Exercício 1 - Extensão Contínua nos Extremos

Seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável, com derivada limitada. Mostre que f pode ser extendida a uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Conclua o mesmo resultado para a função $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, onde $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. limitada

Exercício 2 - Equações Funcionais

Ache, para cada caso abaixo, todas as funções f deriváveis tais que

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(xy) = f(x) + f(y)$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $e^{-2x}f'(x) = 2e^{-2x}f(x) + 1$

Caiu em prova

(c) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $\int_1^{x^m y^n} f(t)dt = m\int_1^x f(t)dt + n\int_1^y f(t)dt, \forall m, n \in \mathbb{N}$

(d) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$

Exercício 3 - Construção de Derivadas

Enuncie o Teorema Fundamental do Cálculo.

Use-o para construir funções deriváveis cujas derivadas não sejam deriváveis. Construa também funções deriváveis cujas derivadas não sejam contínuas.

Comentário: Você pode supor que as derivadas sejam integráveis.

Exercício 4 - Integral por Partição

Severo, conhecido como um ser vero, isto é, uma pessoa verossímel, pois tinha muito cuidado em não omitir detalhes ou afirmar resultados não-verdadeiros em suas soluções de Análise, aprendeu a definição e propriedades básicas de integrais de funções em uma variável. Em um dado momento, ele se deparou com a seguinte integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{1 + t} dt$$

a qual ele deveria mostrar que era > 0. Seus amigos, Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-vanato, Cardineiro, Borges, Rodrigues, Benzo, Daviros e Beatriza recoreram a sua você para ajudá-lo.

Exercício 5 - Comportamento Integral

Ao aprender como ocorre o crescimento, decrescimento e pontos críticos de funções deriváveis, Jeã e Luka, estavam estudando uma certa função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Jeã descobriu que existia um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f(x) < 0, \forall x \in [a, c)$ e Luka discobriu que $f(x) > 0, \forall x \in (c, b]$ para o mesmo ponto c. O problema é que eles queriam informações a respeito da função integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Ajude-os fornecendo o comportamento da função em $[a, c)$, em $(c, b]$ e, consequentemente, no ponto c.

Comentário: Acho que você já deve saber, mas Jeã e Luka são amigos de Robertinha, Nati, Gustavo, Murilo, Eulerverton, Matosmático, Π-vanato, Cardineiro, Borges, Rodrigues, Benzo, Daviros, Beatriz e Severo.

1 Como f possui derivada limitada, então pela relação de Lipschitz, sabemos que $\exists \lambda > 0$ tal que: $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x-y|$.

Portanto, como $|x-y| \leq (b-a)$, temos que f é limitada, já que $|f(x) - f(y)| \leq \lambda (b-a)$ ($b-a$ fixo).

Agora, tome sequência $(x_n) \in [a,b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ | $x_n \to b$. Portanto, temos que, como a sequência $f(x_n)$ é limitada (f é limitada), pelo Teorema de Bolzano Wierstrass, existe subsequência $f(x_{n_k}) = f(y_n)$ convergente para algum $L \in \mathbb{R}$.

Assim, tomando outra sequência $z_n \in [a,b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ | $z_n \to b$, temos que $|y_n - z_n| \to 0$. Como $|f(y_n) - f(z_n)| \leq \lambda |y_n - z_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $|f(y_n) - f(z_n)| \to 0$ e $f(z_n) \to L$.

Portanto, basta estender f para F da seguinte forma:

$$F(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b) \quad e \quad F(b) = L$$

já que $\lim_{x \to b} F(x) = F(b) = L$, uma vez

que dada qualquer sequência $x_n \to b \in [a,b)$

$f(x_n) \to L$.

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt \quad , \quad g:[a,b) \to \mathbb{R} \text{ contínua limitada}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:
$G'(x) = g(x) \ \forall x \in [a,b)$. Assim, $G'(x)$ é limitada e contínua. Logo, o resultado continua verdadeiro.

② Se f é derivável, então ela é contínua.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(xy) = f(x) + f(y)$

$f(0.m) = f(0) + f(m) \Rightarrow f(0) = f(0) + f(m) \Rightarrow f(m) = 0$
$\forall m \in \mathbb{R}$. Assim, uma possibilidade é $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Supondo que f não seja congruente a 0, então, para essa função, $f(0)$ não está definida.
Além disso, se $x = -\alpha$ $(\alpha > 0)$, então:
$f(x^2) = 2f(x) \Rightarrow f(\alpha^2) = 2f(-\alpha)$, mas: $f(\alpha^2) = 2f(\alpha)$.
Assim $f(\alpha) = f(-\alpha)$, mas $f(-\alpha) = f(-1) + f(\alpha)$. Logo,
$f(\alpha) = f(-1) + f(\alpha)$ e $f(-1) = 0$. Estendendo o resultado, teríamos que f seria congruente a 0, logo $f(x)$, com $x < 0$ não está definida.

Portanto, para f não congruente a $\mathbb{Q}$, $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Temos que $f(1) = f(m \cdot 1/m) = f(m) + f(1/m)$. Além disso, $f(1\cdot 1) = 2f(1)$ e $f(1) = 0$. Assim, $f(1/m) = -f(m)$

Considerando $m \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que
$f(m^n) = f(m + \dots + m) = f(m) + \dots + f(m) = n f(m)$
$f(m^{-n}) = f((1/m)^n) = n \cdot f(1/m) = n \cdot f(m^{-1}) = -n \cdot f(m)$
(estendido para $\mathbb{Z}$)
$f(m) = f(m^{1/n} \cdot \dots \cdot m^{1/n}) = n \cdot f(m^{1/n})$ e $f(m^{1/n}) = 1/n\, f(m)$
(estendido para $\mathbb{Q}$)

Estendendo o resultado para $\mathbb{Q}$: $f(m^{p/q}) = p/q\, f(m)$ $(p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0)$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\exists\, r_n \in \mathbb{Q} \mid r_n \to \alpha$, onde $f(m^{r_n}) \to f(m^{\alpha})$.
Como f é contínua, então como $f(m^{r_n}) = r_n f(m)$ e $r_n f(m) \to \alpha f(m)$ e $f(m^{\alpha}) = \alpha f(m)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
(estendido para $\mathbb{R}$)

Portanto, $f(x^y) = y f(x)$, $x \in (0,\infty)$ e $y \in \mathbb{R}$.

Logo $f(x) = \alpha \ln x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad e^{-2x} f'(x) = 2e^{-2x} f(x) + 1$

$e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) = 1 \Rightarrow (e^{-2x} \cdot f(x))' = 1$.

↳ regra do produto

$\therefore \int (e^{-2x} f(x))' \, dx = \int dx$. Pelo teorema Fundamental do Cálculo:

$$e^{-2x} f(x) = x + C$$

$$f(x) = x e^{2x} + e^{2x} \cdot C \quad (C \in \mathbb{R} \text{ constante})$$

c) $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$ e $\int_1^{x^m y^n} f(t)\,dt = m \int_1^x f(t)\,dt + n \int_1^y f(t)\,dt$)

$\forall m, n \in \mathbb{N}$

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x) \quad (\text{TFC})$$

$$F(y) = \int_1^y f(t)\,dt \Rightarrow F'(y) = f(y) \quad (\text{TFC})$$

$$F(x^m y^n) = \int_1^{x^m y^n} f(t)\,dt \Rightarrow F'(x^m y^n) = f(x^m y^n) \quad (\text{TFC})$$

$$\therefore F(x^m y^n) = m F(x) + n F(y)$$

Do item a), sabemos que $f(xy) = f(x) + f(y)$, então $f(x^m) = m f(x)$ e $f(x) = \alpha \ln x$.

Assim $F(x) = \alpha \ln x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, constante)

Logo, pelo teorema fundamental do cálculo:

$F'(x) = f(x) = \alpha / x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$)

d) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ e $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$

$$x\,f(x) - x = \int_1^x f(t)\,dt \quad (x \in [1, \infty))$$

$$x(f(x) - 1) = \int_1^x f(t)\,dt$$

$(f(x) - 1) + x(f'(x)) = f(x)$ (TFC e regra do produto)

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \in [1, \infty))$$

$\displaystyle\int f'(x) = \int \frac{1}{x}\,dx$ e $f(x) = \ln x + C$ (TFC)

Contudo, $f(1) = 1 + \dfrac{1}{1}\cancel{\displaystyle\int_1^1 f(t)\,dt}^{\,0} = 1$ e $f(1) = \ln 1 + C = C$

assim, $C = 1$ e $\boxed{f(x) = \ln x + 1}$ //.

---

③ Teorema Fundamental do Cálculo:

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $F : I \to \mathbb{R}$. As afirmações a respeito de F são equivalentes:

(1) $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$ (F é uma integral indefinida de f para algum a em I)

(2) $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$ (F é primitiva de f).

I) Função derivável em que a derivada não é derivável:

Considere F, $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = |x|$ e $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$. Pelo TFC, $\exists F'(x)$ e $F'(x) = f(x)$. Contudo, $\nexists (F'(x))'$, já que $\nexists (|x|)'$ em $x = 0$

II) Função derivável em que a derivada não é contínua:

Considere G, $g:[-1,1] \to \mathbb{R}$, em que $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

e $G(x) = \int_{-1}^{x} g(t)\,dt$. Pelo TFC, $\exists G'(x)$ e $G'(x) = g(x)$. Contudo, G' não é contínua em $0 = x$.

---

(4) $$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t}\,dt$$

Sabemos que, $s(P,f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(P,f)$ para toda partição P do domínio de f. (s e S são as somas inferior e superior de f, respectivamente)

Considere a seguinte partição:

$$P = \{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4, 2\pi\}.$$

$\Rightarrow [0, \pi/4]; [\pi/4, \pi/2]; [\pi/2, 3\pi/4]; [3\pi/4, \pi]; [\pi, 5\pi/4]; [5\pi/4, 3\pi/2];$

$[3\pi/2, 7\pi/4]; [7\pi/4, 2\pi]$.

Assim, $s(P, f) = 0 + \frac{\sqrt{2}/2}{1+\pi/4} + \frac{1}{1+\pi/2} + \frac{\sqrt{2}/2}{1+3\pi/4} + 0 - \frac{\sqrt{2}/2}{1+5\pi/4} - \frac{1}{1+3\pi/2} - \frac{\sqrt{2}/2}{1+7\pi/4} - 0$

> 0.

Logo, $\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t}\, dt > 0}$ ∎.

∎

(5) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, sabemos que $F'(x) = f(x)$.

Assim, para $x \in [a, c)$, $F'(x) < 0$ e para $x \in (c, b]$, $F'(x) > 0$. Portanto, pelo estudo dos sinais da derivada de F, no intervalo $[a, c)$ F é estritamente decrescente e no intervalo $(c, b]$ F é estritamente crescente. Logo c é ponto de mínimo.