- **Propriedades do Valor Absoluto**

1) $|x| \geq 0$
2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
3) $\sqrt{a^2} = |a|$
4) $|ab| = |a||b|$
5) $|1/a| = 1/|a|$ ($a \neq 0$)
6) $|a+b| \leq |a| + |b|$
7) $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \geq \varepsilon \; ou \; x \leq -\varepsilon$

Lista 1 Exercícios:

1) Em cada item abaixo, determine o conjunto dos números reais que satisfaz a equação ou inequação:

a) $-3/2 < 2x/5 - 8 \leq 10$

b) $2-4x < 8 + 5x/3$

c) $x^3 > x^2$

d) $\frac{x+3}{2x-3} \leq 3$

e) $(2x-1)^2(3x+2) = 0$

f) $\frac{(x+2)^7(2x-8)^5(3x-10)^{100}}{x^2-4x+4} = 0.$

2) Mostre as afirmativas abaixo, onde a e b são números reais.

a) Se $a \neq 0$ então $a^2 > 0$;
b) $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$
c) Sejam a, b racionais positivos. Então $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional se e somente se $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ forem ambos racionais.

Sugestão: Multiplique por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

3) Considere a sequência crescente de números reais $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$, tal que $a_n < b$, para todo n. Pelo axioma do supremo existe $s = \sup A$ onde $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$. Mostre que dado $\varepsilon > 0$, existe **m** natural tal que $s-\varepsilon < a_n < s$, para todo $n>$**m**.

4) Sejam **a** e **b** reais com **a<b**.

a) Mostre que existe $\mathbf{p} \in N, p \neq 0$ tal que $\mathbf{p(b-a)} > \sqrt{2}$ ou $\mathbf{0} < \frac{\sqrt{2}}{p} < \mathbf{b-a}$.

b) Seja $A = \{n \text{ inteiro} : \frac{n\sqrt{2}}{p} \geq b\}$. Então $A \neq \emptyset$ portanto existe $n_0 = \text{mínimo } A$. Mostre que $(n_0 - 1)\frac{\sqrt{2}}{p}$ pertence ao intervalo (a,b).

1 a) $-\frac{3}{2} < \frac{2x}{5} - 8 \leq 10 \Rightarrow 8 - \frac{3}{2} < \frac{2x}{5} \leq 10+8 \Rightarrow \frac{13}{2} < \frac{2x}{5} \leq 18$

$\boxed{\Rightarrow \frac{65}{4} < x \leq 45}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{65}{4} < x \leq 45\}$.

b) $2 - 4x < 8 + \frac{5x}{3} \Rightarrow \frac{5x}{3} + 4x > -6 \Rightarrow \frac{17x}{3} > -6$. $\boxed{x > -\frac{18}{17}}$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{18}{17}\}$.

c) $x^3 > x^2 \Rightarrow x^2(x-1) > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ e $x > 1$

ou

$x^2 < 0$ e $x < 1$ (absurdo).

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

d) $\frac{x+3}{2x-3} \leq 3 \Rightarrow \frac{x+3-3(2x-3)}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{x+3-6x+9}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{12-5x}{2x-3} \leq 0$.

$12 - 5x \geq 0$ e $2x - 3 < 0 \Rightarrow x \leq \frac{12}{5}$ e $x < \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x < \frac{3}{2}}$

ou

$12 - 5x \leq 0$ e $2x - 3 > 0 \Rightarrow x \geq \frac{12}{5}$ e $x > \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x \geq \frac{12}{5}}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2} \vee x \geq \frac{12}{5}\}$

e) $(2x-1)^2(3x+2)=0$

$(2x-1)^2=0$ ou $(3x+2)=0$

$0=|2x-1|$ ou $x=-\frac{2}{3}$

$x=\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $S=\{x\in\mathbb{R} \mid x=1/2 \vee x=-\frac{2}{3}\}$

f) $\frac{(x+2)^7(2x-8)^5(3x-10)^{100}}{(x-2)^2}=0$

$\boxed{x\neq 2}$

$(x+2)^7=0$ ou $(x-4)^5=0$ ou $(3x-10)^{100}=0$

$\boxed{x=-2 \quad \text{ou} \quad x=4 \quad \text{ou} \quad x=\frac{10}{3}}$

$S=\{x\in\mathbb{R} \mid x=-2 \vee x=4 \vee x=10/3\}$

(2) a). Se ~~a~~ $a\neq 0$, então $|a|>0$. Como $|a|=\sqrt{a^2}$, então $\sqrt{a^2}>0$. Por fim, elevando ambos os lados ao quadrado $a^2>0$ |

b) Temos que $K^2\geq 0$ $\forall K\in\mathbb{R}$. No problema temos que $a^2+b^2=0$. Logo $a^2\geq 0$ e $b^2\geq 0$. Se pelo menos um

...les for maior que zero, temos que $a^2+b^2>0$, o que é um absurdo. Portanto $a^2=b^2=0$ e, por consequência, $a=b=0$.

c) Suponha que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ seja racional. Portanto, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ pode ser escrito da forma $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{Z}, \beta\neq 0)$. $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \sqrt{a}=\frac{\alpha}{\beta}-\sqrt{b}$.

$a=\frac{\alpha^2}{\beta^2}-2\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{b}+b$. Percebo que $a, \frac{\alpha^2}{\beta^2}, -2\frac{\alpha}{\beta}$ e b são racionais, logo, por consequência, $\sqrt{b}$ deve ser racional. O raciocínio é análogo para $\sqrt{a}$.

Logo, se $a,b\in\mathbb{Q}$, então $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\in\mathbb{Q}$ se e somente se $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$.

3) A relação $a_n<b$ nos indica que a sequência é infinita e convergente ao supremo do conjunto $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$.

Portanto, é válido dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = S$. e existe um $m\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n-S|<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ sempre que $n>m$.

$\therefore$ $S-\varepsilon<a_n<S+\varepsilon$. Como S é $\sup A$ e $S\notin A$ (A é uma sequência infinita), então, por consequência, $S-\varepsilon<a_n<S$, a partir de uma "ordem" m $(n>m)$ //.

4 a) Como $b > a$, $b-a>0$ e, então, $\frac{\sqrt{2}}{b-a} > 0$. Temos

que $p \in \mathbb{N}^*$ e, portanto, $p \geq 1$. Por fim, como o conjunto dos naturais não é limitado superiormente, podemos afirmar que existe p tal que $p > \frac{\sqrt{2}}{b-a}$ $\therefore$ $p(b-a) > \sqrt{2}$.

Se $p(b-a) > \sqrt{2}$ ocorre $0 < \frac{\sqrt{2}}{p} < b-a$ também pode ocorrer. ($\frac{\sqrt{2}}{p} > 0$ e $b-a>0$)

b) Se n_0 é o mínimo de A, então n_0 é o menor número do conjunto A. Como $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{n\sqrt{2}}{p} \geq b\}$, então $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{2}}{p} \geq \frac{b}{n}\}$. Do problema 4a):

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{p} < b-a \Rightarrow 0 < \frac{b}{n} \leq \frac{\sqrt{2}}{p} < b-a.$$

$\therefore \frac{b}{n}, \frac{\sqrt{2}}{p} \in (a,b)$.

$\frac{\sqrt{2}}{p} - \frac{b}{n} \in (a,b) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{p} - \frac{b}{n} \geq 0 \Rightarrow n_0 \geq \frac{bp}{\sqrt{2}}$.

$\therefore \frac{n_0\sqrt{2}}{p} - b \in (a,b)$. Por fim, $\frac{n_0\sqrt{2}}{p} - n_0 \in (a,b)$. ($b \geq n_0$).