Exercício 1 - Lipschitz e Hölder

Seja $A, \lambda > 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|^A, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Mostre que

(a) Se $A = 1$, então se f é derivável, possui derivada limitada.

(b) Se $A > 1$, então f é constante.

Seja agora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável com derivada limitada. Mostre que existe $\lambda > 0$ tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Exercício 2 - Taxa de Variação

Se g é derivável, mostre que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h}$$

Exercício 3 - O Teorema do Valor Médio

(a) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} | x^3 + x^2 + x + 1 < 0\}$. Mostre que A é limitado superiormente e encontre o supremo de A.

(b) Mostre que $f(x) = -x \cos x + \sin x - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Exercício 4 - Taylor

Qual é o polinômio de Taylor de $\sin x$ centrado em 0?

Exercício 5 - A Regra de L'Hôspital

Sejam f e g duas funções deriváveis em a, com $g'(a) \neq 0$. Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 0 = g(a) = \lim_{x \to a} g(x)$. Prove que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exercício 6 - A Fórmula de Taylor com Resto Integral

Borges e Rodrigues, amigos de Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-Vanato e Cardineiro, aprenderam a Fórmula de Taylor com Resto Integral de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente derivável, que afirma que

$$f(x) = [T(f)](a) + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

onde $T(f)$ é o polinômio de Taylor de f, isto é

$$[T(f)](a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

Sabendo disso, Cleyton, o monitor, lhes desafiou propondo uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(2)$ e com f'' estritamente decrescente e perguntou: "Em torno de $x = 1$, qual é o comportamento da função?". Responda essa pergunta

1 a) $|f(x) - g(x)| \leq \lambda |x-y|$

$$\lim_{x \to y} |f(x) - f(y)| \leq \lambda \lim_{x \to y} |x-y|$$

$$\lim_{x \to y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq \lambda \qquad (x - y = h)$$

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(y+h) - f(y)}{h} \right| \leq \lambda$$

$$\boxed{-\lambda \leq f'(y) \leq \lambda}.$$

b) $$\lim_{x \to y} |f(x) - f(y)| \leq \lambda \lim_{x \to y} |x-y|^A$$

$$\lim_{x \to y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq \lambda \cdot \lim_{x \to y} |x-y|^{A-1}$$

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(y+h) - f(y)}{h} \right| \leq \lambda \cdot \lim_{h \to 0} |h|^{A-1}$$

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(y+h) - f(y)}{h} \right| \leq 0$$ e $|f'(y)| = 0 \Rightarrow f'(y) = 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$.

Logo, $f(x)$ é constante.

- Pelo teorema do valor médio, $\exists c \in \mathbb{R}\ (x>y) \mid$
$f'(c) = \dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}$.

Como a derivada é limitada, $\exists \lambda \mid$
$-\lambda \leq \dfrac{g(x)-g(y)}{x-y} \leq \lambda \Rightarrow \left|\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq \lambda$

$\Rightarrow \boxed{|g(x)-g(y)| \leq \lambda |x-y|}$ //.

(2) Sabemos que $g'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Contudo, sabemos que $g'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x)-g(x-h)}{h}$

Logo, pela propriedade de limite, já que $\exists g'(x)$:

$2g'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x-h)}{h}$ e

$$\boxed{g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x-h)}{2\cdot h}}$$ //.

3) a)

$x=-2 \Rightarrow x^3+x^2+x+1 = -5<0 \quad (-2 \in A)$

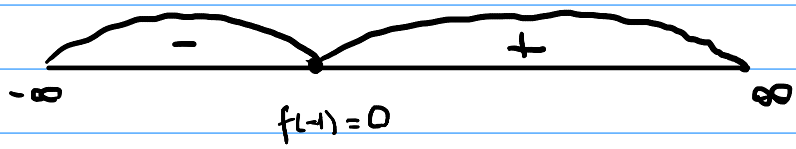
$x=-1 \Rightarrow x^3+x^2+x+1 = 0 = 0 \quad (-1 \notin A)$

$x=-0 \Rightarrow x^3+x^2+x+1 = 1 > 0 \quad (0 \notin A)$

$x>0 \Rightarrow x^3+x^2+x+1 > 0 \quad (x>0 \notin A)$.

- Portanto, se $x \in A$, então $x<-1$. Portanto, A é limitado superiormente.

- Perceba que $x=-1$ é raiz de $f(x)=x^3+x^2+x+1$. Agora, analisando $f'(x)=3x^2+2x+1 = 2x^2+(x+1)^2$, temos que $f'(x)>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $f(x)$ é estritamente crescente.
 Analisando o sinal de $f(x)$ (tendo em mente que ele é estritamente crescente):



Portanto, $x=-1$ é a única raiz real de $f(x)$
Suponha que $\exists c \neq -1 \mid f(c)=0$. Então no intervalo $(c,-1)$, ou $(-1,c)$, existiria $k \mid f'(k)=0$, pelo teorema de Rolle (absurdo).
Logo, $x=-1$ é a única raiz real de $f(x)$ e $f(x)<0 \ \forall x<-1$. Assim $\forall x<-1$, $x \in A$ e $A=(-\infty,-1)$.
Por fim, $\sup(A)=-1$.

b) Se $x=0$, então $f(x)=0$.

Analisando $f'(x) = x \cdot \operatorname{sen}x - \cos x + \cos x - x = x(\operatorname{sen}x - 1)$. Como $-1 \leq \operatorname{sen}x \leq 1$, $\operatorname{sen}x - 1 \leq 0$. Assim, o sinal de $f'(x)$ pode ser determinado pela parcela x. Portanto, se $x \geq 0$, $f'(x) \leq 0$ e se $x \leq 0$, $f'(x) \geq 0$, lembrando que $f(x)$ terá infinitas raízes.

Tomando o intervalo $(-3\pi/2, \pi/2)$ em particular, temos que $f'(c)=0 \Leftrightarrow c=0$ para algum c no intervalo. Caso contrário, se existisse $x_0 \neq c \mid f(x_0)=0$, então pelo teorema de Rolle, existiria k entre x_0 e c (exclusivos) tal que $f'(k)=0$ (absurdo).

Logo, $f(x) \Leftrightarrow x=0$.

4 Polinômio de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}}$$

$f(x) = \text{sen}x$

$f^{(1)}(x) = \cos x \,,\quad f^{(2)}(x) = -\text{sen}x \,,\quad f^{(3)}(x) = -\cos x \,,\quad f^{(4)}(x) = \text{sen}x, \ldots$

$f(0) = 0$

$f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 0 \,,\quad f^{(3)}(0) = -1, \quad f^{(4)} = 0, \ldots$

$f^{(2k)}(0) = 0$

$f^{(4k+1)}(0) = 1$

$f^{(4k+3)}(0) = -1$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}x = 0 + \frac{1 \cdot x}{1!} + 0 + \frac{(-1)x^3}{3!} + 0 + \frac{1 \cdot x^5}{5!} + \cdots$$

$$\boxed{\text{sen}x = \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}}$$

(5) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}$

$\boxed{= \frac{f'(a)}{g'(a)}}$. Só que $g'(a) \neq 0$ e f, g são diferenciáveis.

Obs: Aplicamos a continuidade de f, g.

(6) Temos que $f'''(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{matrix} f(0) \\ f(2) \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} (x=0, a=1) \\ (x=2, a=1) \end{matrix}\right.$

Vamos fazer o polinômio de Taylor até a segunda derivada, pois no resto integral, teremos informações sobre a terceira derivada.

$$f(0) = f(1) - f'(1) + \frac{f''(1)}{2} + \int_1^0 \frac{f'''(t)}{2}(-t)^2\,dt$$

$$f(2) = f(1) + f'(1) + \frac{f''(1)}{2} + \int_1^2 \frac{f'''(t)}{2}(2-t)^2\,dt$$

Logo, como $f(0) = f(2)$, segue que:

$$2f'(1) = -\frac{1}{2}\int_1^0 f'''(t)\cdot t^2\,dt - \frac{1}{2}\int_1^2 f'''(t)\,(2-t)^2\,dt$$

Como $f'''(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$-\frac{1}{2}\int_1^0 f'''(t)\cdot t^2\,dt - \frac{1}{2}\int_1^2 f'''(t)\,(2-t)^2\,dt > 0.$$

Logo $2f'(1) > 0$ e $f'(1) > 0$. Portanto, em uma vizinhança de $x=1$, a função é estritamente crescente.