Sequências de Números Reais.

1 Uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência; o valor $x(n)$ (também denotado por x_n) é o n-ésimo termo da sequência. Também usamos a notação (x_n) para designar a sequência x.

Sendo $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ subconjunto infinito de $\mathbb{N}$; a restrição de x a $\mathbb{N}'$ é uma subsequência de x (observe que $x' : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $x'(k) = x_{n_k}$ também é sequência. Usaremos frequentemente a notação (x_{n_k}). Por exemplo, a sequência $x_n = n$ dos números naturais tem duas subsequências (x_{2n}) (números pares) e (x_{2n-1}) (números ímpares)

O conceito seguinte é fundamental na Análise Real:

definição: (x_n) é convergente se existe $c \in \mathbb{R}$ com a propriedade: dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $N > 0$ de modo que para qualquer natural $n > N$ tem-se $|x_n - c| < \varepsilon$ (atenção: N depende de ε!)

Observe que se (x_n) for convergente e $c, c' \in \mathbb{R}$ satisfazem a propriedade da definição então necessariamente $c = c'$. De fato, escrevamos $|c - c'| \leq |c - x_n| + |c' - x_n|$; dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe N de modo que se $n > N$ então $|c - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|c - x_n'| < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, $|c - c'| \leq \varepsilon \Rightarrow c = c'$. Este número associado à sequência convergente é seu limite: $\lim x_n = c$

As observações seguintes são muito simples:

- se $y_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim y_n = a$
- se $x_n = \frac{1}{n}$, então $\lim x_n = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ qualquer sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$; segue-se que se $n > n_0$ então $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
- $\lim x_n = c \iff \lim |x_n - c| = 0$
- dada a seqüência (y_m) e fixado $k \in \mathbb{N}$, a seqüência $m \mapsto y_{m+k}$ é convergente $\iff$ (y_m) é convergente, e neste caso os limites são os mesmos.

Exemplo: se $0 < a < 1$ então $\lim a^n = 0$. De fato, escrevendo $b = \frac{1}{a}$ tem-se que $b > 1$, ou seja, $b = 1 + d$ para algum $d > 0$. Segue-se que $b^n = (1+d)^n \geq 1 + dn \Rightarrow a^n \leq \dfrac{1}{1+dn} \Rightarrow \lim a^n = 0$.

Como $|\alpha|^n = |\alpha^n|$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, vemos que $\lim a^n = 0$ quando $|a| < 1$.

Exemplo: novamente assumindo $0 < a < 1$, definimos $x_n = 1 + a + \dots + a^n$. Então $\lim x_n = \dfrac{1}{1-a}$

De fato, $x_n - \dfrac{1}{1-a} = \dfrac{-a^{n+1}}{1-a}$, pois $1 + a + \dots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $N > 0$ t.q. se $n > N$ então $|a^{n+1}| < (1-a)\varepsilon$, o que é possível pelo exemplo anterior. Segue-se que $\left|x_n - \dfrac{1}{1-a}\right| < \varepsilon$ quando $n > N$

Usamos freqüentemente as proposições seguintes

<u>Proposição</u>: se (x_n) é convergente então existe $M>0$ de modo que $-M \leq x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ((x_n) é <u>limitada</u>).

<u>prova</u>: seja $c = \lim x_n$; sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $n > N \Rightarrow |x_n - c| < 1$, ou seja, $-1 + c < x_n < 1 + c$ sempre que $n > N$. Basta agora observar que existe $d > 0$ de modo que $|x_1| \leq d$, $|x_2| \leq d, \ldots, |x_N| \leq d$ □

<u>Proposição</u>: se $\lim x_n = c$, então qualquer subsequência de (x_n) é convergente e seu limite é $\underline{c}$.

<u>Prova</u>: consideremos subsequência $k \to x_{n_k}$; dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $N > 0$ t.q. se $k > N$ então $|x_{n_k} - c| < \varepsilon$. Ora, sabemos que existe $N_1 > 0$ t.q. se $n > N_1$ então $|x_n - c| < \varepsilon$. Basta agora tomar $N > 0$ de modo que $k > N \Rightarrow n_k > N$. □

Por exemplo, a sequência definida por $x_{2k} = 1$, $x_{2k-1} = -1$ possui duas subsequências (x_{2k}) e (x_{2k-1}) com limites distintos, não sendo portanto convergente.

Também mostra que a recíproca da primeira proposição não é válida. Porém, algo importante pode ser dito a respeito das sequências limitadas:

<u>Teorema</u> (Bolzano-Weierstrass). Toda sequência limitada possui subsequência convergente.

<u>prova</u>: se o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ for finito, algum de seus elementos é assumido por uma infinidade de índices, de modo que obtemos uma subsequência constante, portanto convergente.

Suponhamos então que a seqüência assume uma infinidade de valores distintos. Como a seqüência é limitada, todos estes valores estão em algum intervalo $[-M_1, M_1] = I_1$. Dividindo I_1 em dois intervalos de igual comprimento, um deles deve uma infinidade de valores da seqüência; vamos designá-lo por I_2, temos $|I_2| = \frac{I_1}{2}$.

Novamente dividindo I_2 em dois subintervalos iguais, um deles contém uma infinidade de valores da seqüência; designando-o por I_3, temos $|I_3| = \frac{|I_2|}{2} = \frac{|I_1|}{2^2}$. Prosseguindo, obtemos seqüência encaixante de intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots$, de modo que $|I_k| = \frac{|I_1|}{2^{k-1}}$, e em cada um deles selecionamos $x_{n_k} \in I_k$. Pelo Axioma da Completude, existe um único $c \in \mathbb{R}$ t.q. $c \in \bigcap_k I_k$. Claramente (x_{n_k}) converge a $\underline{c}$, pois para cada k x_{n_k} e c pertencem a I_k logo $|x_{n_k} - c| < \frac{1}{2^{k-1}}$ □

O resultado seguinte permite afirmar a convergência em certos casos mesmo sem conhecer o limite. Diremos que (x_n) é <u>limitada superiormente</u> (inferiormente) quando existe $M \in \mathbb{R}$ de modo que $x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ($x_n \geq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

<u>Teorema</u>: seja (x_n) seqüência <u>crescente</u>, isto é, $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se ela for limitada superiormente então é convergente.

<u>prova</u>: seja $\underline{c}$ o supremo do conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Sabemos que dado $\varepsilon > 0$ qualquer,

existe algum $x_{n_0} \in (c-\varepsilon, c]$. Como $x_{n_0} \leq x_n$ para todo $n \geq n_0$, então $x_n \in (c-\varepsilon, c]$ para todo $n \geq n_0$ (lembre-se que $x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pois c é cota superior). Daí, $\lim x_n = c$

Exercício: enuncie e demonstre resultado análogo para seqüências decrescentes

2 Outras Propriedades

(i) Sejam (x_n) e (y_n) seqüências convergentes com $\lim x_n = \alpha$ e $\lim y_n = \beta$. Então $(x_n + y_n)$ e $(x_n y_n)$ são seqüências convergentes e $\lim x_n + y_n = \alpha + \beta$, $\lim x_n y_n = \alpha\beta$

(ii) Se $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\beta \neq 0$ então $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

(iii) Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) é limitada então $(x_n y_n)$ é ~~limitada~~ convergente e $\lim x_n y_n = 0$

(IV) Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$ então (z_n) é convergente e $\lim z_n = a$

(V) Sejam $\lim x_n = a$ e $c < a$. Então existe $N \in \mathbb{R}$ de modo que se $n > N$ então $x_n > c$ (diremos: "para n suficientemente grande"...)

Analogamente, se $d > a$ então $x_n < d$ para n suficientemente grande.

Em particular, se $a > 0$ então $x_n > 0$ para n suficientemente grande, e se $a < 0$ então $x_n < 0$ para n suficientemente grande.

(VI) Sejam $(x_n), (y_n)$ convergentes, com $\lim x_n = \alpha$

e $\lim y_n = \beta$. Se $x_n \leq y_n$ então $\alpha \leq \beta$

prova: suponha por absurdo que $\beta < \alpha$. Consideremos intervalos I_α e I_β centrados em α e β, respectivamente, de comprimentos $\frac{\alpha-\beta}{3}$; portanto $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$. Para n suficientemente grande temos $y_n \in I_\beta$ e $x_n \in I_\alpha$, logo $y_n < x_n$, absurdo $\square$

Exemplos:

1) Seja $0 \leq l < 1$ e $|x_n| \leq l|x_{n-1}|$ para todo n.
Então $\lim x_n = 0$. De fato, $|x_n| \leq c^{n-1}|x_1|$ para todo n, logo $\lim |x_n| = 0$

Uma pequena variação é a seguinte: suponhamos que a partir de algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tenhamos $x_n \neq 0$ e $\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right| < l < 1$. Então $\lim x_n = 0$.

De fato, $|x_n| < l|x_{n-1}| < \dots < l^{n-n_0+1}|x_{n_0}|$
$\Rightarrow \lim |x_n| = 0$

Vejamos o caso da sequência $x_n = \frac{a^n}{n!}$ com $a > 0$
Temos $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{a}{n}$, de modo que $\lim \frac{x_n}{x_{n-1}} = 0$
Em particular, $\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right| < \frac{1}{2}$ para n suficientemente grande $\Rightarrow \lim x_n = 0$

2) A sequência $x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ é crescente.
Ela é também limitada pois $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

e daí $0 \leq x_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$. Vimos que $1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1} = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$, de modo que $x_n \leq \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 2$.

definição: $e := \lim \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$.

Mais tarde veremos que $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

3) Seja $a > 0$; consideremos a sequência definida como: $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ (indutivamente!)

Vamos mostrar que a sequência é convergente.

Como motivação, suponhamos por um momento que existe $L = \lim x_n$. Sendo $x_{n+1}^2 = a + x_n$, passando ao limite teríamos $L^2 = a + L$ e portanto $L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$; mas $x_n > 0$ para todo n, e assim escolhemos $L = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ como candidato a limite da sequência (note que $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0$). Temos $L > 1$

Voltando à prova da convergência: mostremos que $\lim |x_n - L| = 0$. Ora:

$$x_{n+1} - L = \sqrt{a+x_n} - \sqrt{a+L} = \frac{x_n - L}{\sqrt{a+x_n} + \sqrt{a+L}}$$

Como $\sqrt{a+x_n} > 0$ e $\sqrt{a+L} = L > 1$, e daí concluímos que $|x_{n+1} - L| < \frac{1}{L}|x_n - L|$, $\lim x_n = L$

De modo sugestivo: $L = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}}$

4) Seja $a \geq 1$; consideremos a sequência definida indutivamente por: $y_1 = a$, $y_{n+1} = a + \frac{1}{y_n}$

Esta sequência é convergente.

Novamente, como motivação, suponhamos que existe $S = \lim y_n$. Segue-se, passando ao limite em $y_{n+1} = a + \frac{1}{y_n}$, que $S = a + \frac{1}{S}$, portanto as possibilidades para S são $\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ e $\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$

Como $y_n \geq a$, escolhemos $S = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$

Reiniciando a argumentação, estimamos $y_{n+1} - S$ em termos de $y_n - S$:

$$y_{n+1} - S = \left(a + \frac{1}{y_n}\right) - \left(a + \frac{1}{S}\right) = \frac{1}{y_n} - \frac{1}{S} = \frac{S - y_n}{y_n S}$$

Como $y_n \cdot S \geq a \cdot S \geq S > 1$, temos

$|y_{n+1} - S| < \frac{1}{S} |y_n - S|$, logo (y_n) é convergente.

Exercício: o que ocorre quando $0 < a < 1$?

5) Sejam $\alpha > \beta > 0$; como
$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$
vemos que $\alpha^n > \beta^n$. Reciprocamente, se $\bar{\alpha} = \alpha^n$ e $\bar{\beta} = \beta^n$ segue-se que $\bar{\alpha} - \bar{\beta} = (\bar{\alpha}^{1/n} - \bar{\beta}^{1/n})(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$, e portanto $\bar{\alpha} > \bar{\beta}$ implica $\bar{\alpha}^{1/n} > \bar{\beta}^{1/n}$ (raízes n-ésimas positivas).

Estamos naturalmente admitindo a existência das raízes n-ésimas; isso será provado mais tarde.

Afirmamos então que se $a > 0$ então $\lim a^{1/n} = 1$.

Temos dois casos ($a = 1$ não precisa ser analisado)

- $a < 1$; aqui, $(a^{1/n})$ é crescente. De fato,

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n}}}\right)^{n(n+1)} = \frac{a^n}{a^{n+1}} > 1 \Rightarrow \frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n}}} > 1$$

(estamos usando a raiz de ordem $n(n+1)$ ...)

$\Rightarrow a^{\frac{1}{n+1}} > a^{1/n} \Rightarrow (a^{1/n})$ é crescente.

Além disso, $a < 1 \Rightarrow a^{1/n} < 1 \Rightarrow$ existe $\lim a^{1/n}$

- $a > 1$. Escrevendo $b = \frac{1}{a}$, temos que $b < 1$ e portanto $(b^{1/n})$ é crescente $\Rightarrow (a^{1/n})$ é decrescente. Sendo $a > 1$, temos $a^{1/n} > 1 \Rightarrow$ existe

$\lim a^{1/n}$.

Portanto, em qualquer dos casos podemos definir $L = \lim a^{1/n}$. Para calcular L, escrevamos $L = \lim a^{\frac{1}{n(n+1)}}$ (trata-se de uma subsequência!) Como $a^{\frac{1}{n(n+1)}} = a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \dfrac{a^{1/n}}{a^{1/n+1}}$, concluímos de $a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \dfrac{a^{1/n}}{a^{1/n+1}}$ que $L = 1$ (passando ao limite e observando que $L \neq 0$).

6) $\lim n^{1/n} = 1$.

Como antes, $\left[\dfrac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}}\right]^{n(n+1)} = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Já observamos que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é convergente para o número e, portanto limitada, e segue-se portanto que $\left[\dfrac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}}\right]^{n(n+1)} < 1$ para n suficientemente grande, ou seja, $\dfrac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}} < 1$ logo $(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{1/n}$. Conclusão: $(n^{1/n})$ é decrescente a partir de algum $n_0 \in \mathbb{N}$, e limitada inferiormente pois $n^{1/n} \geq 1$. Definamos $L = \lim n^{1/n}$; temos $L \geq 1$. Como $L = \lim (2n)^{1/2n}$ (subsequência novamente), então $L^2 = \lim (2n)^{1/n} = (\lim 2^{1/n}).(\lim n^{1/n}) = 1 . L \Rightarrow L = 1$ ($L=0$ já foi excluído).

7) Sejam $0 < a < b$. A <u>média aritmética</u> entre $\underline{a}$ e $\underline{b}$ é $\frac{a+b}{2}$; claramente $a < \frac{a+b}{2} < b$.
A <u>média geométrica</u> é $\sqrt{ab}$ (a qual é superior a $\underline{a}$). Tem-se sempre $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

$$\left(\text{pois } (b-a)^2 > 0 \Rightarrow b^2+a^2-2ab > 0 \Rightarrow b^2+a^2+2ab > 4ab \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} > ab \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \right)$$

Definamos indutivamente $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$.
Como (x_n) é crescente e (y_n) é decrescente, e $a < x_n < y_n < b$, vemos que (x_n) e (y_n) são ambas convergentes. Denominando $\lim x_n = \alpha$ e $\lim y_n = \beta$, segue-se de $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$ por passagem ao limite que $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2}$, ou seja, $\alpha = \beta$

8) Os <u>valores de aderência</u> de uma seqüência são os limites de suas subseqüências convergentes (podem não existir, mas se a seqüência é convergente somente há um valor de aderência)
Se a seqüência é limitada, sempre existem valores de aderência (Bolzano-Weierstrass)

<u>Afirmação</u>: considere uma seqüência limitada com um único valor de aderência. Então a seqüência é convergente.

<u>prova</u>: seja $-M \le x_n \le M$ seqüência limitada com um único valor de aderência $\underline{a}$ (podemos supor $-M < a < M$)

Se (x_n) não converge para $\underline{a}$, existe algum $\varepsilon_0 > 0$ de modo que qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_{n_k} \notin (a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$ (estamos simplesmente negando a possibilidade de $\underline{a}$ não ser o limite de (x_n)).

Formamos assim subsequência (x_{n_k}) de (x_n) também limitada; qualquer valor de aderência de (x_{n_k}) (os quais existem!) estará fora de $(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$; mas tais valores também são valores de aderência de (x_n), contradição.

<u>Exercício</u>: dê um exemplo de sequência com um único valor de aderência mas que não é convergente.

③ <u>Limites infinitos</u>

Seja (x_n) sequência; diremos que $\lim x_n = +\infty$ quando, dado $M > 0$ qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. se $n > n_0$ então $x_n > M$.

Diremos que $\lim x_n = -\infty$ se, dado $M < 0$ qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. se $n > n_0$ então $x_n < M$.

Um exemplo é a sequência (a^n), com $a > 1$:
$\lim a^n = +\infty$

<u>Proposição</u>: se x_n é limitada e $\lim y_n = +\infty$ então $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$

<u>prova</u>: observemos que $y_n > 0$ para n suficientemente grande, por isso $\frac{x_n}{y_n}$ deve ser visto como "a partir de algum n_0".

Suponhamos $|x_n| \leq M_0$

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, temos que $y_n > \frac{M_0}{\varepsilon}$ para n suficientemente grande, e portanto

$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \leq \frac{M_0}{M_0/\varepsilon} = \varepsilon$ $\square$

Exemplo: $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$

prova: dado $k \in \mathbb{N}$ qualquer, vamos mostrar que $\sqrt[n]{n!} > k$ para n suficientemente grande. Escrevamos $n! = 1 \ldots k \cdot (k+1) \ldots (k+n-k) = k! \, (k+1) \ldots (k+n-k)$
$\geq k! \, k^{n-k} \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{k!} \sqrt[n]{k^{n-k}} \geq k^{\frac{n-k}{n}} = k / k^{k/n} = \frac{k}{(k^k)^{1/n}}$

~~Como $\lim \sqrt[n]{k!} = 1$, podemos afirmar que $\sqrt[n]{k!} >$~~

Como $\lim (k^k)^{1/n} = 1$, temos que $(k^k)^{1/n} < 2$ para n suficientemente grande, e daí $\sqrt[n]{n!} > \frac{k}{2}$ para n suficientemente grande.

Exemplo: sejam $a > 0$, $x_n > 0$. Se $\lim x_n = +\infty$ então $\lim (\sqrt{x_n + a} - \sqrt{x_n}) = 0$.

Basta escrever $\sqrt{x_n + a} - \sqrt{x_n} = \frac{(\sqrt{x_n+a} - \sqrt{x_n})(\sqrt{x_n+a} + \sqrt{x_n})}{\sqrt{x_n+a} + \sqrt{x_n}}$

$= \frac{a}{\sqrt{x_n+a} + \sqrt{x_n}}$