Matemática Discreta

Conceitos Iniciais

Grafo

→ Constituído por dois conjuntos V e A onde

(i) Os elementos de V são os vértices

(ii) Os elementos de A são pares não ordenados dos elementos de V e são chamados arestas

$$G(V,A) \quad \text{ou} \quad G=(V,A)$$

Exemplo

$G(V,A)$

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$A=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4)\}$

→ Grafo nulo ⇒ $G=\emptyset$ (não há vértices)

→ Grafo trivial ⇒ $n(V)=1$ (1 vértice)

→ Seja $G(V,A)$ um grafo. Dado $e=(v_i,v_j)\in A$ dizemos que:

(i) v_i e v_j são os extremos

(ii) e é incidente em v_i e v_j

(iii) v_i e v_j são adjascentes

(iv) Se $v_i=v_j$ então a aresta é um laço/loop

(v) Se $\exists f=(v_i,v_j)\in A \,/\, f\neq e$, então f e e são paralelas

(vi) Grafos que contém pelo menos

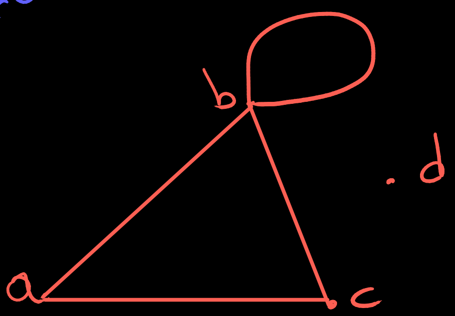
Vizinhança de um vértice

→ Dados $G=(V,E)$ e $v \in V$, a vizinhança de v em G é o conjunto formado pelos vértices adjascentes a v:

$$N(v) := \{u \in V \,/\, \exists e \in E \text{ com } e=\{u,v\} \wedge e=\{v,u\} \wedge e=\{u\}, u=v\}$$

→ Os elementos de $N(v)$ são vizinhos de v

Exemplo:



$N(a) = \{b, c\}$
$N(b) = \{a, b, c\}$
$N(c) = \{a, b\}$
$N(d) = \emptyset$

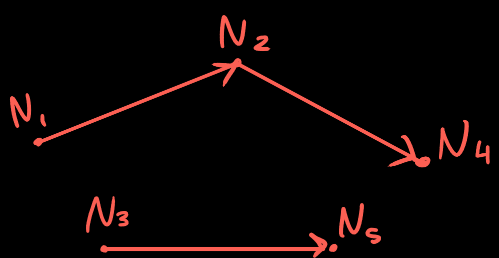
Grafos Dirigidos

→ É um par $G=(V,E)$, onde

(i) V é um conjunto de vértices

(ii) E é um conjunto de elementos de $V \times V$, isto é, E é uma coleção de pares ordenados de V, onde os elementos de E são arestas dirigidas

Exemplo



$V = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\}$

$E = \{(N_1, N_2), (N_2, N_4), (N_3, N_5)\}$

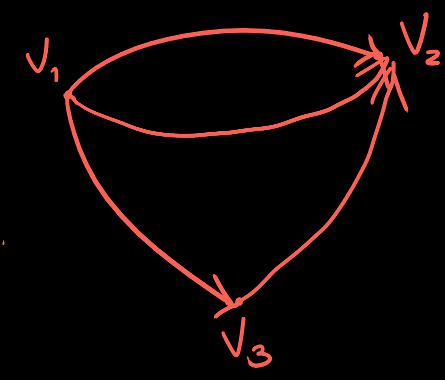
$\underbrace{(N_1, N_2)}_{\neq \, (N_1, N_2)}$

→ Dada uma aresta dirigida $e=(n_i, n_j)$, dizemos que n_i é a origem e n_j o destino

MULTI-GRAFO DIRIGIDO

→ GRAFO DIRIGIDO $G=(V,E)$ QUE E TEM DOIS ELEMENTOS IGUAIS (DOIS PARES ORDENADOS IGUAIS)

EXEMPLO

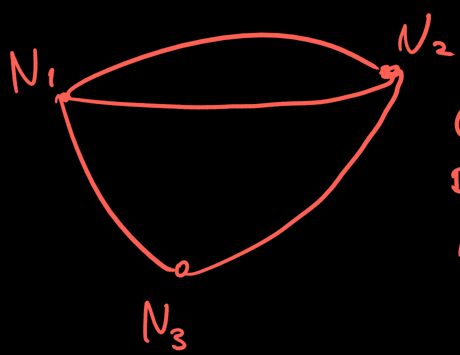


$E=\{(v_1,v_2),(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_3,v_2)\}$

GRAFO SUBJASCENTE

→ GRAFO OBTIDO AO SUBSTITUIR OS PARES ORDENADOS DE E DO GRAFO $G(V,E)$ POR PARES NÃO-ORDENADOS

EXEMPLO



GRAFO SUBJASCENTE DO MOSTRADO NO TÓPICO ANTERIOR

PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

"SE n POMBOS DEVEM SER POSTOS EM m CASAS, COM $n>m$, ENTÃO PELO MENOS UMA CASA IRÁ CONTER MAIS DE UM POMBO"

PROPRIEDADES DOS GRAFOS

TEOREMA 1: SEJA $G(V,E)$ UM GRAFO SIMPLES E NÃO-TRIVIAL, ENTÃO G POSSUI AO MENOS DOIS VÉRTICES COM MESMO GRAU

DEM

SEJA $n := |V|$, CADA VÉRTICE DE G PODE TER GRAU DE 0 À $n-1$

(i) $\rightarrow \exists v \in V / \delta(v) = 0$, ENTÃO $\nexists u \in V / \delta(u) = n-1$

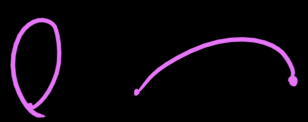
$\therefore n \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. ENTÃO OS VÉRTICES DE G TÊM NO MÁXIMO $n-1$ VALORES DIFERENTES, ASSIM, DEDUZIMOS QUE HÁ NECESSARIAMENTE 2 VÉRTICES COM O MESMO GRAU

(ii) $\rightarrow \nexists v \in V / \delta(v) = 0$, ENTÃO $n \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, DEDUZINDO ENTÃO QUE HÁ DOIS VÉRTICES COM MESMO GRAU

TEOREMA 2: SEJA $G(V,E)$, ENTÃO

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

DEM: CADA ARESTA $e \in E$ CONTRIBUI COM 2 NA SOMA DOS GRAUS DOS VÉRTICES.



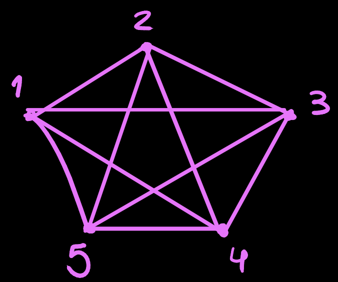
Classes Especiais de Grafos

* Grafo Completo

▷ Denotado como K_n é o grafo simples de n vértices que possui uma aresta entre cada par de arestas

Exemplo

K_5



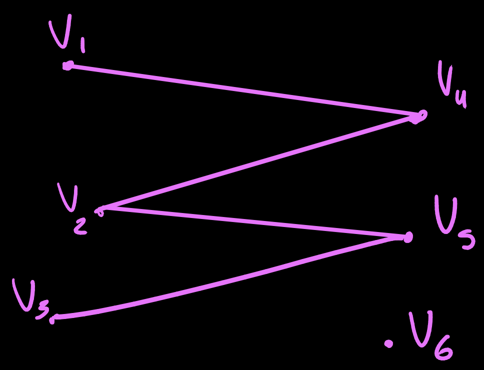
* Grafo Bipartido

▷ O grafo $G=(V,E)$ é dito bipartido se $\exists V_1 \subseteq V$ e $\exists V_2 \subseteq V$ tais que

$$V_1 \cup V_2 = V \quad \wedge \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

E toda aresta $e \in E$ é incidente num vértice de V_1 e num de V_2

Exemplo



* Grafo Completo Bipartido

▷ $K_{m,n}$, em m e n vértices, é o grafo simples com o conjunto de vértices particionado em V_1 e V_2, com $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ e tal que o conjunto de arestas são todas aquelas que ligam um vértice de V_1 com um de V_2