Matemática Discreta 28/08/24

Algoritmo de Dijkstra

- Para cada aresta $\{i,j\}$, $w(i,j)>0$ sendo o peso para cada vértice x e $L(x)$ o rótulo associado
- Dado o ponto inicial a, e o final z, o caminho mais curto é dado pela menor soma dos pesos.

```
dijkstra(w, a, z, L) {
    L(a) = 0
    for all vertices x ≠ a {
        L(x) = ∞
    }
    T = set of all vertices
    while z ∈ T {
        choose v ∈ T with minimum L(v)
        T = T \ {v}
        for each x ∈ T adjascent to v {
            L(x) = min{L(x), L(v) + w(x,v)}
        }
    }
}
```

Teorema

• O algoritmo escolhe o caminho mais curto de a à z.

DEM

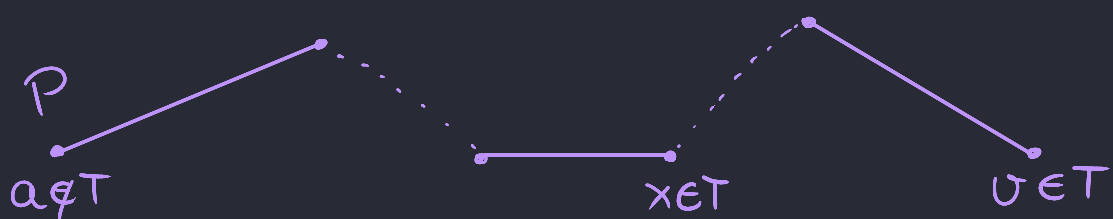
Por indução em i, vamos mostrar que a i-ézima vez que o algoritmo executa a linha 8, o valor $L(v)$ do v escolhido é o comprimento mais curto de a à v.

Para $i=1$, o vértice escolhido na linha 8 é o caminho mais curto de a à a.

Supomos que a tese vale para $k<i$ e vamos provar que vale para i

Seja v o vértice escolhido na i-ésima iteração temos que provar que $L(v)$ é o comprimento do caminho mais curto de a à v. Supomos do contrário que existe um caminho P de a à v com

$$\text{Comprimento } P < L(v)$$



No caminho P, seja x o vértice pertencente a T mais próximo de a e u como vértice precendente tal que $u \notin T$.

ENTÃO

$$L(x) \leq L(u) + w(u,x) \leq \text{comprimento } P \leq L(v)$$

ISTO É

$$x \neq v \quad \text{e} \quad L(x) < L(v)$$

OU SEJA, NO MOMENTO i, $x \in T$, $v \in T$ E $L(x) < L(v)$.

ISTO CONTRADIZ O FATO DE v TER SIDO ESCOLHIDO NA ITERAÇÃO i

CONCLUÍMOS ENTÃO QUE $L(v)$ É O COMPRIMENTO DO CAMINHO MAIS CURTO DE a À v, QUANDO v É ESCOLHIDO NA ITERAÇÃO i. LOGO, EM PARTICULAR, $L(z)$ É O MENOR CAMINHO DE a À z QUANDO O ALGORITMO TERMINA

TEOREMA

- PARA UM GRAFO SIMPLES E CONEXO COM PESOS POSITIVOS E n VÉRTICES, O ALGORITMO TEM COMPLEXIDADE $O(n^2)$