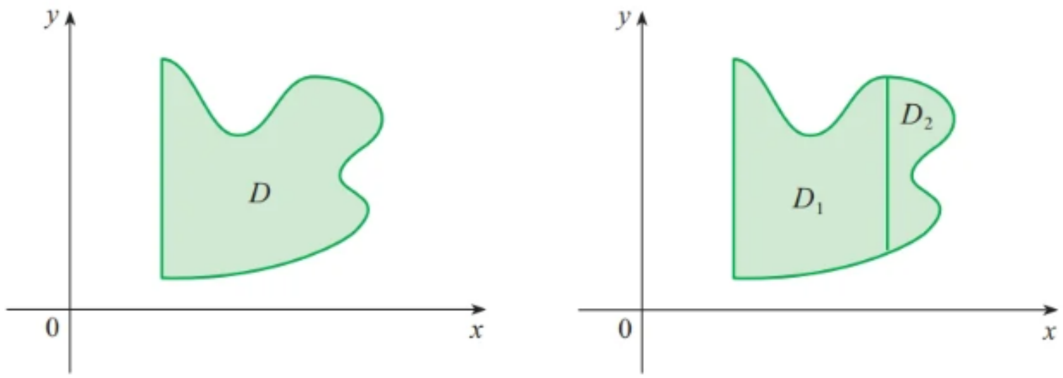
Propriedades

1) $\iint\limits_D \left(f(x,y) + g(x,y)\right) dA = \iint\limits_D f(x,y)\, dA + \iint\limits_D g(x,y)\, dA.$

2) $\iint\limits_D c\, f(x,y)\, dA = c \iint\limits_D f(x,y)\, dA.$

3) $f(x,y) \geq g(x,y) \therefore \iint\limits_D f(x,y)\, dA \geq \iint\limits_D g(x,y)\, dA$

4) $\iint\limits_D f(x,y)\, dA = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dA + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dA$



5) $\iint\limits_D 1\, dA = A(D)$

6) $m \le f(x,y) \le M \quad \forall (x,y) \in D.$

$$m \cdot A(D) \le \iint_D f(x,y)\,dA \le M \cdot A(D)$$