1) Determine o ponto do eixo OX que tem mesma distância aos pontos $A=(2,\ 1,-1)$ e $B=(0,\ 3,-1)$.

$C=(K,0,0)$.

$d_{AC}=\sqrt{(2-K)^2+1+1}$

$d_{BC}=\sqrt{K^2+3^2+1}$

$\Rightarrow\ 4-4K+\cancel{K^2}+2=\cancel{K^2}+9+1$

$\boxed{K=-1}\ \Rightarrow\ \boxed{C=(-1,0,0)}$

2) A reta r passa pelo ponto $(3,\ 4,-1)$ e é paralela ao vetor $v=(1,-1,\ 2)$. Determine o ponto dessa reta cuja soma das coordenadas é 16.

$r:\begin{cases} x=3+t \\ y=4-t \\ z=-1+2t \end{cases}\ \Rightarrow\ 16=6+2t\ \boxed{t=5}$

$\boxed{\text{Ponto: } (8,-1,9)}$

3) São dados os vetores $u = (1, 1, 2)$ e $v = (-1, 3, 1)$.

a) Escreva $w = (7, -5, 5)$ como combinação linear de u e v.

b) Escreva $z = (3, 2, -1)$ como combinação linear de u e v.

a) $w = \alpha u + \beta v$

$$\begin{cases} 7 = \alpha . 1 + \beta(-1) \\ -5 = \alpha . 1 + \beta . 3 \\ 5 = 2\alpha + \beta . 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = \alpha - \beta \\ -5 = \alpha + 3\beta \\ 5 = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

$\boxed{\alpha = 4 \; ; \; \beta = -3}$ $\boxed{w = 4u - 3v}$

b) $$\begin{cases} 3 = \alpha . 1 + \beta(-1) \\ 2 = \alpha . 1 + \beta . 3 \\ -1 = 2\alpha + \beta . 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \alpha - \beta \\ 2 = \alpha + 3\beta \\ -1 = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

$\alpha = 2/3 \; ; \; \beta = -7/3 \Rightarrow$ $\boxed{\text{não resolve o sistema}}$

$\boxed{\text{Não é possível.}}$

4) Determine k para que os pontos $(k, 2, 4)$, $(3, k, 2)$ e $(7, -1, -2)$ sejam colineares.

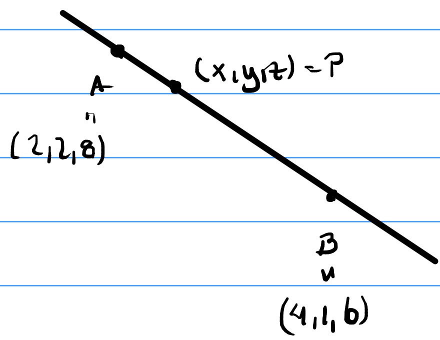
Como os pontos são colineares, então $(7,-1,-2)$ é uma combinação linear de $(K,2,4)$ e $(3,K,2)$.

$$\begin{cases} 7 = \alpha K + 3\beta \\ -1 = 2\alpha + K\beta \\ -2 = 4\alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = K\alpha + 3\beta \\ -1 = 2\alpha + K\beta \\ -1 = 2\alpha + \beta. \end{cases}$$

$$\cancel{2\alpha} + K\beta = \cancel{2\alpha} + \beta \qquad \boxed{X = 1}$$

5) A reta r passa pelos pontos $A = (2, 2, 8)$ $B = (4, 1, 6)$. Determine os pontos onde a reta r corta os planos XY, YZ e XZ.

reta r:



$\vec{AB} = (2, -1, -2)$

$P = A + \alpha \vec{AB}$

Logo,

$$r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 8 - 2t \end{cases}$$

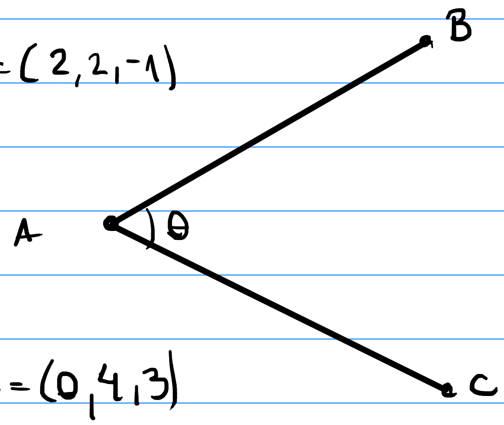
Eixo XY: $z=0 \Rightarrow t=4 \Rightarrow (10,-2,0)$

Eixo YZ: $x=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow (0,3,10)$

Eixo XZ: $y=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow (6,0,4)$

6) Dados os pontos $A=(1,\ 2,\ 3)$, $B=(3,\ 4,\ 2)$ e $C=(1,\ 6,\ 6)$ determine o cosseno do ângulo *BAC*.

$\vec{AB}=(2,2,-1)$



$\vec{AC}=(0,4,3)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|}$$

$$\cos\theta = \frac{[2.0+2.4-3.1]}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{0+16+9}}$$

$$\cos\theta = \frac{\cancel{5}}{3.\cancel{5}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

7) Dados os pontos $A=(1,\ 0,\ 0)$, $B=(3,\ 1,\ -1)$ $C=(0,\ 2,\ 1)$ e $D=(-1,\ 1,\ 3)$ verifique se as retas *AB* e *CD* são paralelas, concorrentes ou reversas.

reta AB: $\vec{AB}=(2,1,-1)$ ∴

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

reta CD: $\vec{CD}=(-1,-1,2)$

$$v: \begin{cases} x = -s \\ y = 2-s \\ z = 1+2s \end{cases}$$

Fazendo $\begin{cases} 1+2t=-s \\ t=2-s \end{cases} \Rightarrow 1+2t=t-2$

$\boxed{t=-3}$, $\boxed{s=-5}$.

Vendo se a coordenada z é igual:

$r: \{ z=-(-3)=3$

$v: \{ z=1+2(-5)=-9$.

Logo, r e v são $\boxed{\text{reversas}}$

8) A reta r passa pelo ponto $A=(-1,\ 2,\ 4)$ e é paralela ao vetor $v=(2,\ 1,\ -1)$. Determine o ponto de r mais próximo da origem.

reta r: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \\ z=4-t \end{cases}$

$$d_{(x,y,z),(0,0,0)}=\sqrt{(2t-1)^2+(t+2)^2+(4-t)^2}$$

$$d=\sqrt{4t^2-\cancel{4t}+1+t^2+\cancel{4t}+4+16-8t+t^2}$$

$$d=\sqrt{6t^2-8t+21}$$

O t que deixa d mínimo é $\frac{-(-8)}{2.6}=\frac{8}{2.6}=\boxed{\frac{2}{3}}$,

$x=-1+4/3=1/3$; $y=2+2/3=8/3$; $z=4-2/3=10/3$

$\boxed{\text{Ponto: } (1/3,\ 8/3,\ 10/3)}$

9) Com os pontos A, B e C do exercício 6 determine:

a) equações paramétricas para a reta BC.

b) o comprimento do segmento BC.

c) a distância de A até a reta BC.

d) a área do triângulo ABC.

$A = (1,2,3)$; $B = (3,4,2)$; $C = (1,6,6)$

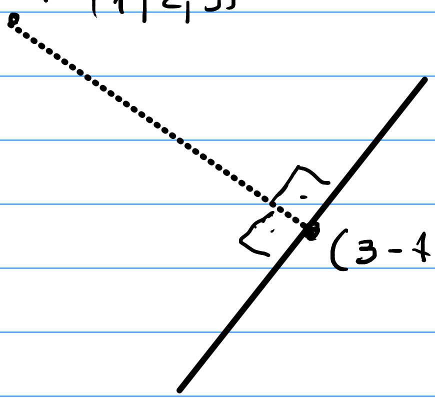
a) $\vec{BC} = (-2,2,4) \Rightarrow (-1,1,2)$

$$\text{reta}: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

b) $d_{BC} = \sqrt{(1-3)^2 + (6-4)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24}$
$= 2\sqrt{6}$

c)

$A = (1,2,3)$



$$BC = \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$(3-t,\ 4+t,\ 2+2t) = P$

$\vec{AP} = (2-t, 2+t, -1+2t) \perp \vec{BC} = (-1, 1, 2)$

$(2-t)(-1) + (2+t)\cdot 1 + (-1+2t)\cdot 2 = 0$

$-\cancel{2}+t+\cancel{2}+t-2+4t=0$

$6t = 2$

$t = 1/3.$

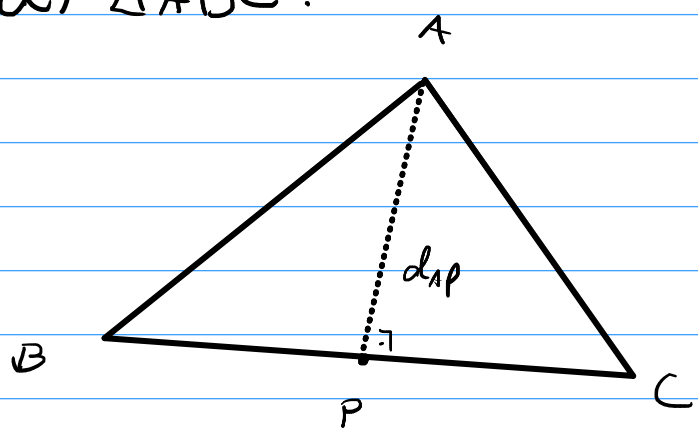
$P = (8/3, 13/3, 8/3)$

$A = (1, 2, 3)$

$d_{AP} = \sqrt{(5/3)^2 + (7/3)^2 + (-1/3)^2} = \sqrt{\dfrac{25+49+1}{3^2}}$

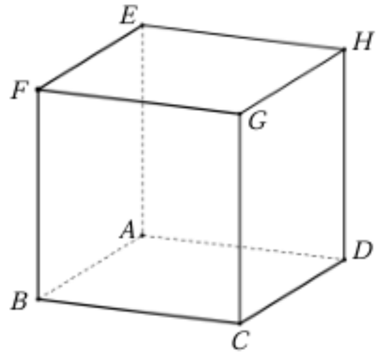
$\boxed{d_{AP} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}}$ //

d) ΔABC:

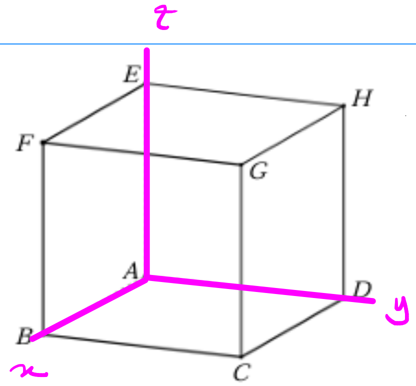


$A = \dfrac{|\vec{BC}|\cdot d_{AP}}{2} = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{\cancel{3}}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \boxed{5\sqrt{2}\ ua}$

10) É dado um cubo de aresta 2. Estabeleça um sistema de coordenadas e determine os oito vértices nesse sistema.



a) Calcule o comprimento de uma diagonal.
b) Calcule a distância entre os pontos médios de duas arestas reversas.
c) Seja AG uma diagonal. Determine os pontos médios das seis arestas que não concorrem nem em A, nem em G. Unindo cada um desses pontos ao mais próximo, que figura ficou formada?

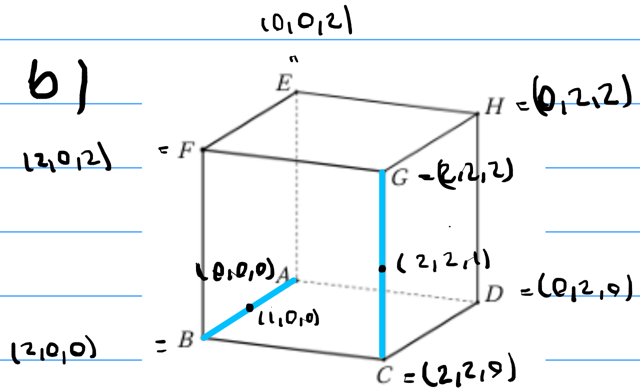


diagonal AG

A = (0, 0, 0)
G = (2, 2, 2)

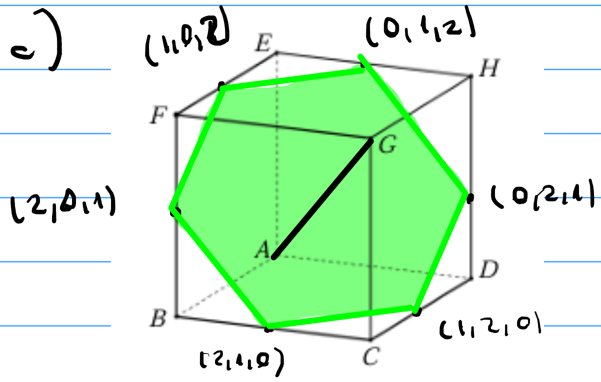
$d_{AG} = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{3\cdot2^2} = \boxed{2\sqrt{3}}$

b)



$d_{(1,0,0),(2,2,1)} = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \boxed{\sqrt{6}}$

c)



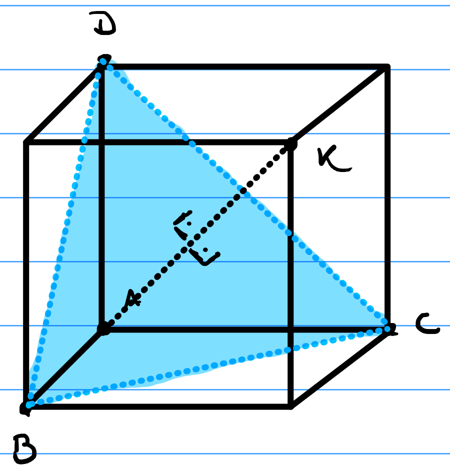
Fazendo a distância entre um desses pontos, percebe que eles são permutações circulares.

$d=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$.

Como as distâncias são iguais, eles formam um hexágono regular.

11) Sejam *AB*, *AC* e *AD* arestas de um cubo. Mostre que a diagonal do cubo que passa por *A* é perpendicular ao plano *BCD*.

Obs: Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano ela é perpendicular a esse plano.



Suponha um cubo de aresta 1.

$A=(0,0,0)$
$B=(1,0,0)$
$C=(0,1,0)$
$D=(0,0,1)$
$K=(1,1,1)$

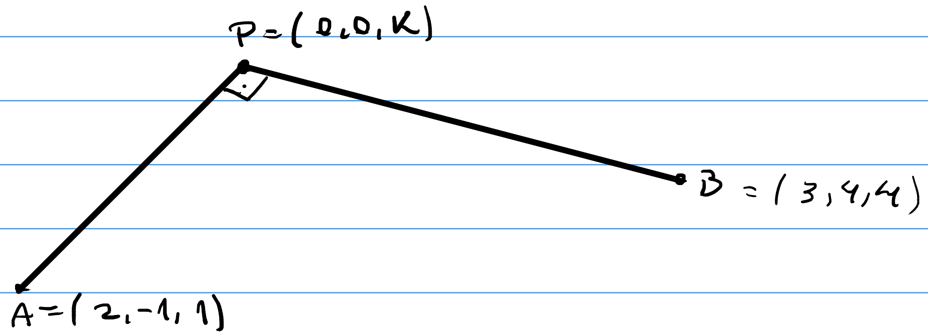
$\vec{AK}=(1,1,1)$; $\vec{BC}=(-1,1,0)$; $\vec{BD}=(-1,0,1)$

Condição de perpendicularismo:
$xx' + yy' + zz' = 0$

entre $\vec{AK}$ e $\vec{BC}$: $1(-1) + 1.1 + 1.0 = 0$ ✓
entre $\vec{AK}$ e $\vec{BD}$: $1(-1) + 1.0 + 1.1 = 0$ ✓

$\therefore \vec{AK} \perp \vec{BC}$ e $\vec{AK} \perp \vec{BD}$
como $\vec{BC}$ e $\vec{BD} \in BCD$ e concorrem em B, então a diagonal AK é perpendicular ao plano BCD.

12) Dados os pontos $A=(2,\ -1,\ 1)$ e $B=(3,\ 4,\ 4)$ determine o ponto do eixo Z de forma que o ângulo APB seja reto.



$\vec{PA} = (2,-1,1-K)$; $\vec{PB} = (3,4,4-K)$

Condição de perpendicularismo:

$$2\cdot 3 + (-1)\cdot 4 + (1-K)(4-K) = 0$$

$$6 - \cancel{4} + \cancel{4} - 5K + K^2 = 0$$

$$K^2 - 5K + 6 = 0$$

$$(K-2)(K-3) = 0 \Rightarrow K = 2 \text{ ou } K = 3$$

Pontos: $\boxed{(0,0,2) \text{ ou } (0,0,3)}$

13) Considere as retas

$r_1 = \{(1+3t, -1+4t, 2)\,;\, t \in \mathrm{R}\}$ e $r_2 = \{(4-3s, -2+6s, -1+2s)\,;\, s \in \mathrm{R}\}$.

a) Verifique se elas são concorrentes ou reversas.

b) Calcule o cosseno do ângulo entre elas.

c) Modifique apenas um dos coeficientes da reta r_2 para torná-las concorrentes.

a)

$$r_1: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+4t \\ z = 2 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 4-3s \\ y = -2+6s \\ z = -1+2s \end{cases}$$

Fazendo $2 = -1+2s$ (coordenadas z iguais)

$\boxed{s = 3/2}$

$$\therefore r_2: \begin{cases} x = -1/2 \\ y = 7 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \therefore -1+4t = 7 \text{ e } 1+3t = -1/2$$

$$\boxed{t = 2} \text{ e } \boxed{t = -1/2}$$

Como os valores de t são diferentes, as retas são reversas

b) O vetor diretor de r_1 é $(3,4,0)$
O vetor diretor de r_2 é $(-3,6,2)$

Logo, $\cos\theta = \dfrac{(3,4,0)\cdot(-3,6,2)}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \dfrac{-9+24+0}{5\cdot 7} = \dfrac{15}{5\cdot 7} = \boxed{\dfrac{3}{7}}$

c) Fazendo $s = 3/2$, temos $t = 2$.

Agora, temos:

$r_1: \begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \\ z = 2 \end{cases}$ $\quad r_2: \begin{cases} x = 4 - \alpha \cdot 3/2 \\ y = 7 \\ z = 2 \end{cases}$

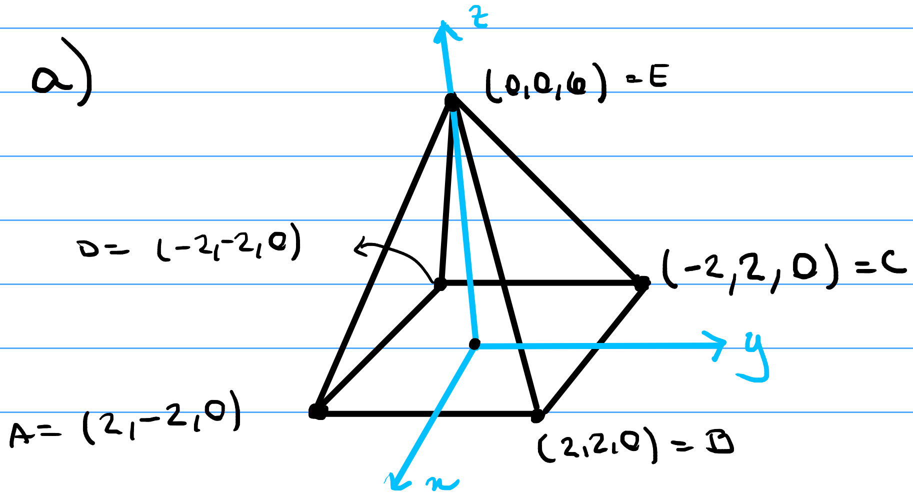
Logo, $\boxed{\alpha = -2}$. Trocamos o 3 por -2.

14) A pirâmide regular *ABCDE* tem na base o quadrado *ABCD* de lado 4 e sua altura é igual a 6. Estabeleça um sistema de coordenadas e determine os cinco vértices nesse sistema.

a) Calcule a distância entre os pontos médios das arestas *AB* e *CE*.

b) Calcule o cosseno do ângulo entre as retas *AD* e *BE*.

a)



$M_{AB} = (2,0,0)$; $M_{CE} = (-1,1,3)$

$$d = \sqrt{(2-(-1))^2 + (0-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9+1+9} = \boxed{\sqrt{19}}$$

b) $\vec{AD} = (-4,0,0)$

$\vec{BE} = (-2,-2,6)$

$$\cos\theta = \frac{(-4,0,0)\cdot(-2,-2,6)}{\sqrt{4^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+6^2}} = \frac{8}{4\cdot 2\sqrt{11}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{11}}}$$

15) Encontre pelo menos três vetores (dois quaisquer não colineares) perpendiculares ao vetor $v = (1, 2, 3)$.

Condicão de perpendicularismo:

$u = (a,b,c)$

$$a + 2b + 3c = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix}(0,0,0)\\(1,4,-13/3)\\(2,2,-2)\end{matrix}}$$

m.

16) Dados os vetores $u = (3, 2, 4)$, $v = (1, 0, 1)$ determine um vetor de módulo 10 perpendicular a u e a v.

$$w = (a, b, c) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 100 \\ 3a + 2b + 4c = 0. \\ a + c = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{a = -c} \quad \Rightarrow \begin{cases} 2b + c = 0 \\ b^2 + 2c^2 = 100. \end{cases} \quad \boxed{c = -2b}$$

$$b^2 + 2 \cdot 4b^2 = 100$$

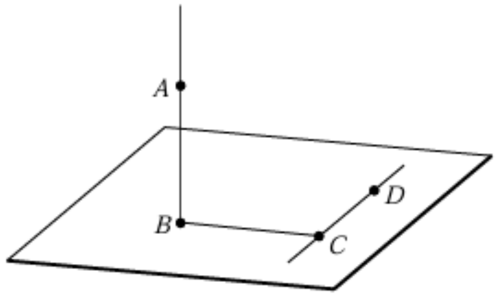
$$b^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 \Rightarrow \boxed{b = \pm \frac{10}{3}}.$$

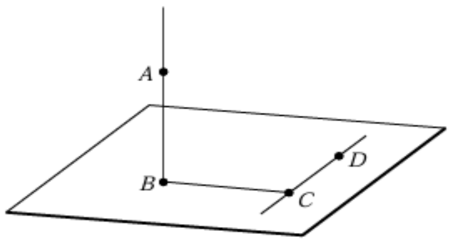
Faça $b = 10/3$: $\quad c = -20/3 \quad a = 20/3$

$$\boxed{w = (20/3, 10/3, -20/3)}$$

17) Na figura abaixo, AB é perpendicular ao plano BCD e BC é perpendicular a CD. Prove que AC é perpendicular a CD.

Obs: este resultado é conhecido como o Teorema das três perpendiculares.





$\vec{AB} \perp \vec{BC}$ (usando a
$\vec{AB} \perp \vec{CD}$ questão 11).
$\vec{BC} \perp \vec{CD}$

$A = (a_1, b_1, c_1)$
$B = (a_2, b_2, c_2)$
$C = (a_3, b_3, c_3)$
$D = (a_4, b_4, c_3)$

$\vec{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$
$\vec{BC} = (a_3 - a_2, b_3 - b_2, c_3 - c_2)$
$\vec{CD} = (a_4 - a_3, b_4 - b_3, c_4 - c_3)$

Sabemos, do enunciado e da condição de perpendicularismo:

$$\begin{cases} \text{I} & (a_2-a_1)(a_3-a_2)+(b_2-b_1)(b_3-b_2)+(c_2-c_1)(c_3-c_2)=0 \\ \text{II} & (a_2-a_1)(a_4-a_3)+(b_2-b_1)(a_4-a_3)+(c_2-c_1)(c_4-c_3)=0 \\ \text{III} & (a_3-a_2)(a_4-a_3)+(b_3-b_2)(b_4-b_3)+(c_3-c_2)(c_4-c_3)=0. \end{cases}$$

Queremos provar que $\vec{AC} = (a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1)$ é perpendicular a $CD = (a_4 - a_3, b_4 - b_3, c_4 - c_3)$.

Logo:

$$(a_3-a_1)(a_4-a_3)+(b_3-b_1)(b_4-b_3)+(c_3-c_1)(c_4-c_3)=0$$

Sabemos:

$$(a_2-a_1)(a_4-a_2)+(b_2-b_1)(b_4-b_2)+(c_2-c_1)(c_4-c_2)=0 \quad (I+II)$$
$$(a_4-a_3)(a_3-a_1)+(b_4-b_3)(b_3-b_1)+(c_4-c_3)(c_3-c_1)=0 \quad (II+III)$$

Pronto.

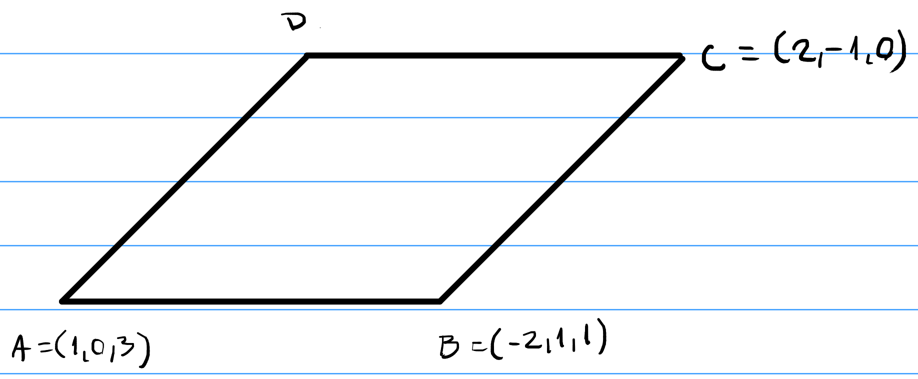
18) Dados $A=(1,0,3)$ $B=(-2,1,1)$ e $C=(2,-1,0)$ seja $ABCD$ um paralelogramo.

a) Determine o vértice D.

b) Determine o cosseno do ângulo ABC.

c) Encontre um vetor perpendicular ao plano do paralelogramo.

a)



$$\vec{AD}=\vec{BC}$$

$$(x-1,y,z-3)=(4,-2,-1)$$

$$\therefore \boxed{D=(5,-2,2)}$$

b) $\vec{BA} = (3,-1,2)$
$\vec{BC} = (4,-2,-1)$

$$\cos\theta = \frac{(3,-1,2)\cdot(4,-2,-1)}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{16+4+1}} = \frac{12+\cancel{2}-\cancel{2}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}} = \frac{12}{7\sqrt{6}} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{7}}$$

c) Usando a questão 11):

$w = (a,b,c)$ $\quad w \perp \vec{AB} \wedge w \perp \vec{BC}$

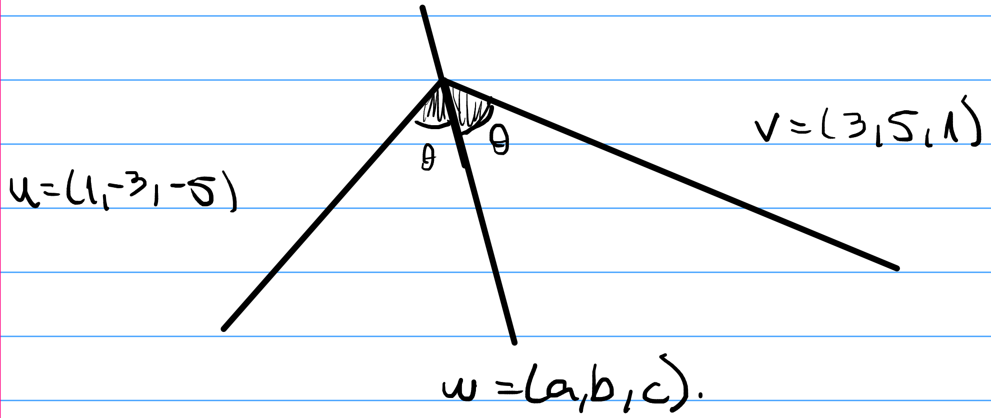
$(a,b,c) \perp (-3,1,-2) \wedge (a,b,c) \perp (4,-2,-1)$

$$\begin{cases} -3a+b-2c = 0 \\ 4a-2b-c = 0 \end{cases} \quad a = 5,\ b = 11,\ c = -2$$

$$\begin{cases} -15+11+4=0 \checkmark \\ 20-22+2=0 \checkmark \end{cases}$$

Logo, um vetor que é perpendicular ao plano do paralelogramo ABCD é $(5,11,-2)$

19) Encontre um vetor unitário que esteja na bissetriz do ângulo formado pelos vetores $u = (1, -3, -5)$ e $v = (3, 5, 1)$.



$$\frac{(1,-3,-5)(a,b,c)}{\cancel{\sqrt{1+9+25}}\cdot\cancel{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} = \frac{(3,5,1)(a,b,c)}{\cancel{\sqrt{9+25+1}}\cdot\cancel{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

$$a-3b-5c=3a+5b+c$$

$$2a+8b+6c=0$$

$$\boxed{a+4b+3c=0}$$

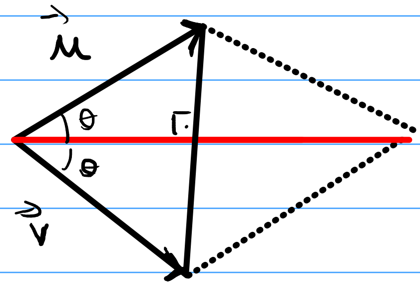
Além disso, $\boxed{a^2+b^2+c^2=1.}$

Se $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$ e $c=-\frac{2}{3}$

então, $\boxed{w=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)}$

Solução do professor:

$|\vec{u}| = |\vec{v}|$



Como, $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, basta fazer u+v que teremos um vetor que está na diagonal do losango e está na bissetriz de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

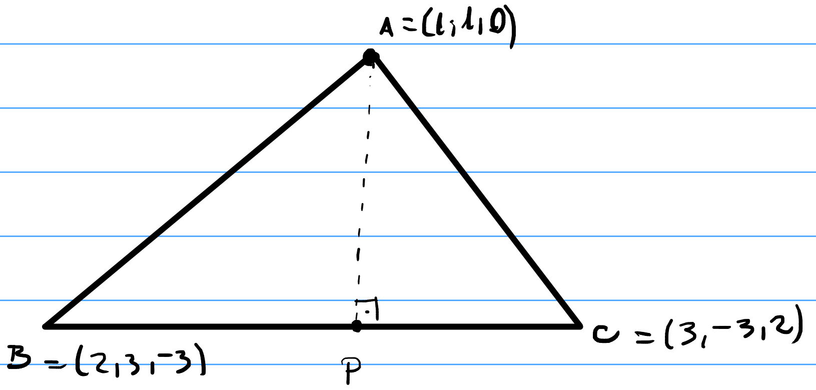
$$\vec{u} + \vec{v} = (4, 2, -4) = (2, 1, -2)$$

Como queremos um vetor unitário, basta fazer $\vec{w} \cdot \frac{1}{|w|} \Rightarrow |w| = 3$

$$\vec{w} \cdot \frac{1}{|w|} = \boxed{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)}$$

⊗ Se não tiverem o mesmo módulo?
Transforma ambos em unitários

20) Calcule a área do triângulo cujos vértices são $A=(1,\ 1,\ 0)$, $B=(2,\ 3,\ -3)$ e $C=(3,\ -3,\ 2)$.



$$d_{BC} = \sqrt{(3-2)^2+(-3-3)^2+(2+3)^2} = \sqrt{1+36+25} = \sqrt{62}.$$

reta BC: $\vec{BC} = (1,-6,5)$; $r: \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 3-6\alpha \\ z = -3+5\alpha \end{cases}$

$$P = (2+\alpha, 3-6\alpha, -3+5\alpha)$$
$$\vec{AP} = (1+\alpha, 2-6\alpha, -3+5\alpha)$$

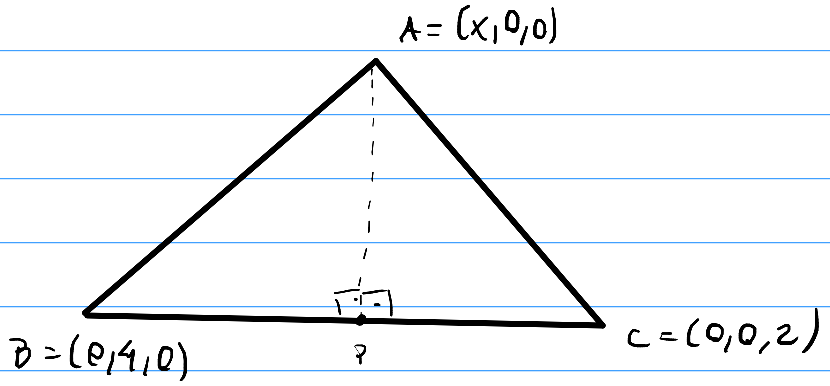
$$\vec{AP} \perp \vec{BC} \Rightarrow (1+\alpha).1 + (2-6\alpha)(-6) + (-3+5\alpha).5 = 0$$

$$1+\alpha-12+36\alpha-15+25\alpha = 0$$
$$62\alpha = 26$$
$$\boxed{\alpha = \frac{13}{31}}.$$

$$|\vec{AP}| = \sqrt{\frac{44^2}{31^2}+\frac{16^2}{31^2}+\frac{28^2}{31^2}} = \frac{\sqrt{2976}}{31} = \frac{\sqrt{31.2^5.3}}{31} = \frac{4\sqrt{2.31.3}}{31}$$

$$\text{Área}: \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{62}\cdot 4\sqrt{2\cdot 31\cdot 3}}{31} = \frac{4\cdot\cancel{31}\cdot\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{31}\cdot\cancel{2}} = \boxed{4\sqrt{3}}\,.$$

23) Calcule x para que o triângulo ABC de vértices $A=(x,\ 0,\ 0)$, $B=(0,\ 4,\ 0)$ e $C=(0,\ 0,\ 2)$ tenha área 11.



$$\vec{BC}=(0,-4,2) \Rightarrow \quad |\vec{BC}|=2\sqrt{5}$$

reta $\vec{BC}$:

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = -4\alpha \\ z = 2+2\alpha \end{cases} \quad ; \quad P=(0,-4\alpha,2+2\alpha)$$

$$\vec{PA}=(x,4\alpha,-2-2\alpha) \quad ; \quad \vec{PA} \perp \vec{BC}$$

$$\therefore \quad x\cdot 0 + (-4)\cdot 4\alpha + (-2-2\alpha)\cdot 2 = 0$$

$$-16\alpha - 4 - 4\alpha = 0$$

$$\boxed{\alpha = -1/5}$$

$$|\vec{PA}| = \sqrt{x^2+\frac{16}{25}+\frac{64}{25}} = \sqrt{x^2+16/5}$$

$$11 = \frac{\sqrt{x^2+\frac{16}{5}}\cdot\sqrt{5}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}} \qquad 121 = 5x^2+16.$$

$$5x^2 = 105$$

$$\boxed{x=\pm\sqrt{21}}$$

21) Calcule o volume do tetraedro cujos vértices são $(2, 2, 3)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 3, 2)$ e $(4, 1, 1)$.

Faça $A=(2,2,3)$, $B=(1,2,1)$, $C=(0,3,2)$, $D=(4,1,1)$

$\vec{AB} = (-1,0,-2)$
$\vec{AC} = (-2,1,-1)$
$\vec{AD} = (2,-1,-2)$

$$\text{Volume} = \frac{1}{6} \left|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right| = 2 + 0 - \cancel{4} + \cancel{4} + 1 - 0 = 3$$

$$\boxed{V = 1/2}$$

22) Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $u=(3, 4, 6)$, $v=(24, 32, 50)$ e $w=(7, 9, 13)$.

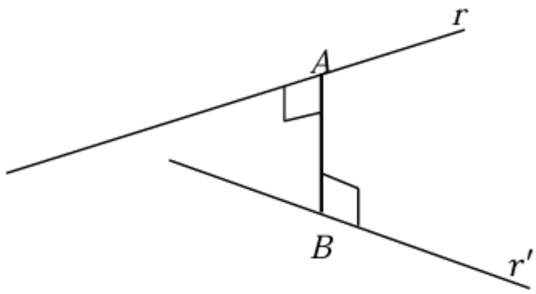
$$\text{Volume} = \left|[u,v,w]\right| = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 6 & 3 & 4 \\ 24 & 32 & 50 & 24 & 32 \\ 7 & 9 & 13 & 7 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{l} 1248 + 1400 + 1296 \\ = -1344 - 1350 - 1248 \\ = \boxed{2} \end{array}$$

24) Considere as retas reversas:

$r = \{(-3 + 2t, 2, 1 - t); t \in \mathbb{R}\}$ e $r' = \{(-1 + s, 2 - s, -3); s \in \mathbb{R}\}$

Sejam $A \in r$ e $B \in r'$ tais que AB seja perpendicular a r e a r'.



a) Determine os pontos A e B.

b) Determine a distância entre as retas r e r'.

a) $\left.\begin{array}{l} A = (-3+2t, 2, 1-t) \\ B = (-1+s, 2-s, -3) \end{array}\right\} \vec{AB} = (s-2t+2, -s, t-4)$

$\vec{AB} \perp (2, 0, -1)$

$\vec{AB} \perp (1, -1, 0)$

$\therefore \begin{cases} (s-2t+2) \cdot 2 + 0 \cdot (-s) + (-1)(t-4) = 0 \\ (s-2t+2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-s) + 0 \cdot (t-4) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2s - 4t + 4 - t + 4 = 0 \\ s - 2t + 2 + s = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2s - 5t + 8 = 0 \\ 2s - 2t + 2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2s - 5t + 8 = 0 \\ -2s + 2t - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow -3t + 6 = 0$

$\boxed{t = 2.}$

$\boxed{s = 1}$

$\boxed{\therefore A = (1, 2, -1) \text{ e } B = (0, 1, -3)}$

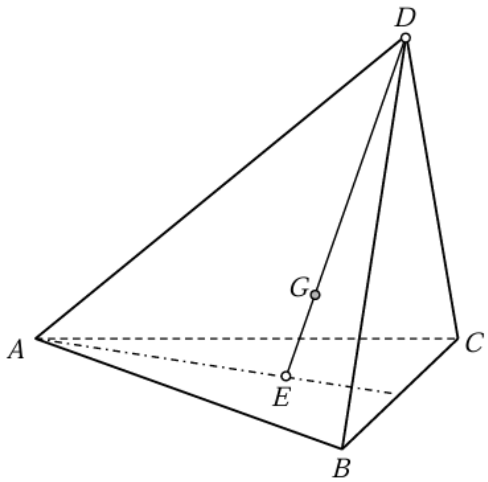
b) A distância entre r e r' é a distância entre A e B:

$$d_{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}\ u$$

25) No espaço com origem, o baricentro do tetraedro $ABCD$ é o ponto G definido por

$$G = \frac{A+B+C+D}{4}.$$

Mostre que G está no segmento que une um vértice, ao baricentro da face oposta.
Mostre que a distância de G a um vértice é o triplo da sua distância ao baricentro da face oposta.



$$G = \frac{A+B+C+D}{4} \qquad \boxed{G = \frac{3E+D}{4}}$$

$$E = \frac{A+B+C}{3}.$$

Vamos ver se $\vec{DG} = \alpha \cdot \vec{DE}$. $(\alpha \in \mathbb{R})$.

$$\vec{DG} = \frac{3E+D}{4} - D = \boxed{\frac{3}{4}(E-D).}$$

$$\vec{DE} = \boxed{E-D}. \quad \therefore \alpha = 3/4$$

Portanto, D, G e E são colineares.
Além disso, $\overline{DG} = \frac{3}{4} \cdot \overline{DE}$ e $\overline{GE} = \frac{1}{4} \overline{DE}$

$$\boxed{\therefore \overline{DG} = 3\,\overline{GE}}$$