FGV EMAp

Fundamentos de Matemática
Lista 4 - 02/05/2024

A consulta é livre, mas você deve entregar suas soluções escritas de próprio punho e mencionar as fontes de consulta.

76. Sejam S_n e T_n as somas dos primeiros n termos de duas progressões aritméticas. Se

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+1}{4n+27}$$

para todo n, Determine a razão entre o $11°$ termo da primeira e o $11°$ termo da segunda progressão.

77. Assinale a alternativa verdadeira:

(A) Se $x < 1$, então $x^2 < 1$, onde $x \in \mathbb{R}$.

(B) Se $x^2 > 1$, então $x > 1$, onde $x \in \mathbb{R}$.

(C) Se $2 > x + 1$, então $\dfrac{2}{x+1} > 1$, onde $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq -1$.

(D) Se $x < 1$, então $\dfrac{1}{x} > 1$, onde $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$.

(E) Se $\dfrac{2}{x+1} > 1$, então $\dfrac{1-x}{x+1} > 0$, onde $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq -1$.

78. Considere a equação $x^2 - 2|x| = k$ (x é a incógnita e $k \in \mathbb{R}$). Determine todos os valores de k para os quais a equação tem exatamente 4 soluções em $\mathbb{R}$.

79. Considere as funções reais $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = -x^2 + 3x + 4$. Assinale a alternativa **falsa**.

(A) Se $x > 2$ então $f(x) > -3$.

(B) Se $-1 < x < 2$ então $f(x) \leq g(x)$.

(C) Se $f(x) \leq g(x)$ então $0 < x < 3$.

(D) Se $x < -1$ então $f(x) \cdot g(x) < 0$.

(E) $-1 \leq x \leq 7/2$ se, e somente se, $f(x) \leq g(x)$.

80. Considere a seguinte equação no universo dos números reais:

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = x - 8.$$

A equação tem, exatamente,

(A) duas raízes reais positivas.

(B) três raízes reais positivas.

(C) uma raiz real positiva.

(D) uma raiz real negativa.

(E) zero raízes reais.

81. Sobre o conjunto solução da equação

$$2\sqrt{x^2-3} = 2 - x,$$

no universo dos números reais, é correto afirmar que

(A) tem dois elementos, um positivo e o outro negativo.

(B) tem dois elementos, ambos positivos.

(C) tem dois elementos, ambos negativos.

(D) tem um único elemento.

(E) é vazio.

82. A soma das raízes reais da equação $\sqrt{3x-2} = \sqrt{x} + 2$ é igual a:

83. Resolva a seguinte equação no universo dos números reais:

$$2x - 1 = \sqrt{3x^2 - 2x + 2}.$$

84. Resolva a equação a seguir, no universo dos números reais:

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{3}x - 2x} = 1 - x.$$

85. Resolva a inequação a seguir, no universo dos números reais:

$$\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} - \sqrt{2 - x} > 0.$$

86. Dado o parâmetro real a, resolva a equação

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$$

no universo dos números reais.

87. Sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$ duas funções tais que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Prove que f é injetiva e g é sobrejetiva, mas que f não necessariamente é a função inversa de g.

88. Considere a função $f\colon A \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{x - k}$$

onde $A = \mathbb{R} - \{1, 2, 3, \ldots, 2024\}$. Determine o número de soluções da equação $f(x) = 2024$.

89. Determine o conjunto de todos os pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para os quais a seguinte igualdade é verdadeira

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{36 - 12x + x^2} = 10 - |y + 3| - |y - 2|.$$

90. Seja a um parâmetro real. Em função de a, resolva a equação a seguir no universo dos números reais.

$$\sqrt{2x - 1} - x + a = 0.$$

91. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(0) = 1$ e $f(xy + 1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2$, para todo x e todo y reais. Considere as afirmativas:

I) f é uma bijeção

II) Não existe f que satisfaça essas condições

III) $f(x) = x + 1$, para todo x real

São *necessariamente* verdadeiras:

(a) Todas

(b) Apenas I e II

(c) Apenas I e III

(d) Apenas II e III

(e) Apenas I

92. Sejam a_1,a_2,a_3,...,a_7 inteiros que satisfaçam a equação $\frac{5}{7} = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{4!} + \frac{a_5}{5!} + \frac{a_6}{6!} + \frac{a_7}{7!}$. Sabendo que $0 \leq a_i < i$ para $i = 2, 3, 4, ..., 7$. Então, o valor da expressão $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ é:

93. Seja $m \geq 0$ um número real e sejam f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ e $g(x) = mx + 2m$. Determine, em função de m, o número de raízes da equação $f(x) = g(x)$.

94. Representando por min$(a; b)$ o menor dos números reais a e b, o conjunto solução da inequação min$(x+3; 1-x) < 1$ é dado por: