TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO GENERALIZADO!!

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ (constante e derivável em (a,b))

$\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ p/ algum $c \in (a,b)$.

• Sejam $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas, deriváveis em (a,b), com $g'(x) \neq 0$. Então existe $c \in (a,b)$ tal que
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Dem: $h(x) = (f(b)-f(a)).(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a))$.

$h(a) = 0$ e $h(b) = 0$.

Pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$.

Mas, $h'(c) = (f(b)-f(a)).g'(c) - (g(b)-g(a)).f'(c) = 0$.

Portanto, $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}}$, por hipótese, $g'(c) \neq 0$.

e $g(b)-g(a) \neq 0$ (pois $g'(x) \neq 0$ pelo teorema de Rolle)

Aplicação: Regra de L'Hospital para casos 0/0.

$f, g: I \to \mathbb{R}$ contínuas numa vizinhança de 0 e derivável numa vizinhança de 0:

$f(0) = g(0) = 0$

se existir $\boxed{L = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ então } L = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}}$.

Dem: Se $x_n \to 0$ $(x_n \neq 0)$, então $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$

Usando o Teorema do Valor Médio Generalizado para o intervalo $[0, x_n]$ (ou $[x_n, 0]$, $x_n < 0$)

$$\Rightarrow \frac{f(x_n) - f(0)}{g(x_n) - g(0)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \qquad |c_n| < x.$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \to L$$ por hipótese. Logo:

$$\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$$

Essa aplicação só ocorre quando existe $L = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

OBS: L'Hospital vale para casos:

$$\boxed{\frac{0}{0} \quad \text{e} \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

Provado

Mais difícil.

Exemplos: 1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$; 2) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+3)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}$

1) vamos ver se $\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{x'}$ existe:

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$ (existe) $\boxed{\text{Logo, } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$.

2) Vamos ver se $\lim_{x\to 0} \frac{[\operatorname{sen}(x+3)^2 - \operatorname{sen} 9]'}{x'}$ existe:

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(x+3)^2 \cdot 2(x+3) \cdot 1 - 0}{1}\right) = \lim_{x\to 0} \cos(x+3)^2 \cdot 2(x+3) = 6\cos 9$
(existe)

$\boxed{\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+3)^2 - \operatorname{sen} 9}{x} = 6\cos 9}$

Exemplo 3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$

Vamos ver se existe $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{0}$ ($\tilde{n}$ existe)

$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2x} = \infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{2x} = -\infty$.

Logo, $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = \infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x^2} = -\infty$, portanto,

$$\boxed{\nexists \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2}}$$

Exemplo 4) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x-1}$.

Vamos ver se existe $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2)'}{(e^x-1)'}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2)'}{(e^x-1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x} = \boxed{0.}$$ (existe).

Logo $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x-1} = 0$ (e^x-1 cresce muito mais rápido que x^2).

Exemplo 5) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} \to \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} = 0.$$

Logo, por L'Hospital, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = 0.$