Exercício 1 Em um torneio, o Flamengo venceu o Fluminense uma vez, o Botafogo venceu o Vasco uma vez, o Flamengo venceu o Botafogo duas vezes, o Fluminense venceu o Vasco uma vez e o Fluminense venceu o Flamengo uma vez. Nos itens a seguir, use um grafo para modelar o torneio. Os times são os vértices. Descreva o tipo de grafo usado em cada item (grafo trivial, grafo não-direcionado, grafo direcionado, grafo simples).

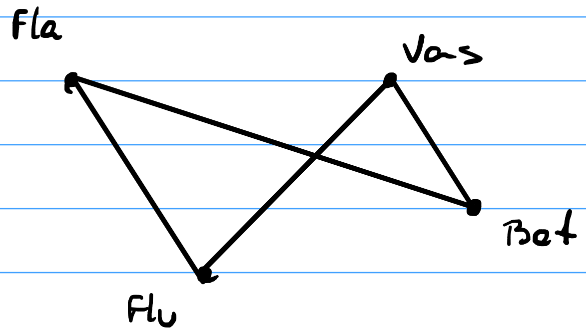
(a) Há uma aresta entre os times se eles se enfrentaram no torneio.

(b) Há uma aresta entre os times para cada partida jogada entre eles.

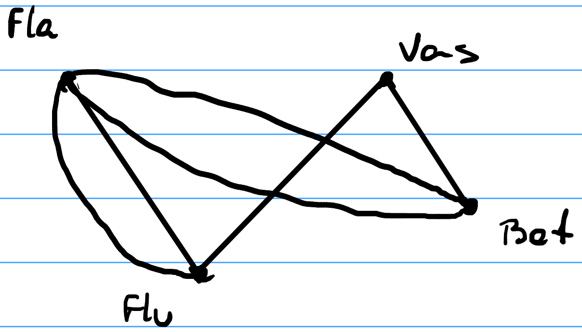
(c) Há uma aresta do time t_i para o time t_j se t_i venceu t_j pelo menos uma vez.

(d) Há uma aresta do time t_i para o time t_j para cada vitória de t_i sobre t_j.

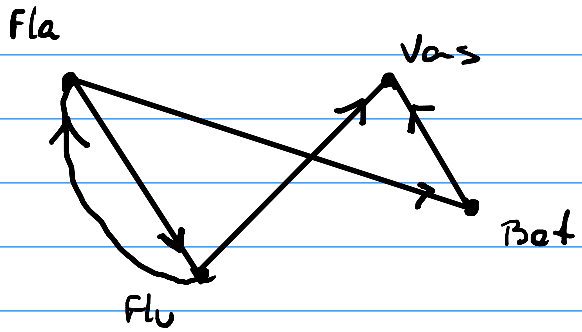
a)



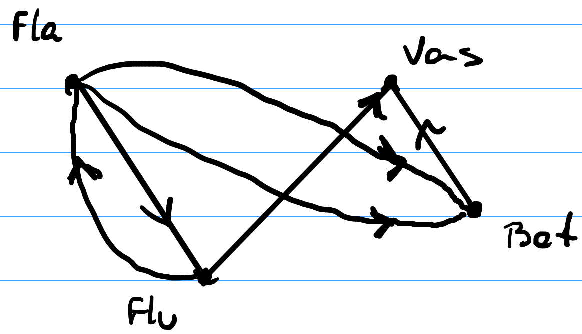
b)



c)



d)

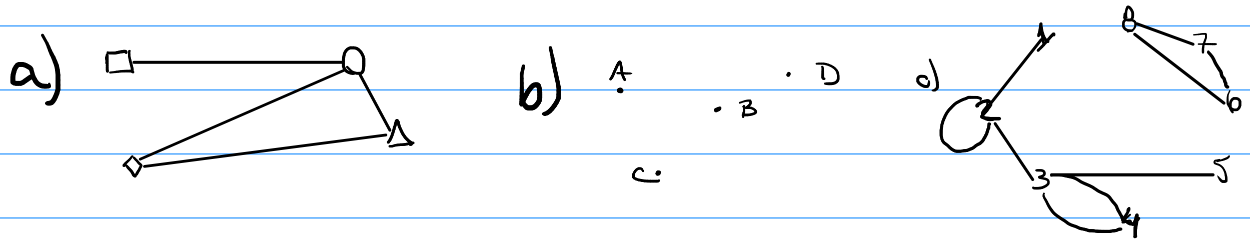


Exercício 2 Faça a representação gráfica dos seguintes grafos G = (V,E):

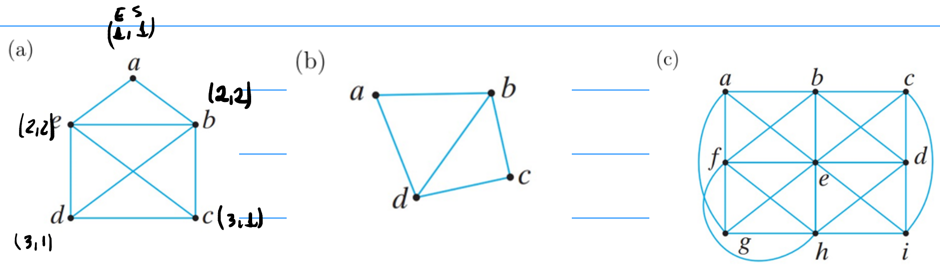
(a) $V = \{\square, \bigcirc, \Diamond, \triangle\}$, $E = \{\{\square, \bigcirc\}, \{\bigcirc, \Diamond\}, \{\bigcirc, \triangle\}, \{\Diamond, \triangle\}\}$

(b) $V = \{A, B, C, D\}$, $E = \{\}$

(c) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$E = \{\{1, 2\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}\}$.



Exercício 3 Explique por que nenhum dos grafos dos itens a seguir contém um caminho que começa e termina no vértice a passando em cada aresta uma única vez.

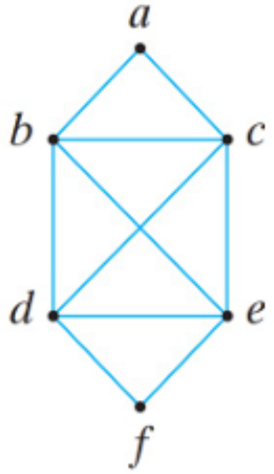


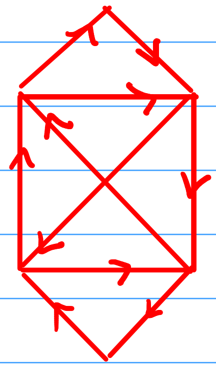
a) Se observarmos as arestas de entrada e saída de cada vértice, veremos que todas os vértices devem ter número igual de entradas e saídas. No nosso caso, os vértices c e d, quando iniciamos em a, têm número de entradas e saídas diferentes.

b) e c) Decorrem do problema das pontes de Könisberg. Se contarmos o número de arestas, veremos que ambas são ímpares, logo não existe um caminho que saia de a (ou qualquer vértice), passe por todas as arestas e termine em si mesmo.

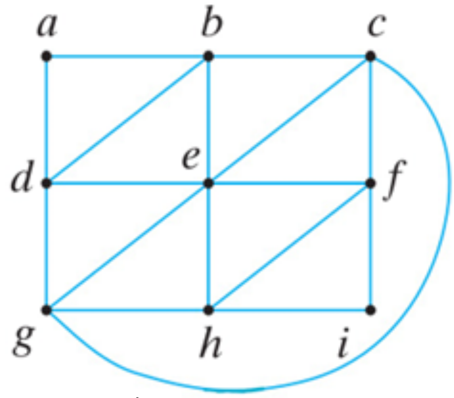
Exercício 4 Mostre que cada grafo dos itens a seguir tem um caminho que começa e termina no vértice a passando em cada aresta exatamente uma vez, encontrando tal caminho por inspeção.

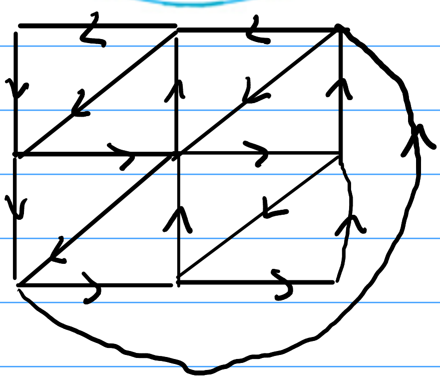
(a)



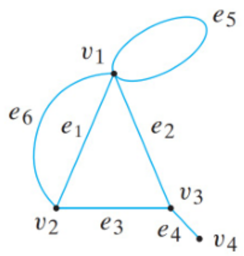


(b)





Exercício 5 Para o grafo $G = (V, E)$ abaixo, encontre V, E, todas as arestas paralelas, loops, vértices isolados e determine se G é um grafo simples. Também escreva em quais vértices a aresta e_1 é incidente.



$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_1\}, \{v_1, v_2\}\}$

G não é simples pois possui um loop (e_5) e arestas paralelas (e_1, e_6); A aresta e_1 é incidente nos vértices v_1 e v_2

Exercício 6 Esboce grafos G_1, G_2, G_3 e G_4, cada um com 5 vértices e 8 arestas, satisfazendo as seguintes condições:

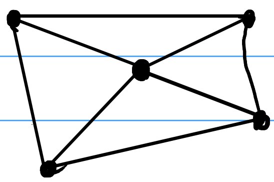
(a) G_1 é um grafo simples;

(b) G_2 é um grafo não-simples sem loops;

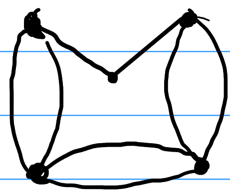
(c) G_3 é um grafo não-simples sem arestas paralelas;

(d) G_4 é um grafo não-simples contendo tanto loops quanto arestas paralelas.

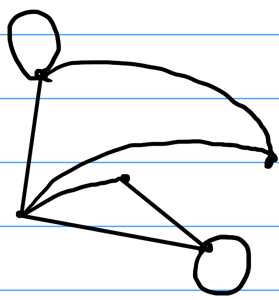
a)



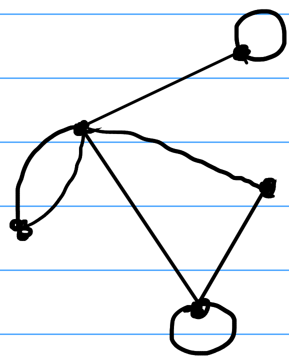
b)



c)



d)



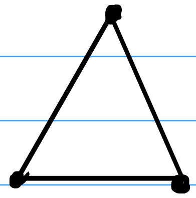
Exercício 7 Abaixo temos a definição de K_n:

Definição (K_n)**.** Chamamos de *grafo completo com n vértices*, denotado por K_n, o grafo simples de n vértices no qual existe uma aresta entre cada par de vértices distintos.

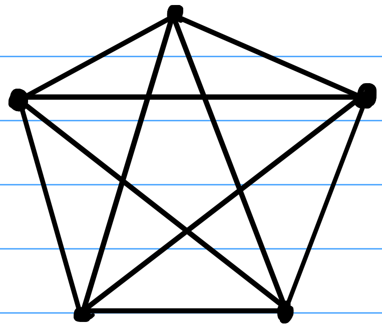
(a) Desenhe K_3 e K_5.

(b) Encontre uma fórmula para o número de arestas em K_n.

a)



K_3



K_5

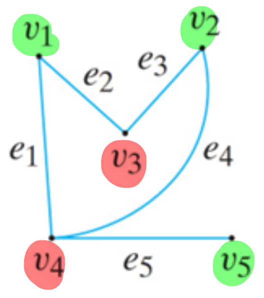
b) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Exercício 8 Vejamos a definição de Grafo Bipartido:

Definição (Grafo Bipartido)**.** Um grafo $G = (V, E)$ é *bipartido* se existem subconjuntos V_1 e V_2 (ambos possivelmente vazios) de V tais que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $V_1 \cup V_2 = V$ e cada aresta em E é incidente em um vértice de V_1 e um vértice de V_2.

Diga quais dos grafos a seguir são bipartidos. Se o grafo for bipartido, especifique os conjuntos disjuntos de vértices.

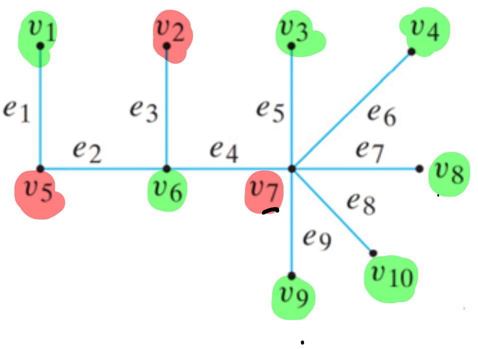
(a)



$V_1 = \{v_1, v_2, v_5\}$
$V_2 = \{v_3, v_4\}$

Grafo Bi-partido

(b)



$V_1 = \{v_1, v_3, v_4, v_6, v_8, v_9, v_{10}\}$
$V_2 = \{v_2, v_5, v_7\}$
Grafo Bi-partido

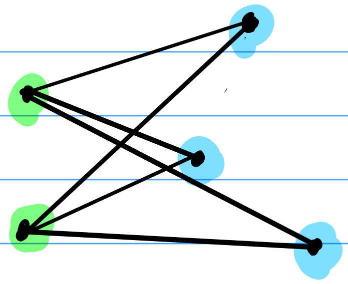
Exercício 9 Vamos introduzir também a definição de $K_{m,n}$:

Definição ($K_{m,n}$). É chamado de *grafo bipartido completo com m e n vértices*, denotado por $K_{m,n}$, um grafo simples cujo conjunto de vértices é particionado nos conjuntos V_1 e V_2, com $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$, no qual o conjunto de arestas consiste em todas as arestas da forma $\{v_1, v_2\}$ com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$.

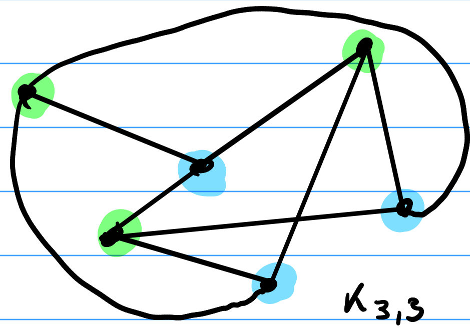
(a) Desenhe $K_{2,3}$ e $K_{3,3}$.

(b) Encontre uma fórmula para o número de arestas em $K_{m,n}$.

a)



$K_{2,3}$



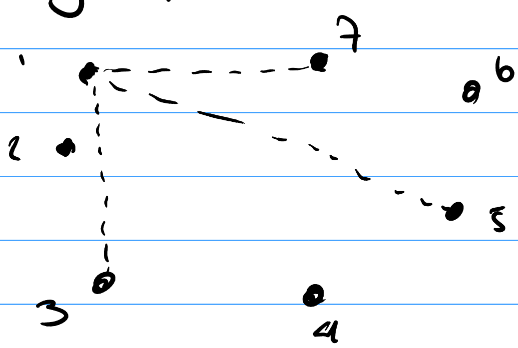
$K_{3,3}$

Obs: Todas os vértices de um conjunto devem estar conectados com todos os vértices do outro conjunto.

b) $|A| = m \cdot n$

Exercício 10 É possível existir um grupo de 7 pessoas tal que cada pessoa conheça exatamente 3 outras pessoas neste grupo?

Considere o seguinte esquema em forma de grafo:



Se cada uma das 7 pessoas conhece exatamente 3 pessoas, estaríamos falando de um grafo cuja soma dos graus seria $7 \cdot 3 = 21$, que é ímpar.
Como o número obtido é ímpar, a configuração descrita é impossível (soma dos graus dos vértices é sempre par).

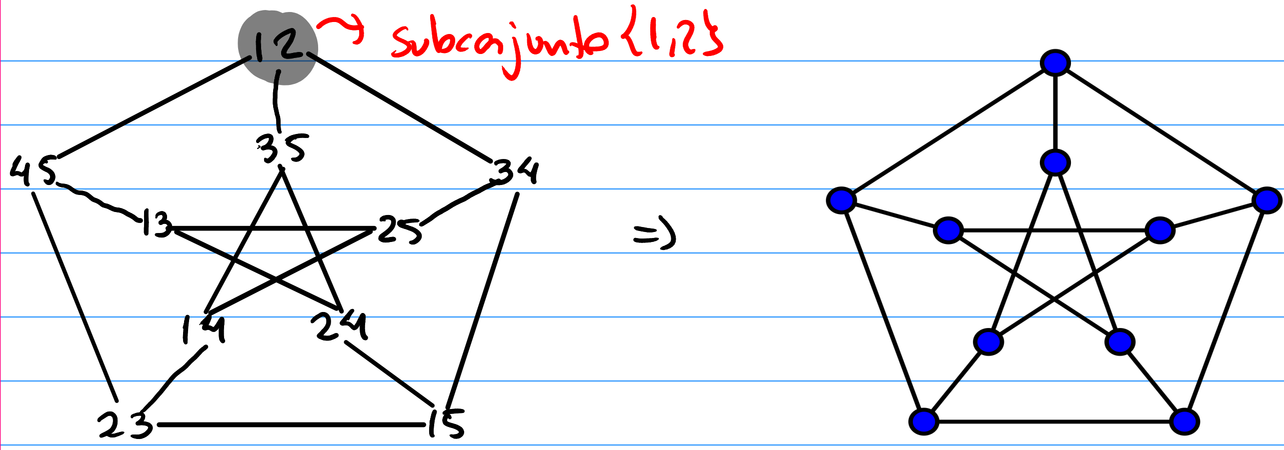
Exercício 11 O Grafo de Petersen é um grafo simples e não direcionado, onde cada vértice representa um subconjunto de dois elementos de um conjunto de cinco elementos. Dois vértices são adjacentes se, e somente se, os subconjuntos correspondentes são disjuntos. Mostre que o Grafo de Petersen não possui um ciclo de tamanho 7.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2!}} = \boxed{10}!$$

Logo, o grafo de Petersen tem 10 vértices.

Para cada subconjunto, teremos 3 outros subconjuntos que são disjuntos contudo, estaremos contando cada possibilidade 2 vezes. Portanto, o número de arestas do grafo de Petersen é $\frac{3 \cdot 10}{2} = 15$.

Fazendo o grafo considerando o conjunto de 5 elementos $\{1,2,3,4,5\}$:



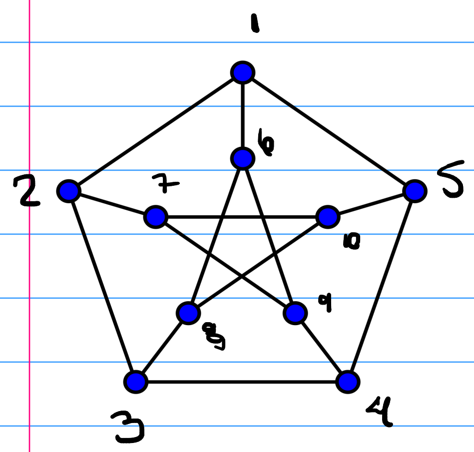
Ciclos são caminhos (não há repetições de vértices e arestas) fechados no mesmo vértice.

Tamanho de um ciclo é a quantidade de arestas

Por absurdo, suponha que exista tal ciclo de tamanho 7, começando em v_i (e terminando em v_i) com arestas $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$, todas distintas.

Nosso trabalho é provar que alguma das arestas é igual.

$$\boxed{C = \{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_6, e_6, v_7, e_7, v_1\}.}$$



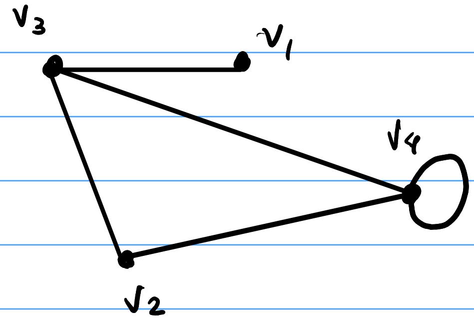
- $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
- $E = \{\{1,2\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,7\},\{3,4\},\{3,8\},\{4,5\},\{4,9\},\{5,10\},\{6,8\},\{6,9\},\{7,9\},\{7,10\},\{8,10\}\}$

Podemos observar que cada vértice tem grau três. Além disso, o vértice de partida possui 1 aresta de "ida" e 2 de "chegada" (assim se repetido para todas as arestas).

Exercício 12 (a) Seja G um grafo com 4 vértices e com a sequência de graus $(4, 3, 2, 1)$. Dê o número de arestas de G e contrua um grafo com tais características.

(b) Existe algum grafo simples com 4 vértices e com sequência de graus $(4, 3, 2, 1)$?

a) $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot a \Rightarrow 2a = 1+2+3+4 \Rightarrow \boxed{a = 5}$.

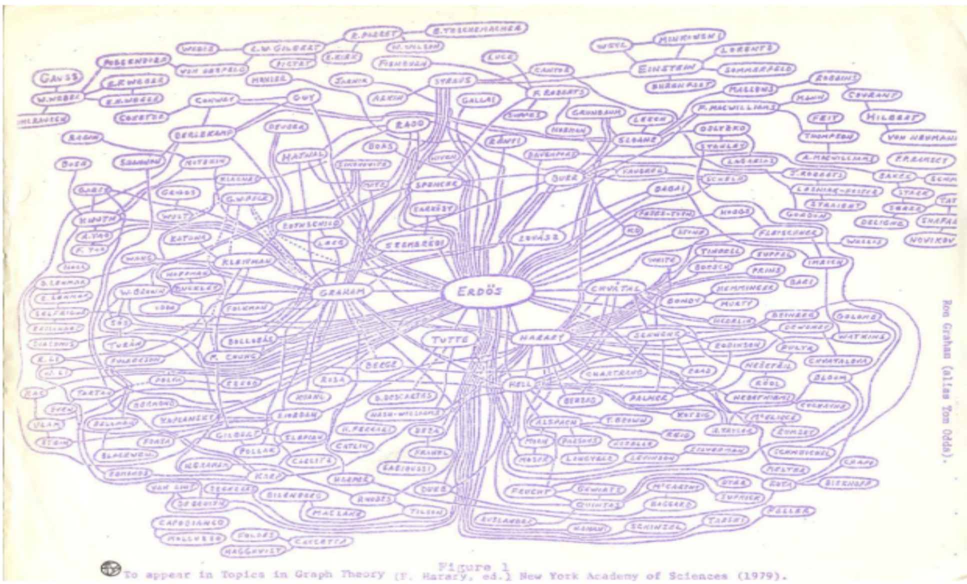


b) Não, o grau máximo de um vértice de um grafo simples é $n-1$.

Exercício 13 Paul Erdös (1913-1996) foi um dos matemáticos mais prolíficos de todos os tempos. Ele foi o autor ou co-autor de por volta de 1500 artigos. Matemáticos que foram co-autores de um artigo com Erdös têm o número de Erdös igual a 1. Matemáticos que não foram co-autores de um artigo com Erdös mas foram co-autores de um artigo com um matemático cujo número de Erdös é 1 têm o número de Erdös igual a 2. Os números de Erdös seguintes são definidos de maneira similar. Por exemplo, Richard Johnsonbaugh (o autor do livro onde consta este exercício) tem o número de Erdös 5. Johnsonbaugh foi co-autor de um artigo com Tadao Murata, Murata foi co-autor de um artigo com A. T. Amin, Amin foi co-autor de um artigo com Peter J. Slater, Slater foi co-autor de um artigo com Frank Harary e Harary foi co-autor de um artigo com Erdös. Desenvolva um modelo gráfico para os números de Erdös. No seu modelo, o que é um número de Erdös?

Um modelo possível é representado por um grafo em que Erdös seja o vértice "central" e os co-autores os outros vértices. As arestas seriam as co-autorias.

O número de Erdös seria então a distância de um vértice ao vértice central (Erdös).



• Aplicação do número de Erdös: Ciência das Redes

11

Proposição: Todos os vértices do Grafo de Petersen possuem grau 3.

Demonstração: Um vértice v do grafo representa um subconjunto de 2 elementos de um conjunto de 5 elementos e se liga a outro vértice se o subconjunto que este representa é disjunto a v, isto é, qualquer subconjunto de 2 elementos dentre os 3 não pertencentes a v. Assim, existem $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$ vértices que se ligam a v. Logo, v tem grau 3. A demonstração é válida para todos os outros vértices.

Proposição: O Grafo de Petersen não possui ciclos de tamanho 3.

Demonstração: Se dois vértices v e w são vizinhos, então a união de seus subconjuntos tem 4 elementos. Para que um vértice seja vizinho de v e w, seu subconjunto correspondente não pode conter nenhum destes 4 elementos. Como resta somente 1 elemento possível para este vizinho, não é possível formar um subconjunto de 2 elementos e, portanto, v e w não possuem um vizinho em comum, i.e, não existem ciclos de tamanho 3.

Proposição: Se dois vértices do Grafo de Petersen não são vizinhos, então possuem exatamente 1 vizinho em comum.

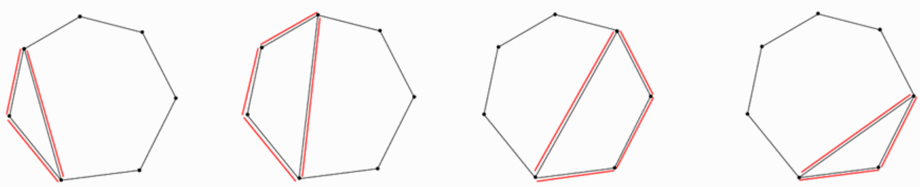
Demonstração: Dados dois vértices não vizinhos, sabe-se que seus subconjuntos correspondentes possuem somente um elemento em comum (se fossem 2, seriam o mesmo vértice), assim, a união desses subconjuntos possui 3 elementos. Portanto, se um terceiro vértice é vizinho de ambos os vértices, seu subconjunto correspondente é formado por elementos distintos a esses 3 elementos da união, então, como restam 2 elementos disponíveis, existe somente um subconjunto possível de 2 elementos e disjunto aos outros dois.

Proposição: O Grafo de Petersen não possui ciclos de tamanho 4.

Demonstração: Consequência da proposição anterior, caso houvesse um ciclo de tamanho 4, os vértices opostos do ciclo teriam 2 vizinhos em comum.

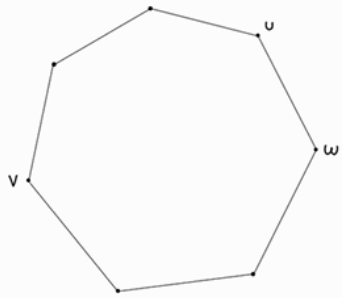
Teorema: O Grafo de Petersen não possui ciclo de tamanho 7.

Demonstração: Suponha que o Grafo de Petersen possui ciclo de tamanho 7. Em cada vértice desse ciclo, as arestas que o conecta aos seus vizinhos contribui em 2 para seu grau. Como todos os vértices do grafo têm grau 3, cada vértice deve possuir mais um vizinho. Entretanto, note que o terceiro vizinho não pode ser outro vértice desse ciclo, já que isso formaria ciclos de tamanho 3 ou 4, ou seja, o terceiro vizinho de cada um desses vértices não faz parte do ciclo.



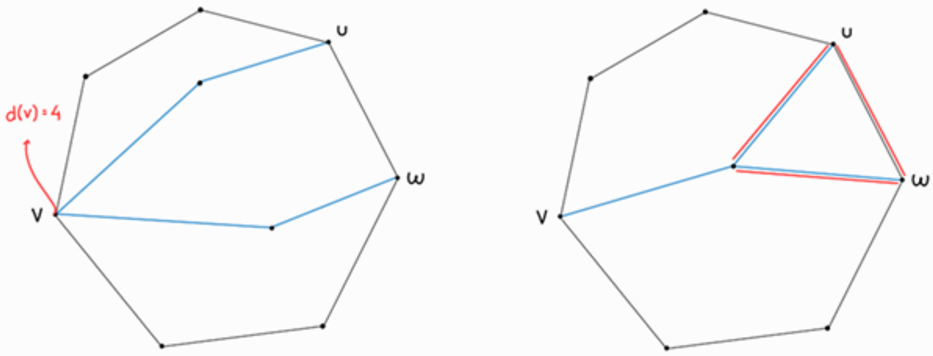
Temos, então, que dois vértices não consecutivos desse ciclo não são vizinhos e, portanto, possuem um vizinho em comum.

Seja v um vértice do ciclo. Sejam u e w dois vértices consecutivos do ciclo mas não consecutivos a v.



Segue que v e u possuem um vizinho em comum fora do ciclo e, também, que v e w possuem um vizinho em comum fora do ciclo.

Se esses vértices forem distintos, v terá grau 4, mas se forem o mesmo vértice, um ciclo de tamanho 3 é formado. Absurdo.



Portanto, o Grafo de Petersen não possui um ciclo de tamanho 7.