Relembrando os conceitos:

MATRIZ ADJACÊNCIA: $(a_{ij})_{n \times n}$ (n é o número de vértices) em que:

I) CASO SIMPLES

$$a_{ij} \begin{cases} 1, & \text{se existe aresta entre } v_i \text{ e } v_j \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

II) CASO NÃO SIMPLES

a_{ij} é a quantidade de arestas entre v_i e v_j (cada laço conta 2 vezes)

III) CASO DIRIGIDO

a_{ij} é a quantidade de arestas dirigidas da forma (v_i, v_j)

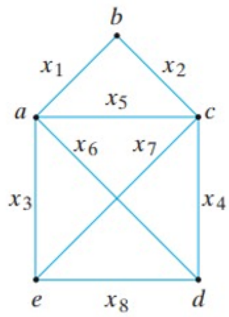
Obs: A matriz de adjacência é simétrica para todo grafo não dirigido

MATRIZ INCIDÊNCIA: $(a_{ij})_{m \times n}$, em que n é o número de arestas e m o número de vértices.

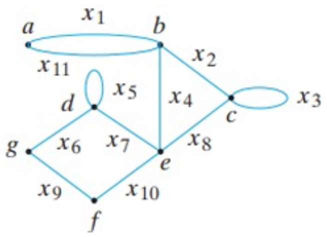
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } j \text{ é incidente no vértice } i \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

Exercício 1 Nos itens abaixo, exiba a *matriz de adjacência* de cada grafo.

(a)

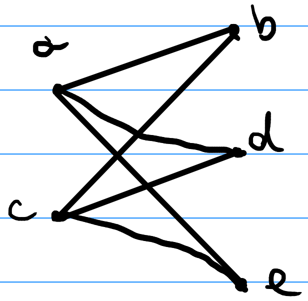


(b)



(c) O grafo bipartido completo $K_{2,3}$.

c)



a)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b)

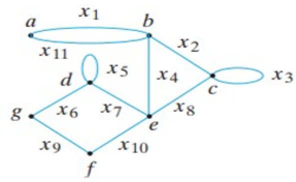
$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

c)

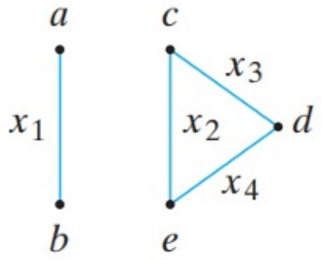
$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exercício 2 Nos itens a seguir, exiba a *matriz de incidência* de cada grafo.

(a) O grafo do Exercício 1(b).



(b)



a)

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Exercício 3 Nos itens a seguir, exiba o grafo representado por cada matriz de adjacência.

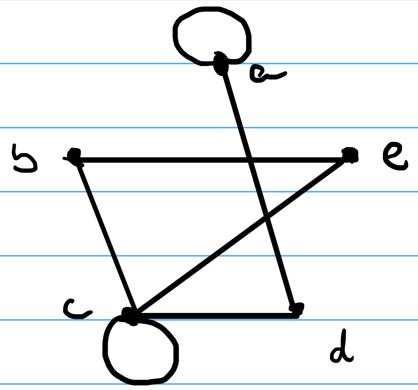
(a)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

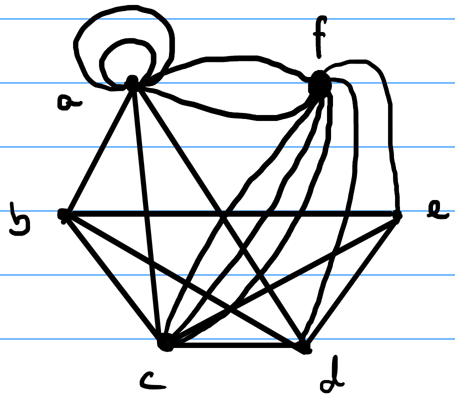
(b)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

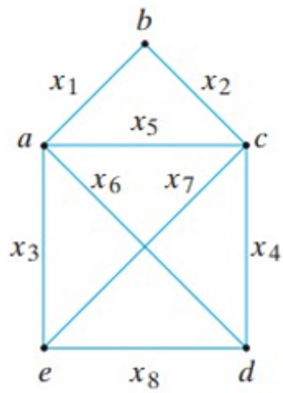
a)



b)



Exercício 4 Seja A a matriz de adjacência do Exercício 1(a). Qual é a entrada na linha a, coluna d de A^5?



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 17 & 33 & 26 & 26 \\ 17 & 14 & 17 & 18 & 18 \\ 33 & 17 & 34 & 26 & 26 \\ 26 & 18 & 26 & 25 & 24 \\ 26 & 18 & 26 & 24 & 25 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 34 & 17 & 33 & 26 & 26 \\ 17 & 14 & 17 & 18 & 18 \\ 33 & 17 & 34 & 26 & 26 \\ 26 & 18 & 26 & 25 & 24 \\ 26 & 18 & 26 & 24 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102 & 67 & 103 & 93 & 93 \\ 67 & 34 & 67 & 52 & 52 \\ 103 & 67 & 102 & 93 & 93 \\ 93 & 52 & 93 & 76 & 77 \\ 93 & 52 & 93 & 77 & 76 \end{bmatrix}$$

Linha a, coluna d: 93

Exercício 5 Seja G um grafo simples e A sua matriz de adjacência. Mostre o seguinte:

(a) O traço de A^2 é duas vezes o número de arestas de G.

(b) o traço de A^3 é seis vezes o número de triângulos (ciclos de tamanho 3) em G.

a) Traço de A^2 é a soma dos números da diagonal de A^2.

Teorema: Seja G grafo simples e A sua matriz de adjacência. Então a entrada $(A^k)_{ij}$ é o número de caminhos de tamanho k entre os vértices i e j (demonstração por indução em k)

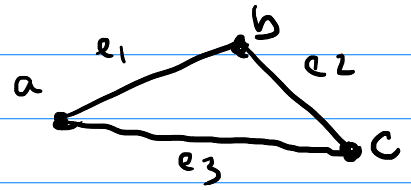
Pelo teorema, a entrada $(A^2)_{ii}$ seria o número de caminhos entre os vértices i e i que têm tamanho 2, o que corresponde ao grau do vértice i. $\delta(i)$

$$\boxed{\text{Teorema: } \sum_{i \in V} \delta(i) = 2|E| \text{ (trivial)}}$$

Temos que $tr(A^2) = \sum_{i=1}^{n} \delta(i)$. Pelo teorema, $\sum_{i=1}^{n} \delta(i) = 2|E|$. Portanto, $tr(A^2) = 2|E|$

b) Sabemos do primeiro teorema que $(A^3)_{ii}$ é o número de caminhos entre os vértices i e i de tamanho 3 (ou seja, ciclos).
Quando fazemos $tr(A^3)$ estaremos contando ciclos além do necessário, pois estaremos contabilizando as permutações das 3 arestas do ciclo.

Considere a estrutura como exemplo:



Quando contabilizamos os ciclos de tamanho 3 dos vértices a, b, c, todos darão 2.

Contudo, estamos contando possíveis permutações de e_1, e_2, e_3.

Portanto, $tr(A^3) = 3! \cdot \Delta$ (Δ = número de ciclos de tamanho 3)

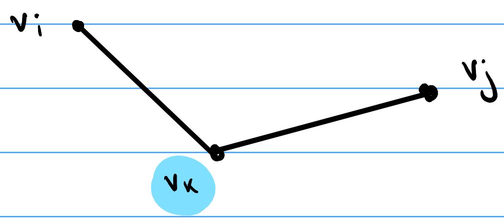
e $tr(A^3) = 6\Delta$.

Exercício 6 Seja G um grafo simples e A sua matriz de adjacência. Seja ainda $b_{ij} = A^2_{i,j}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Mostre que o número de ciclos distintos de tamanho 4 em G é igual a:

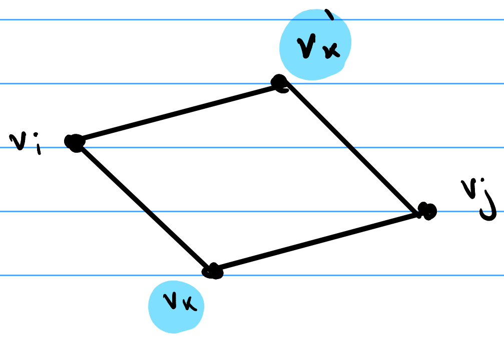
$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\binom{b_{ij}}{2}$$

Se $b_{ij} = A^2_{ij}$, então b_{ij} é o número de caminhos de v_i a v_j de tamanho 2.

Este caminho de v_i a v_j possui um vértice intermediário v_k. Ou seja, possui essa estrutura:



Além disso, para ciclos de tamanho 4, temos que todos os vértices possuem 2 vizinhos, ou seja, poderíamos considerar a seguinte estrutura:



Além disso, b_{ij} pode ser interpretado como o número de vizinhos entre v_i e v_j. Portanto, para cada dupla de vizinhos entre v_i e v_j (v_k e $v_{k'}$, por exemplo) temos um ciclo de tamanho quatro.

Logo, o número de ciclos de v_i a v_j é dado por

$$\sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \binom{b_{ij}}{2}.$$

Agora, perceba que num mesmo ciclo $\{v_i, v_k, v_j, v_{k'}, v_i\}$ poderíamos considerar 4 ciclos idênticos para cada par de vizinhos. Logo, fazendo a correção:

$$\boxed{\frac{1}{4} \cdot \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \binom{b_{ij}}{2}.}$$

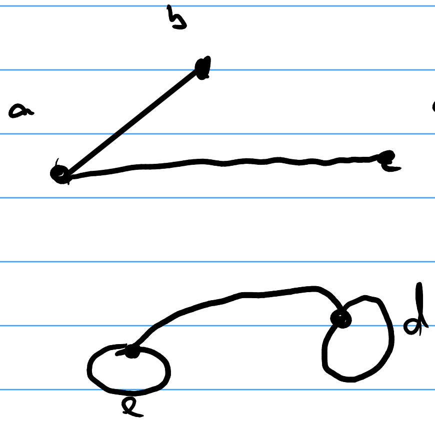
Exercício 7 Suponha que um grafo tem uma matriz de adjacência da forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} & A' \\ \hline A'' & \end{array} \right)$$

onde todas as entradas das submatrizes A' e A'' são 0. Como deve ser esse grafo?

$$A = \begin{array}{cc} n-r \times p & n-r \times n-p \\ \left[\begin{array}{c} K \\ 0 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 0 \\ K' \end{array}\right] \\ r \times p & r \times n-p \end{array} \quad n \times n$$

Tome a matriz $A = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$ como exemplo. O grafo resultante será:



que é desconexo.

Trazendo o exemplo para uma forma geral, temos que as submatrizes K, K' devem ser quadrados, pois A é simétrica e quadrada.

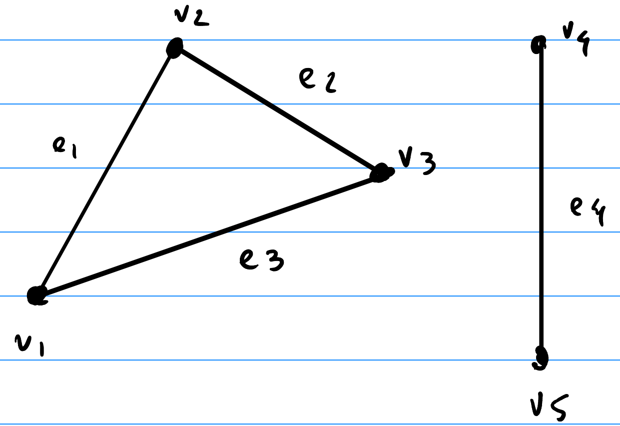
Logo, podemos encarar K e K' como partes do grafo A (não necessariamente conexas)

Então K possui $n-r$ vértices e K' possui r vértices e pelas duas submatrizes de 0's, K e K' não possuem arestas em comum, tornando o grafo original necessariamente desconexo.

Exercício 8 Repita o exercício anterior trocando "adjacência" por "incidência"

Como A é matriz de incidência e temos blocos de 0's, então não existem arestas interligando as "partes" K e K'.
Isso já foi visto em aula e teremos como verdade que o grafo seria desconexo.
Portanto, o grafo também seria desconexo.

Ex:



$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

Exercício 9 Seja A a matriz de adjacência de um grafo G com n vértices. Seja

$$S_n = I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1}$$

Se alguma entrada de S_n for igual a 0, o que podemos dizer sobre o grafo G?

Sabemos que $A^k_{ij} \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \wedge \forall i,j = \{1, \cdots, n\}$.
Portanto, se $S_{n\,ij} = 0$, então $A_{ij} = A^2_{ij} = \cdots = A^{n-1}_{ij} = 0$
Agora repare que $S_{n\,ii} \geq 1$, pois $I_{ii} = 1$., portanto sua diagonal é sempre $\neq 0$.

Como já concluímos, $A_{ij} = A^2_{ij} = \cdots = A^{n-1}_{ij} = 0$, então não existem caminhos de tamanho $1, 2, \cdots, n-1$ entre os vértices v_i e v_j. Portanto, não existe caminho entre v_i e v_j.

- Se não existem caminhos de tamanho $1, 2, \cdots, n-1$ entre os vértices v_i e v_j, então não existe caminho entre v_i e v_j (n é o número de vértices)

O argumento será por indução no número de vértices. Para $n = 1$ é trivial, para $n = 2$ também.

Hipótese: não existem caminhos de tamanho $1, 2, \cdots, n-1$ entre v_i e v_j, então não existe caminho entre v_i e v_j (n vértices).

Verificar: não existem caminhos de tamanho $1, 2, \cdots, n-1, n$ entre v_i e v_j, então não existe caminho entre v_i e v_j (n' vértices).

Se retirarmos um vértice (sem ser v_i ou v_j) então, nesse novo grafo, não existe caminho entre v_i e v_j pela hipótese indutiva. Ao recolocar tal vértice, se existir caminho entre v_i e v_j, contrariará a condição de que não existem caminhos de tamanho $1, 2, \cdots, n-1, n$, o que é um absurdo.

Definição. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e v, w vértices de G. A *distância* entre v e w, $dist(v, w)$, é o comprimento do caminho mais curto de v para w. O diâmetro de G, denotado por $d(G)$, é definido como

$$d(G) = \max_{v,w \in V} dist(v, w)$$

Exercício 10 Seja G um grafo conexo e A a sua matriz de adjacência. Seja ainda d o diâmetro de G. Mostre que se existirem em A^d duas colunas c_i e c_j ortogonais, isto é, tais que $< c_i, c_j >= 0$, então G é um grafo bipartido.

Como $A_{ij} \geq 0$ $\forall i,j = \{1, \dots, n\}$, para ocorrer $\langle c_i, c_j \rangle = 0$, temos que alguma parcela do produto $c_{ik} \cdot c_{jl}$ deve ser 0 para todos os elementos das colunas.

Além disso, sabemos que $A = A^T$, portanto $A^F = (A^F)^T$ $\forall F \in \mathbb{N}$, em particular $A^d = (A^d)^T$.

Da afirmação anterior, o número de caminhos de tamanho d entre i e k é 0 ou entre j e l é 0. Ademais, quando fazemos $A^d \cdot A^d$ e olhamos para A^{2d}_{ij}, percebemos que esse elemento é 0 (como A^d é simétrica e $\langle c_i, c_j \rangle = 0$, então $\langle$linha i de A^d, coluna j de $A^d\rangle = 0$), e não existe caminho de tamanho $2d$ entre v_i e v_j.

Definição (Matriz de adjacência - definição alternativa). A *matriz de adjacência* de um grafo G (dirigido ou não) com n vértices é a matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})$ tal que

$$a_{ij} = \text{quantidade de arestas } \{v_i, v_j\} \;\big(\, (v_i, v_j) \text{ no caso } G \text{ dirigido} \,\big),$$

com a convenção de que **laços contam uma vez.**

Exercício 12 Assumindo a definição acima, prove ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação: *"se A é a matriz do grafo G (dirigido ou não-dirigido, não necessariamente simples), o coeficiente ij da matriz A^n é a quantidade de caminhos (dirigidos) de v_i a v_j"*. (tamanho n).

I) Para grafos não-dirigidos:
Para grafos não-dirigidos, segue que a matriz de adjacência segue os mesmos conformes (exceto os laços), portanto já provamos (a indução é em n).

II) Para grafos dirigidos:
Aqui vamos seguir com o argumento de indução em n.
Caso base: $n=1 \Rightarrow A^n = A$. Portanto, a_{ij} é quantidade de arestas dirigidas (v_i, v_j) que seria exatamente o número de caminhos dirigidos de v_i a v_j de tamanho 1 (arestas dirigidas)
Hipótese: Suponha verdade que $A^n{}_{ij}$ é a quantidade de caminhos dirigidos de tamanho n de v_i a v_j.
Queremos verificar se a hipótese vale quando observamos A^{n+1}.

Temos que $A^n \cdot A = A^{n+1}$ e $(A^{n+1})_{ij} =$
$= \text{linha}_i(A^n) \cdot \text{coluna}_j(A) =$

$$\begin{bmatrix} a_{i1}^{(n)} & \cdots & a_{im}^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1j}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{mj}^{(1)} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{(n)} \cdot a_{kj}^{(1)} \text{ (elemento } ij \text{ de } A^{n+1}\text{)},$$

Pela hipótese, $a_{ik}^{(n)}$ é o número de caminhos de tamanho n de v_i a v_k e $a_{kj}^{(1)}$ é o número de v_k a v_j.

Se não existe $\{v_k, v_j\}$, então $a_{ik} \cdot a_{kj} = 0$.
Mas, se existe $\{v_k, v_j\}$, então $a_{ik} \cdot a_{kj}$ é o número de caminhos de i a j de tamanho $n+1$, o que cumpre a hipótese.