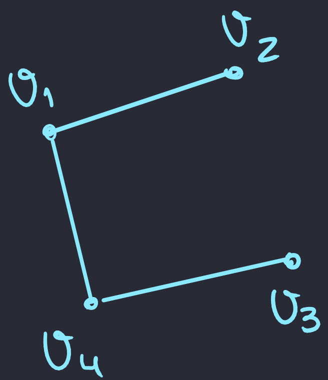
Matemática Discreta 29/08

Matriz de Adjascência

- Definição: Dado um grafo simples $G=(V,E)$ com n vértices, a Matriz de Adjascência de G é uma matriz $A=(a_{i,j})_{n\times n}$ onde

$$a_{ij}\begin{cases} 1 & \text{se há aresta entre } v_i \text{ e } v_j \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Exemplo



$$\Rightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Matriz Adjascente é simétrica para todo grafo não dirigido.

- Para grafos não simples, a_{ij} é a quantidade de arestas que liga v_i e v_j, se $i=j$, cada laço conta 2 vezes

Exemplo

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Caminhos de v à w

- Dada a matriz $A=(a_{ij})$ representando um grafo, criamos a matriz $A^k=(b_{ij})$ tal que:

(b_{ij}) $\begin{cases} i \neq j \Rightarrow b_{ij} \text{ representa quantos caminhos com } k \text{ vértices há do vértice } i \text{ ao } j \\ i = j \end{cases}$

$i=j$ → se $G(V,F)$ é simples, b_{ii} é o grau de i

$i=j$ → se $G(V,F)$ não é simples, representam quantos caminhos de i à i com k vértices

Teorema

Seja $G(V,E)$ um grafo simples e A a sua matriz de adjascência. Então a entrada ij da matriz A^n é a quantidade de caminhos de comprimento n de v_i à v_j.

Dem

Indução em n.

$n=1 \rightarrow$ Seja $A=(a_{ij})$. Então a_{ij} é 1 se existe uma aresta entre v_i e v_j, e é 0.

Hipótese Indutiva

Supomos que a tese é válida para $A^1, A^2, \ldots, A^n$

Consideramos

$$A^{n+1} = A^n \cdot A$$

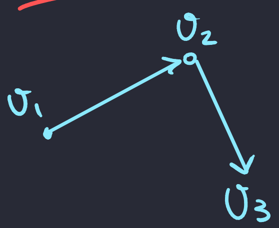
$$(A^{n+1})_{ik} = \underbrace{[s_1, s_2, \ldots, s_n]}_{\text{linha } i \text{ de } A^n} \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}}_{\text{coluna } k \text{ de } A} = s_1 t_1 + \ldots + s_n t_n$$

PELA HIPÓTESE INDUTIVA, s_j É O NÚMERO DE CAMINHOS DE v_i À v_j DE COMPRIMENTO n. E t_j É 0 SE NÃO HÁ ARESTA $\{v_k, v_j\}$, 1 CASO CONTRÁRIO. LOGO $s_j t_j$ REPRESENTA A QUANTIDADE DE CAMINHOS DE COMPRIMENTO $n+1$ DE v_k À v_j. FAZENDO A SOMA $\sum_{j=1}^{m} s_j t_j$ CONTAMOS TODOS OS CAMINHOS DE COMPRIMENTO $n+1$ DE v_i À v_k.

MATRIZ DE ADJASCÊNCIA (GRAFO DIRIGIDO)

- DEF: DADO O GRAFO DIRIGIDO $G(V,F)$, DEFINIMOS SUA MATRIZ DE ADJASCÊNCIA ONDE
  - a_{ij} = QUANTIDADE DE ARESTAS DIRIGIDAS NA FORMA (v_i, v_j)

EXEMPLO



$$A_{n \times n} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

PERGUNTAS

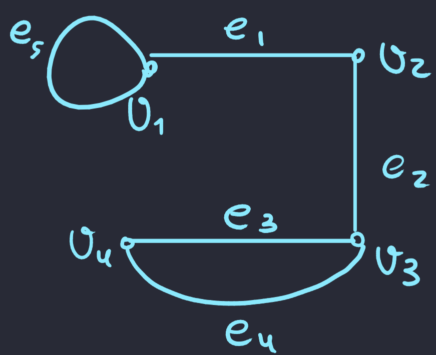
- O TEOREMA VALE PARA MATRIZ DE GRAFO DIRIGIDO E CAMINHOS DIRIGIDOS?
- O TEOREMA É VÁLIDO PARA GRAFOS SEM LAÇOS? (COM ARESTAS PARALELAS).

MATRIZ DE INCIDÊNCIA

- **DEF**: DADO UM GRAFO $G(V,E)$, A MATRIZ DE INCIDÊNCIA $\underset{n \times m}{A} = (a_{ij})$ É DADA POR:

$$a_{ij} \begin{cases} 1 \rightarrow \text{ARESTA } j \text{ INCIDE NO VÉRTICE } i \\ 0 \rightarrow \text{NÃO} \end{cases}$$

EXEMPLO

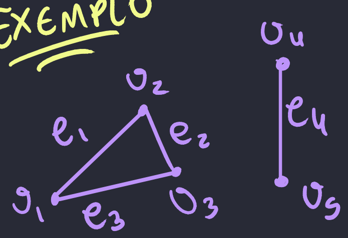


$$\rightarrow A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

OBSERVAÇÃO: SE O GRAFO FOR DESCONEXO, A MATRIZ PODE SER REARRANJADA EM BLOCOS.

$$\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right]$$
$$\quad E_1 \quad\quad E_2$$

EXEMPLO



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \end{array}$$