Questão1) Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies

$$z = x^2 + y^2 \ , \ x^2 + y^2 = 4 \ , \ x^2 + y^2 = 9 \ , \ z = 10$$

Para calcular o volume do sólido, podemos utilizar coordenadas cilíndricas:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_2^3\int_{r^2}^{10} r \, dz\, dr\, d\theta \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_2^3 (10r - r^3)\, dr\, d\theta$$

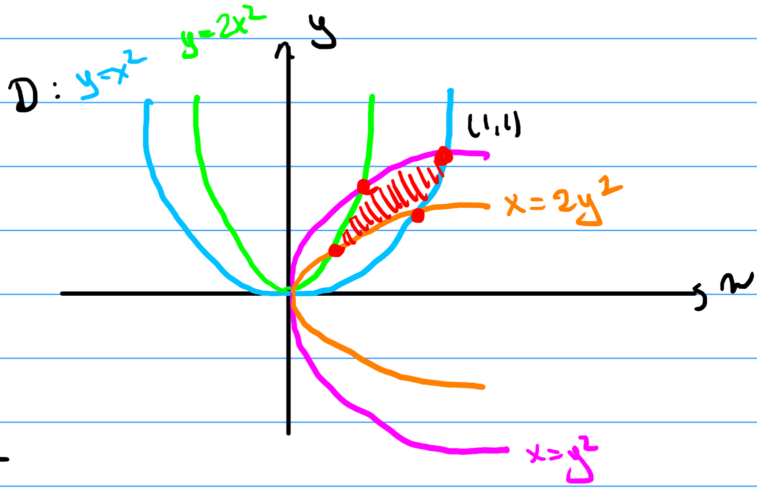
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_2^3 (10r - r^3)\, dr = 2\pi \cdot \left(5r^2 - r^4/4\right)\Big|_2^3 = 2\pi\left(45 - 3^4/4 - 20 + 2^4/4\right)$$

$$= 2\pi\left(25 - 65/4\right) = 2 \cdot \pi \cdot 35/4 = \boxed{35\pi/2}.$$

Questão 2) Calcule a integral $\iint_D 5\frac{dxdy}{x^2y^2}$, onde é a região limitada pelas curvas

$$y = x^2 \ , \ y = 2x^2 \ , \ x = y^2 \ , \ x = 2y^2$$

Primeiramente, vamos representar a região D. Percebe que ela é um pouco difícil de trabalhar. Assim, vamos fazer uma mudança de variáveis.




Sabemos que $x^2 \leq y \leq 2x^2$ e $y^2 \leq x \leq 2y^2$, assim, $1 \leq y/x^2 \leq 2$ e $1 \leq x/y^2 \leq 2$. Portanto, fazendo $u = y/x^2$ e $v = x/y^2$, temos que:

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left\| \begin{matrix} -2y/x^3 & 1/y^2 \\ 1/x^2 & -2x/y^3 \end{matrix} \right\| = \left| 4/x^2y^2 - 1/x^2y^2 \right| = 3/x^2y^2 .$$

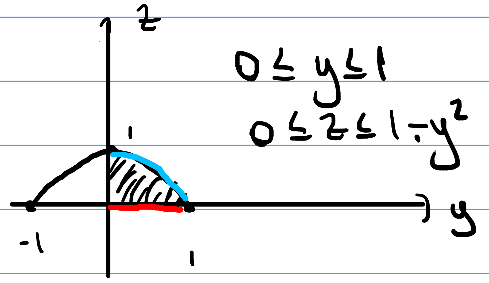
Assim $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{x^2y^2}{3}$ (legal que posso inverter)

e $\iint_D 5 \, dxdy/x^2y^2 = \int_1^2\int_1^2 5/3 \, dudv = \boxed{5/3}$ .

Questão 3) Calcule o volume do sólido do primeiro octante limitado pelas superfícies $z = 1 - y^2$ , $x = y^2 + 1$ , $x = -y^2 + 9$

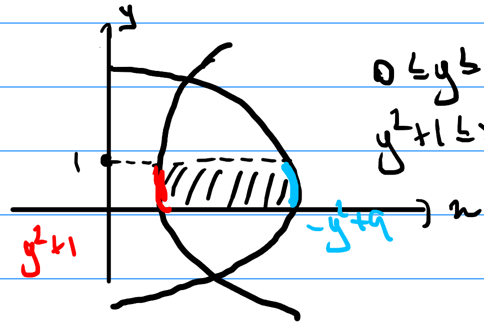
Novamente, para calcular o volume, iremos usar integrais triplas.

Projeção no plano $zy$:




$0 \le y \le 1$
$0 \le z \le 1 - y^2$

Projeção no plano $xy$:




$0 \le y \le 1$
$y^2+1 \le x \le -y^2+9$

Assim, a integral tripla ficaria $\int_0^1 \int_{y^2+1}^{-y^2+9} \int_0^{1-y^2} dz\,dx\,dy$

$= \boxed{76/15}$ .

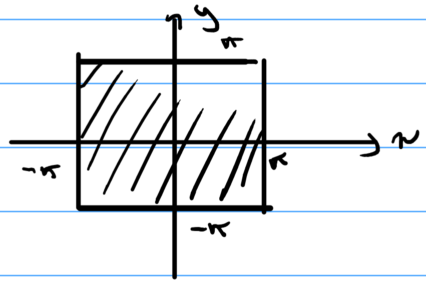
Questão 4) Mostre que se $f(x,y) = e^{sen(x+y)}$ e $D = [-\pi,\pi]\cdot[-\pi,\pi]$, então

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2}\iint_D e^{sen(x+y)}dA \leq e$$

Sabemos que $-1 \leq sen(x+y) \leq 1$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$. Assim, como $e^{\alpha} > 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, segue que $1/e \leq e^{sen(x+y)} \leq e$

Além disso, sabemos que se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todos os pontos $(x,y)$ de uma superfície $S$, então $\iint_S f(x,y) \geq \iint_S g(x,y)$. Logo, segue que:

$$\iint_D 1/e \, dA \leq \iint_D e^{sen(x+y)} dA \leq \iint_D e \, dA.$$

Contudo, como $D$:  , segue que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1/e \, dx dy \leq \iint_D e^{sen(x+y)} dA \leq \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e \, dx dy$$

e $4\pi^2 \, 1/e \leq \iint_D e^{sen(x+y)} dA \leq e \cdot 4\pi^2$ e

$$\boxed{1/e \leq 1/4\pi^2 \iint_D e^{sen(x+y)} dA \leq e.}$$

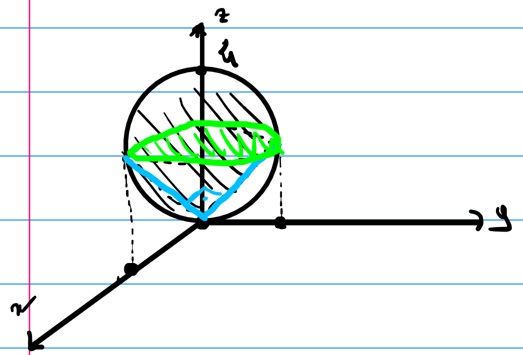
Questão 5) Faça as mudanças de coordenadas convenientes e resolva a

Integral $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$

Vamos usar coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \qquad \rho^2 = x^2+y^2+z^2 \qquad r^2 = x^2+y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

Além disso, a região de integração é:




$$2-\sqrt{4-x^2-y^2} \le z \le 2+\sqrt{4-x^2-y^2}$$
$$x^2+y^2+(z-2)^2 \le 4$$
$$x^2+y^2+z^2-4z+4 \le 4$$
$$\rho^2 \le 4\rho\cos\phi$$
$$0 \le \rho \le 4\cos\phi$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le \phi \le \pi/2$$

Assim $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{4\cos\phi} \rho^2\cdot\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cdot \int_0^{4\cos\phi} \rho^4 \operatorname{sen}\phi\, d\rho$$

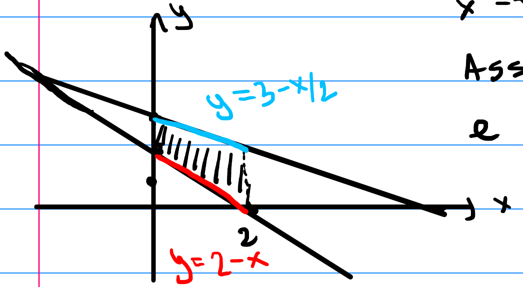
$$\boxed{= \frac{1024\pi}{15}}$$

Questão 6) Calcule $\iiint_W z dV$ onde $W$ é a região no primeiro octante limitada pelos planos e pelo cilindro, descritos abaixo

$x = 0$ , $z = 0$ , $x + y = 2$ , $2y + x = 6$ e o cilindro $x^2 + z^2 = 4$

Vamos observar a região de integração pelas projeções:

Projeção em $xy(z=0)$:




$x^2=4 \Rightarrow -2\leq x\leq 2 \Rightarrow 0\leq x\leq 2$ (1º octante)

Assim $2-x\leq y\leq 3-x/2$

e $0\leq z\leq\sqrt{4-x^2}$ (1º octante)

Assim, $\iiint_W z\,dV = \int_0^2\int_{2-x}^{3-x/2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} z\,dz\,dy\,dx$

$\Rightarrow \int_0^2\int_{2-x}^{3-x/2}(2-x^2/2)\,dy\,dx = \int_0^2(-x^3/4-x^2/2+x+2)\,dx$

$= \left(-x^4/16 - x^3/6 + x^2/2 + 2x\right)\Big|_0^2 = -16/16 - 8/6 + 4/2 + 4$

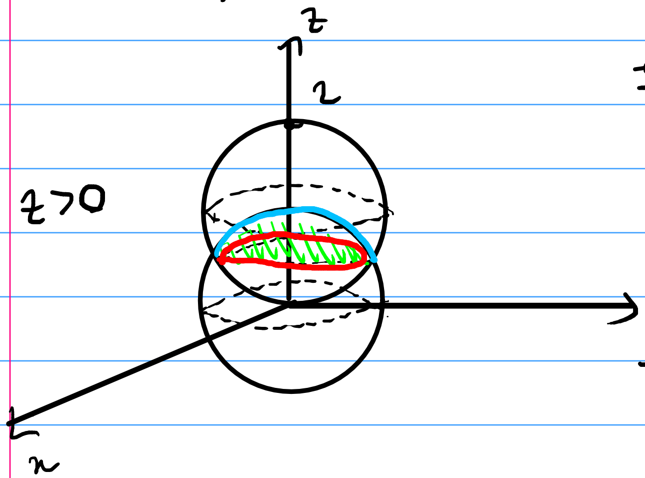
$= -1 - 4/3 + 2 + 4 = 5 - 4/3 = \boxed{11/3}$

**Questão 7)** Calcule o volume do sólido $W$ definido por:

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1 \quad , \quad x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$$

Vamos usar coordenadas cilíndricas

Primeiro, vamos visualizar a região de integração:




Interseção: $z = 1/2$.

Logo, $r^2 = 1 - 1/4$ e $r = \sqrt{3}/2$

Assim

$0 \leq r \leq \sqrt{3}/2$

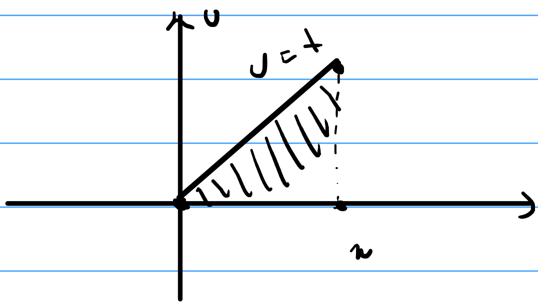
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$1-\sqrt{1-r^2} \leq z \leq \sqrt{1-r^2}$

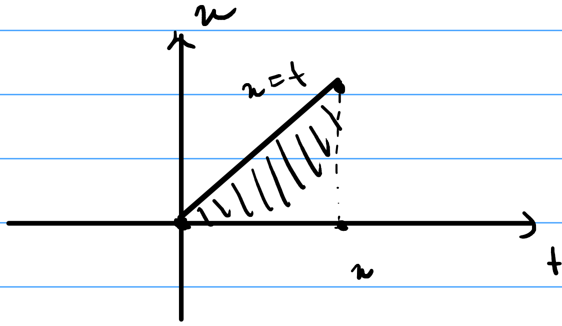
Logo: $V = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r \, dz\, dr\, d\theta = \boxed{5\pi/12}$

Questão extra: Prove que $\int_0^x \int_0^t F(u)\,du\,dt = \int_0^x (x-u)F(u)\,du$

$$\begin{cases} 0\le u\le t \\ 0\le t\le x\end{cases} \Rightarrow 0\le u\le t\le x.$$




e




Para manter a desigualdade, podemos fazer a seguinte mudança: $u\le t\le x$ e $0\le u\le x$. Assim,

$$\int_0^x\int_0^t F(u)\,du\,dt = \int_u^x \int_0^x F(u)\,du\,dt = \int_u^x dt \cdot \int_0^x F(u)\,du$$

$$= (x-u)\int_0^x F(u)\,du = \boxed{\int_0^x (x-u)F(u)\,du}$$

1. Calcule a integral $\iint_A x^4\, dx\, dy$, em que A é a região limitada pelas curvas

$$y = x^3, \quad y = 2x^3, \quad y = \frac{3}{x}, \quad y = \frac{4}{x}$$

Sabemos que $1 \leq y/x^3 \leq 2$ e $3 \leq xy \leq 4$.
Fazendo $u = y/x^3$ e $v = xy$, temos que:

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\begin{vmatrix} -3y/x^4 & 1/x^3 \\ y & x \end{vmatrix}\right| = \left| -3y/x^3 - y/x^3 \right| = 4y/x^3.$$

Logo, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{x^3}{4y} = \frac{1}{4u}$

Assim, $\iint_A x^4\, dx dy = \int_3^4\int_1^2 v/u \cdot 1/4u\, du dv = \int_3^4\int_1^2 \frac{v}{4u^2}\, du dv$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_3^4 v\, dv \cdot \int_1^2 \frac{1}{u^2}\, du = \frac{1}{4} \cdot \frac{v^2}{2}\Big|_3^4 \cdot \left(\frac{-1}{u}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(16-9) \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{7}{10}}$$

2. Calcule o volume dentro da esfera unitária de centro na origem, acima do plano $z = 0$ e limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = y$

Para resolver, vamos usar coordenadas polares.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=y \\ \text{acima de } z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z^2 = 1-r^2 \Rightarrow z = \sqrt{1-r^2}$$

$r^2 = r\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow r = \text{sen}\,\theta$

Assim $\begin{cases} 0 \leq r \leq \text{sen}\,\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

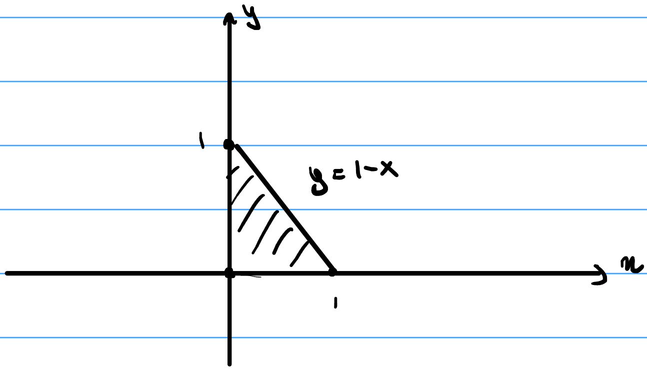
$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{\text{sen}\,\theta} \sqrt{1-r^2}\, r\, dr\, d\theta =$$

Lembre-se que não estamos no centro ($0 \leq r \leq \text{sen}\,\theta$)

$\boxed{V = \pi/3}$

3. Calcule o volume do sólido limitado pelos planos $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$ e a superfície $x^2 + y^2 - z = 0$

Podemos calcular o volume por uma integral tripla. Antes, vamos ver a projeção no plano XY:




$0 \leq x \leq 1$

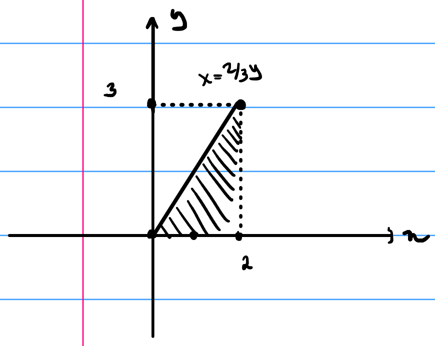
$0 \leq y \leq 1 - x$

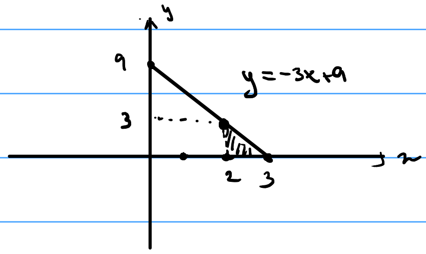
Além disso, $0 \leq z \leq x^2 + y^2$

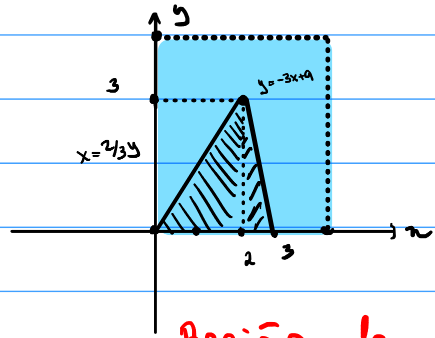
Assim: $V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x^2+y^2} dz\,dy\,dx = \boxed{1/6.}$

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x,y) > 2$, $\forall (x,y) \in [0,4]\times[0,4]$. Mostre que

$$\left[\int_0^3 \int_{\frac{2}{3}y}^2 f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^3 \int_0^{-3x+9} f(x,y)\,dy\,dx\right] > 9$$




Região de integração e $[0,4]\times[0,4]$.

$\Rightarrow \int_0^3 \int_{2/3y}^{2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^3 \int_2^{3-y/3} f(x,y)\,dx\,dy$

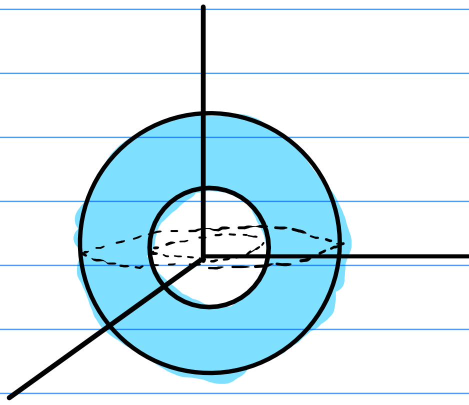
A região de integração tem área $3 \cdot 3/2 = 9/2$.
Assim, pelo Teorema do Valor Médio da Integrais
$\exists (x_0,y_0) \in D$ tal que $\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0,y_0) \cdot A$
e $\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0,y_0) \cdot 9/2$

Contudo, note que $D \subset [0,4]\times[0,4]$. Assim $f(x_0,y_0) > 2$

e $\iint_D f(x,y)\,dA \cdot 2/9 > 2 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA > 9$
$\forall (x,y) \in [0,4]\times[0,4]$

5. Calcule a integral da função $f(x,y,z) = xyz$ sobre a região entre as esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ e $x^2+y^2+z^2=b^2$, onde $a$ e $b$ são constantes positivas com $a<b$.

Usando coordenadas esféricas:



$a \le \rho \le b$
$0 \le \theta \le 2\pi$
$0 \le \phi \le \pi$

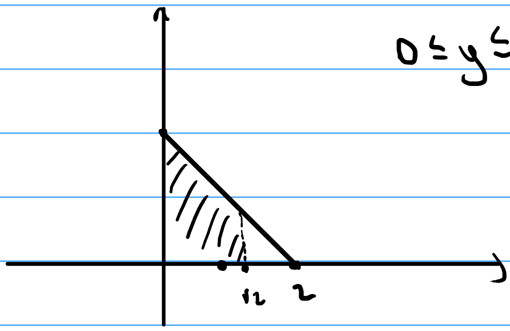
$$\iiint_D xyz\, dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^b \rho^5 \operatorname{sen}^3\phi \cdot \cos\phi \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\rho\, d\theta\, d\phi = \boxed{0}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi \cos\phi \, d\phi \cdot \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta \cdot \int_a^b \rho^5 \, d\rho = 0$$

$$= \int_0^0 u^3 \, du = 0$$

6. Calcule $\iiint_E z\, dV$, onde E é o sólido limitado pelo plano $x+y=2$ e o cilindro $z^2+2x^2=4$ no 1º octante.

$z=0$: $x = \pm\sqrt{2}$. Logo $0 \le x \le \sqrt{2}$.
No plano $xy$:




$0 \le y \le 2-x$.

Além disso, no primeiro octante: $0 \le z \le \sqrt{4-2x^2}$

$$\Rightarrow \iiint_E z\, dV = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2-x}\int_0^{\sqrt{4-2x^2}} z\, dz\, dy\, dx = \boxed{\frac{8\sqrt{2}}{3} - 1}$$

7. Determine a área da parte da superfície $z = \sqrt{x^2+y^2}$ que está acima da região $0 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq \sqrt{2}$ no plano $xy$.

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Assim, $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = \sqrt{2}$

$A(S) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^3 \sqrt{2}\, dx dy = \boxed{6}$

**Questão 1**

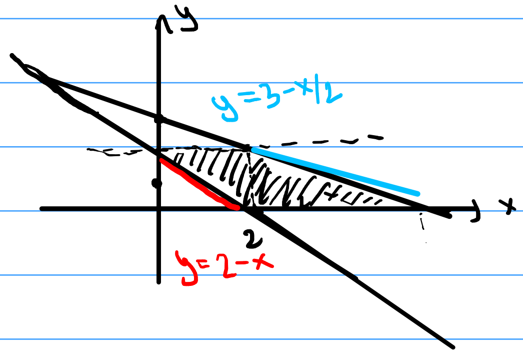
Calcule a integral $\iiint_W z dx dy dz$, onde $W$ é limitado pelas superfícies:

$$y = 0,\ z = 0,\ x + y = 2,\ 2y + x = 6,\ y^2 + z^2 = 4$$

No plano xy:

Temos que $z=0$. Logo $y^2 = 4$ e $y = \pm 2$. Portanto, $0 \leq y \leq 2$.

Além disso, temos a seguinte figura:




Logo, $0 \leq z \leq \sqrt{4-y^2}$ e $2-y \leq x \leq 6-2y$

$\Rightarrow \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z\, dz\, dy\, dx = \boxed{26/3}$

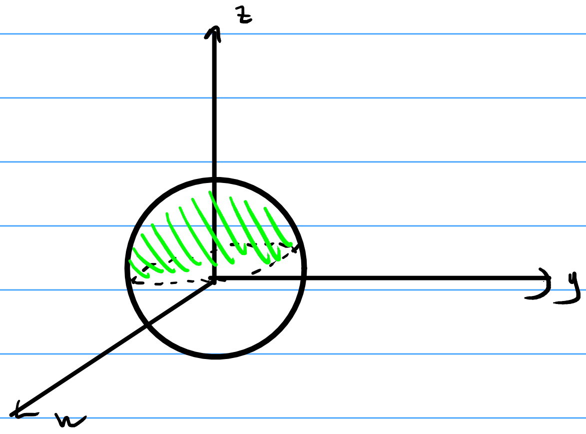
Questão 2) Calcule a área da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ , que se encontra no interior da parabolóide $z = x^2 + y^2$

$z^2 + z - 12 = 0 \Rightarrow \quad z = \frac{-1 \pm 7}{2} \to 3$ ou $-4$.

Para

Questão 4) Calcule $\iint_S z\, dS$ , onde $S$ é o hemisfério superior da esfera de raio $a$ centrada na origem.

S:



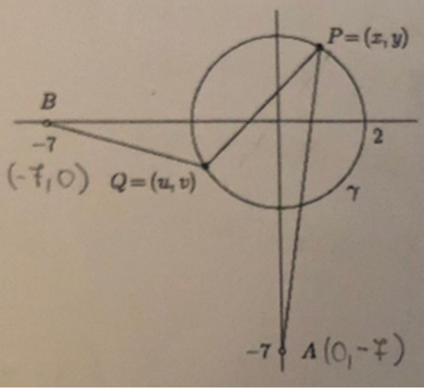
1,0

**Questão 1** (1 ponto)

Dados os pontos $A = (0, -7)$ e $B = (-7, 0)$, ache os pontos, $P$ e $Q$, no círculo de raio 2 e centro $(0, 0)$ tal que a distância

$$|AP|^2 + |PQ|^2 + |QB|^2$$

é máxima.



10

**Questão 2** (1 ponto)

Calcule

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dA,$$

onde $D$ é a região no primeiro quadrante limitada por $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$ e $xy = 4$.

1,0

**Questão 3** (1 ponto)

Calcule

$$\iiint_E z\,dV,$$

onde $E$ é o sólido limitado pelo plano $z = 0$ e a metade superior do elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.