## Exercício 1 - Ínfimo Fora do Conjunto

Seja $X \neq \emptyset$ limitado inferiormente, com $a = \inf X$. Suponha que $a \notin X$. Mostre que

(a) existe sequência $(x_n)$ em $X$ tal que $x_n \to a$.

(b) descreva uma forma de extrair uma subsequência $(y_n)$ estritamente decrescente de $(x_n)$.

# Exercício 2 - Conjuntos Encaixados

Sejam $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ e $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$. Mostre que

$$\sup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \inf \sup_n A_n$$

## Exercício 3 - A Propriedade Arquimediana

Mostre que as seguintes propriedades são equivalentes:

(i) $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente

(ii) $\forall a, b > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $an > b$

(iii) $\forall r > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$.

Agora, use o Axioma do Supremo para provar alguma destas 3 propriedades e, consequentemente, obter as demais.

## Exercício 4 - Radicais Aninhados

Robertinha estava analisando propriedades dos números reais. Ela sabia que $\sqrt{2}$ era um único número em $\mathbb{R}_+$ tal que o seu quadrado é igual a 2. Porém, ela pensou se poderia obter o 2 de outro modo a partir do $\sqrt{2}$. Ela então considerou o conjunto

$$X = \left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \ldots \right\}$$

Ajude Robertinha mostrando que $X$ é limitado superiormente e que $\sup X = 2$. Ou seja, podemos escrever $2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$

① Como $X \neq \emptyset$, $a = \inf(X)$ e $a \notin X$, então $a < x \ \forall x \in X$.

a) Suponha $x_n$ uma sequência de elementos de $X$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Queremos verificar se existe $\varepsilon > 0$ qualquer tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ para $n_0 > n$ ($n_0 \in \mathbb{N}^*$).

$\Rightarrow$ Como $a = \inf(X)$, seja $x_1 \in X$ tal que $x_1 < a + 1$, em que $a < x_1$ ($a \notin X$). Agora, de modo recursivo, suponha definidos $x_i \in X, \forall i = 1, \dots, k$ e $x_i < a + 1/i$, $\forall i = 1, \dots, k$. Além disso $\exists\, x_{k+1} \mid x_{k+1} < a + 1/k+1$. Logo, obtemos uma sequência e $|x_k - a| = x_k - a < x_k - (x_k - 1/i)$ $|x_k - a| < 1/i \Rightarrow 1/i > 0 \Rightarrow 1/i = \varepsilon \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$ e $\lim x_n = a$.

b) Seja $y_1 = x_1$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $k_n = \max\{k \in \mathbb{N} \mid x_k < y_i, i = 1, \dots, n\}$ e tome $y_{n+1} = x_{k_n}$.

Isso é o equivalente de na sequência $x_n$ retirar o $x_1$ e pegar o primeiro elemento menor que $x_1$, e assim por diante. Como mostramos no item a) $\lim x_n = a$, então $\lim y_n = a$ ($y_n < x_n$). Portanto, teríamos uma sequência em $X$ estritamente decrescente e tendendo a $a$.

Ideia: Defina uma sequência $x_n$ tal que:

$x_1 \in (a, a+1)$

$x_2 \in \left(a, a + \frac{x_1 - a}{2}\right)$

$x_3 \in \left(a, a + \frac{x_2 - a}{2}\right)$

$\vdots$

$x_n \in \left(a, a + \frac{x_{n-1} - a}{2^{n-1}}\right)$.

Logo, criamos a sequência $x_n = a + \frac{x_{n-1} - a}{2^{n-1}}$

Como $x_n$ é limitada, $x_{n-1} - a$ também é. Além disso $2^{n-1}$ tende ao infinito e $\frac{x_{n-1} - a}{2^{n-1}}$ tende a 0.

Descobrimos $x_n = a + \frac{x_{n-1} - 1}{2^{n-1}} \leq a + \frac{x_1 - 1}{2^{n-1}}$

Logo, como $(x_n)$ é monótona decrescente e limitada, sendo $L = \lim x_n$, temos:

$L = \lim x_n \leq \lim \left(a + \frac{x_1 - 1}{2^{n-1}}\right) = a + 0 = a \therefore L \leq a$

Mas, como $x_n > a$, temos, $L = \lim x_n \geq a$, donde $L = a$

② $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ Seja $A_j = [x_j, y_j]$ e $X = \{x_j, j \in \mathbb{N}^*\}$
$Y = \{y_j, j \in \mathbb{N}^*\}$.

Portanto, qualquer elemento de $Y$ é cota superior de $X$. Logo, $\sup(X) \leq y_j \; \forall y_j \in Y$.
Portanto, todo elemento do $X$ é cota inferior de $Y$, inclusive $\sup(X)$. Logo $\boxed{\sup(X) \leq \inf(Y)}$.

Além disso $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ também é um intervalo,

que é $[\sup(X), \inf(Y)]$.

$\Rightarrow \sup\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \inf(Y)$.

$\Rightarrow \inf(\sup_n A_n)$ = menor dos supremos de $A_n$.
Vimos que é $\inf(Y)$.

Logo $\sup\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \inf\left(\sup_n A_n\right)$.

Resolução da Monitor:

$A_1 \rightarrow \sup(A_1) \in \mathbb{R}$
$A_2 \rightarrow \sup(A_2) \in \mathbb{R}$
$\vdots$
$A_n \rightarrow \sup(A_n) \in \mathbb{R}$
$\vdots$
$K = \sup_n A_n = \{\sup(A_1), \sup(A_2), \dots, \sup(A_n), \dots\} \subset \mathbb{R}$
↳ queremos $\inf(K)$.

$a_1 = \inf(A_1)$ $\quad$ $b_1 = \sup(A_1)$

$a_2 = \inf(A_2)$ $\quad$ $b_2 = \sup(A_2)$

$\vdots$ $\quad$ $\vdots$

$a_n = \inf(A_n)$ $\quad$ $b_n = \sup(A_n)$

$$\boxed{A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \; ; \; B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}}$$

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \quad \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$

obs: $A \subset B \Rightarrow \inf A \geq \inf B \wedge \sup A \leq \sup B.$

Como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A_i$, $i \in \mathbb{N}$, então um certo $c = \sup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

portanto, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq c \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ e $c \leq \inf B = \inf(\sup_n A_n).$

Além disso, $c \geq \inf B$, pois senão $c < \inf B$, donde $\exists d \in (c, \inf B)$ $(c < d < \inf B)$. Mas, disto temos:

- $d < \inf B$: $d < b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$
- $d > c$: $\exists n \in \mathbb{N} \mid \sup(A_n) < d$, pois se $\forall n \in \mathbb{N}$, temos $\sup(A_n) \geq d$, então $\sup(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) \geq d \Rightarrow c \geq d.$

Logo, $c \geq \inf B$. Como $c \geq \inf B$ e $c \leq \inf B$, então $c = \inf B$ e $\sup\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \inf\left(\sup_n A_n\right).$

③ (i) Vamos provar que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.

Por absurdo, suponha $\mathbb{N}$ limitado superiormente, ou seja $n \leq K$ $\forall n \in \mathbb{N} \wedge K$ qualquer.

1) $K \in \mathbb{N}$. Fato: se $n \in \mathbb{N}$, então $n+1 \in \mathbb{N}$. Logo, se $K \in \mathbb{N}$, então $K+1 \in \mathbb{N}$ e $K$ não é $\sup(\mathbb{N})$

2) $K \notin \mathbb{N}$. Como os naturais satisfazem $K_1 = 1$ e $K_{n+1} = K_n + 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Portanto $\lim K_n = K \in \mathbb{N}$ e aí voltaríamos para o primeiro caso. Portanto, chegamos à um absurdo.

(ii) Vamos provar a propriedade arquimediana. Por absurdo, suponha que $n \cdot x \leq y$ $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \wedge n \in \mathbb{N}$. Logo, o conjunto $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente (pelo axioma do supremo).

No entanto, como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ também não é. Logo $nx \leq y$ é falsa e obtemos $n \cdot x > y$ $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \wedge n \in \mathbb{N}$.

(iii) Como $1 > 0$, pela propriedade arquimediana temos que $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists n \in \mathbb{N} \mid n \cdot x > 1$ e $x > \frac{1}{n}$.

(4) Temos que os elementos do conjunto também são elementos da seguinte sequência: $K_1=\sqrt{2}$, $K_{n+1}=\sqrt{2+K_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.
Como $K_{n+1}\geq K_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, temos que a sequência é crescente. Logo, para descobrir se o conjunto é limitado superiormente e seu sup, devemos observar o limite da sequência e descobrir se ela converge.

Se $K_{n+1}\geq K_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\wedge$ $K_1=\sqrt{2}$, $K_{n+1}=\sqrt{2+K_n}$, então se existir $L \mid L=\lim K_n$ $(L>0)$, $L$ deve satisfazer $L=\sqrt{2+L}$ $\Rightarrow$ $L^2-L-2=0$

$$\Rightarrow L=\frac{+1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow L=\frac{1+3}{2}=2.$$

verificando se $L$ é realmente o limite:

$$|K_{n+1}-L|=|\sqrt{2+K_n}-\sqrt{2+L}|=\frac{|(\sqrt{2+K_n}-\sqrt{2+L})(\sqrt{2+K_n}+\sqrt{2+L})|}{\sqrt{2+K_n}+\sqrt{2+L}}$$
$$=\frac{|K_n-L|}{\sqrt{2+K_n}+\sqrt{2+L}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2+K_n}+\sqrt{2+L}}\leq\frac{1}{\sqrt{2+L}}\leq\frac{1}{\sqrt{L}},\quad L>2$$

$$\therefore |K_{n+1}-L|\leq\frac{1}{\sqrt{L}}|K_n-L|$$

(Pelo subexemplo) $\lim K_n=L=\underline{2}$.