1. No Hotel Argentina, também conhecido como Hotel dos Gênios, muitos alunos são entusiastas de escalada. Um desses alunos, Bryan, deseja construir uma base em um ponto específico de uma montanha, de modo que a base seja tangente à superfície do relevo. Suponha que a superfície da montanha seja descrita pela função $f(x, y)$ e que o ponto desejado para a estrutura seja (x_0, y_0, z_0) no espaço.

O vetor $\langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\rangle$ é perpendicular ao plano tangente em (x_0, y_0, z_0)? Justifique sua resposta. Além disso, responda se Bryan deve se preocupar se a base tocará a superfície da montanha em outro ponto ou se o plano tangente toca a superfície apenas em um ponto.

I) Sabemos que o plano tangente a $z = f(x,y)$ em (x_0, y_0, z_0) é $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$

$$\boxed{\text{e } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,y - z + \left(z_0 - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,y_0\right)}$$

Da geometria analítica sabemos que o vetor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$ é normal ao plano, portanto, perpendicular ao plano.

II) Sim ele deve se preocupar. O plano tangente pode interceptar outros pontos do espaço.

2. Cruzeiro Esporte Clube, maior clube de futebol do país, deseja otimizar seus investimentos para a temporada de 2025, buscando melhorar seus resultados após a conquista da Copa Sul-Americana de 2024. O CEO, Alexandre Mattos, entrou em contato com a EMAp para conduzir um estudo que ajude a maximizar o sucesso esportivo com base em investimentos feitos em diferentes setores do time.

   Seja $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2$ a função que modela o sucesso esportivo do time, onde:

   - x_1 representa o investimento no ataque;
   - x_2 representa o investimento no meio-campo;
   - x_3 representa o investimento na defesa;
   - x_4 representa o investimento no goleiro.

   Em 2024, os investimentos do clube foram $(20, 20, 12, 16)$ milhões de reais nos respectivos setores. Pedro Lourenço, conhecido como "Pedrinho BH", prometeu aumentar o investimento total em 100 milhões de reais. Qual deve ser o investimento em 2025 para maximizar o sucesso esportivo do Cruzeiro?

   Dica: Utilizar o vetor gradiente.

$\nabla f = (2x_1, 4x_2, 4x_3, 2x_4)$.

$\nabla f(20,20,12,16) = (40, 80, 48, 32)$

Perceba que o gradiente possui soma 200.
No entanto queremos atualizar os investimentos de forma que eles somem 168.
Como a direção de variação máxima é na direção do vetor gradiente, devemos atualizar os investimentos tendo em conta o gradiente.

Como o gradiente soma 200 e os investimentos anteriores somam 68, devemos fazer com que o gradiente some 100.

Logo $P = P_0 + \frac{1}{2}\nabla f(P_0) \Rightarrow P = (20,20,12,16) + \frac{1}{2}(40,80,48,32)$

$\boxed{P = (40, 60, 36, 32)}$ //.

3. A temperatura média anual em um determinado ponto de uma cidade é modelada de forma precisa pela função $f(x, y) = min(x^3 - 3x - y^3 + 12y + 50,\ 40)$, onde x e y são as coordenadas em relação à prefeitura, medidas em uma escala de 1 para 100 metros. O professor Antônio Branco, após receber um generoso bônus anual por seus serviços prestados, decidiu comprar um terreno para construir um prédio comercial. Antes de realizar o investimento, ele decidiu encontrar o ponto que registra a menor temperatura média anual dentro das dimensões do terreno, que é delimitado pelos vértices $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, -2)$, $(-2, -2)$. Encontre esse ponto e determine a temperatura mínima.

Vendo os pontos críticos de $g(x,y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y + 50$:

$$\nabla g = (3x^2 - 3, -3y^2 + 12) \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 12 - 3y^2 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow x = \pm 1 \\ \Rightarrow y = \pm 2 \end{matrix}$$

Pontos críticos $(\pm 1, 2)$, $(\pm 1, -2)$

Calculando a função nos pontos:

$g(1,2) = 64$ $\quad$ $g(-2,3) = 57$

$g(-1,2) = 68$ $\quad$ $g(-2,-2) = 32$

$g(1,-2) = 32$ $\quad$ $g(2,3) = 61$

$g(-1,-2) = 36$ $\quad$ $g(2,-2) = 36$

críticos $\quad$ fronteiras

Trazendo pra f:

$f(1,2) = 40$ $\quad$ $f(-2,3) = 40$

$f(-1,2) = 40$ $\quad$ $f(-2,-2) = 32$

$f(1,-2) = 32$ $\quad$ $f(2,3) = 40$

$f(-1,-2) = 36$ $\quad$ $f(2,-2) = 36$

$$\boxed{\begin{matrix} \text{Máximos}: f(1,2) = f(-1,2) = f(-2,3) = 40 \\ \text{Mínimos}: f(1,-2) = f(-2,-2) = 32 \end{matrix}}$$

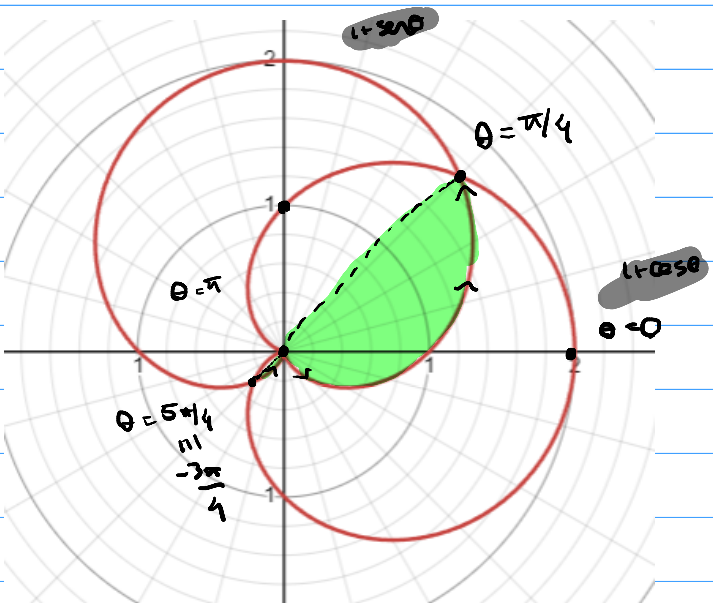
//.

4. Nícolas Spaniol, em sua ida ao Rock in Rio no dia do Travis Scott, notou um hábito interessante dos diversos fãs do mesmo, as chamadas "Rodas Punk", onde se juntam para correr em "círuclos"de um lado para o outro, após se aproximar de uma das rodas, notou, com seus conhecimentos de cálculo multivariado, que, uma das pessoas percorria um movimento restrito pela curva $r_1 = 1 + \cos\theta$, e, outra pessoa percorria um movimento restrito por $r_2 = 1 + \sin\theta$, ambos os raios dados em metros. Nícolas estava em dúvida sobre a possibilidade de ocorrer um aciente próximo a ele, mas também queria participar da roda, então decidiu achar a probabilidade do acidente, através da área de intersecção das curvas em relação a área total delas. Caso a probabilidade do acidente fosse maior que 30%, Nícolas mudaria de lugar, caso contrário, se juntaria a roda, descubra o que Nícolas fez encontrando a probabilidade.

$r_1 = 1 + \cos\theta$

$r_2 = 1 + \operatorname{sen}\theta$

$r_1 = r_2 : \quad \operatorname{sen}\theta = \cos\theta \quad \boxed{\Rightarrow \theta = \pi/4 + 2k\pi \qquad \theta = 5\pi/4 + 2k\pi}$



$$A_1 = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\pi/4} (1+\operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\pi/4} (1 + 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta =$$

$$\int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \left(1 + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \left(\frac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right)\Bigg|_{-3\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= 3/2\,(\pi/4 + 3\pi/4) - 2\left(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2\right) - \cancel{1/4\,(1-1)}^{\,0} = \boxed{3\pi/2 - 2\sqrt{2}}$$

$$A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2 \, d\theta = \left(\frac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$\frac{3}{2}(\pi - 0) + 2(0-0) + \frac{1}{4}(0-0) = \boxed{\frac{3\pi}{2}},$$

$$P = \frac{\frac{3\pi - 4\sqrt{2}}{2}}{3\pi - \left(\frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{2}\right)} = \frac{\frac{3\pi - 4\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\frac{3\pi + 4\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \frac{3{,}767}{15{,}081} \cong 0{,}24$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{24\%}$$

5. Após o sucesso do primeiro simualdo de Cálculo Multivariado aplicado pelos monitores Matheus e Sillas para seus monitorandos, diversos alunos ficaram interessados em serem citados nas questões. Um em especial, Lucas Batista, fez de tudo para convencer os monitores de que ele merecia estrelar uma das questões do segundo simulado. Persuadidos pela lábia do calouro, decidiram que ele poderia estar presente no simulado desde que adivinhasse os dois números que eles estavam pensando.

   (a) Antes de qualquer coisa, determine as fórmulas para $\frac{\partial w}{\partial t}$ e $\frac{\partial w}{\partial v}$ para as seguintes funções genéricas.

   $$w = w(x, y) \qquad x = x(p, q, s) \qquad y = y(p, u, v) \qquad s = s(u, v) \qquad p = p(t)$$

   (b) Os números que os monitores estavam pensando eram referentes às derivadas $\frac{\partial w}{\partial t}$ e $\frac{\partial w}{\partial v}$, avaliadas para $t = 1$, $q = 3$, $u = 2$, $v = 1$ e sendo as funções as seguintes. Encontre os dois números e ajude Lucas a realizar seu sonho.

   - $w(x, y) = x^2 + 3y$
   - $x(p, q, s) = p + 2q + s$
   - $y(p, u, v) = 2p + 3u - v$
   - $s(u, v) = u^2 + v$
   - $p(t) = 2t$

$2+6+5$

$p=2 \qquad s=5$

$q=3$

a) $w = w(x,y)$

$x = x(p,q,s) \qquad y = (p,u,v) \rightarrow x = x(p(t), q, s(u,v))$

$s = s(u,v) \qquad p = p(t) \qquad y = y(p(t), u, v)$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}}$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}}$$

b) $t=1,\ q=3,\ u=2,\ v=1$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 2x\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 2 = 4\cdot 13 + 12 = 52 + 12 = \boxed{64}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 2x\cdot 1\cdot 1 + 3(-1) = 2\cdot 13 - 3 = \boxed{23}$$

6. Samyra, em uma de suas visitas ao Laboratório de Matemática Aplicada, encontrou um antigo diário contendo várias anotações de um pesquisador desconhecido, cujas iniciais do nome são Y e S. Entre as anotações, ela descobriu uma fórmula enigmática que parecia descrever uma superfície matemática peculiar. A função era dada por $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$, onde a, b e c eram constantes desconhecidas. Curiosa, Samyra resolveu investigar o comportamento da superfície.

   Após realizar algumas contas, ele se deparou com uma condição interessante: se $c^2 > 4ab$, algo especial ocorria na função. Samyra então questiona se essa condição garante a existência de um ponto de sela na superfície descrita por $f(x, y)$. Mostre se a hipótese de Samyra está correta ou não, ou seja, se $c^2 > 4ab$ então a função possui um ponto de sela.

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

$$\nabla f = (2ax + cy,\ 2by + cx)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2b \ ; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = c$$

$$D = 4ab - c^2$$

Para ter ponto de sela, $D < 0$. Portanto, $4ab - c^2 < 0$ e $c^2 > 4ab$ gera um ponto de sela na função f.

7. Durante uma excursão ao Observatório Nacional, Gabrielly e seus colegas foram desafiados por um dos funcionário a resolver um problema geométrico relacionado à astronomia. O problema envolvia encontrar o valor máximo de uma função que modelava a intensidade de luz captada por um telescópio, dada por $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$. No entanto, essa intensidade deveria ser maximizada ao longo de uma curva de interseção entre um plano, dado pela equação $x - y + z = 1$, e um cilindro definido pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

Gabrielly, intrigada pelo desafio, acredita que se resolver o problema, ganhará a oportunidade de observar o céu com o maior telescópio do observatório. Resolva o problema antes de Gabrielly para poder observar o céu com o super telescópio no lugar dela.

$f(x,y,z) = x+2y+3z$

$g(x,y,z) = x-y+z$

$h(x,y,z) = x^2+y^2+0\cdot z$

$\nabla f = (1,2,3)$

$\nabla g = (1,-1,1)$

$\nabla h = (2x,2y,0)$

$\Rightarrow \nabla f = \alpha \nabla g + \beta \nabla h$

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta\cdot 2x \\ 2 = -\alpha + \beta\cdot 2y \\ 3 = \alpha + \beta\cdot 0 \\ x-y+z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad \boxed{\alpha = 3} \qquad \Rightarrow \begin{matrix} \beta x = -1 \\ \beta y = 5/2 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{25}{\beta^2\cdot 4} = 1 \qquad \boxed{\beta = \frac{\pm\sqrt{29}}{2}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = \mp 2/\sqrt{29} \\ y = \pm 5/\sqrt{29} \\ z = 1 \pm 7/\sqrt{29} \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \text{Máx: } f(-2/\sqrt{29},\ 5/\sqrt{29},\ 1+7/\sqrt{29}) = 3+\sqrt{29} \\ \text{Mín: } f(2/\sqrt{29},\ -5/\sqrt{29},\ 1-7/\sqrt{29}) = 3-\sqrt{29}. \end{matrix}}$$

8. (EXTRA) O diretor de uma famosa escola de matemática aplicada no Rio de Janeiro ficou indignado com a baixa presença de seus alunos em um evento oficial da instituição. Decidido a aplicar uma punição, ele propôs um desafio: apenas os alunos que conseguissem resolver o problema continuariam na escola, enquanto os demais seriam expulsos. Seja $f(x(t), y(t))$, onde $z(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva parametrizada no plano, mostre que:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dt^2}$$

Dica: Comece derivando $\frac{df}{dt}$ usando a regra da cadeia e depois utilize a regra do produto para obter a expressão da segunda derivada.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2f}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} +$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\boxed{= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$\#$