MATEMÁTICA DISCRETA

7/11/24

FLUXOS

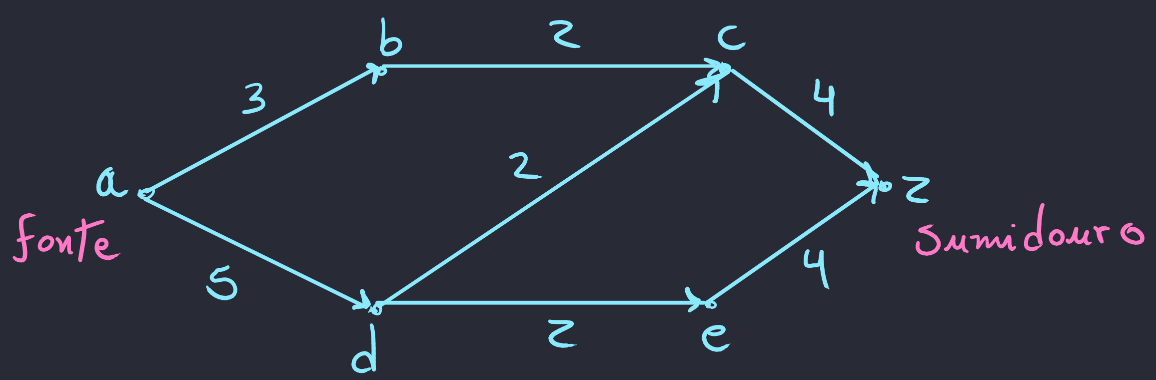
REDES (DE TRANSPORTE)

- GRAFO DIRECIONADO SIMPLES, COM PESOS NAS ARESTAS QUE SATISFAZ:

(a) UM VÉRTICE DESIGNADO FONTE (SEM ARESTAS DE ENTRADA)

(b) UM VÉRTICE DESIGNADO SUMIDOURO (SEM ARESTAS DE SAÍDA)

(c) O PESO DA ARESTA (i,j) É CHAMADO DE CAPACIDADE $\rightarrow C_{ij} \geq 0$



FLUXO NUMA REDE

- SEJA G UMA REDE DE TRANSPORTE. SEJA C_{ij} A CAPACIDADE DA ARESTA DIRECIONADA (i,j). UM FLUXO F EM G ATRIBUI UM VALOR $F_{ij} > 0$ A CADA ARESTA (i,j) T.Q:

a) $F_{ij} \leq C_{ij}$

b) $\forall$ VÉRTICE $j \neq$ FONTE E SUMIDOURO

$$\sum_i F_{ij} = \sum_i F_{ji}$$

TEOREMA

(Conservação de Fluxo) Dado um fluxo F, o fluxo para fora da fonte a é igual ao fluxo para dentro do sumidouro z

DEM

Seja V o conjunto de vértices

$$\sum_{j\in V}\sum_{i\in V} F_{ij} = \sum_{i\in V}\sum_{j\in V} F_{ji}$$

Uma vez que cada soma dupla é

$$\sum_{e\in E} F_e$$

onde E é o conjunto de arestas

$$0 = \sum_{j\in V}\left(\sum_{i\in V} F_{ij} - \sum_{i\in V} F_{ji}\right)$$

$$0 = \left(\cancelto{0}{\sum_{i\in V} F_{ia}} - \sum_{i\in V} F_{ai}\right) + \left(\sum_{i\in V} F_{iz} - \cancelto{0}{\sum_{i\in V} F_{zi}}\right) + \cancelto{0}{\sum_{j\neq a,z\in V}\left(\sum_{i\in V} F_{ij} - \sum_{i\in V} F_{ji}\right)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in V} F_{ai} = \sum_{i\in V} F_{iz}$$

DEFINIÇÃO

$\sum_{i\in V} F_{ai} = \sum_{i\in V} F_{iz}$ é chamado de "valor do fluxo"

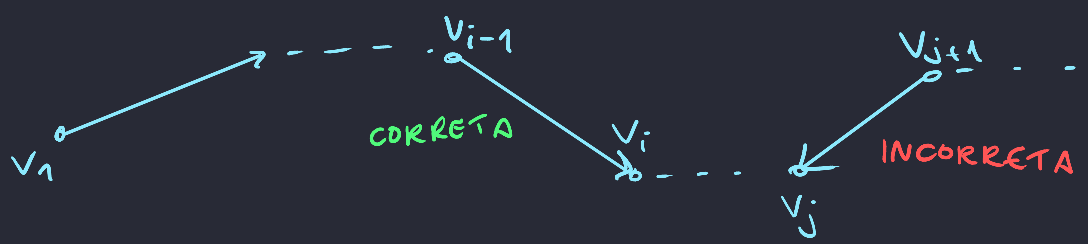
PROBLEMA: ACHAR O FLUXO MÁXIMO DE UMA REDE DE TRANSPORTE

DEFINIÇÃO

SUPONHA QUE G NÃO É DIRIGIDO, E SEJA

$$P = \{v_0 = a, v_1, \ldots, v_n = z\}$$

UM CAMINHO DE a PARA z NESTE GRAFO NÃO DIRECIONADO. SEJA e UMA ARESTA EM G DIRECIONADO E $e \in P$, SE $e = \{v_i, v_{i+1}\}$, ELA É CORRETAMENTE ORIENTADA. DO CONTRÁRIO, ELA É INCORRETAMENTE ORIENTADA (EM RELAÇÃO A P)



TEOREMA

SEJA G UMA REDE, F UM FLUXO EM G E P UM CAMINHO DE a A z EM G QUE SATISFAZ:

a) PARA CADA ARESTA (i,j) CORRETAMENTE ORIENTADA, VALE

$$F_{ij} \leq C_{ij}$$

b) PARA CADA ARESTA (i,j) INCORRETAMENTE ORIENTADA, VALE

$$0 < F_{ij}$$

SEJA $\Delta = \min X$ ONDE $X = C_{ij} - F_{ij}$ PARA ARESTAS C.O EM P E F_{ij} PARA ARESTAS I.O EM P, DEFINA:

$$F^*_{ij} \begin{cases} F_{ij} & \text{SE } (i,j) \notin P \\ F_{ij} + \Delta & \text{SE } (i,j) \text{ É C.O EM } P \\ F_{ij} - \Delta & \text{SE } (i,j) \text{ É I.O EM } P \end{cases}$$

• F^* É UM FLUXO DE VALOR MAIOR QUE F

- IDEIA DO ALGORITMO DE FLUXO MÁXIMO:

→ SE NÃO EXISTE CAMINHO QUE SATISFAZ AS CONDIÇÕES, ENTÃO O FLUXO É MÁXIMO

- ESBOÇO:

* INICIA COM UM FLUXO

* ACHA UM FLUXO QUE SATISFAZ O TEOREMA, SE NENHUM EXISTIR, O FLUXO ATUAL É MÁXIMO

* SE EXISTIR, AUMENTE O ATUAL EM Δ UNIDADES

Corte

- Em uma rede de transporte G onde a é a fonte e z o sumidouro, um corte $(P, \overline{P})$ em G consiste em um subconjunto P de vértices e seu complementar $\overline{P}$ que satisfaz $a \in P$ e $z \in \overline{P}$.

- A capacidade de um corte $(P, \overline{P})$ é

$$C(P, \overline{P}) = \sum_{i \in P} \sum_{j \in \overline{P}} C_{ij}$$

TEOREMA

Seja F um fluxo em G e seja $(P, \overline{P})$ um corte em G. Então a capacidade de $(P, \overline{P})$ é tal que

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in \overline{P}} C_{ij} \geq \sum_{i} F_{ai}$$

DEM

$$\sum_{i} F_{ai} = \sum_{j \in P} \sum_{i} F_{ji} - \sum_{j \in P} \sum_{i} F_{ij}$$

$$= \sum_{j \in P} \sum_{i \in P} F_{ji} + \sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} F_{ji} - \sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} F_{ij} - \sum_{j \in P} \sum_{i \in P} F_{ij}$$

$$= \sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} F_{ji} - \sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} F_{ij} \leq \sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} F_{ji} \leq \sum_{j \in P} \sum_{i \in \overline{P}} C_{ji}$$

TEOREMA

SEJA F UM FLUXO EM G E $(P, \overline{P})$ UM CORTE EM G, SE A DESIGUALDADE É SATISFEITA EM

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in \overline{P}} C_{ij} \geq \sum_{i} F_{aj}$$

ENTÃO O FLUXO É MÁXIMO E O CORTE É MÍNIMO. ALÉM DISSO, A IGUALDADE OCORRE $\Leftrightarrow$:

a) $F_{ij} = C_{ij} \quad \forall i \in P \wedge \forall j \in \overline{P}$

b) $F_{ij} = 0 \quad \forall i \in \overline{P} \wedge \forall j \in P$