QUESTÕES:

1) Seja $K \in \mathbb{N}$ fixo, ache os pares inteiros (x,y) | $K^2x + y(K+1) = 1$.

2) a) Ache o algarismo das unidades de 4^{2024}

b) Ache os dois últimos algarismos de 9^{9^9}

3) a) Sejam $p-2, p, p+2$ todos primos. Encontre todos os possíveis valores de p para que isso ocorra.

b) Seja n um inteiro positivo composto. Prove que existe um primo p que divida n e satisfaça $p \leq \sqrt{n}$.

c) Encontre o menor inteiro positivo que possua exatamente 91 divisores.

4) a) Fatore $x^{2024} + x + 1$

b) Sejam z e w raízes da unidade. Prove que $\bar{z}$ (conjugado) e $z \cdot w$ também são raízes da unidade

5) a) Calcule $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{3k+1}$ em função de n.

b) Calcule $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ em função de n.

1) $k^2x + (k+1)y = 1$ Congruência mod k

$k^2x + ky + y = 1$

$y \equiv 1 \pmod{k} \Rightarrow \boxed{y = 1 - k\alpha \quad , \alpha \in \mathbb{Z}}$

$\Rightarrow k^2x + (k+1)(1-k\alpha) = 1$

$kx + 1 - k\alpha = 0$

$k(x-\alpha) = \alpha - 1$

$\boxed{\alpha - 1 = k\beta \, , \beta \in \mathbb{Z}}$

$\boxed{\begin{matrix} x = \beta(k+1)+1 \\ y = 1 - k^2\beta - k \end{matrix}} \, , \beta \in \mathbb{Z}.$

Outro jeito: forma geral das eq. diofantinas

$mdc(a,b) = 1 \Rightarrow ax + by = 1.$

Caso específico: $ax_0 + by_0 = 1$ (x_0, y_0) é um par solução qualquer.

Logo, as soluções são $(x,y) = (x_0 + bt, y_0 - at), t \in \mathbb{Z}.$

Outro jeito: Algoritmo de Euclides

$mdc(k^2, k+1) = mdc(k^2 - (k+1)(k-1), k+1) = mdc(1, k+1)$
$= k+1$ (teorema útil).

② a) unidades de 4^{2024}

$4^{2024} \equiv ? \pmod{10}$

4 elevado a par é congruente a 6 mod 10

$\left\{ \begin{array}{ll} 4^1 \equiv 4 & \pmod{10} \\ 4^2 \equiv 6 & \text{"} \quad \text{"} \\ 4^3 \equiv 4 & \text{"} \quad \text{"} \\ 4^4 \equiv 6 & \text{"} \quad \text{"} \end{array} \right.$

Alg. das unidades: $\boxed{6}$

b) Dezenas de 9^{9^9}

$9^{9^9} \equiv ? \pmod{100}$.

Se $\text{mdc}(a,10) = 1$, então $a^{40} \equiv 1 \pmod{100}$.
(função phi de euler) ($a^4 \equiv 1 \pmod{10}$ e $a^{400} \equiv 1 \pmod{1000}$)

$a^n = a^{40q+r} = (a^{40})^q \cdot a^r \equiv a^r \pmod{100}$.

Achando agora $9^9 \equiv x \pmod{40}$
$9^9 = (81)^4 \cdot 9 \equiv 1^4 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{40}$

$\therefore 9^{9^9} \equiv 9^9 \pmod{100}$
$9^9 \equiv (9^3)^3 \equiv (729)^3 \equiv 29^3 \equiv 29^2 \cdot 29 \equiv 41 \cdot 29 \equiv 89 \pmod{100}$

Dezenas: $\boxed{89}$

Outro jeito: ver o padrão

③ a) $p, p+2, p-2$ são primos. Achar todos os valores de p.

Eles estão em PA, logo, um deles é múltiplo de 3

- $p \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p=3 \Rightarrow p-2$ não é primo
- $p \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow p+2 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 0$. $p+2=3 \Rightarrow p$ não é primo
- $p \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow p-2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow \boxed{p=5}$

É único

Outro jeito:

$\Rightarrow$ Primos maiores que 5 são da forma $6k+5$ ou $6k+1$.

b) n composto $\Rightarrow \exists p;\ p \mid n$ e $p \leq \sqrt{n}$

$\exists\ 2 \leq d \leq n-1$; $d \mid n$ (d é o menor divisor maior que 1 do n)

Como n/d também é divisor de n e pertence a $[2, n-1]$, então $d \leq \frac{n}{d}$ e $\boxed{d \leq \sqrt{n}.}$

$\Rightarrow$ se d fosse composto, $\exists\ p < d$, p primo, tal que $p \mid d \Rightarrow p \mid n$, $1 < p < d$, o que é um absurdo, já que d é o menor divisor de n.

Outro jeito: TFA e redução por absurdo

Pelo TFA, $\exists\ p_1 \le p_2 \le \dots \le p_k$ primos, tais que $n = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k \Rightarrow k \geq 2$.

$$\therefore n \geq p_1^k \geq p_1^2$$

Logo, $\exists\ p \mid p \le \sqrt{n}$.

c) Menor número que possui exatamente 91 divisores positivos.

Se $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ é a fatoração de n em primos, então n possui $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k+1)$ divisores.

$\therefore (\alpha_1+1)(\alpha_2+)\dots(\alpha_k+1) = 91 = 7 \cdot 13$

$\therefore$ Existem $(\alpha_i+1), \dots (\alpha_k+1) \in \{7, 13, 91\}$.

- $\alpha_1+1 = 91 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow n = p^{90} \Rightarrow 2^{90}$ é o menor
- $(\alpha_1+1) = 7, (\alpha_2+1) = 13 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow n = p^6 \cdot q^{12}$

$n = 3^6 \cdot 2^{12}$

Logo, o menor é $\boxed{3^6 \cdot 2^{12}}$

(4) a) Fatore $x^{2024}+x+1$.

Usando as raízes cúbicas da unidade.
Seja ω raiz de $x^2+x+1=0$
$\therefore \omega^3=1$ e $\omega^2+\omega+1=0$.
$\therefore \omega^{2024}+\omega+1 = \omega^2+\omega+1=0$
$\therefore x^2+x+1 \mid x^{2024}+x+1$. (todas as raízes de x^2+x+1 também são de $x^{2024}+x+1$)

$= x^{2024}+x+1 - (x^2+x+1)$
$\Rightarrow x^{2024}-x^2 = x^2(x^{2022}-1) = x^2((x^3)^{674}-1)$
$= x^2((x^3)^{673}+\dots+x^3+1)(x^3-1)$
$= x^2(x-1)(x^{2019}+x^{2016}+\dots+x^3+1)(x^2+x+1)$

$\Rightarrow x^{2024}+x+1 \boxed{= (x^2+x+1)(1+x^2(x-1)(x^{2019}+x^{2016}+\dots+x^3+1)).}$

b) Provar que se z, w são raízes da unidade, então $\bar{z}$ e zw também são raízes da unidade.

$\Rightarrow z^n=1$; $w^m=1$

- Para $\bar{z}$: $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ $\Rightarrow |z^n|=|z|^n=1 \Rightarrow |z|=1$.
  $\therefore \bar{z}=\dfrac{1}{z} \Rightarrow \bar{z}^n=\dfrac{1}{z^n}=1$.

- Para $zw \Rightarrow (zw)^{mn} = z^{mn}\cdot w^{mn}$
  $(zw)^{mn} = (z^n)^m\cdot(w^m)^n = 1\cdot 1 = 1$

Outro jeito:

$z^n = 1 \Rightarrow z = cis\left(\frac{2K\pi}{n}\right), K \in \{0,1,2,\dots,n-1\}.$

$w^m = 1 \Rightarrow w = cis\left(\frac{2K\pi}{m}\right), K \in \{0,1,2,\dots,m-1\}.$

5 a) Calcule $\sum_{K \geq 0} \binom{n}{3K+1}$.

$$(x+1)^n = \sum_{K \geq 0} \binom{n}{K} x^K$$

$w^3 = 1, \; w \neq 1 \Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$

$\Rightarrow 1 + w^K + w^{2K} = \begin{cases} 3, & \text{se } 3 \mid K \\ 0, & \text{se } 3 \nmid K \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^n}{x} = \sum_{K \geq 0} \binom{n}{K} x^{K-1} \qquad (x \neq 0)$$

em $x = 1$: $\frac{2^n}{1} = \binom{n}{0} 1^{-1} + \binom{n}{1} 1^0 + \binom{n}{2} 1^1 + \dots + \binom{n}{n} 1^{n-1}$

em $x = w$: $\frac{(1+w)^n}{w} = \binom{n}{0} \cdot w^{-1} + \binom{n}{1} w^0 + \binom{n}{2} w + \dots + \binom{n}{n} w^{n-1}$

em $x = w^2$: $\frac{(1+w^2)^n}{w^2} = \binom{n}{0} w^{-2} + \binom{n}{1} w^0 + \binom{n}{2} w^2 + \dots + \binom{n}{n} w^{2n-1}$

$$2^n + \frac{(1+w)^n}{w} + \frac{(1+w^2)^n}{w^2} = \cancelto{0}{\binom{n}{0}(1+w^{-1}+w^{-2})} + \binom{n}{1}(1+w^0+w^0) +$$

$$+ \cancelto{0}{\binom{n}{2}(1+w+w^2)} + \cancelto{0}{\binom{n}{3}(w^2+1+w^4)} + \dots$$

$$2^n + \frac{(1+w)^n}{w} + \frac{(1+w^2)^n}{w^2} = 3\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1}$$

$$\boxed{\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1} = \frac{2^n + \frac{(1+w)^n}{w} + \frac{(1+w^2)^n}{w^2}}{3}}$$

b) calcule $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

Pense nas raízes da unidade. Seja $w^n = 1$, logo,

$w_k = \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \Rightarrow |w^n| = 1 = |w|^n \therefore |w| = 1.$

Além disso, $w.\bar{w} = |w|^2 = 1.$

Sabemos que $w_k + \bar{w}_k = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ e $w_k - \bar{w}_k = 2\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) i$

$-\frac{1}{4}(w_k - \bar{w}_k)^2 = \operatorname{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ $\quad 2(a^2+b^2) - 2(a^2-b^2)$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \left(\cancelto{2\ 1}{2w_k\bar{w}_k} - w_k^2 - \bar{w}_k^2\right) \cdot \frac{1}{4}$$

→ PG e $\operatorname{cis}\alpha = e^{i\alpha}$

E $\operatorname{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(w_k^2 + \bar{w}_k^2\right)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} - \cancelto{0}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\left(w_k^2 + \bar{w}_k^2\right)}$$

• $w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2$ = Perceba que seria a mesma coisa que $1 + w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1} = 0$

$$\boxed{\therefore \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}}$$