INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

$\int_a^b f(x)\,dx$ foi definida para funções limitadas em $[a,b]$ (ou (a,b)) pelo teorema de Lebegue)

- Du Bois Raymond: $f \geq 0$ em $[a,b]$ e f contínua.

$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ em quase todo o intervalo $[a,b]$.

Faça $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$. $\int_{-\infty}^{b} f(x) = \boxed{\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$

Do mesmo jeito: $\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$

E: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx\right]}$

f contínua em $[a,b]$

Ex: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,dx$

$\displaystyle = \lim_{b\to\infty} \left(-b^{-1} - (-1)\right) = \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) \boxed{=1}_{\#}$

$1/x^2$ é contínua (e positiva) no intervalo $[1,b]$.

Ex: $\displaystyle\int_0^{b} \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow f = \frac{1}{x^2}$ não é limitada em $[0,b]$

pois $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$

Mas $\exists \displaystyle\int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow f(x)$ contínua em $[\varepsilon, b]$.

$\therefore \displaystyle\int_0^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{b} + \frac{1}{\varepsilon} = \infty$

$\boxed{\text{Divergente}}_{\#}$.

$\Rightarrow f(x)$ não limitada numa certa vizinhança de um centro x_0

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$$

$x_0 \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ é imprópria

Se x_0 é interior a $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx$

$$\rightarrow \int_a^{x_0} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Ex: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{x}}$ não está definida em $x = 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = \boxed{2}_{\text{c}}.$$

Ex: $\int_0^{\pi} tg\,x\,dx \Rightarrow$ imprópria (problema no $\pi/2$)

$\Rightarrow \int_0^{\pi} tg\,x\,dx = \int_0^{\pi/2} tg\,x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} tg\,x\,dx.$

Ex: $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & , x \leq 0 \\ x & , 0 < x \leq 2 \\ 1-x & , x > 2 \end{cases}$

Calcule $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$

. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$; . $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$; . $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -1$

. $a \neq 0 \wedge a \neq 2 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$

f(x) limitada (conjunto de descontinuidades é finito, logo f é integrável pelo Teorema de Lebegue).

Logo, $\int_{-2}^{5} f(x)dx = \int_{-2}^{0} (x^2-1)\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx + \int_{2}^{5} (1-x)\,dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{2}^{5} \boxed{= -\frac{29}{6}}$ //.

<u>Exercícios</u>:

① Área de D: D é a região compreendida entre os gráficos $y = x^5 + x^3 + x^2$ e $y = x^5 + 2x^2$ entre $-1 \leq x \leq 2$

$D = \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)|\,dx = \int_{-1}^{2} |x^3 - x^2|\,dx$

Estudo do sinal $x^3 - x^2$: (TVI)

$x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

$\Rightarrow x^3 - x^2 > 0 \quad (x > 1)$

$\Rightarrow x^3 - x^2 < 0 \quad (x < 1)$

$D = -\int_{-1}^{1} (x^3 - x^2)\,dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x^2)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1}^{2} - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) - \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)\right]$

$4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 5 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{25}{12}}$ //.

2 $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

a) Domínio f
b) Intervalos f crescente e decrescente
c) Extremos locais
d) Concavidade (intervalos)
e) Pontos de inflexão
f) Esboço do gráfico.

a) Dom: $\mathbb{R} - \{1\}$
b) $f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} \Rightarrow f' = 0 \Rightarrow x = 2$
$\nexists f'(1)$ e $\nexists f(x)$

f crescente: $(2, \infty)$
f decrescente: $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$.

c) Extremos locais $f' = 0$ ou $\nexists f'$
No entanto $\nexists f(1)$

Único candidato: $x = 2$ (mínimo local) ($f' < 0 \rightarrow f' > 0$)

d) Sinal de f'': $f'' = \dfrac{e^x(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}$

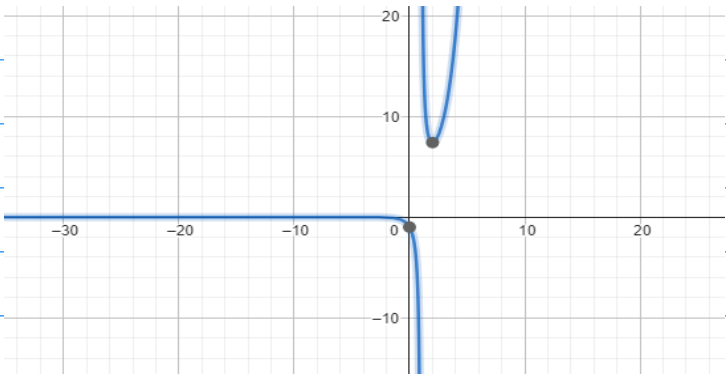
Não há raízes. (x^2-4x+5 toda >0).

Sinal de f'': $f''>0$ $(x>1)$
$f''<0$ $(x<1)$.

Para cima $(1,\infty)$
Para baixo $(-\infty,1)$

e) Não há ponto de inflexão ($x=1$ não está no domínio de f)

f)



Estudar sinal de f, f', f''
Pontos de inflexão
concavidade ; Crescente ; Decrescente
Assíntotas (limites)
Raízes
Máximos e mínimos