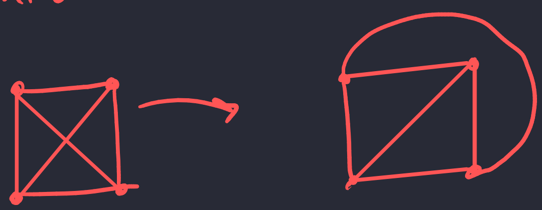
Matemática Discreta

11/09/24

Grafos Planares

• DEF: O grafo G é planar se ele pode ser representado sem cruzar arestas

Exemplo:



• Resultados impactantes da planaridade:

(i) Fórmula de Euler ($V+F=A+2$)

(ii) Teorema de Kuratowski

(iii) Teorema das 4 cores (planaridade + coloração)

Teorema

Dado um grafo planar $G(V,E)$ simples, e definirmos F como o conjunto das regiões formadas pelo fechamento das arestas, temos:

$$|V|+|F|=|E|+2$$

Dem

G planar e conexo $\Rightarrow |V|+|F|=|E|+2$

Indução em $|E|$:

$|E|=1$

$1+2=2+1$ ✓

$|V|=2 \quad |F|=1$

HIPÓTESE INDUTIVA: HIPÓTESE VÁLIDA PARA TODO GRAFO COM $|E|=n$, LOGO VALE PARA $n+1$

CASO 1: G NÃO TEM CICLOS

SEJA $v \in V$ E SEJA $\{v_1, \dots, v_k\}$ O MAIOR CAMINHO QUE COMEÇA EM v_1. ENTÃO NECESSARIAMENTE $\delta(v_k)=1$, LOGO A ARESTA $\{v_k, v_{k-1}\}$ É A ÚNICA INCIDENTE EM v_k. SEJA G' O GRAFO OBTINDO ELIMINANDO v_k E A ARESTA $\{v_k, v_{k-1}\}$, PELA HIPÓTESE INDUTIVA, G' É CONEXO E PLANAR:

$G'=(V',E')$, F' CONJUNTO DAS FACES DE G'

$$|F'|+|G'|=2+|E'|$$
$$\downarrow$$
$$|F|+|G|-\cancel{1}=2+|E|-\cancel{1}$$
$$|F|+|G|=2+|E|$$

CASO 2: G TEM CICLOS

SEJA x UMA ARESTA DO CICLO C E SEJA G' O GRAFO OBTIDO ELIMINANDO x. POR HIPÓTESE, G' É CONEXO E PLANAR.

$$|F'|+|V'|=2+|E'|$$
$$|F|+|V|-\cancel{1}=2+|E|-\cancel{1}$$
$$|F|+|V|=2+|E|$$

Proposição: $K_{3,3}$ NÃO É PLANAR

DEM: $|V|=6$ $|E|=9$. QUALQUER CICLO EM $K_{3,3}$ TEM TAMANHO ≥ 4, CADA ARESTA PERTENCE A DOIS CICLOS DELIMITADORES DE FACES

LOGO $4F = \sum_{\text{FACES}} \text{QUANT. ARESTAS DE CADA CICLO} = 2|E|$

SUPONDO QUE A FÓRMULA VALE, SUBSTITUINDO, TEMOS

$$4(|E|-|V|+2) \leq 2|E|$$

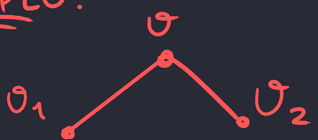
$$20 \leq 18$$

$K_{3,3}$ NÃO É PLANAR

Arestas em Série

DEF: DADO $G(V,E) \rightarrow \exists v \in V ; \delta(v)=2 \wedge \exists e_1, e_2 \in E$; $e_1=\{v,v_1\}, e_2=\{v,v_2\} \wedge v_1 \neq v_2$, AS ARESTAS e_1 E e_2 ESTÃO EM SÉRIE.

EXEMPLO:



Redução em Série

DEF: DADO UM GRAFO $G(V,E)$ E ARESTAS EM SÉRIE $\{v,v_1\}, \{v,v_2\}$, É A REMOÇÃO DE v E A CRIAÇÃO DA ARESTA $\{v_1, v_2\}$

EXEMPLO