MATEMÁTICA DISCRETA 09/10/24

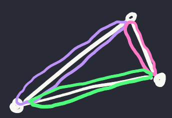
COLORAÇÃO

COLORAÇÃO DE ARESTAS

- DADO $G(V,E)$, UMA K-COLORAÇÃO POR ARESTAS É UMA FUNÇÃO $f: E \to C$ ONDE $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ É UM CONJUNTO DE CORES E f SATIFAZ:

$$f(e_i) \neq f(e_j) \text{ SE } e_i \text{ E } e_j \text{ INCIDEM NO MESMO VÉRTICE}$$

EXEMPLOS:



$C = \{ \bullet, \bullet, \bullet \}$

DEFINIÇÃO

SE G ADMITE UMA K-COLORAÇÃO POR ARESTAS, MAS NÃO ADMITE (K-1)-COLORAÇÃO, ENTÃO G É K-CROMÁTICO EM ARESTAS, ESCREVEMOS $\underbrace{\chi'(G)}_{\text{NÚMERO CROMÁTICO POR ARESTAS}} = K$.

TEOREMA

$$\chi'(G) \begin{cases} n \to n \text{ ÍMPAR} \\ n-1 \to n \text{ PAR} \end{cases}$$

DEM

$\chi'(K_2) = 1 \quad \chi'(K_3) = 3 \quad \chi'(K_4) = 3$

Caso n ímpar:

Consideramos a representação gráfica de K_n usando um polígono regular de n lados e as respectivas cordas.

Pintamos cada lado exterior do polígono com uma cor e cada corda é pintada com a aresta exterior paralela a ela, assim temos uma n-coloração.

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$$

→ quantidade máxma de arestas de uma mesma cor.

No K_n há $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas, logo precisamos de no mínimo

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n-1}{2}} = n \text{ cores.}$$

Caso n par:

$n-1$ é ímpar, e é $(n-1)$-colorível, consideramos a $(n-1)$-coloração do K_{n-1}. Adicionamos 1 vértice ligando-o com cada vértice do K_{n-1}.

Em cada vértice do K_n há uma cor sobrando (a usada nas arestas paralelas). Usamos essa cor para pintar a aresta que une esse vértice com v. Obtemos assim uma $(n-1)$-coloração para K_n.

Teorema

(Köng, 1916) - Se G é bipartido, então

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

Dem

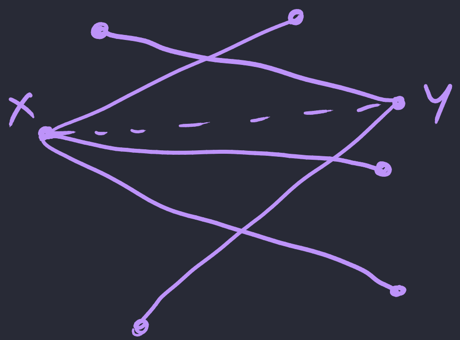
Indução nas arestas

Seja $G(V,E)$, se $|E| = 1$, $\chi'(G) = 1 = \Delta(G)$

Supomos que $n = |E| \geq 1$ e que $\forall G$ bipartido com menos de n arestas a proposta é válida

Seja $\{x,y\} \in E$. Consideramos uma $\Delta(G)$-coloração por aresta do grafo $G'(V, E \setminus \{x,y\})$ obtido ao remover $\{x,y\}$.

Chamamos de α-arestas as arestas pintadas com a cor α.



Em G' os vértices x e y são extremos de, no máximo $\Delta(G)-1$ arestas cada um.

Seja $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$ o conjunto de $\Delta(G)$ cores da coloração, logo temos:

$\alpha, \beta \in C$

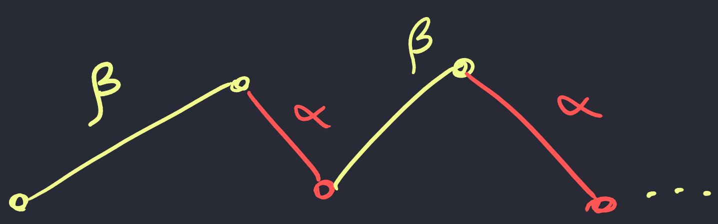
TAL QUE x NÃO É EXTREMO DE UMA α-ARESTA E y NÃO É EXTREMO DE UMA β-ARESTA.

I) $\alpha = \beta$ ENTÃO TEM A MESMA COR α SOBRANDO EM x E EM y. LOGO, PINTANDO $\{x, y\}$ COM A COR α, OBTEMOS UMA COR $\Delta(G)$-COLORAÇÃO PARA G

II) $\alpha \neq \beta$ S.P.G, SUPOMOS QUE x INCIDE NUMA β-ARESTA. CONSIDERAMOS O CAMINHO $\boxed{\text{MAXIMAL}}$ QUE COMEÇA COM TAL β-ARESTA E ALTERNA AS CORES.

- NÃO ESTÁ CONTIDO EM OUTRO CAMINHO ALTERNADO β, α

CHAMAMOS W TAL CAMINHO



W NÃO PODE REPETIR VÉRTICES

W NÃO PODE CONTER y, POIS y NÃO INCIDE EM UMA β-ARESTA, LOGO, W DEVERIA FINALIZAR EM y COM UMA α-ARESTA. ASSIM, TERIAMOS UM CAMINHO ENTRE x E y DE TAMANHO PAR, LOGO, EXISTIRIA CAMINHO DE TAMANHO ÍMPAR EM G (ABSURDO, G BIPARTIDO)

LOGO W NÃO PASSA POR Y

EM W ALTERNAMOS α POR β E β POR α, OBTEMOS ASSIM UMA $\Delta(G)$-COLORAÇÃO DE G' NO QUAL X E Y NÃO INCIDEM EM β-ARESTAS. COLORINDO $\{x,y\}$ COM β, OBTEMOS UMA $\Delta(G)$-COLORAÇÃO PARA G.

TEOREMA

(VIZING - 1964) SE G É GRAFO SIMPLES, ENTÃO

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$$

DEM: DIESTEL PG. 103