Séries

1. Consideremos sequência (a_j) e formemos a nova sequência $s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$. ela se denomina <u>série</u> (notação: $\sum a_j$), e caso seja convergente, escrevemos $\sum_{j=1}^{\infty} a_j := \lim_{n\to\infty} s_n$

<u>Proposição</u>: se $\sum |a_j|$ é convergente então $\sum a_j$ é também convergente.

<u>prova</u>: como no caso das integrais impróprias absolutamente convergentes, consideremos

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n, & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0, & \text{se } a_n \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad a_n^- := \begin{cases} -a_n, & \text{se } a_n \leq 0 \\ 0, & \text{se } a_n \geq 0 \end{cases}$$

Então $|a_j| = a_j^+ + a_j^-$, e $a_j^+ \leq |a_j|$, $a_j^- \leq |a_j|$. Segue-se que $\sum_{j=1}^{n} a_j^+$ e $\sum_{j=1}^{n} a_j^-$ são crescentes (pois formadas por termos não-negativos) e limitadas superiormente ($\text{pois } \sum_{j=1}^{n} a_j^+ \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ e $\sum_{j=1}^{n} a_j^- \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$), portanto convergentes.

Sendo $a_j = a_j^+ - a_j^-$, temos que $\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j^+ - \sum_{j=1}^{n} a_j^-$ será também convergente quando $n \to \infty$.

<u>definição</u>: $\sum a_n$ converge absolutamente quando $\sum |a_n|$ for convergente. Portanto, convergência absoluta $\Rightarrow$ convergência

O seguinte Teorema fornece o critério que é essencialmente único para convergência de séries.

<u>Teorema</u> (critério de d'Alembert): se existe $0 \leq c < 1$ t.q. $|a_{n+1}| \leq c|a_n|$ a partir de algum n_0, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

prova: comecemos por observar que $\sum c^j$ é convergente; de fato, $\sum_{j=1}^{n} c^j = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$, de onde se segue que $\sum_{j=1}^{\infty} c^j = \frac{1}{1-c}$.

Agora temos $|a_n| \leq c^{n-n_0} |a_{n_0}|$, e portanto

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j| = \sum_{j=1}^{n_0-1} |a_j| + \sum_{j=n_0}^{n} |a_j| \leq \sum_{j=1}^{n_0-1} |a_j| + |a_{n_0}| \sum_{j=n_0}^{n} c^{j-n_0}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n_0-1} |a_j| + \sum_{j=1}^{\infty} c^j \quad \blacksquare$$

Caso particular: o critério de d'Alembert se aplica quando $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$ com $|c| < 1$ (exercício).

Exemplos:

1) $\sum \frac{a^j}{j!}$ é absolutamente convergente

Temos $\frac{|a|^{j+1}/(j+1)!}{|a|^j/j!} = \frac{|a|}{j+1} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$

2) $\sum \frac{n!}{n^n}$ é absolutamente convergente

Temos $\frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$

3) $\sum \frac{n^k}{a^n}$, com $|a| > 1$, é absolutamente convergente

Temos $\frac{(n+1)^k/|a|^{n+1}}{n^k/|a|^n} = \frac{1}{|a|} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \longrightarrow \frac{1}{|a|} < 1$.

4) $\sum \frac{1}{n^a}$, $a > 1$.

O critério acima não se aplica. Consideremos a função $x \mapsto x^{-a}$ a qual é est. decrescente.

Portanto, $\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^a}$ é soma inferior da função relativa à partição $1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^a} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^a} = \frac{1}{a-1} - \frac{n^{1-a}}{a-1} \leq \frac{1}{a-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^a} \leq 1 + \frac{1}{a-1}$$

Daí se segue que a série é convergente.

Um caso especial ocorre com $a=2$; pode-se mostrar que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5) Por outro lado $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \geq \int_1^n \frac{dt}{t} = \log n$; portanto $\sum \frac{1}{n}$ é série divergente (lembre-se que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é série convergente com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log 2$)

Exercício: analisar $\sum \frac{1}{j^a}$ para $0 < a \leq 1$

6) $\sum \frac{\log n}{n^2}$ é convergente.

De fato, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \log n^{1/2}}{n^{1/2}} = 0$, pois $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$. Segue-se que $\log n \leq n^{1/2}$ para n suficiente grande, e $\frac{\log n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. Como $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, concluímos que $\sum \frac{\log n}{n^2}$ converge.

Exercício: analisar $\sum \frac{\log n}{n^a}$.

7) Consideremos a sequência $u_n = \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right] - \log n$.

Provemos que existe $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Observemos inicialmente que $1 + \ldots + \frac{1}{n-1} \geq \log n$ (por que?)

Portanto, $u_n \geq \frac{1}{n}$, de modo que a sequência é limitada inferiormente. Provemos que é decrescente.

Ora, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \log \frac{n+1}{n}$. Analisemos a função $x \overset{\varphi}{\longmapsto} \frac{1}{x+1} - \log \frac{x+1}{x}$, definida para $x \geq 1$

Temos $\varphi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} > 0$, de modo que φ é estritamente crescente. Mas $\varphi(1) = \frac{1}{2} - \log 2 < 0$ e $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$, de modo que $\varphi(x) < 0$ para $x \geq 1$.

Daí: $u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow (u_n)$ é decrescente. Como é limitada inferiormente, concluímos pela sua convergência.

(8) Se existe $0 \leq c < 1$ de modo que $|a_n|^{1/n} \leq c$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente (exercício).

Isso se aplica, por exemplo, a $\sum \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$.

(2) <u>Séries de Potências</u>.

Vamos tratar de séries do tipo $\sum a_n (x-c)^n$; diremos que esta é uma série de potências centrada em c.

A questão é descrever o conjunto de valores de x para os quais a série converge. Consideraremos $c = 0$ para simplificar a notação.

Observemos que $\sum a_n x^n$ é sempre convergente em 0, e pode ocorrer, como em $\sum n!\, x^n$, que este seja o único ponto de convergência.

<u>Proposição</u>: suponhamos que exista $x_0 \neq 0$ tal que $\sum a_n x_0^n$ seja convergente. Existe $R > 0$ de modo que $\sum a_n x^n$ converge em $(-R, R)$ e diverge em $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ (podendo ser $R = \infty$).

<u>prova</u>:

Observemos inicialmente que se $|\bar{x}| < |x_0|$ então $\sum a_n \bar{x}^n$ é absolutamente convergente. De fato, sendo $\sum a_n x_0^n$ convergente temos que existe $M > 0$ de modo que $|a_n x_0^n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $|a_n \bar{x}^n| = |a_n x_0^n (\frac{\bar{x}}{x_0})^n| \leq M |\frac{\bar{x}}{x_0}|^n$, e $|\frac{\bar{x}}{x_0}| < 1$, vemos que $\sum a_n \bar{x}^n$ é absolutamente convergente. Definamos $R := \sup(A = \{x \in \mathbb{R} ; \sum a_n x^n$ é absolutamente convergente$\})$.

Temos $A \neq \emptyset$ pois contém qualquer $\bar{x}$ t.q. $|\bar{x}| < |x_0|$, e $R > 0$ (vamos admitir $R = \infty$). Temos também $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$.

Afirmamos que $(-R, R) \subset A$. Realmente, seja $0 \leq x_1 \in (-R, R)$. Existe $x_2 \in (x_1, R]$ t.q. $x_2 \in A$, e como $|a_n x_1^n| \leq |a_n x_2^n|$, temos $x_1 \in A$.

A observação inicial mostra que $\sum a_n x^n$ é divergente em $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ $\square$

<u>definição</u>: R é o raio de convergência da série, e $(-R, R)$ seu intervalo de convergência

<u>Exemplos</u>:

1) A série $\sum (-1)^n x^n$ converge se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$, de modo que $R = 1$. Nos pontos 1 e -1 a série diverge. Em $(-1, 1)$ temos que $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$. Podemos representar $\frac{1}{1+x}$ como série de potências centrada em qualquer natural. Por exemplo, $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2 + x - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^n}$ $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$ sempre que $|\frac{x-1}{2}| < 1$, ou seja, em $(-1, 3)$ (a série está centrada em 1)

2) A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ é convergente em $(-1, 1]$, pois vimos que representa $\log(1+x)$. Ela é divergente em $|x| > 1$ pois $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ não converge a 0. Daí, $R = 1$ e o intervalo

de convergência é $(-1,1)$; claramente a série diverge em -1.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$ representa $\operatorname{arctg} y$ em $[-1,1]$; mas não há convergência se $|y|>1$, logo, o intervalo de convergência é $(-1,1)$ (com convergência nos extremos).

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ representa e^x em $\mathbb{R}$; temos $R=\infty$. A mesma coisa pode ser dita para $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Introduziremos agora a importante idéia de convergência uniforme. Comecemos por observar que no caso de uma série $\sum a_n$ convergente, podemos dizer que dado $\varepsilon>0$ qualquer, existe N t.q. se $n_0>N$ então $\left|\sum_{n_0+1}^{\infty} a_n\right|<\varepsilon$. De fato, $\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n_0} a_j + \sum_{j=n_0+1}^{n} a_j$, de modo que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{n_0} a_j + \sum_{j=n_0+1}^{n} a_j$. Mas existe N de modo que $n_0>N$ então $\left|\sum_{j=0}^{\infty} a_j - \sum_{j=1}^{n_0} a_j\right|<\varepsilon$; segue-se que $\left|\sum_{j=n_0+1}^{\infty} a_j\right|<\varepsilon$. (podemos escrever $\lim_{n_0\to\infty} \sum_{j=n_0+1}^{\infty} a_j = 0$).

Quando passamos a uma série de potências $\sum a_n x^n$ no seu intervalo de convergência, ainda podemos garantir:

<u>Teorema</u>: seja $[-b,b]\subset(-R,R)$. Dado $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ t.q. $n_0>N \Rightarrow \left|\sum_{j=n_0+1}^{\infty} a_j x^j\right|<\varepsilon$ para $x\in[-b,b]$

<u>prova</u>:

1) Temos que $\left|\sum_{j=m+1}^{\infty} a_j x^j\right| \le \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j x^j| \le \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j b^j|$.

Ora, existe $N\in\mathbb{N}$ t.q. se $n_0>N$ então $\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |a_j b^j|<\varepsilon$

Portanto, $\left|\sum_{j=n_0+1}^{\infty} a_j x^j\right| < \varepsilon$ se $n_0 > N$ e $x \in [-b,b]$ ▨

Façamos $s(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, $s_m(x) := \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ para $x \in (-R,R)$.

Temos que para cada $x \in (-R,R)$: $\lim_{m\to\infty} s_m(x) = s(x)$.

<u>definição</u>: s_m <u>converge</u> <u>uniformemente</u> <u>para</u> s em um intervalo $[-b,b] \subset (-R,R)$

Isso significa que dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $|s(x) - s_m(x)| < \varepsilon$ se $m > N$ e $x \in [-b,b]$.

<u>Atenção</u>: s_m não converge para s em todo $(-R,R)$ de forma uniforme, apenas em subintervalos limitados e fechados.

Graças a esta propriedade, as séries de potências possuem propriedades parecidas com os polinômios.

<u>Teorema</u>: $s(x)$ é contínua em $(-R,R)$.

<u>prova</u>: seja $c \in (-R,R)$; escolhemos $b > 0$ de modo que $c \in [-b,b]$ e $[-b,b] \subset (-R,R)$. Temos que:

$$s(x) - s(c) = (s(x) - s_m(x)) + \left(s_m(x) - \sum_{j=1}^{m} a_j c^j\right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j c^j - \sum_{j=1}^{m} a_j c^j\right).$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $m \in \mathbb{N}$ de modo que $|s(x) - s_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ em $[-b,b]$ e $\left|\sum_{j=0}^{\infty} a_j c^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j c^j\right| < \frac{\varepsilon}{3}$

Para este m, existe $\delta > 0$ t.q. se $|x-c| < \delta$ então $\left|s_m(x) - \sum_{j=0}^{m} a_j c^j\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ (pois $s_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ é um polinômio). Segue que $|x-c| < \delta \Rightarrow |s(x) - s(c)| < \varepsilon$ ▨

<u>Teorema</u> (<u>Integração termo a termo</u>):

$$\int_0^x s(t)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^x a_j t^j dt \qquad \text{para } x \in (-R,R)$$

<u>prova</u>: consideremos $x \in [-b,b] \subset (-R,R)$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que $|s(t) - s_m(t)| < \frac{\varepsilon}{R}$ para $m > N$ e $t \in [-b,b]$. Logo:

$$\left| \int_0^x s(t)\,dt - \int_0^x s_m(t) \right| \leq \left| \int_0^x |s(t) - s_m(t)|\,dt \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^x s(t) - \sum_{j=0}^{m} \int_0^x a_j t^j dt \right| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Observe que a série $\sum \int_0^x a_j t^j dt$, consequentemente, converge pelo menos em $(-R,R)$. Pode-se mostrar que seu intervalo de convergência é exatamente $(-R,R)$.

<u>Teorema</u> (<u>Derivação</u> <u>termo</u> <u>a</u> <u>termo</u>):

$$s'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} \qquad \text{para } x \in (-R,R).$$

<u>prova</u>:

1 - Provemos inicialmente que $\sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$ é absolutamente convergente para qualquer $x \in (-R,R)$. Fixemos $\bar{x} \in (-R,R)$ e $h > 0$ suficientemente pequeno; temos que

$\sum a_j (\bar{x}+h)^j$ e $\sum a_j \bar{x}^j$ são absolutamente convergentes

$\Rightarrow \sum a_j [(\bar{x}+h)^j - \bar{x}^j]$ é absolutamente convergente.

Pelo Teorema do Valor Médio, existe c_j entre $\bar{x}$ e $\bar{x}+h$ de modo que $(\bar{x}+h)^j - \bar{x}^j = j c_j^{j-1} h$. Segue-se daí que $\sum j a_j c_j^{j-1}$ é absolutamente convergente e portanto $\sum j a_j \bar{x}^{j-1}$ também, pois $|\bar{x}| < |c_j|$.

2 - Aplicando o Teorema anterior:

$$\int_0^x \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} = s(x) - a_0, \text{ e daí } s'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} \quad \blacksquare$$

Observamos novamente que o intervalo de convergência de $\sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$ é de fato $(-R,R)$.

Aplicando sucessivamente o último teorema vemos que $s(x)$ é infinitamente derivável, e que sua série de Taylor centrada em 0 é $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.

Lembremos novamente que nem toda função infinitamente derivável pode ser representada por uma série de potências (isto é, por sua série de Taylor).

Observação: a noção de convergência uniforme é generalizada do seguinte modo:

definição: sejam $f_n : I \to \mathbb{R}$ sequência de funções e $f : I \to \mathbb{R}$; dizemos que f_n converge uniformemente para f quando dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $N \in \mathbb{N}$ (dependendo de ε!) de modo que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ se $n > N$ e para todo $x \in I$.

Temos os seguintes teoremas correspondentes ao caso das séries. Suponhamos então $f_n \to f$ em I.

1) Se f_n é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é contínua (Exercício: analise o caso $f_n(x) = x^n$ para $x \in [0,1]$)

2) Fixemos $a \in I$, f_n contínua para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\int_a^x f_n(t)\,dt \to \int_a^x f(t)\,dt$ para todo $x \in I$

3) Suponhamos f_n deriváveis, e que f_n' sejam contínuas. Se $f_n' \to g$ uniformemente, então $g = f'$, isto é, $\frac{d}{dx} f_n(x) \to \frac{d}{dx} f(x)$.