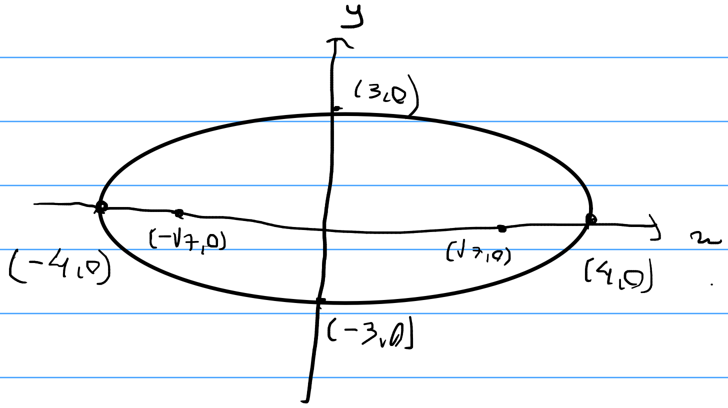
Lista de Geometria Analítica (cônicas)

1) Faça um esboço do gráfico da curva $9x^2+16y^2=144$.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$



Elipse com centro na origem eixo maior 8, eixo menor 6 e eixo focal $2\sqrt{7}$.

2) Encontre os focos da elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

Da equação: $a=3$, $b=\sqrt{5}$ e $c=2$.
Logo, os focos são os pontos $(-2,0)$ e $(2,0)$.

3) Dados $A=(1,\ 0)$, $B=(3,\ 0)$ e $P=(x,\ y)$ determine a equação da curva descrita pelo ponto P de forma que $d(P,A)+d(P,B)=4$.

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=4$$

$$\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}=16-8\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}$$

$$8\sqrt{(x-3)^2+y^2}=24-4x$$

$$2\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 6 - x.$$

$$4\left((x-3)^2+y^2\right) = 36 - 12x + x^2$$

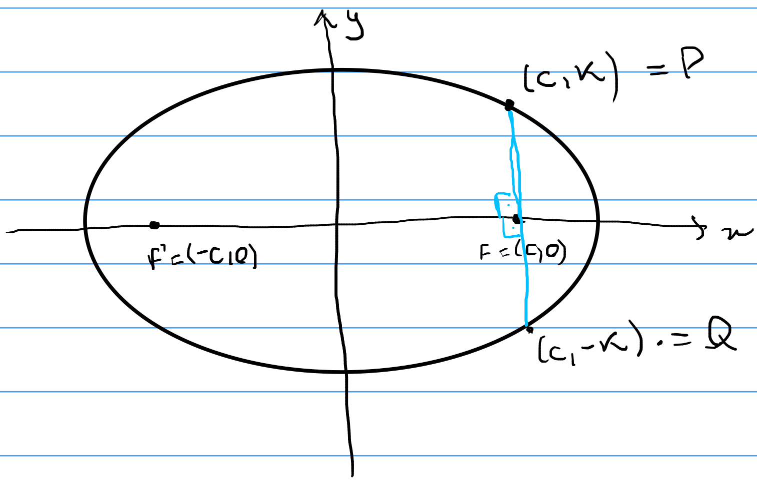
$$4(x^2-6x+9+y^2) = 36 - 12x + x^2$$

$$4x^2 - 24x + \cancel{36} + 4y^2 = \cancel{36} - 12x + x^2$$

$$3x^2 + 4y^2 - 12x = 0$$

4) Se $a > b$ determine, na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, o comprimento da corda focal perpendicular ao eixo maior.

Corda focal: qualquer corda que passa por pelo menos um dos focos.



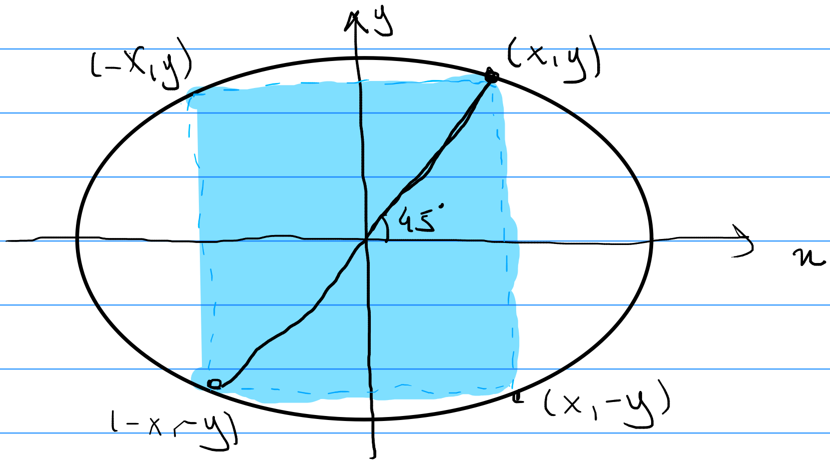
Temos que $a^2 = b^2 + c^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e

$PQ = 2k$. $\frac{c^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$.

$$k^2 = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \cdot b^2 \Rightarrow k^2 = \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) b^2 \Rightarrow k^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

Logo, $K = \frac{b^2}{a}$ e $\boxed{PQ = \frac{2b^2}{a}}$.

5) Determine a área do quadrado inscrito na elipse $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.



Se a angulação é 45°, então $\boxed{x=y}$

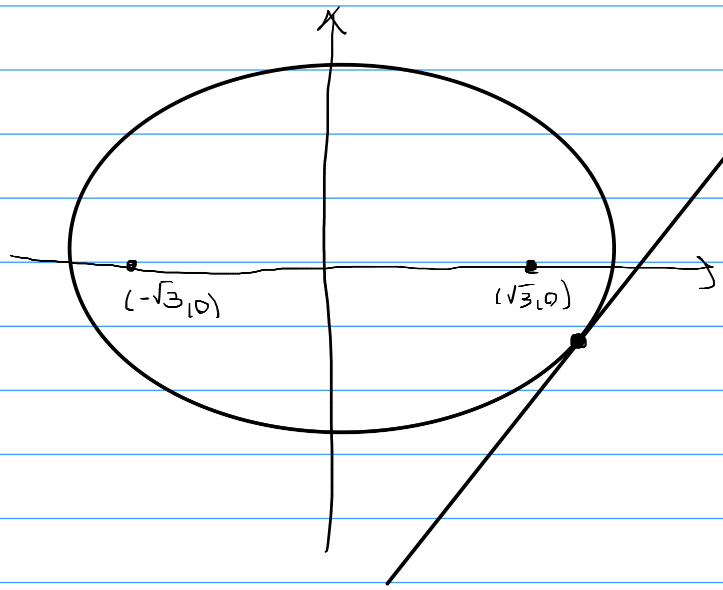
A área do quadrado é $4xy = 4x^2$.

Substituindo um dos pontos na equação da elipse:

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow x^2+3y^2=6 \Rightarrow 4x^2=6$$

Logo, a área do quadrado é $\boxed{6}$.

6) Determine k para que a reta $y=\frac{x}{2}+k$ seja tangente à elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.



Perceba que se substituirmos $y=\frac{1}{2}x+K$ na equação da elipse:

$$x^2+4\left(\frac{1}{2}x+K\right)^2=4$$

$$x^2+4\left(\frac{1}{4}x^2+xK+K^2\right)=4$$

$$x^2+x^2+4xK+4K^2-4=0$$

$$2x^2+4xK+(4K^2-4)=0$$

$$x^2+2xK+(2K^2-2)=0$$

$$x=\frac{-2K\pm\sqrt{4K^2-4(2K^2-2)}}{2}$$

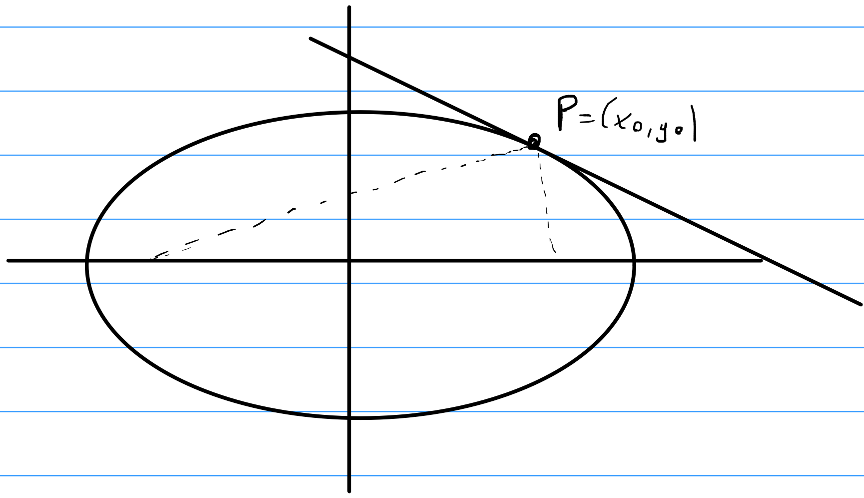
Para ser tangente, $4k^2 - 8k^2 + 8 = 0$

$4k^2 = 8$

$\boxed{k = \pm\sqrt{2}}$ $_\mathbb{Z}$.

7) Se $P = (x_0,\ y_0)$ é um ponto da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ mostre que a reta $\dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y = 1$ é tangente a essa elipse no ponto P.

Seja r: $\alpha x + \beta y = 1$. a reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto (x_0, y_0).



- $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

$\boxed{y = \dfrac{1-\alpha x}{\beta}}$ $_{\mathbb{Z}n}$.

$$b^2x^2 + a^2\left(\frac{1-\alpha x}{\beta}\right)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + \frac{a^2}{\beta^2}(1 - 2\alpha x + \alpha^2x^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + \frac{a^2}{\beta^2} - \frac{2a^2\alpha}{\beta^2}x + \frac{\alpha^2a^2}{\beta^2}\cdot x^2 = a^2b^2$$

$$x^2\left(b^2 + \frac{a^2\alpha^2}{\beta^2}\right) - \frac{2a^2\alpha}{\beta^2}x + \left(\frac{a^2}{\beta^2} - a^2b^2\right) = 0$$

$$x^2\left(\frac{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}{\beta^2}\right) - \frac{2a^2\alpha}{\beta^2}x + \left(\frac{a^2}{\beta^2} - a^2b^2\right) = 0$$

$$x = \frac{\frac{2a^2\alpha}{\beta^2} \pm \sqrt{\frac{4a^4\alpha^2}{\beta^4} - 4\left(\frac{a^2}{\beta^2} - a^2b^2\right)\left(\frac{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}{\beta^2}\right)}}{2\cdot\left(\frac{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}{\beta^2}\right)}.$$

$$x = \frac{\frac{2a^2\alpha}{\beta^2} \pm \frac{2}{\beta^2}\sqrt{a^4\alpha^2 - (a^2 - a^2b^2\beta^2)(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)}}{\frac{2}{\beta^2}(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)}.$$

$$x = \frac{\frac{2a^2\alpha}{\beta^2} \pm \frac{2}{\beta^2}\sqrt{a^4b^2\beta^2\alpha^2 + \alpha^2b^4\beta^4 - a^2b^2\beta^2}}{\frac{2}{\beta^2}(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)}.$$

Como x_0 é ponto de tangencia: $\boxed{x_0 = \frac{a^2\alpha}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}}$.

Fazendo o mesmo raciocínio com $x = \frac{1-\beta y}{\alpha}$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

$$\frac{b^2}{\alpha^2}(1-2\beta y+\beta^2y^2)+a^2y^2=a^2b^2$$

$$y^2\left(a^2+\frac{b^2\beta^2}{\alpha^2}\right)-\frac{2\beta b^2}{\alpha^2}y+\frac{b^2}{\alpha^2}-a^2b^2=0.$$

$$y=\frac{\frac{2\beta b^2}{\alpha^2}\pm\sqrt{\frac{4\beta^2b^4}{\alpha^4}-4\left(\frac{a^2+b^2\beta^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{b^2}{\alpha^2}-a^2b^2\right)}}{2\left(\frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}{\alpha^2}\right)}$$

Como y_0 é ponto de tangencia, então

$$\boxed{y_0=\frac{\beta b^2}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}} \qquad \boxed{x_0=\frac{a^2\alpha}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}.$$

Substituindo na elipse:

$$\frac{a^{\cancel{4}2}\alpha^2}{\cancel{a^2}(a^2\alpha^2+b^2\beta^2)^2}+\frac{b^{\cancel{4}2}\beta^2}{\cancel{b^2}(a^2\alpha^2+b^2\beta^2)^2}=1$$

$$\boxed{\therefore\ a^2\alpha^2+b^2\beta^2=1.}$$

Percebba que se $\alpha = \frac{x_0}{a^2}$ e $\beta = \frac{y_0}{b^2}$

obteremos $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Como isso ocorre e (x_0, y_0) é ponto de tangência (interseção entre a elipse e a reta é única), então $\alpha = \frac{x_0}{a^2}$ e $\beta = \frac{y_0}{b^2}$ é a única solução de $a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 = 1$. que satisfaz as condições.

Portanto, a equação da reta tangente é $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$

POR DERIVADA IMPLÍCITA:

Equação da elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

O ponto $(x_0, y_0) \in$ Elipse $\therefore b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$

Reta que passa por (x_0, y_0) e possui coeficiente Angular m: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Derivando $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ em relação a x:

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y} \Rightarrow \boxed{m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}$$

Substituindo: $y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$

Fazendo as contas e usando $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ chegamos em $\frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y = 1$

8) Determine as tangentes à elipse $\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$ que são paralelas à reta $3x+2y+7=0$.

Se as retas são paralelas a $3x+2y+7=0$, então elas são da forma $3x+2y=c$.

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{c-2y}{3}}$$

$$\frac{(c-2y)^2}{10\cdot 3^2}+\frac{2y^2}{5}=1$$

$$(c-2y)^2+2y^2\cdot 2\cdot 9=90$$

$$40y^2-4cy+c^2-90=0.$$

$$y=\frac{4c\pm\sqrt{16c^2-4\cdot 40(c^2-90)}}{2\cdot 40}$$

Se as retas são tangentes, então

$$\cancel{16}c^2-\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot 10(c^2-90)=0$$

$$c^2-10c^2+900=0$$

$$9c^2=900$$

$$\boxed{c=\pm 10}$$

As retas são $\boxed{3x+2y\pm 10=0.}$

9) Mostre que $P = (2,\ 1)$ pertence à elipse $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ e encontre a equação da reta tangente em P a essa elipse.

I) $\frac{2^2}{6} + \frac{1^2}{3} = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$ ✓.

II) Sabemos do exercício 7): A equação da reta tangente no ponto (x_0, y_0) pertencente a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é $\frac{x_0}{a^2} \cdot x + \frac{y_0}{b^2} \cdot y = 1$

Aplicando: $\frac{2}{6} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y = 1$

$\boxed{x + y = 3}$

10) Sendo $a \neq b$, quantos pontos possuem em comum as curvas $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$?

$$x^2 = \left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)a^2 \qquad x^2 = \left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)b^2.$$

$$a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) = b^2\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right).$$

$$a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}y^2.$$

$$y^2\left(\frac{a^4-b^4}{a^2b^2}\right) = (a^2-b^2).$$

$$(a^2-b^2)\left(\frac{y^2(a^2+b^2)}{a^2b^2} - 1\right) = 0.$$

$a^2=b^2$ ou $y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}}$.

Desconsiderando esse resultado.

$$x^2 = \left(1 - \frac{a^2\cancel{b^2}}{(a^2+b^2)\cancel{b^2}}\right)a^2$$

$$x^2 = \frac{(\cancel{a^2}+b^2-\cancel{a^2})}{(a^2+b^2)}\cdot a^2$$

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}}$$

Pontos possíveis

$$(x,y) = \left(\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}, \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}\right)$$

$$(x,y) = \left(\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}, -\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}\right)$$

$$(x,y) = \left(-\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}, \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}\right)$$

$$(x,y) = \left(-\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}, -\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}\right)$$

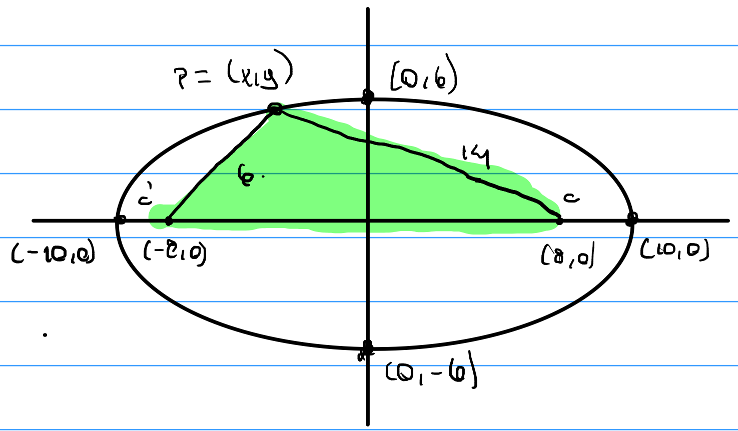
Logo, 4 pontos

11) Determine um ponto da elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ cuja distância ao foco da direita é igual a 14.

$$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{6^2}=1.$$

Sabemos que $a^2=b^2+c^2$ $\therefore$ $\boxed{c=8}$ (semi eixo focal).

Fazendo a elipse:



$$\begin{cases}(x-8)^2+y^2=14^2\\(x+8)^2+y^2=6^2\end{cases}$$

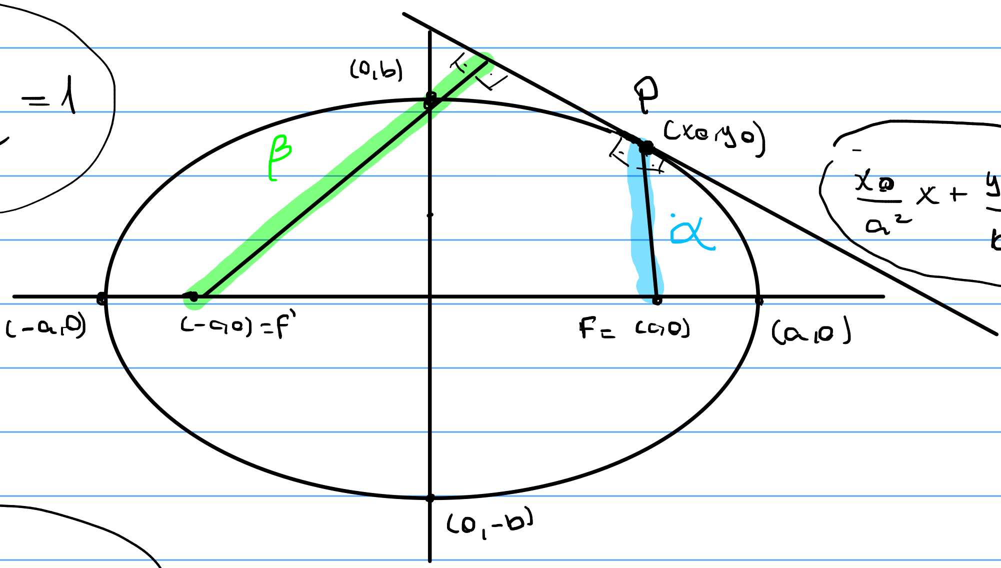
$PC=14$ $\wedge$ $PC'=6$.

$$x^2-16x+64+y^2=196.$$
$$x^2+16x+64+y^2=36.$$
$$-32x=160$$
$$\boxed{x=-5} \Rightarrow y^2=36-9 \quad \boxed{y=\pm 3\sqrt{3}}$$

Pontos: $(-5,3\sqrt{3})$; $(-5,-3\sqrt{3})$

12) Em uma elipse mostre que o produto das distâncias dos focos a uma tangente qualquer é constante.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$$

$$\alpha = \frac{|b^2x_0c - a^2b^2|}{\sqrt{x_0^2b^4 + y_0^2a^4}} \quad ; \quad \beta = \frac{|-b^2x_0c - a^2b^2|}{\sqrt{x_0^2b^4 + y_0^2a^4}}$$

$$\alpha\beta = \frac{b^2 \cdot |x_0c - a^2| \cdot b^2 \cdot |-x_0c - a^2|}{x_0^2b^4 + y_0^2a^4}$$

$$\alpha\beta = \frac{b^4 \cdot |x_0^2c^2 - a^4|}{x_0^2b^4 + y_0^2a^4}$$

$$\alpha\beta = \frac{|x_0^2 c^2 - a^4|}{x_0^2 + y_0^2 \frac{a^4}{b^4}} \qquad x_0^2 = \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right) a^2.$$

$$\alpha\beta = \frac{\cancel{a^2}\left|\left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right) c^2 - a^2\right|}{\cancel{a^2}\left(1 - \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{y_0^2 a^2}{b^4}\right)}$$

$$\alpha\beta = \frac{\cancel{\frac{1}{b^2}} \cdot |(b^2 - y_0^2) c^2 - a^2 b^2|}{\cancel{\frac{1}{b^2}}\left(b^2 - y_0^2 + \frac{y_0^2 a^2}{b^2}\right)}$$

$$\alpha\beta = \frac{|b^2(c^2 - a^2) - y_0^2 c^2|}{b^2 - y_0^2\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2}\right)}$$

$a^2 = b^2 + c^2$

$$\alpha\beta = \frac{|-b^4 - y_0^2 c^2|}{\frac{b^4 - y_0^2 \cdot (-c^2)}{b^2}} = \frac{(b^4 + y_0^2 c^2) \cdot b^2}{(b^4 + y_0^2 c^2)} = \boxed{b^2}$$

Teorema de la Hire

Como conseguimos escrever x_0^2 e y_0^2 em função de constantes, então $\alpha.\beta$ também é constante.

13) Determine os focos, as assíntotas e faça um esboço do gráfico da hipérbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Focos: $c^2 = 9+4$

$c = \pm\sqrt{13} \Rightarrow \boxed{(\sqrt{13}, 0) \; ; \; (-\sqrt{13}, 0)}$

Assíntotas: $y = \pm \frac{bx}{a} = \boxed{\pm \frac{2}{3} x}$ //

14) Determine para que valores de m a reta $y = mx$ não possui ponto comum com a hipérbole $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$.

$$\frac{x^2}{6} - \frac{m^2x^2 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 1$$

$$x^2 - 3m^2x^2 = 6$$

$$(1-3m^2)x^2 - 6 = 0$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{-4\cdot(1-3m^2)\cdot(-6)}}{2(1-3m^2)} = \frac{\pm\sqrt{24(1-3m^2)}}{2}$$

Para não possuir ponto em comum, $1-3m^2 < 0$ e além disso, $x=y=0$ $\therefore$ $1-3m^2 \leq 0$

$$3m^2 \geq 1$$

$$m^2 \geq 1/3 \Rightarrow \boxed{m \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee m \geq \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

15) Encontre a equação da hipérbole equilátera cujos focos são $(4, 0)$ e $(-4, 0)$.

Hipérbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; Hipérbole equilátera:

$a = b \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$.

Sabemos que $2c = 8 \therefore c = 4$

Portanto, $4^2 = 2a^2 \quad (c^2 = a^2 + b^2)$.

$$\boxed{\Rightarrow a^2 = 8}$$

Por fim, a hipérbole equilátera é $\boxed{x^2 - y^2 = 8}$

16) Determine k para que a reta $y = 3x + k$ seja tangente à hipérbole $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

substituindo: $x^2 - \frac{(3x+k)^2}{4} = 1$

$$4x^2 - (9x^2 + 6xk + k^2) = 4$$

$$5x^2 + 6xk + (k^2 + 4) = 0.$$

$$x = \frac{-6k \pm \sqrt{36k^2 - 4.5(k^2+4)}}{10}$$

Para ser tangente, $36k^2 - 4.5(k^2+4) = 0$.

$$\therefore \; 9k^2 - 5k^2 - 20 = 0$$

$$4k^2 = 20$$

$$\boxed{k = \pm\sqrt{5}}$$

17) Determine a condição de tangência entre a reta $y = kx + m$ e a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx+m)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 - a^2(k^2x^2 + 2kmx + m^2) = a^2b^2$$

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2kma^2x - (a^2m^2 + a^2b^2) = 0$$

$$x = \frac{2kma^2 \pm \sqrt{4k^2m^2a^4 - 4(b^2 - a^2k^2)(-(a^2m + a^2b^2))}}{2(b^2 - a^2k^2}$$

$$\therefore\ 4k^2m^2a^4 + 4(b^2 - a^2k^2)(a^2m^2 + a^2b^2) = 0$$

$$4k^2m^2a^4 + 4(b^2a^2m^2 + a^2b^4 - a^4k^2m^2 - a^4b^2k^2) = 0$$

$$\cancel{4}\cancel{b^2}\cancel{a^2}m^2 + \cancel{4}\cancel{a^2}b^{\cancel{4}2} = \cancel{4}a^{\cancel{4}2}\cancel{b^2}k^2.$$

$$m^2 + b^2 = a^2k^2.$$

$$\boxed{m^2 = a^2k^2 - b^2}\ \text{fim.}$$

18) Se $P = (x_0,\ y_0)$ é um ponto da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mostre que a reta $\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1$ é tangente a essa elipse no ponto P.

Por derivação implícita em x:

$$b^2x^2 - y^2a^2 = a^2b^2$$

$$\cancel{2}b^2x \cdot 1 - \cancel{2}a^2y \cdot y' = 0. \quad \boxed{y' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}}\ \text{fim.}$$

Suponha que reta tangente seja $y - y_0 = m(x - x_0)$

em que $m = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$. Substituindo:

$$y - y_0 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} (x - x_0).$$

$$a^2 y_0 (y - y_0) = b^2 x_0 (x - x_0)$$

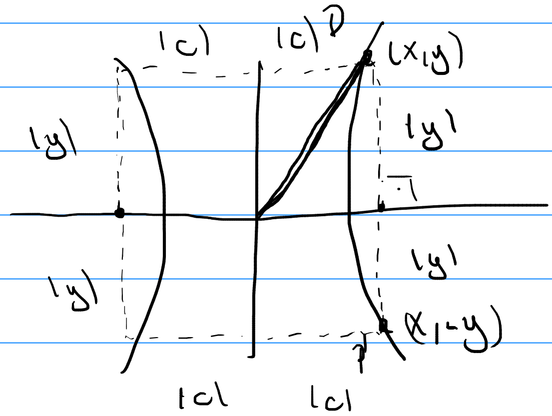
$$a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 = b^2 x_0 x - b^2 x_0^2$$

$$b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 \curvearrowright a^2 b^2.$$

$$\boxed{\frac{x_0}{a^2} \cdot x - \frac{y_0}{b^2} \cdot y = 1}$$

A derivada nos traz a equação da reta tangente. Logo, só substituir o ponto (x_0, y_0) na derivada.

19) Na hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ determine o comprimento da corda focal perpendicular ao eixo transverso.



$$\boxed{PP' = 2|y|.}$$

$$x^2+\cancel{y^2} = c^2+\cancel{y^2} \Rightarrow |x|=|c|.$$

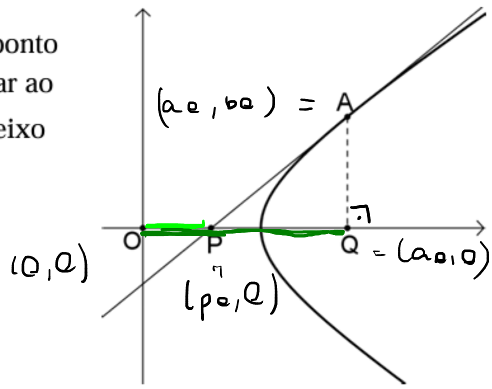
$$\therefore \frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(c^2-a^2) \Rightarrow |y| = \frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2}$$

Mas, sabemos que $c^2 = a^2+b^2$

$$\therefore |y| = \frac{b^2}{a} \quad e \quad \boxed{PP' = \frac{2b^2}{a}}$$

20) A figura ao lado mostra uma tangente em um ponto A de uma hipérbole e o segmento AQ perpendicular ao eixo X. Mostre que $OP \cdot OQ = a^2$ onde a e o semieixo transverso.



Hipérbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Reta tangente: $\frac{a_e}{a^2}x - \frac{b_e}{b^2}y = 1.$

$OP \Rightarrow p_e$

$OQ \Rightarrow a_e$

Substituindo $(p_0, 0)$ em $\frac{a_0}{a^2} \cdot x - \frac{b_0}{b^2} y = 1$

$$\frac{a_0 p_0}{a^2} = 1$$

$$\therefore a_0 \cdot p_0 = a^2$$

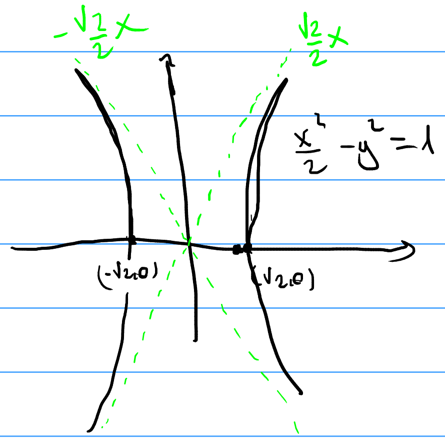
$$\boxed{\therefore OP \cdot OQ = a^2}$$

21) Faça um esboço do gráfico das curvas $x^2 - 2y^2 = 2$ e $x^2 - 2y^2 = -2$.

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \quad ; \quad y^2 - \frac{x^2}{2} = 1.$$

I) $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ Assíntotas: $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x$.

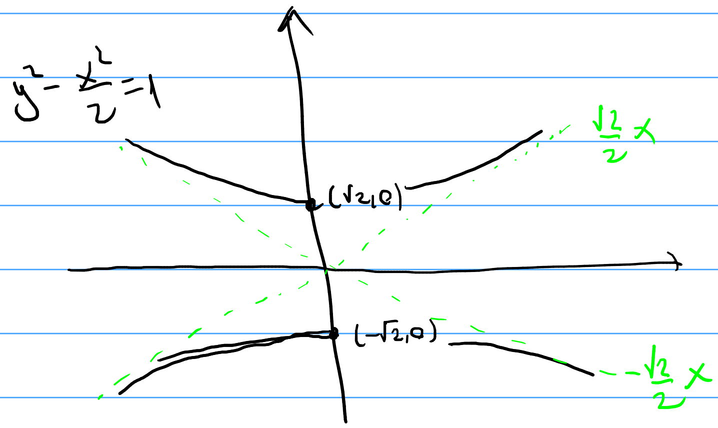
e $a = \sqrt{2}$:



IV) $y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$

É só pegar e rotacionar de 90° o gráfico de $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

(observação: vão ter as mesmas assíntotas).



22) Sendo $x > y$ determine a equação que x e y devem satisfazer para que o produto das distâncias de $P = (x,\ y)$ às retas $x + y = 0$ e $x - y = 0$ seja igual a 3.

$\boxed{x > y}$.

$$\therefore \quad \frac{|x+y+0|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x-y+0|}{\sqrt{2}} = 3.$$

$$\therefore \quad (x+y)(x-y) = 6.$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = 6}.$$

(Hipérbole equilátera com eixo transverso igual a $2\sqrt{6}$).

23) Determine o foco e a diretriz da parábola $y = x^2$.

Parábola comum: $y^2 = 2px$ $(p/2, 0)$.

Parábola invertida: $x^2 = 2py \Rightarrow p = 1/2$. $(0, p/2)$.

Foco: $(0, 1/4)$.

A diretriz é o eixo Ox.

24) Determine a equação da curva descrita pelo ponto $P=(x,\ y)$ de forma que a distância de P ao ponto $(1,\ 2)$ seja igual à sua distância ao eixo OX.

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = |y|$$

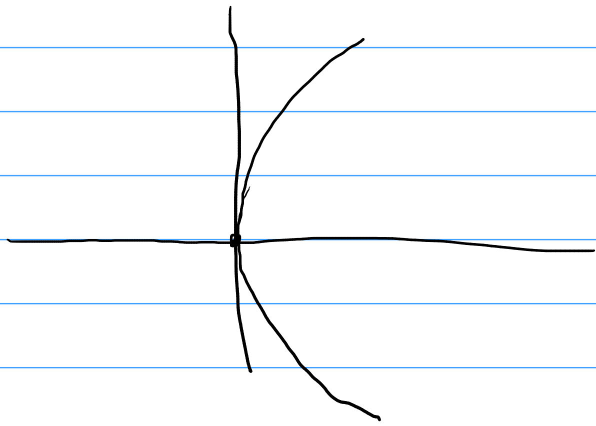
$$x^2-2x+1+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{y^2}$$

$$\boxed{x^2-2x-4y+5=0}$$

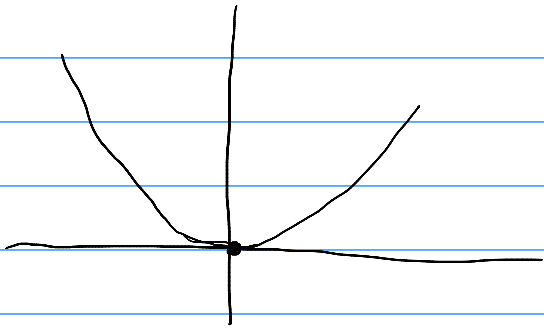
$$y=\frac{1}{4}(x^2-2x+5)$$

25) Sendo $a>0$ determine os pontos comuns às parábolas $y^2=ax$ e $x^2=ay$.

$y^2 = ax$:



$x^2 - ay$:



$$\frac{y^2}{x} = \frac{x^2}{y} \Rightarrow \boxed{x^3 = y^3.}_{m} \qquad x^3 - y^3 = 0$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = 0.$$

$\boxed{x=y}_{m}$ ou $x^2+xy+y^2=0$

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2-4y^2}}{2} \rightsquigarrow \text{Impossível.}$$

$$x^2 = ay. \qquad (x=y)$$

$$x^2 = ax$$

$$x(x-a) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = a.$$

$\boxed{\therefore \text{ Os pontos são } (0,0) \text{ e } (a,a)}_{m}$

26) Determine k para que a reta $y = 4x + k$ seja tangente à curva $x^2 = 3y$.

$$y = \frac{x^2}{3} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}x$$

$$\therefore \frac{2}{3}x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 6} \cdot \quad y = \frac{36}{3} = 12$$

Ponto $(6,12)$ é o ponto de tangência

$$\therefore 12 = 24 + k \Rightarrow \boxed{k = -12}$$

27) Determine a equação da tangente à parábola $x^2 = 2py$ no ponto (x_0, y_0) pertencente à parábola.

$$y' = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}p} = \frac{x}{p} \Rightarrow y' = \frac{x}{p}$$

Reta tangente: $y = mx + n$.

Sabemos que $m = \frac{x_0}{p}$ (derivada de y em x_0).

Substituindo (x_0, y_0) em $y = mx + n$:

$$y_0 = \frac{x_0}{p} \cdot x_0 + n \qquad n = y_0 - \frac{x_0^2}{p}.$$

Contudo $2y_0 = \frac{x_0^2}{p}$ $\therefore$ $n = y_0 - 2y_0 = -y_0$.

Por fim, a reta tangente é $\boxed{y = \frac{x_0}{p} \cdot x - y_0}$