Questão 1 (2,5 pontos)

Maximize a função $f(x, y, z) = yz + \overset{3}{xz}$ sujeito a $y^2 + z^2 = 1$ e $xz = 3$.

$$L(x,y,z) = yz + xz - \lambda(y^2+z^2-1) - \mu(xz-3).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = z - \mu z = 0 \Rightarrow \cancel{z=0} \text{ ou } \mu = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = z - 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = z/2y$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = x + y - 2\lambda z - \mu x = 0 \Rightarrow y - \frac{z}{y}.z = 0 \Rightarrow y^2 = z^2$$

$$2y^2 = 1 \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{2}/2, \quad z = \pm\sqrt{2}/2, \quad x = \pm 3\sqrt{2}}.$$

Pontos: $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 3\sqrt{2})$

$(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2})$

$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 3\sqrt{2})$

$(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2})$

Questão 3 (2,5 pontos)

Um fabricante determina que o lucro de venda de x unidades de um produto e y unidades de um segundo produto é modelado por

$$L = 5000 - (x-20)^2 - (y-100)^2.$$

As vendas semanais do produto x variam entre 150 e 200 unidades e as do produto y, entre 80 e 100 unidades. Calcule o lucro médio semanal dos dois produtos.

$$\int_{80}^{100}\int_{150}^{200} (5000 - x^2 + 40x - 400 - y^2 + 200x - 10000)\,dx\,dy$$

$$\boxed{f_{méd} = \frac{1}{A}\iint_D L\,dx\,dy}$$

$(A = 50.20)$

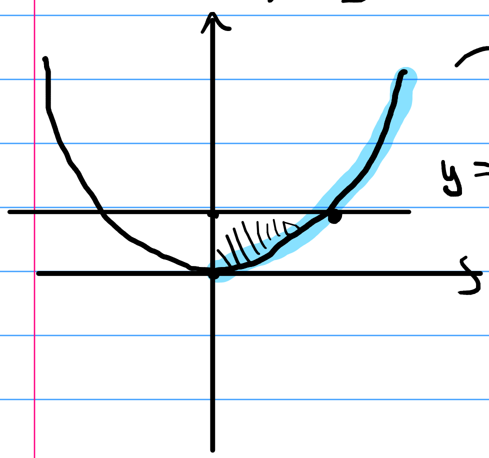
Após fazer as contas, temos

$f_{méd} = -22226{,}67$, configurando um prejuízo médio de R\$ 22.226,67

Questão 1) Calcule a integral $\iint_D \sqrt{y}\, sen(x\sqrt{y})\, dA$,

onde D é a região limitada por

$y = \frac{\pi}{2}$, $y = x^2$ e $x = 0$.



$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{y}\, sen(x\sqrt{y})\, dx\, dy$$

$$\int_0^{\sqrt{y}} sen(u)\, du = -\cos(x\sqrt{y})\Big|_0^{\sqrt{y}} = -(\cos y - 1)$$

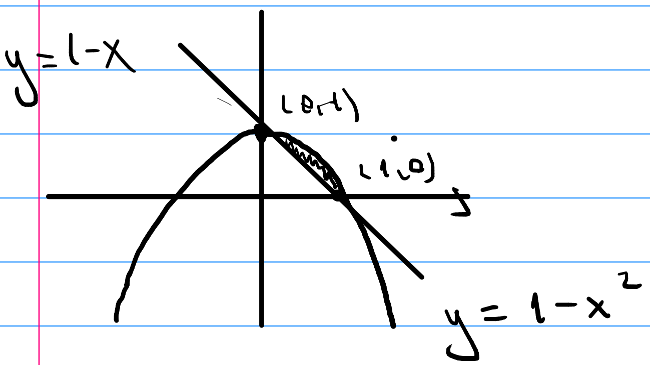
$$= 1 - \cos y .$$

$$\int_0^{\pi/2} (1-\cos y)\, dy = (y - sen\, y)\Big|_0^{\pi/2} = \boxed{\pi/2 - 1}.$$

Questão 2) Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies

$$x - 2y + z = 1 \quad , \quad x + y = 1 \quad , \quad x^2 + y = 1$$

$z = 1 - x + 2y$



$$V = \int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} (1 - x + 2y)\, dy\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{1-x}^{1-x^2} (1 - x + 2y)\, dy = \left(y - xy + y^2\right)\Big|_{1-x}^{1-x^2}$$

$= (1-x^2) - x(1-x^2) + (1-x^2)^2 - \left((1-x) - x(1-x) + (1-x)^2\right)$

$= 1 - x^2 - x + x^3 + 1 - 2x^2 + x^4 - (\cancel{1} - x - x + x^2 + 1 - 2x + x^2)$

$= -x + \cancel{2} - 3x^2 + x^3 + x^4 - \cancel{2} + 4x - 2x^2$

$= x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x$

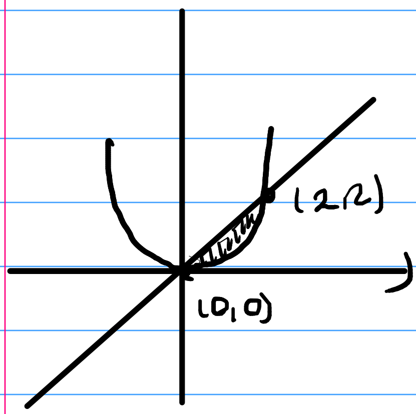
$$\int_0^1 (x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x)\, dx = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - 5 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{12 + 15 - 100 + 90}{60} = \boxed{\frac{17}{60}}$$

Questão 3) Calcule a integral $\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dA$,

onde D é a região de $\mathbb{R}^2$ limitada pela parábola

$y = \frac{x^2}{2}$ e pela reta $y = x$



$$\int_0^2 \int_y^{\sqrt{2y}} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_y^{\sqrt{2y}} 2x/(x^2+y^2)\cdot dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_y^{\sqrt{2y}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(2y+y^2) - \ln 2y^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln y + \ln(y+2) - \ln 2 - 2\ln y\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(y+2) - \ln y - \ln 2\right)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \left(\ln(y+2) - \ln y - \ln 2\right) dy =$$

Integral imprópria, tira $\lim_{y \to 0^+}$

$$\frac{1}{2}\left((y+2)\ln(y+2) - y - y(\ln y - 1) - \ln 2 . y\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[4\ln 4 - 2 - 2(\ln 2 - 1) - 2\ln 2 - 2\ln 2\right] = \ln 2$$

Questão 4) Calcule a área da parte superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

limitada pelo plano $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Como queremos a parte superior, consideramos que $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - 1/2 = 1/2 = (1/\sqrt{2})^2$$

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{1-(x^2+y^2)}}\, dx\, dy$$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{r^2}{1-r^2}}\; r\, dr\, d\theta$$

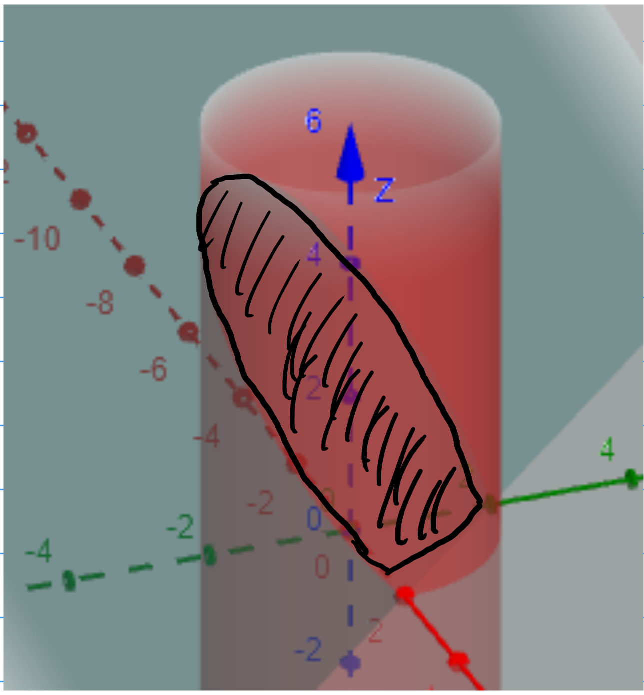
$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}} (1-r^2)^{-1/2}\; r\, dr\, d\theta$$

$$= -1/2 \int_0^{1/\sqrt{2}} (1-r^2)^{-1/2} (-2r\, dr) = -1/2 \left(2 . (1-r^2)^{1/2}\right)\Big|_0^{1/\sqrt{2}}$$

$$= -\left(\sqrt{1-1/2} - 1\right) = 1 - 1/\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} (1 - 1/\sqrt{2})\, d\theta = \boxed{2\pi(1 - 1/\sqrt{2})} = \pi(2 - \sqrt{2})$$

Questão 1) Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $x + y + z = 2$, $z \geq 0$.
Se o metro quadrado do zinco custa ***A*** reais calcule o preço total da peça.



Questão 1 (2,5 pontos)

Se $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, encontre a derivada direcional de g no ponto $(1, 2)$ e na direção do vetor $(1, 1)$. Qual é a taxa máxima de variação da curva no ponto $(1, 2)$? Em qual direção o máximo ocorre?

$\nabla g(x,y) = (2x-4,\ 2y)$

$u = (1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$

$D_u f = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x-4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(2y) \Rightarrow D_u f(1,2) = -2/\sqrt{2} + 4/\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$

$\boxed{= \sqrt{2}.}$ //.

O valor máximo ocorre na direção do vetor gradiente e o seu valor é $\|\nabla g(1,2)\|$

$\Rightarrow \|\nabla g(1,2)\| = \|(-2,4)\| = \sqrt{4+16} = \boxed{2\sqrt{5}}$ //.

Questão 4 (2,5 pontos)

Mostre que a seguinte função é diferenciável:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Devemos ver se $f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\, r^3 \operatorname{sen}^3\theta}{r^2}$$

$$\lim_{r\to 0}\left(r\, \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right) = \lim_{r\to 0} r \cdot \lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\operatorname{sen}^2\theta.$$

como $-\frac{1}{2} \le \frac{\operatorname{sen}2\theta \operatorname{sen}^2\theta}{2} \le \frac{1}{2}$, então $\frac{\operatorname{sen}2\theta \operatorname{sen}^2\theta}{2}$ é limitada. Como $\lim_{r\to 0} r = 0$, então

$$\lim_{r\to 0}\left(r\, \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right) = 0$$

$\therefore f(0,0) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e $f(x,y)$ é contínua no $(0,0)$. Como $\frac{xy^3}{x^2+y^2}$ é contínua em $(x,y) \neq (0,0)$ então $f(x,y)$ é contínua.

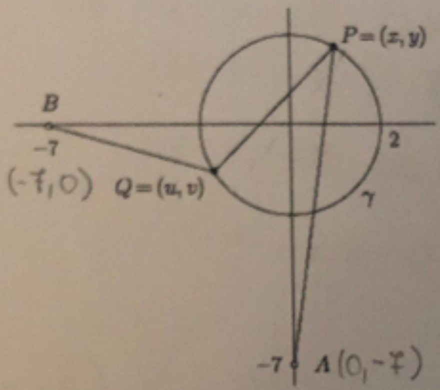
1,0

Questão 1 (1 ponto)

Dados os pontos $A = (0, -7)$ e $B = (-7, 0)$, ache os pontos, P e Q, no círculo de raio 2 e centro $(0, 0)$ tal que a distância

$$|AP|^2 + |PQ|^2 + |QB|^2$$

é máxima.



$$|AP|^2 = x^2 + (y+7)^2$$
$$|PQ|^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2$$
$$|QB|^2 = (u+7)^2 + v^2$$

$$|AP|^2 + |PQ|^2 + |QB|^2 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 14y + 49 + \cancel{x^2} - 2xu + \cancel{u^2} + \cancel{y^2} - 2yv + \cancel{v^2} + \cancel{u^2} + 14u + 49 + \cancel{x^2}$$

$$= 4 + 14y + 49 + 4 + 4 - 2xu - 2yv + 4 + 14u + 49$$
$$= 16 + 98 + 14y + 14u - 2xu - 2yv$$
$$= 114 + 14(y+u) - 2(xu + yv). = L(x, y, u, v)$$

$$\nabla L(x,y,u,v) = (-2u,\ 14 - 2v,\ 14 - 2x,\ -2y)$$

Para achar os pontos críticos, fazemos $\nabla L(x,y,u,v) = 0$. Assim, encontramos:

$$u = 0,\ v = 7,\ x = 7,\ y = 0.$$

Questão 4) Mostre que se $f(x,y) = e^{sen(x+y)}$ e $D = [-\pi,\pi]\cdot[-\pi,\pi]$, então

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2}\iint_D e^{sen(x+y)}dA \leq e$$

É conhecido que se, numa mesma região D, $f(x,y) \geq g(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in D$, então:

$$\iint_D g(x,y)\,dA \leq \iint_D f(x,y)\,dA.$$

Sabemos que, para $[-\pi,\pi]$, $f(x,y) = e^{sen(x+y)}$ satisfaz: $e^{-1} \leq e^{sen(x+y)} = f(x,y) \leq e^1$

e $\frac{1}{e} \leq f(x,y) \leq e$

Como $0 \leq \frac{1}{e} \leq f(x,y) \leq e$ e $D = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$,

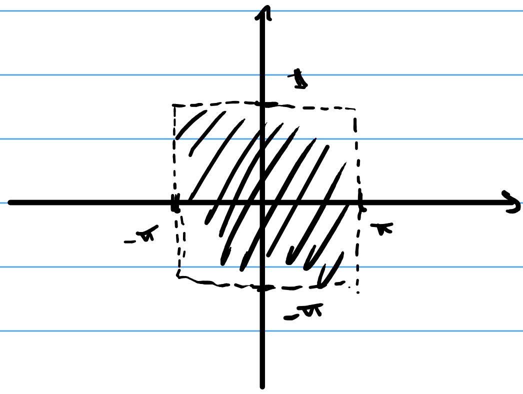
então $0 \leq \frac{1}{e} \leq f(x,y) \leq e$ $\forall (x,y) \in D$. Assim,

vale que

$$\iint_D \frac{1}{e}\,dA \leq \iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D e\,dA.$$

e $\frac{1}{e}\iint_D dA \leq \iint_D f(x,y)\,dA \leq e\iint_D dA$

como $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, então sabemos que D é o quadrado:



Portanto, $A(D) = \iint_D dA = 4\pi^2$

$$\boxed{\text{e} \quad \frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \iint_D f(x,y)\, dA \leq e.}$$

Questão extra: Prove que $\int_0^x \int_0^t F(u)dudt = \int_0^x (x-u)F(u)du$

$\leq u \leq t$ $\uparrow u$ $\uparrow t$

$\int_0^x \int_0^t F(u)\,dudt$ nos indica que

$\begin{cases} 0 \leq u \leq t \\ 0 \leq t \leq x \end{cases} \rightarrow \boxed{0 \leq u \leq t \leq x}$

Assim, para termos $0 \leq u \leq x$, deveríamos fazer uma troca das ordens de integração. Logo, considerando $0 \leq u \leq x$, deveríamos ter $0 \leq t \leq x$ e isso virar $u \leq t \leq x$

Portanto,

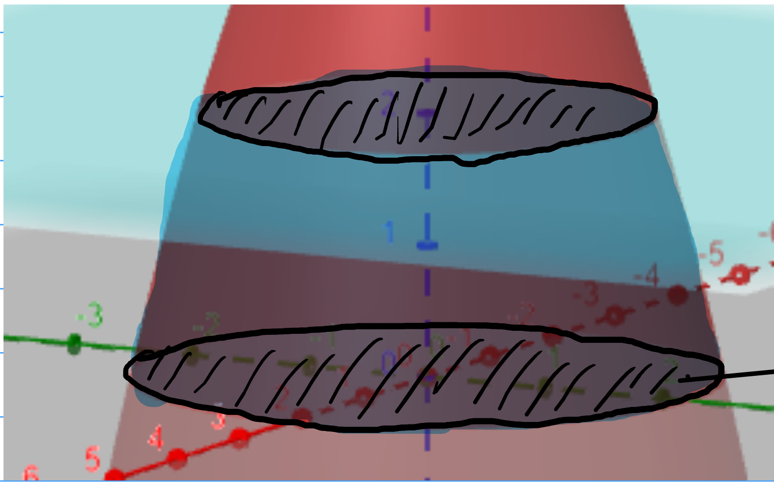
$$\int_0^x \int_0^t F(u)\,dudt = \int_0^x \int_u^x F(u)\,dtdu$$

$$\therefore \int_u^x F(u)\,dt = F(u)\int_u^x dt = (x-u)\,F(u)$$

$$\boxed{\therefore \int_0^x \int_0^t = \int_0^x \int_u^x F(u)\,dtdu = \int_0^x (x-u)\,F(u)\,du}$$

1. Caclule o volume delimitado pela função $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$, o plano $z = -5$ e o plano $z = 2$..

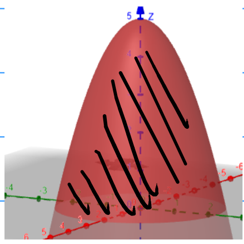
Monitor: Função auxiliar

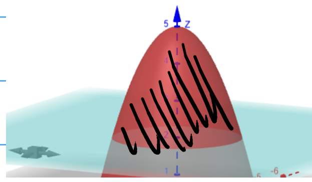


$\rightarrow x^2+y^2=3$

$\rightarrow x^2+y^2=10$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{10}} (10r - r^3)\,dr\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (3r - r^3)\,dr\,d\theta$$





$$\Rightarrow \left(5r^2 - r^4/4\right)\Big|_0^{\sqrt{10}} - \left(3r^2/2 - r^4/4\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= (50 - 25) - (9/2 - 9/4) = 25 - \frac{9}{4} = \frac{91}{4}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} 91/4\, d\theta = \boxed{\frac{91\pi}{2}}$$

2. Seja $f(x,y)$ uma função contínua, diferenciável e positiva tal que para todo $\{(x_0,y_0) \mid x_0^2+y_0^2 \leq 1\}$ temos $5 \leq f(x_0,y_0) \leq 10$. Mostre que:

$$5\pi \leq \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(R\cos(\theta), R\sin(\theta))R\, dR\, d\theta \leq 10\pi$$

Temos que, $\forall (x_0,y_0) \mid x_0^2+y_0^2 \leq 1$, $0 \leq 5 \leq f(x_0,y_0) \leq 10$

Além disso, sabemos que se $0 \leq g(x,y) \leq f(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$ vale

$$\iint_D g(x,y)\,dA \leq \iint_D f(x,y)\,dA$$

Logo, $\displaystyle\iint_D 5\,dA \leq \iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D 10\,dA$

Transformando para coordenadas polares, considerando $D = \{(x_0,y_0) \mid x_0^2+y_0^2 \leq 1\}$.

$$5\iint_D dA \leq \iint_D f(x,y)\,dA \leq 10\iint_D dA$$

↳ Área da região $D = \pi$

$$\boxed{5\pi \leq \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(R\cos\theta, R\sin\theta)\,R\,dR\,d\theta \leq 10\pi}$$

3. Determine a área da superfício $z = \cos(x^2+y^2)$ limitada pelo cilindro $x^2+y^2=1$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\operatorname{sen}(x^2+y^2) \cdot 2x \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\operatorname{sen}(x^2+y^2) \cdot 2y$$

$$\sqrt{1+(\partial z/\partial x)^2+(\partial z/\partial y)^2} = \sqrt{1+4\operatorname{sen}^2(x^2+y^2) \cdot (x^2+y^2)}$$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+(4\operatorname{sen}^2 r^2) \cdot r^2}\; r\,dr\,d\theta \approx 4{,}1073.$$

4. Calcule o valor médio da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ dentro do círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.

$$f_{méd} = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\, dA$$

$$f_{méd} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \, dr \, d\theta \; \boxed{= 2}$$