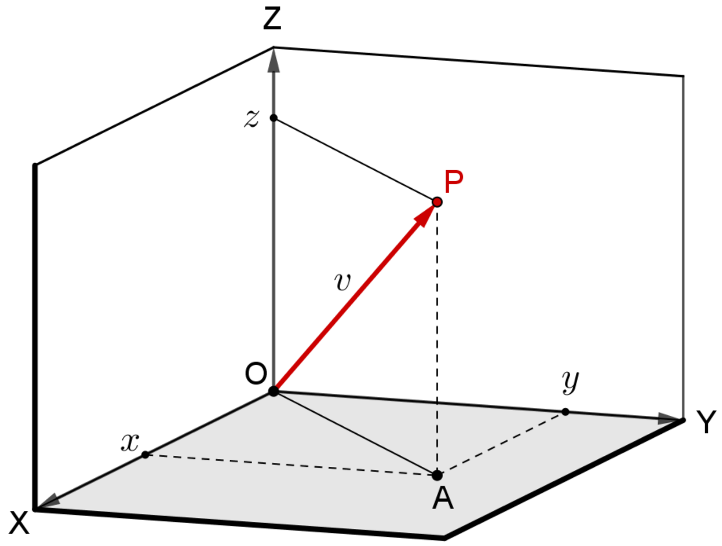
Vetores no espaço – 1

É dado o plano cartesiano XY formado por todos os pontos (x, y) de coordenadas reais. Acrescentamos o eixo Z, perpendicular aos dois primeiros e de forma que os três eixos, na ordem XYZ, formem um triedro direto (observe a figura a partir de sua região interior e a ordem XYZ está no sentido positivo).



Passamos a representar cada o ponto do espaço por um terno (x, y, z) de números reais. Esse nosso espaço será chamado, então de espaço $\mathbb{R}^3$.
Na figura acima temos $A = (x, y, 0)$ e $P = (x, y, z)$.

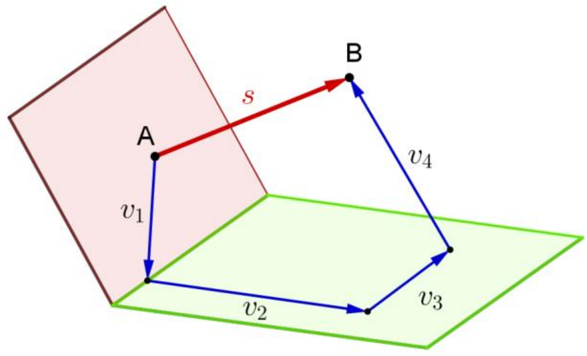
Cada ponto $P = (x, y, z)$ do espaço define um vetor $v = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$. Nesse caso, os números x, y e z são as coordenadas do vetor v.

Os vetores unitários dos eixos são $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$.
Dessa forma, cada vetor do espaço é escrito de forma elementar como combinação linear desses vetores:

$$v = (x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

Operações com vetores e ternos ordenados

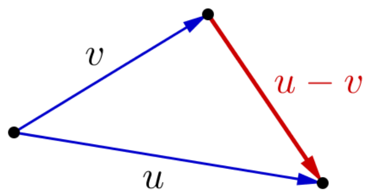
As operações com vetores são definidas da mesma forma que fizemos no plano. Apenas, no caso da adição de vários vetores, os vetores que serão somados não precisam estar no mesmo plano.

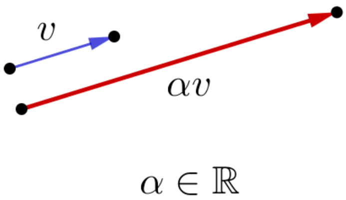


Na figura ao lado,

$$s = \overrightarrow{AB} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

A diferença entre dois vetores e a multiplicação por número real são as mesmas.





As operações do ponto de vista geométrico possuem equivalentes com ternos ordenados:

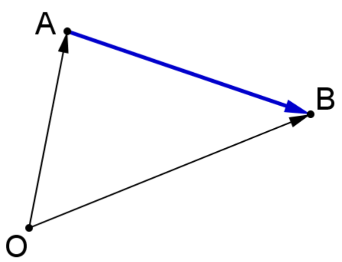
$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$(x, y, z) - (x', y', z') = (x - x', y - y', z - z')$$

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \quad \text{para qualquer } \alpha \in \mathbb{R}$$

Definimos ainda o vetor nulo $O = (0, 0, 0)$ com as propriedades acima.

Vetor definido por dois pontos



Dados dois pontos A e B, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ e escrevemos

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

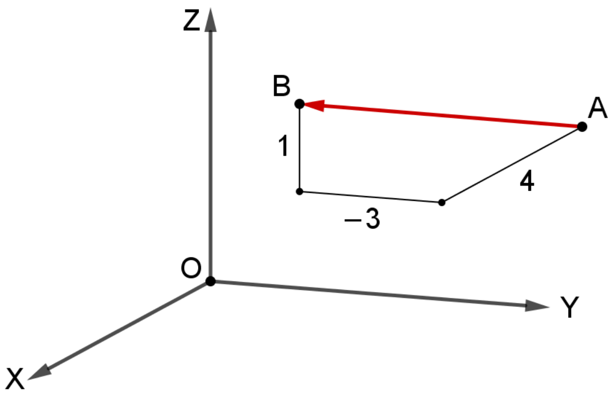
Ou, ainda, $A + \overrightarrow{AB} = B$.

Assim, dados os pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ o vetor de origem A e extremidade B é

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Exemplo

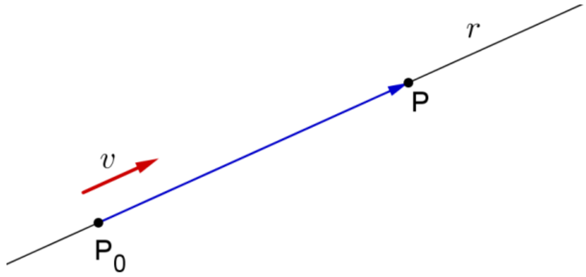
Se $A = (2, 5, 3)$ e $B = (6, 2, 4)$ então o vetor o vetor de origem A e extremidade B é $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -3, 1)$. Isso significa que partindo de A, para chegar a B devemos caminhar: 4 unidades na direção X, -3 unidades na direção Y e mais 1 unidade na direção Z.



$$\overrightarrow{AB} = (4, -3, 1) = (4, 0, 0) + (0, -3, 0) + (0, 0, 1)$$

A reta no espaço

Inicialmente, definimos uma reta do espaço por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor paralelo $v = (a, b, c)$ chamado de *vetor diretor* da reta.



A reta *r* passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $v = (a, b, c)$. Qualquer ponto $P = (x, y, z)$ da reta *r* é tal que

$$\overrightarrow{P_0P} = tv$$

para algum real t.
Assim,

$$P = P_0 + tv$$

que é a *equação* vetorial da reta r.

Colocando as coordenadas, ficamos com

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Que são as equações paramétricas da reta r.
Descrevemos, então a reta r do espaço por

$$r = \{(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct); t \in \mathbb{R}\}$$

Reta por dois pontos

Exemplo
Determine a reta que passa pelos pontos $A = (4, 2, -7)$ e $B = (7, 8, 5)$

Solução

Temos o vetor $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 6, 12)$. Esse é um vetor paralelo à reta AB. Podemos adotar esse vetor como vetor diretor, mas podemos também adotar um mais simples:

$$v = \frac{\overrightarrow{AB}}{3} = (1, 2, 4)$$

Como "ponto inicial" adotaremos $P_0 = A$.
Assim, qualquer ponto P dessa reta é dado por $P = A + tv$, com t real.
Assim,

$$(x, y, z) = (4, 2, -7) + t(1, 2, 4)$$

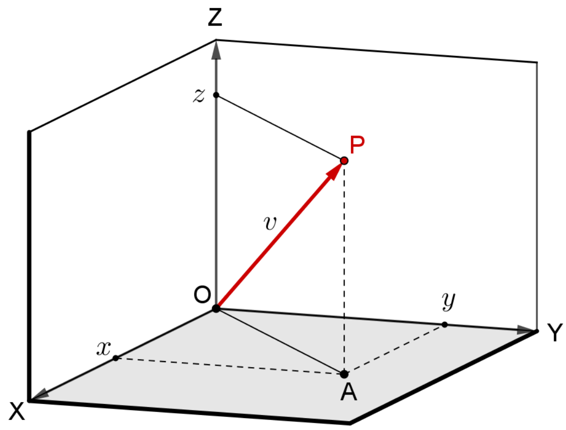
E as equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -7 + 4t \end{cases}$$

A reta r é o conjunto:

$$r = \{(4 + t, 2 + 2t, -7 + 4t);\ t \in \mathbb{R}\}$$

Explorando mais a figura inicial



Pontos dos eixos:

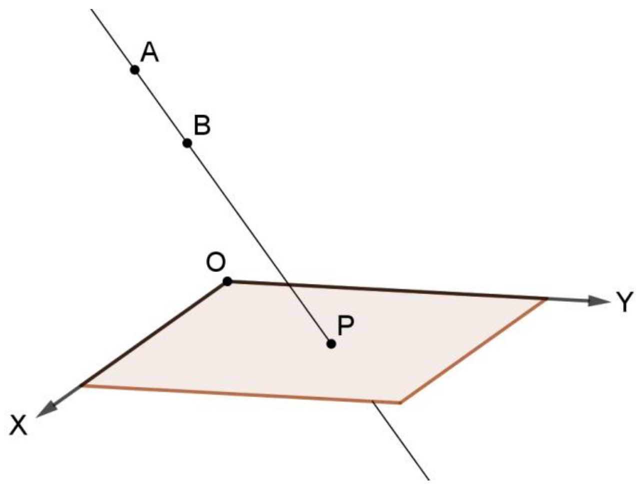
Eixo X: $(x, 0, 0)$
Eixo Y: $(0, y, 0)$
Eixo Z: $(0, 0, z)$

Planos principais:

Plano XY: plano $z = 0$
Plano YZ: plano $x = 0$
Plano XZ: plano $y = 0$

Exercício

A reta r passa pelos pontos $A = (5, 3, 8)$ e $B = (7, 4, 6)$. Determine o ponto onde a reta r fura o plano XY.



Solução

$\overrightarrow{AB} = (2, 1, -2)$. Tomemos B como "ponto inicial" e $v = (2, 1, -2)$ como vetor diretor. As equações paramétricas da reta *r* são

$$\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = 6 - 2t \end{cases}$$

O ponto onde essa reta fura o plano XY é o ponto tal que $z = 0$.
Assim, $6 - 2t = 0$, ou seja, $t = 3$.
O ponto procurado é, então, $P = (13, 7, 0)$.

Módulo e distância entre dois pontos

Dado o vetor $v = (x, y, z)$ o seu comprimento é calculado observando a figura acima e aplicando duas vezes o teorema de Pitágoras. O comprimento do vetor $v = (x, y, z)$ é o seu módulo:

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Dados dois pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ a distância entre A e B é o módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$. Então

$$AB = d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Exemplo
Se $A = (3, 1, -2)$ e $B = (0, 2, 3)$. A distância entre eles é maior ou menor do que 6?

Fácil.
$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 1, 5)$

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{35} < 6$$

Exemplo
Qual é a equação da esfera de centro na origem e raio 1?

Esse também é fácil.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Exercício
Seja $r = \{(2t, 6-t, -1+3t);\ t \in \mathbb{R}\}$ e seja $A = (2, 1, -1)$.
Determine um ponto de r que dista 7 unidades do ponto A.

Solução

$r = \{(2t, 6-t, -1+3t);\ t \in \mathbb{R}\}$
$A = (2, 1, -1)$.

Todo ponto da reta *r* tem a forma $P = (2t, 6-t, -1+3t)$. Desenhamos um vetor de A a P.

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (2t-2, 6-t-1, -1+3t+1)$$

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (2t-2, 5-t, 3t)$$

Devemos ter $\left|\overrightarrow{AP}\right| = 7$. Então,

$$(2t-2)^2 + (5-t)^2 + (3t)^2 = 49$$

$$4t^2 - 8t + 4 + 25 - 10t + t^2 + 9t^2 = 49$$

$$14t^2 - 18t - 20 = 0$$

$$7t^2 - 9t - 10 = 0$$

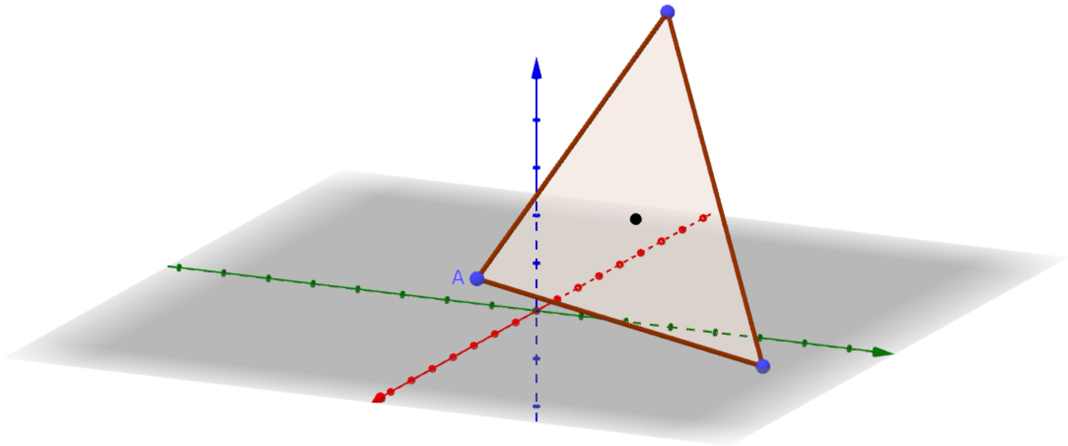
As raízes são $t = 2$ e $t = -\frac{5}{7}$. Assim, há dois pontos que satisfazem as condições do enunciado:

$$P = (4, 4, 5) \quad e \quad P' = \left(-\frac{10}{7}, \frac{47}{7}, -\frac{22}{7}\right)$$

Baricentro do triângulo

No plano ou no espaço o baricentro do triângulo ABC é o ponto

$$G = \frac{A+B+C}{3}$$


A