FGV EMAp

Fundamentos de Matemática

Lista 1 – 05/03/2024

A consulta é livre, mas você deve entregar suas soluções escritas de próprio punho e mencionar as fontes de consulta.

1. Analise cada um dos itens a seguir. Quais são proposições? Quais são sentenças abertas? Quais são verdadeiros ou falsos? Explique e / ou comente.

   (a) $1 + 1 = 2$. Prop V

   (b) $\pi = 3$. Prop F

   (c) 12 pode ser escrito como soma de dois números primos.

   (d) Todo inteiro par maior do que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.

   (e) O quadrado de todo inteiro par é par.

   (f) π é um número primo.

   (g) $n^2 - 2n > 0$.

   (h) $m < n$.

   (i) $12 - 11$.

   (j) π é um número especial.

2. Prove que $2 + 3 = 5$.

3. Prove que $3 < \pi < 4$. (Raciocínio de Arquimedes, não ver fórmulas as cordas no braço)

4. Prove que 7 não é um divisor de 100.

5. Prove que para quaisquer números reais negativos a e b, se $a < b$, então $a^2 > b^2$.

6. Para quaisquer números reais a, b, c, prove que

   (a) $(a + b - c)^2 = (a + b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$;

   (b) $bc + ac + ab \leq a^2 + b^2 + c^2$;

   (c) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab)$; Q24a)

   (d) $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = 3(b - c)(c - a)(a - b)$. Q23

7. Para quaisquer números reais a e b, prove que

   (a) $a \times 0 = 0 = 0 \times a$;

   (b) $(-a)b = -ab = a(-b)$;

   (c) $(-a)(-b) = ab$.

8. Subtraindo um mesmo número do numerador e do denominador da fração $\frac{14}{13}$, obtemos a fração $\frac{13}{14}$. Qual é esse número?

9. O número $n = 9999 \cdots 99$ tem 2011 algarismos e todos iguais a 9. Quantos algarismos 9 tem o número n^2?

10. As massas de todos os pares possíveis formados com 5 estudantes são 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg e 101 kg. Qual é a massa do estudante de massa intermediária?

11. Prove todos os números da sequência

$$49, 4489, 444889, \ldots, 444 \cdots 48 \cdots 889, \ldots$$

são quadrados perfeitos. (cada termo tem um algarismo quatro e um algarismo oito a mais que o anterior).

12. Sendo a, b, c números racionais distintos, prove que

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$$

é sempre o quadrado de um número racional.

13. Seja

$$f(x; y) = \left(\frac{\sqrt[4]{x^3 y} - \sqrt[4]{x y^3}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}\right)^2 \cdot \left(1 + 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Calcule $f(9; 0,4)$.

14. Calcular o valor da expressão

$$\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

para $x = 2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$ e $k > 1$.

15. Calcule

$$\frac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2024}}}}}+\frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{2024}}}}}}$$

16. Prove que se

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a,$$

então $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

17. Ache o domínio de definição e simplifique a expressão

$$A=\frac{\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b}{b-\sqrt{ab}}+\dfrac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}}{2}.$$

18. (a) Demonstre que se a, b, c, d são reais e $b \neq 0$, $d \neq 0$, $b+d \neq 0$, $b-d \neq 0$ e $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, então

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

(b) Sabendo que $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=2$ e $\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{y}{\sqrt{3}}$, calcule x e y.

(c) (OIAM) Se $x \neq 1, y \neq 1, x \neq y$ e

$$\frac{yz-x^2}{1-x}=\frac{xz-y^2}{1-y},$$

demonstre que ambas as frações são iguais a $x+y+z$.

19. Seja $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$, e $z=\frac{c-a}{c+a}$.

(a) Prove que

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z).$$

(b) Prove que $x+y+z=-xyz$.

20. Fatore a^n-b^n, $n \in \mathbb{N}$. Para n ímpar, fatore a^n+b^n.

21. Fatore $x^3+2x^4+4x^2+2+x$.

22. Fatore as expressões

(a) x^5+x^4+1

(b) $x^{10}+x^5+1$

23. Fatore $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

24. (a) Fatore a expressão $a^3+b^3+c^3-3abc$. Não consegui terminar.

(b) Usando a fatoração obtida no item anterior, determine uma solução da equação cúbica $x^3+px+q=0$.

25. Supondo que o inteiro n é soma de dois números triangulares,

$$n=\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2},$$

expresse $4n+1$ como soma de dois quadrados, $4n+1=x^2+y^2$. Reciprocamente, se $4n+1$ é soma de dois quadrados, prove que n é soma de dois números triangulares.

26. Para todo inteiro positivo n, considere um quadriculado $2^n \times 2^n$ do qual um quadradinho 1×1 qualquer foi removido. Prove que que é possível cobrir completamente tal quadriculado usando apenas peças de 3 quadradinhos em "L".

(1) a) Proposição verdadeira (por definição de sucessor de um número natural)

b) Proposição falsa ($3 < \pi < 4 \rightarrow$ explicação no exercício 3)

c) Proposição verdadeira ($12 = 5+7$)

d) ? (Conjectura de Goldbach)

e) Proposição verdadeira (par. par = par)

f) Sentença aberta (depende da variável n)

g) Sentença aberta (depende da variável n)

h) sentença aberta (depende das variáveis n e m)

i) ?

j) sentença aberta (sem definição de "especial")

(2) Usando a ideia do item 1a):

$2 = 1+1$
$3 = 2+1 = (1+1+1)$.

Como $5 = 1+1+1+1+1$, então $5 = 2+3$, pois $2+3 = (1+1) + (1+1+1) = 1+1+1+1+1$

A prova verdadeira se dá pela definição da função de sucessor e pelos axiomas de Peano.

(3) A prova se dá pelo chamado raciocínio de Arquimedes/método da exaustão:

Defina $\pi = \dfrac{\text{Comprimento circunferência}}{\text{Diâmetro da circunferência}}$.

Digitalizado com CamScanner

$\therefore$ Comprimento circunferência = $C = \pi . 2r$ (Diâmetro = 2. Raio).

O método de Arquimedes nos diz que dado um polígono regular convexo (por definição possui todos os lados e ângulos congruentes) de n lados inscrito a uma circunferência, quanto maior o n, o perímetro do polígono vai se aproximando de C.

4) Para 7 dividir 100, 100 deve ser da forma: $7k + 0$ ($k \in \mathbb{Z}$ e 0 é chamado resto). Contudo, $100 = 98 + 2 = 7 \cdot 14 + 2$. Como $2 < 7$ chamamos a divisão de 100 por 7 não inteira. Portanto, 7 não divide 100.

5) Temos que $a, b < 0$ e $b > a$. Portanto $b = a + k$, ($k > 0$) e $a = b - k$. Segue que $a^2 = b^2 - 2bk + k^2$. Analisando os sinais temos que $b^2 > 0$, $-2bk > 0$ ($b < 0$) e $k^2 > 0$. Portanto $a^2 > b^2$.

6)
a) Sabemos que $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$.
Para $(a+b-c)^2$, temos $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2[ab + a\cdot(-c) + b\cdot(-c)]$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

Somando e subtraindo a^2, b^2 e c^2 temos

$(a^2 + 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a^2 - 2ac + c^2) - a^2 - b^2 - c^2$
$= (a+b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 - a^2 + b^2 + c^2$.

b) Sabemos que, por definição $(a-b)^2$, $(a-c)^2$ e $(b-c)^2$ são não negativos $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Logo

$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 \geq 0$
$\cancel{2}(a^2 + b^2 + c^2) \geq \cancel{2}(ab + bc + ac)$

c) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ac-ab)$

$= a^3 + \cancel{ab^2} + \cancel{ac^2} - abc - \cancel{a^2c} - \cancel{a^2b} + \cancel{ba^2} + b^3 + \cancel{bc^2} - \cancel{b^2c} - abc - \cancel{ab^2} +$
$\cancel{ca^2} + \cancel{cb^2} + c^3 - \cancel{bc^2} - \cancel{ac^2} - abc$

$= a^3+b^3+c^3-3abc$

d) Se $a+b+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$, sabemos do item b c que
$a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

Como $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$, então

$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3-3(b-c)(c-a)(a-b)=0$.

$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$

7 a) O conjunto dos reais permite a propriedade comutativa, portanto, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha\beta=\beta\alpha$. $\therefore a.0=0.a$.
$0=0+0$ $(a+0=a) \Rightarrow a.0=a.0+a.0 \Rightarrow a.0+(-a.0)=a.0+a.0$
$+(-a.0)$ $\therefore a.0=0=0.a$.

b) Primeiro, vamos provar que $-a=(-1).a$
$a.0=a.(1+(-1))=a.1+(-1).a=0 \Rightarrow (a.1=a) \Rightarrow a+(-1)a=0$
$a-a+(-1).a=-a$ $\therefore -a=(-1).a$.
Portanto $(-a).b=(-1).a.b=-ab=a.(-1).b=a.(-b)$ (comutatividade)

Digitalizado com CamScanner

Primeiro, vamos provar que $(-1)(-1)=1$

$(-1)\cdot(-1)=K \Rightarrow (-1)^2=K$ $\quad \sqrt{(-1)^2}=\sqrt{K} \Rightarrow \sqrt{K}=|-1| \Rightarrow \sqrt{K}=1$

$\exists K=1$ (Axiomas de corpo).

Logo $(-a)(-b)=(-1)\cdot a\cdot(-1)\cdot b=(-1)\cdot(-1)\cdot a\cdot b=1\cdot a\cdot b$

$=ab$.

9

$$n=\underbrace{9999\ldots99}_{2011\text{ "9s"}}=(10^{2011}-1)$$

$$n^2=(10^{2011}-1)^2=10^{4022}-2.10^{2011}+1$$

$$n^2=\overbrace{100\ldots000\ldots0000}^{4022\text{ "0s"}}$$

$$-\ \underbrace{20\ldots0000}_{2011\text{ "0s"}}$$

$$+\ 1$$

$$\underbrace{999\ldots98}_{\text{retirar}}\underbrace{0\ldots000}_{2010\text{ "0s"}}\ \underbrace{1}_{\text{retirar}}$$

$$4022-1-1-2010=\boxed{2010}$$

⑧ $\frac{14-K}{13-K} = \frac{13}{14}$

$$14^2 = 0116 \quad + 8 \quad = 196$$

$$196 - 14K = 169 - 13K$$

$$\boxed{K = 27}$$

⑩ Chamemos os estudantes de x, y, z, K, w. Temos que

$$\begin{cases} x+y = 90 \\ x+z = 92 \\ x+K = 93 \\ x+w = 94 \\ y+z = 95 \\ y+K = 96 \\ y+w = 97 \\ z+K = 98 \\ z+w = 100 \\ K+w = 101 \end{cases}$$

Somando todas as equações:

$$4(x+y+z+K+w) = 956 \Rightarrow x+y+z+K+w = \alpha = 239.$$

Também podemos extrair que:

$$\begin{cases} 3x+\alpha = 369 \\ 3y+\alpha = 378 \\ 3z+\alpha = 385 \\ 3K+\alpha = 388 \\ 3w+\alpha = 392 \end{cases}$$

Como os parâmetros de comparação são os mesmos, podemos escolher a equação com o valor intermediário.

Logo: $3z + \alpha = 385 \Rightarrow 3z = 385 - 239 = 146$

$$\boxed{z = \frac{146}{3}\ \text{Kg}}$$ (massa intermediária)

(ii) $49 = 4.10.1 + 8.10.0 + 9$

$4489 = 4.10^2.11 + 8.10.1 + 9$

$444889 = 4.10^3.111 + 8.10.11 + 9$

$\vdots$

$N = \underbrace{444\ldots488\ldots89}$

n algarismos [$\frac{n}{2}$ alg. 4 ; $\frac{n}{2}-1$ algs. 8, 1 alg 9].

$$N = 4.10^{n/2}.\underbrace{11\ldots11}_{\frac{n}{2}} + 8.10.\underbrace{11\ldots1}_{\frac{n}{2}-1} + 9$$

$$N = 4.10^{n/2}.\frac{(10^{n/2}-1)}{9} + 8.10\frac{(10^{n/2-1}-1)}{9} + 9$$

$$N = \frac{4.10^n - 4.10^{n/2} + 8.10^{n/2} - 80 + 81}{9}$$

$$N = \frac{(2.10^{n/2})^2 + 2.(2.10^{n/2}).1 + (1)^2}{3^2}$$

$$N = \left(\frac{2.10^{n/2}+1}{3}\right)^2$$

c.q.d.

(12) Chame $a-b=k$; $b-c=w$; $c-a=z$. Sabemos que $k+w+z=0$!

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{w^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{(kw)^2+(kz)^2+(wz)^2}{(kwz)^2}$$

Sabemos que $(kw+kz+wz)^2=(kw)^2+(kz)^2+(wz)^2+2\cancel{(k+w+z)}\,kwz$

$\therefore (kw)^2+(kz)^2+(wz)^2=(kw+kz+wz)^2$. Substituindo

$$\left(\frac{kw+kz+wz}{kwz}\right)^2=\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{w}+\frac{1}{z}\right)^2.$$

Se $k,w,z\in\mathbb{Q}$ $\therefore$ $\frac{1}{k},\frac{1}{w},\frac{1}{z}\in\mathbb{Q}$

$x,y>0$ ou $x,y<0$. Não ocorre

(13) $$f(x,y)=\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}\right)^2\Big(\overbrace{1+2\sqrt{\tfrac{y}{x}}+\tfrac{y}{x}}^{>0}\Big)^{1/2}$$

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{xy}\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}\right)}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}\right)^2\left(\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{xy}\,\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}}{-\cancel{(-\sqrt{y}+\sqrt{x})}}\right)^2\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\sqrt{xy}\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\sqrt{xy}+y.$$

Para $x=9$ e $y=0{,}4$ $\Rightarrow$ $f(9,\,0.4)=\sqrt{9\cdot 0{,}4}+0{,}4=\boxed{\dfrac{\sqrt{360}+4}{10}}$

(14) $$\left[\frac{(1-x^2)^{-1/2}+1}{2}\right]^{-1/2}+\left[\frac{(1-x^2)^{-1/2}-1}{2}\right]^{-1/2}$$

$(1-x^2)=\alpha$. $$\left[\frac{\alpha^{-1/2}+1}{2}\right]^{-1/2}+\left[\frac{\alpha^{-1/2}-1}{2}\right]^{-1/2}$$

$$=\left(\frac{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}+1}{2}\right)^{-1/2}+\left(\frac{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}-1}{2}\right)^{-1/2}=\left(\frac{\sqrt{\alpha}+\alpha}{2\alpha}\right)^{-1/2}+\left(\frac{\sqrt{\alpha}-\alpha}{2\alpha}\right)^{-1/2}$$

$$=\sqrt{\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}+\alpha}}+\sqrt{\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}-\alpha}}=\sqrt{2\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha-\alpha}}\right)=\sqrt{2\alpha}\left(\frac{\sqrt{\alpha-\alpha}+\sqrt{\alpha+\alpha}}{\alpha-\alpha^2}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cdot\alpha}{\cancel{\alpha}(1-\alpha)}=\frac{2\sqrt{2}}{(1-\alpha)}=\frac{2\sqrt{2}}{1-(1-x^2)}=\frac{2\sqrt{2}}{x^2}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{4K}{(1+K)^2}}=\frac{\cancel{2}\sqrt{2}(1+K)^2}{\cancel{4}K}$$

$$x^2=(2K^{1/2}(1+K)^{-1})^2=\frac{4K}{(1+K)^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow\ \sqrt{2}\left[\frac{(1+K)^2}{K}\right]}$$

(15) $$S=\frac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2024}}}}}+\frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2024}}}}}}$$

$=\alpha$

$=\alpha$

$$S = \frac{1}{2+\alpha} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\alpha}} = \frac{1}{2+\alpha} + \frac{1}{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}} = \frac{2+\alpha}{2+\alpha} = 1$$

(16) $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}} = a$

$$x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}+2\sqrt{(x^2+\sqrt[3]{x^4y^2})(y^2+\sqrt[3]{x^2y^4})} = a^2$$

$$x^2+y^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4}+2\sqrt{x^2y^2+\sqrt[3]{x^8y^4}+\sqrt[3]{x^4y^8}+x^2y^2} = a^2$$

$$(\sqrt[3]{x^4y^2}+\sqrt[3]{x^2y^4})^2$$

$\underline{x, y > 0}$

$$x^2+y^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\sqrt[3]{x^2y^4} = a^2$$

$$(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^3 = a^2$$

$$\boxed{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}}$$

17)

$$\frac{\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b}{b-\sqrt{ab}}+\dfrac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)}-\frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{2}$$

- $a,b \geq 0$ (I)
- $a \neq b$ (II)
- $b \neq \sqrt{ab}$ (III) $b(a-b) \neq 0$
- $a \neq -\sqrt{ab}$ (IV) $a(a-b) \neq 0$

$\boxed{\text{Domínio } \mathbb{R}-\{a=b \wedge a,b \leq 0\}}$

$$\frac{a}{\sqrt{ab}+a}-\frac{b}{b-\sqrt{ab}}=\frac{a(b-\sqrt{ab})-b(\sqrt{ab}+a)}{(a+\sqrt{ab})(b-\sqrt{ab})}=\frac{\cancel{ab}-a\sqrt{ab}-b\sqrt{ab}-\cancel{ab}}{\cancel{ab}-a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}-\cancel{ab}}$$

$$=\frac{-\cancel{\sqrt{ab}}(a+b)}{-\cancel{\sqrt{ab}}(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{2\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)}-\frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2}=\frac{\cancel{a+b}}{\cancel{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}\cdot\frac{\overbrace{a-b}^{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}}{2(\cancel{a+b})}-\frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}-\frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2}\quad \begin{cases} \text{I) } 0 \\ \text{II) } \sqrt{a}-\sqrt{b} \end{cases}$$

4

18 a) Suponha que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Para isso ser verdade devemos chegar em uma igualdade do tipo $\alpha = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \qquad \cancel{ab} + ad = \cancel{ab} + bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ (verdade)}$$

O raciocínio é análogo para $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ $\therefore$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$.

b) $\begin{cases} x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 2 \\ \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$

$$\frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} + y\sqrt{3} = 2$$

$$2\sqrt{3}y + 3\sqrt{3} = 6$$

$$y = \frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \qquad x = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{5 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

c) Pelo item 18a) sabemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

tanto

$$\frac{yz-x^2}{1-x} = \frac{xz-y^2}{1-y} = \frac{yz-x^2-(xz-y^2)}{(1-x)-(1-y)}$$

$$= \frac{yz-xz+y^2-x^2}{y-x} = \frac{\cancel{(y-x)}(y+x)+z\cancel{(y-x)}}{\cancel{y-x}} = \underline{x+y+z}$$

19 a) $x = \frac{a-b}{a+b}$; $y = \frac{b-c}{b+c}$; $z = \frac{c-a}{c+a}$

$$1+x = \frac{a+b+a-b}{a+b} = \frac{2a}{a+b}$$

$$1+y = \frac{b+c+b-c}{b+c} = \frac{2b}{b+c}$$

$$1+z = c+a+c-a = \frac{2c}{c+a}$$

$$1-x = \frac{a+b-(a-b)}{a+b} = \frac{2b}{a+b}$$

$$1-y = \frac{b+c-(b-c)}{b+c} = \frac{2c}{b+c}$$

$$1-z = \frac{c+a-(c-a)}{c+a} = \frac{2a}{b+c}$$

Como $\frac{2a}{a+b} \cdot \frac{2b}{b+c} \cdot \frac{2c}{c+a} = \frac{2b}{a+b} \cdot \frac{2c}{b+c} \cdot \frac{2a}{b+c}$

$\therefore (1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$

b) $x+y+z = \frac{(a-b)(b+c)(c+a) + (b-c)(a+b)(c+a) + (c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(c+a)(b+c)}$

$= \frac{(c+a)(2ab-2bc) + (b+c)(ac+bc-a^2-ab)}{(a+b)(c+a)(b+c)}$

$= \frac{2abc - 2bc^2 + 2a^2b - 2abc + abc + b^2c - a^2b - ab^2 + ac^2 + bc^2 - a^2c - abc}{(a+b)(c+a)(b+c)}$

$= \frac{-bc^2 + a^2b + b^2c - ab^2 + ac^2 - a^2c}{(a+b)(c+a)(b+c)}$

$xyz = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{abc - ac^2 - cb^2 + bc^2 - a^2b + a^2c + ab^2 - abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$\therefore x+y+z = -xyz$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a^1 \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

Não sei fatorar $a^n + b^n$. (2[illegible]/02)
Agora sei fatorar $a^n + b^n$ (03/03).

(21) $x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x$

$x^3 + 2x^4 + 2x^2 + 2x^2 + 2 + x$

$x^2(x+2) + 2x^2(x^2+1) + (x+2)$

$(x+2)(x^2+1) + 2x^2(x^2+1)$

$\boxed{= (x^2+1)(2x^2+x+2)}$

(22) a) $x^5 + x^4 + 1$

$x^5 - x^3 + x^3 - x^2 + x^2 - x + x + x^4 + 1$

$x^3(x^2-1) + x^2(x^2-1) + x(x^2-1) + (x^2+x+1)$

$x(x^2-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1)$

$\boxed{= (x^2+x+1)(x^3-x+1)}$

$x(x^2+x+1) -$

b)

b) $x^{10}+x^5+1$ Ao dividirmos $x^{10}+x^5+1$ por x^2+x+1, ocorre que o resto é 0:

$$
\begin{array}{l|l}
x^{10}+x^5+1 & x^2+x+1 \\
-x^{10}-x^9-x^8 & x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1 \\
\hline
-x^9-x^8+x^5+1 & \\
+x^9+x^8+x^7 & \\
\hline
x^7+x^5+1 & \\
-x^7-x^6-x^5 & \\
\hline
-x^6+1 & \\
+x^6+x^5+x^4 & \\
\hline
x^5+x^4+1 & \\
-x^5-x^4-x^3 & \\
\hline
-x^3+1 & \\
+x^3+x^2+x & \\
\hline
x^2+x+1 & \\
-x^2-x-1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$x^8(x^2+x+1)$

$x(x$

$\therefore x^{10}+x^5+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$

23 Sabemos que se $x+y+z=0$ $(x,y,z\in\mathbb{R})$ $\therefore x^3+y^3+z^3=3xyz$

Faça $x=b-c$; $y=c-a$ e $z=a-b$. Observe que $x+y+z=0$

$\therefore (b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$

24 Respondido no item 6 c)

c)

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

b) Não sei fazer.

$$n = \frac{a^2+a}{2} + \frac{b^2+b}{2}$$

$$4n+1 = 2a^2+2a+2b^2+2b+1+2ab-2ab$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(a^2+b^2+1+2a+2b+2ab)$$

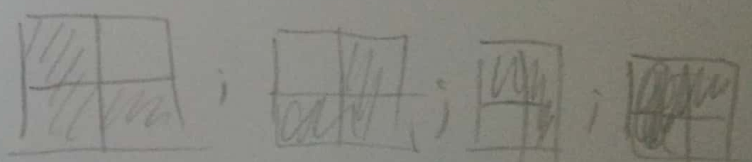
$$= (a-b)^2+(a+b+1)^2 = x^2+y^2$$

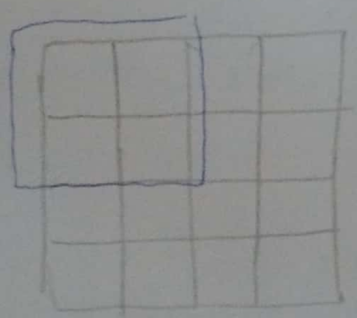
Seja $4n+1 = x^2+y^2$. Faça $x = \alpha-\beta$ e $y = \alpha+\beta+1$.

$$\therefore 4n+1 = (\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta+1)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1+2\alpha+2\beta+2\alpha\beta$$

$$4n+1 = 2\alpha^2+2\beta^2+2\alpha+2\beta+1.$$

$$\boxed{n = \frac{\alpha^2+\alpha}{2} + \frac{\beta^2+\beta}{2}}$$

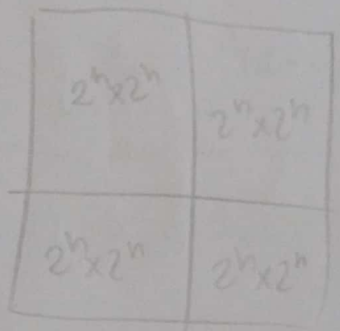
(26) O caso $n=1$ é imediato $\Rightarrow$ 

Para $n=2$: 

Observe que temos 4 quadrados 2×2. Ao serem preenchidos pelas peças em "L", "sobram" 4 quadradinhos, como cada peça "L" possui 3 quadradinhos há uma maneira de preencher o quadrado $2^2\times2^2$ com peças "L" removendo um quadradinho 1×1.

O raciocínio é análogo para um quadrado $2^n \times 2^n$. Vamos supor que tal ideia funcione, portanto, cada quadrado $2^n \times 2^n$, ao ser preenchido por peças "L" deixa 1 quadradinho 1x1.

Para o quadrado $2^{n+1} \times 2^{n+1} \Rightarrow$



Como cada quadrado $2^n \times 2^n$ deixa "resto" 1, no total temos 4 quadradinhos.

Portanto, é possível que, ao retirar um quadradinho 1x1, o quadrado $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ também seja encoberto por peças "L".

Prova por indução

Fatore $a^n + b^n$. (n impar).

Faça $a^n + b^n$ um polinômio $P(a)$. (variável a). Portanto, podemos ver que, para n impar, $-b$ é raiz e $P(a)$.
Logo $P(-b) = (-b)^n + b^n = -b^n + b^n = 0$. Usando o teorema do resto e a divisão entre polinômios, temos que se K é raiz do $P(x)$, então $(x-K)$ divide $P(x)$ ⊛

⊛ Prova. Seja $P(x)$ um polinômio escrito desta maneira: $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$. Para $D(x)$ dividir $P(x)$, $R(x) = 0$. Quando $D(x) = x - K$ e $D(x) \mid P(x)$, temos:
$P(x) = (x-K) \cdot Q(x) + 0 \quad P(K) = (K-K) \cdot Q(x) = 0$.

Usando o algoritmo de Briot Ruffini (provado em sala por recorrência) ⊛ temos o seguinte: como $-b$ é raiz do $P(a)$, então $x+b$ divide $P(a)$.

$$\begin{array}{r|l}
-b & 1 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; \ldots \; 0 \; 0 \; b^n \\
\hline
 & 1 \; -b \; +b^2 \; -b^3 \; +b^4 \; - \ldots + b^{n-2} + b^{n-1} \,\|\, 0.
\end{array}$$

$\therefore$ Para n impar, temos que $a^n + b^n = (a+b)(b^{n-1} - a b^{n-2} + \ldots + a^{n-3} b^2 - a^{n-2} b + a^{n-1})$.

⊛ Veja que o algoritmo de Briot Ruffini consiste de somas e multiplicações. Tome, por exemplo, $P(x)$.

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f.$$

$$= x(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) + f.$$

$$= x(x(ax^3 + bx^2 + cx + d) + e) + f$$

$$= x(x(x(ax^2 + bx + c) + d) + e) + f$$

$$= x(x(x(x(ax + b) + c) + d) + e) + f$$

↳ Um monte de multiplicações e somas ~~envolvido~~ envolvendo x, por isso, o algoritmo funciona para polinômios $D(x) = x - K$, tais que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.