Exercício 1 - A Série de Taylor

Dê a Série de Taylor (centrada em 0) de

(a) e^x

(b) $\log 1 + x$

Seja $f(x) = e^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!} \right)$. Mostre que f é um polinômio. Qual o seu grau?

Exercício 2 - Somas de Riemann

Mostre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^k} \right) - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{x^k} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^k} \right) - \frac{1}{n^k}$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Exercício 3 - Série de Potências

Seja $a \neq 0$ tal que $\sum a_n a^n < +\infty$. Determine o raio de convergência R_a no qual esta série é absolutamente convergente para $x \in R$.

Em particular, conclua que se $\sum a_n < \infty$, então $\sum |a_n x^n| < \infty, \forall x \in R_1$.

Exercício 4 - Derivadas por Sequências II

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $\mathbb{R} \backslash \{c\}$ e tal que o $\lim_{x \to c} f'(x)$ existe. Mostre então que f é derivável também em c e $f'(c) = \lim_{x \to c} f'(x)$.

Exercício 5 - Integrais Iteradas

Seja $F(x) = \int_0^x \left[\int_0^y f(t) dt \right] dy$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua. Mostre que F é duas vezes derivável e determine $F''(x)$.

Exercício 6 - Equações Funcionais II

Determine todas as funções f deriváveis tais que

(a) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $f(x)^2 = \int_0^x f(t) dt$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f'(x) = -f(x)$.

Exercício 7 - D'Alembert e Cauchy

Eriki, amigo de várias pessoas, incluíndo Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-vanato, Cardineiro, Borges, Rodrigues, Benzo, Daviros, Beatriza, Severo, Jeã, Luka e Alexor, estava assistindo a série $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + ...$, que é convergente quando $0 < a < b < 1$. Utilize os Testes de D'Alembert (Razão) e Cauchy (Raiz) para verificar em qual destes este resultado ocorre e em qual o resultado é inconclusivo.

Exercício 8 - The Last Question

Os monitores Cleyton e Jean^2 proporam aos alunos um problema de séries, que consistia num problema feito por etapas, considerando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$:

1. Jean^2 os desafiou que mostrassem que a série divergia para $0 < r \leq 1$.
2. Cleyton os desafiou que mostrassem que a série convergia para $r > 1$.
3. Jean^2 e Cleyton juntos, supondo agora que $r \in \mathbb{C}$, os desafiaram que mostrassem que os únicos números $r = a + bi$ nos quais a série assumia valor 0, com $a > 0$, são apenas aqueles (não necessariamente todos) nos quais $a = \frac{1}{2}$.

4) Tome $(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} c$ sequência. Pelo Teorema do Valor Médio, $\exists\, y_n \in (c, x_n)$ (ou (x_n, c)) t.q. $f'(y_n) = \dfrac{f(c) - f(x_n)}{c - x_n}$.

Supondo $x_n \to c$, mas $x_n > c\ \forall n \in \mathbb{N}$, então se $y_n \in (c, x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$, então $y_n \xrightarrow{n\to\infty} c$, uma vez o intervalo estaria apertando os valores de y_n para c, já que $x_n \to c$.

Logo, $f'(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} \lim_{x\to c} f'(x)$ (o limite existe)

Além disso, $\dfrac{f(c) - f(x_n)}{c - x_n} \xrightarrow{n\to\infty} \lim_{x\to c} f'(x)$

Cao $\dfrac{f(c) - f(x_n)}{c - x_n} \to \lim_{x\to c} \dfrac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(c)$

e $\dfrac{f(c) - f(x_n)}{c - x_n} \to \lim_{x\to c} f'(x)$

então, pela unicidade do limite,

$$\boxed{f'(c) = \lim_{x\to c} f'(x).}$$

LEMA: $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall (x_n),\ x_n \to a,\ f(x_n) \to L.$

(5) Defina $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $G'(x) = f(x)$. Como f é contínua, G' é contínua e G é derivável, logo G é contínua.

Agora, perceba que $F(x) = \int_0^x G(y)\,dy$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $F'(x) = G(x)$. Como G é derivável, $F''(x) = G'(x) = f(x)$. Logo, como f é contínua, F é duas vezes derivável, já que G é contínua e derivável e G' é contínua.

(6)