Integrais Triplas

Integrais triplas sobre caixas retangulares

O raciocínio é o mesmo dos casos unidimensional e bidimensional. Primeiro definimos a caixa retangular $[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$, em que:

$$B = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\}.$$

Depois dividimos B em subcaixas $B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\times[z_{k-1}, z_k]$ de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$. Assim, tomando pontos amostrais $x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}$ em cada intervalo e tomando o limite, obtemos a integral tripla de Riemann:

$$\lim_{n,m,l \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\, \Delta x \Delta y \Delta z =$$

$$= \iiint_B f(x,y,z)\, dV, \text{ se o limite existir}$$

Logo, podemos observar um "teorema de Fubini" para integrais triplas:

$$B = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\}$$

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}$$

Permite troca dos limites de integração

Integrais triplas sobre regiões gerais

Novamente, vamos usar um raciocínio parecido das integrais duplas.

Seja E uma região geral limitada. Envolvemos E por uma caixa retangular B. Depois, definimos uma função F tal que:

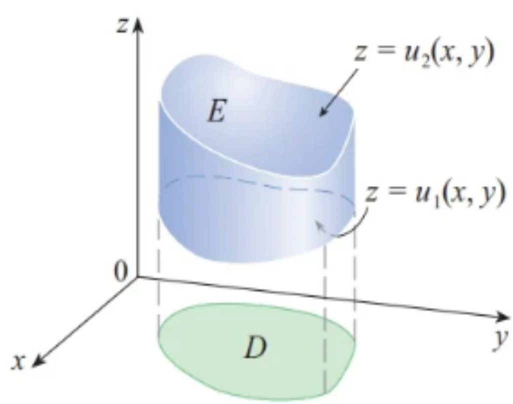
$$\begin{cases} F(x,y,z) = f(x,y,z), & (x,y,z) \in E \\ F(x,y,z) = 0, & (x,y,z) \in B \setminus E. \end{cases} \quad e$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \iiint_B F(x,y,z)\, dV.$$

Tipo I: $E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$, D é a projeção de E em XY.

Logo, $$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dA$$

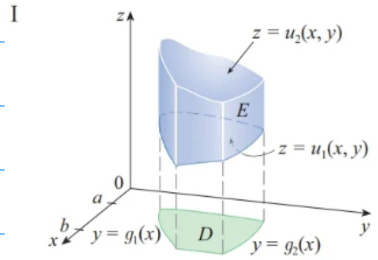
x, y "fixos" na região D e f(x,y,z) é integrada em relação a z (z variando)



Além disso, D pode ser uma região do tipo I ou II, como vimos anteriormente.

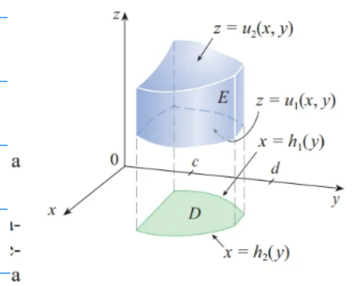
$E = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b;\ g_1(x) \le y \le g_2(x);\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$



$E = \{(x,y,z) \mid c \le y \le d;\ h_1(y) \le x \le h_2(y);\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy$$



Tipo III: $E = \{(x,y,z) \mid (y,z) \in D;\ u_1(y,z) \le x \le u_2(y,z)\}$, D é a projeção de E em yz

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\, dx \right] dA$$

Tipo III: $E = \{(x,y,z) \mid (x,z) \in D;\ u_1(x,z) \leq y \leq u_2(x,z)\}$, D é a projeção do E em yz

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)\, dy \right] dA$$

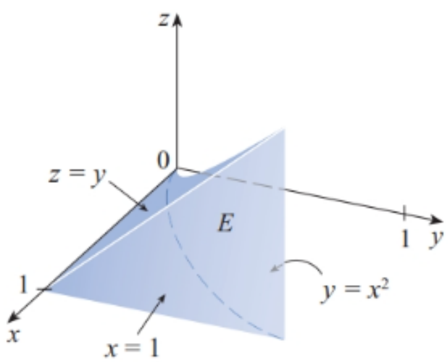
Trocando a ordem de integração

O Teorema de Fubini nos permite interpretar integrais triplas como integrais iteradas, tendo 6 configurações distintas, mudando a ordem de integração.

Ex: tome a seguinte integral tripla:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx = \iiint_E f(x,y,z)\, dV$$

E:



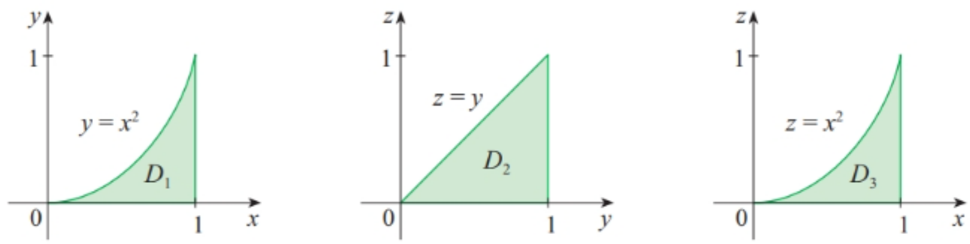
$E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq z \leq y\}$

Projeções de E:

xy: $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\} = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ \sqrt{y} \le x \le 1\}$

yz: $D_2 = \{(y,z) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le y\} = \{(y,z) \mid 0 \le z \le 1,\ z \le y \le 1\}$

xz: $D_3 = \{(x,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le x^2\} = \{(x,z) \mid 0 \le z \le 1,\ \sqrt{z} \le x \le 1\}$



xy yz xz

Assim,

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^y \int_1^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\, dx\, dz\, dy$$