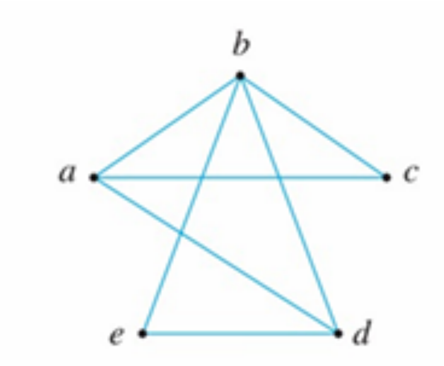
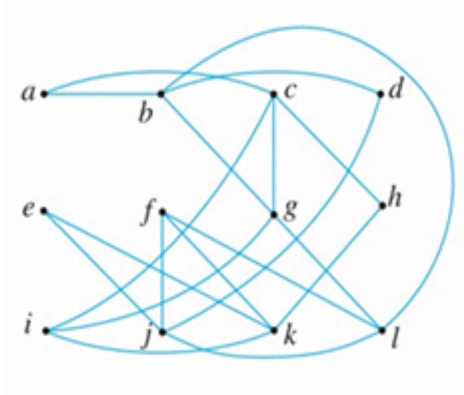
Exercício 1 Nos itens a seguir, mostre que o grafo dado é planar redesenhando-o de forma que não haja cruzamento de arestas.

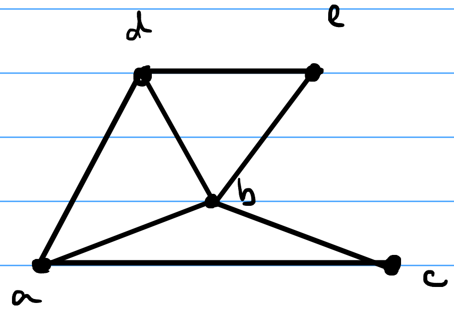
(a)



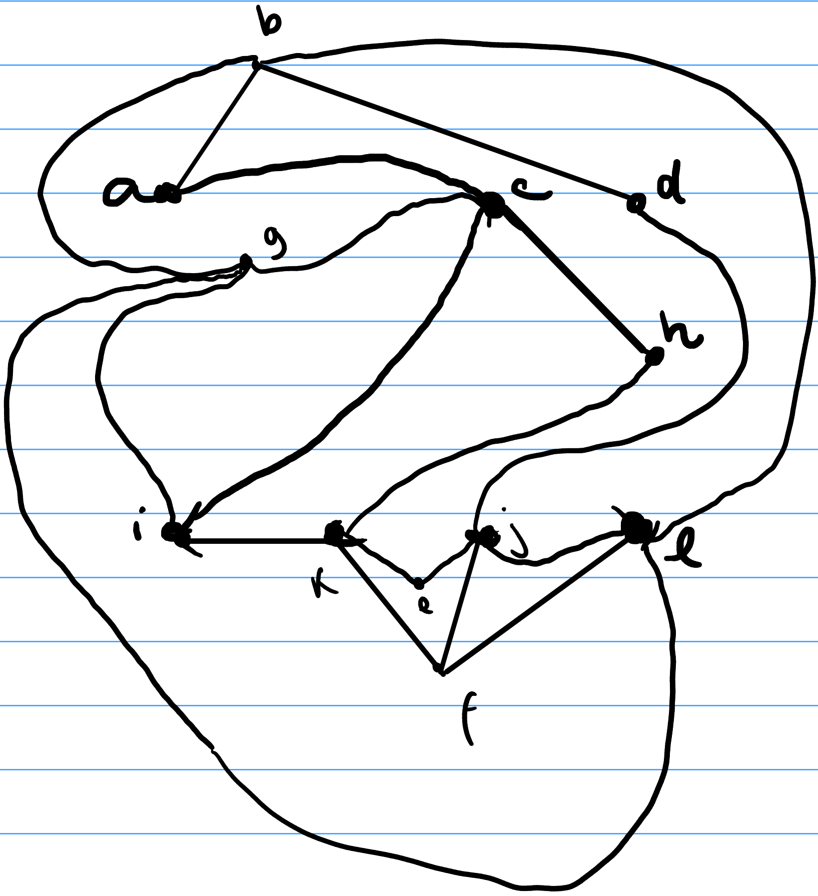
(b)



a)

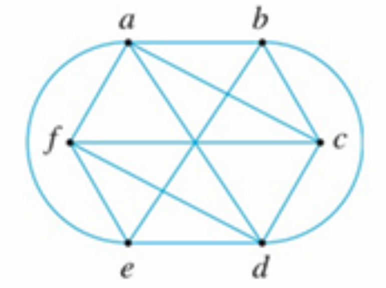


b)

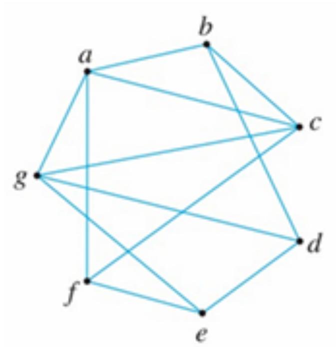


Exercício 2 Nos itens a seguir, mostre que cada grafo dado **não** é planar encontrando um subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.

(a)

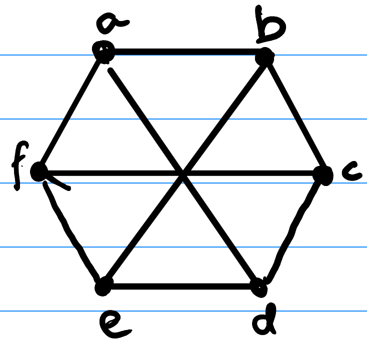


(b)



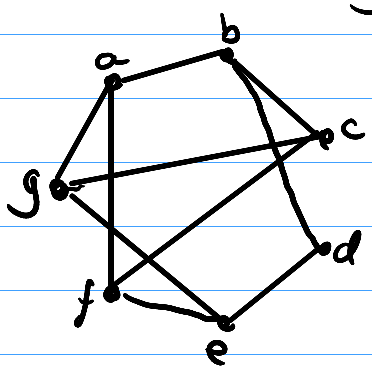
Vamos usar o teorema de Kuratowski.

a) Como temos apenas 3 vértices de grau 4, vamos achar um subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$. Considere o seguinte subgrafo:

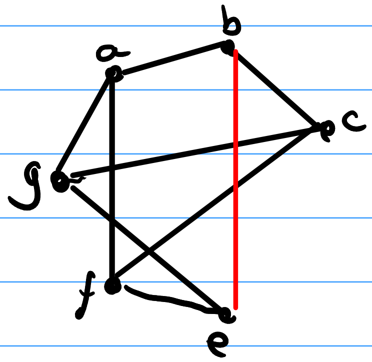


Vemos que ele é isomorfo a $K_{3,3}$. Logo, o grafo não é planar ($V_1 = \{a, c, e\}$, $V_2 = \{b, d, f\}$)

b) Pelo mesmo argumento do item anterior, vamos achar um subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$. Considere o seguinte subgrafo:



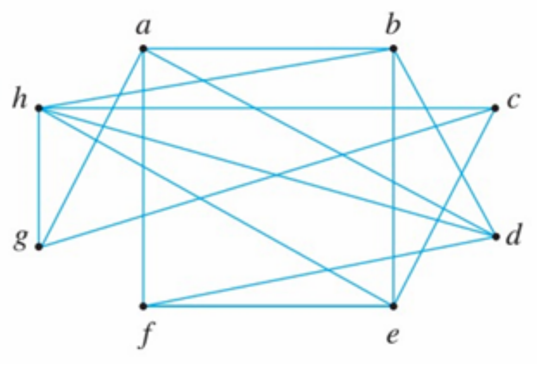
Fazendo a eliminação em série em d, achamos o seguinte subgrafo:

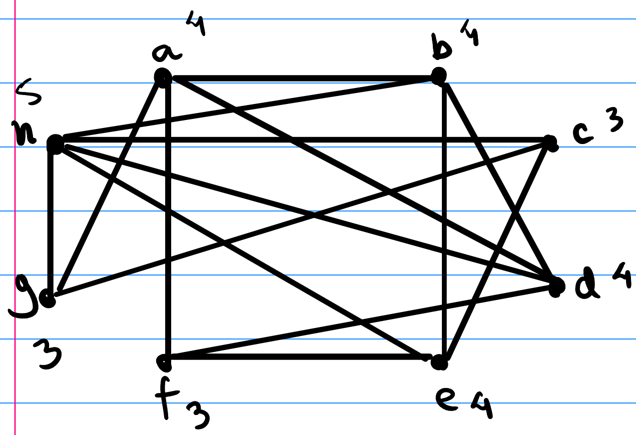


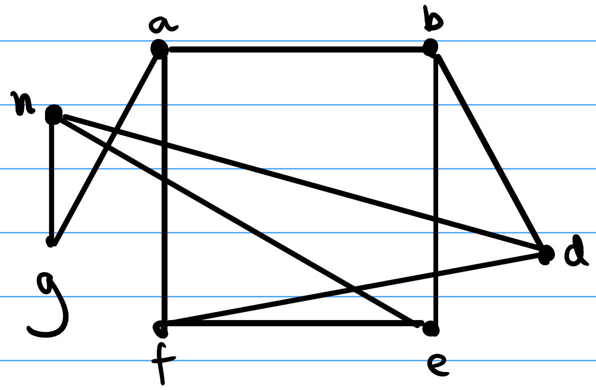
Esse grafo é 3 regular e bipartido, sendo portanto um $K_{3,3}$.

Portanto, achamos um subgrafo do G isomorfo ao $K_{3,3}$ e, por consequência, não é planar ($V_1 = \{a, c, e\}$, $V_2 = \{b, f, g\}$)

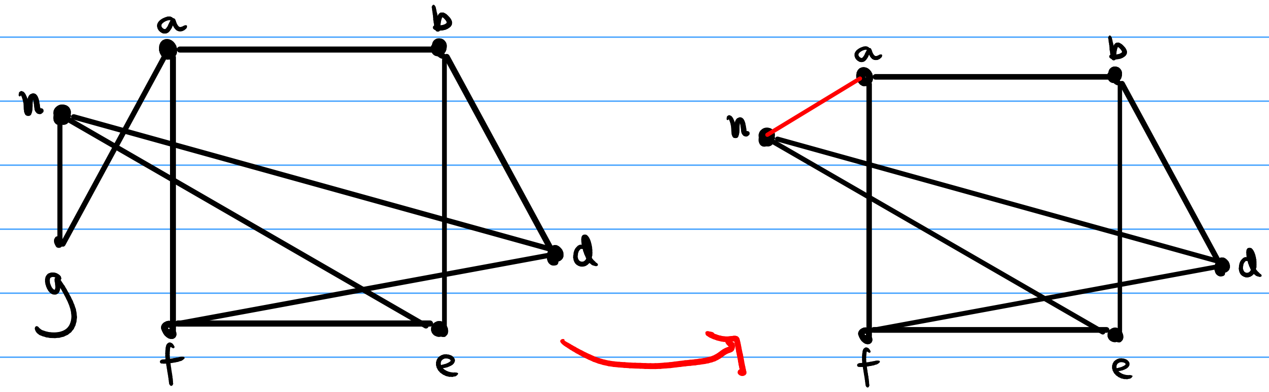
Exercício 3 Determine se o grafo a seguir é planar. Se o grafo for planar, redesenhe-o sem cruzar as arestas; caso contrário, encontre um subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.







Não é planar: considere o subgrafo e sua eliminação em série:



$V_1 = \{a, d, e\}$
$V_2 = \{b, f, h\}$

Exercício 4 Um grafo conexo planar tem nove vértices tendo graus 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2. Quantas arestas esse grafo tem? E quantas faces?

Pelo teorema do Euler para grafos planares:

$$v + f = e + 2$$

Sabemos que $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2e$. Logo, $e = 15$

$\Rightarrow f = 15 + 2 - 9 = 17 - 9 = \boxed{8}$.

Exercício 5 Mostre que qualquer grafo tendo 5 ou menos vértices e um vértice de grau 2 é planar.

Sabemos que para um grafo ser planar, nenhum subgrafo de G deve ser homeomorfo a $K_{3,3}$ e K_5 (teorema de Kuratowski).

Como o grafo tem um vértice de grau 2 e no máximo 5 vértices não conseguimos montar um homeomorfismo com K_5, já que este é 4-regular.

Além disso não podemos montar um homeomorfismo com $K_{3,3}$ pois este possui 6 vértices.

Logo se $G=(V,E)$ e $|V| \leq 5$ e $\exists\, v \in V \mid \delta(v) = 2$, então G não é planar.

Exercício 6 Mostre que em um grafo simples conexo planar vale que $e \leq 3v - 6$.

Cada face da representação planar está delimitada por um ciclo de comprimento maior ou igual a 3. Cada aresta pertence a exatamente 2 ciclos delimitantes. Portanto

$3f \leq 2e$

Da fórmula de Euler: $f = e - v + 2$

$$3(e - v + 2) \leq 2$$

$$e \leq 3v - 6.$$

Exercício 7 Use o Exercício 6 para mostrar que K_5 não é planar.

Temos que K_5 é 4-regular, portanto,

$2e = 5 \cdot 4$

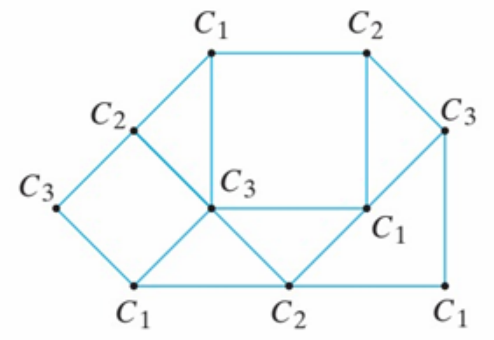
$\boxed{e = 10}$

Como vale $e \leq 3v - 6$ para grafos planares, substituindo $e = 10$ e $v = 5$:

$10 \leq 15 - 6 = 9$, o que é um absurdo.

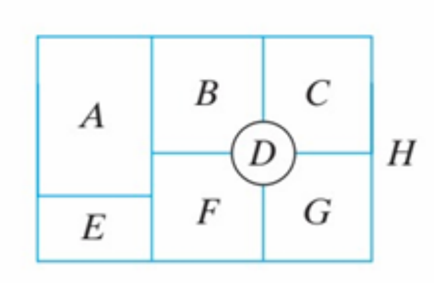
Portanto, K_5 não é um grafo planar.

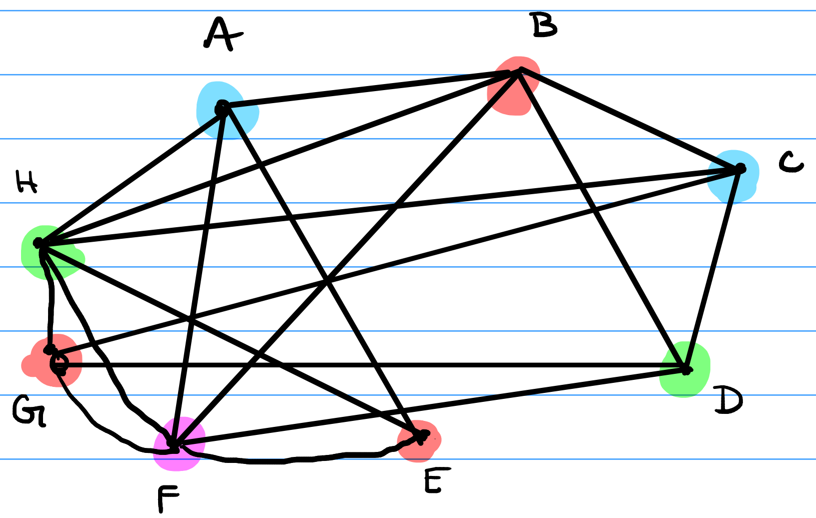
Definição. Uma *coloração* de um grafo G com cores $C_1, C_2, ..., C_n$ associa para cada vértice uma cor C_i de forma tal que todo vértice tenha uma cor distinta a qualquer vértice adjacente. Por exemplo, o grafo a seguir está colorido com três cores. O restante dos exercícios lidam com colorações de grafos planares.



Definição. Um *mapa planar* é um grafo planar onde as faces são interpretadas como regiões, as arestas são interpretadas como fronteiras entre regiões, e os vértices representam as interseções das fronteiras. O problema de colorir um mapa planar G de forma que não haja regiões com uma fronteira em comum com a mesma cor pode ser reduzido para o problema de colorir um grafo. Primeiro construímos o *grafo dual* G' da seguinte forma: Os vértices do grafo dual G' consistem em um ponto de cada face de G, incluindo a face ilimitada; uma aresta de G' conecta dois vértices se as faces correspondentes em G são separadas por uma fronteira. Desse jeito, colorir o mapa G é equivalente a colorir os vértices do grafo dual G

Exercício 8 Encontre o dual do mapa a seguir.

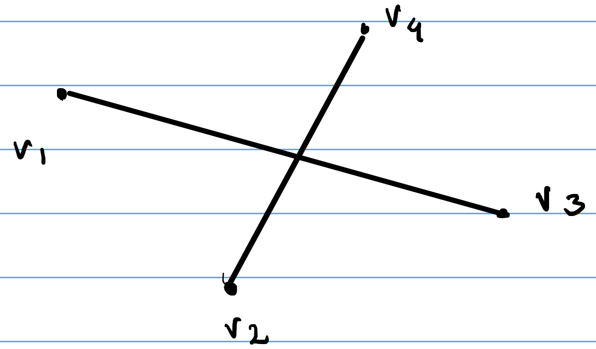




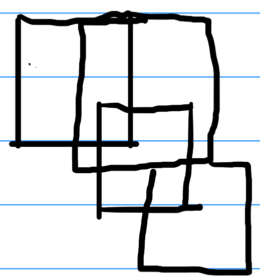
Exercício 9 Mostre que o dual de um mapa planar é um grafo planar.

Sejam $R_1, \dots, R_n$ as regiões do mapa planar e $v_1, \dots, v_n$ os vértices do grafo dual (v_i é a região R_i).

Agora, suponha que o dual não seja planar, ou seja, sem perda de generalidade, ocorre a seguinte estrutura não reversível:



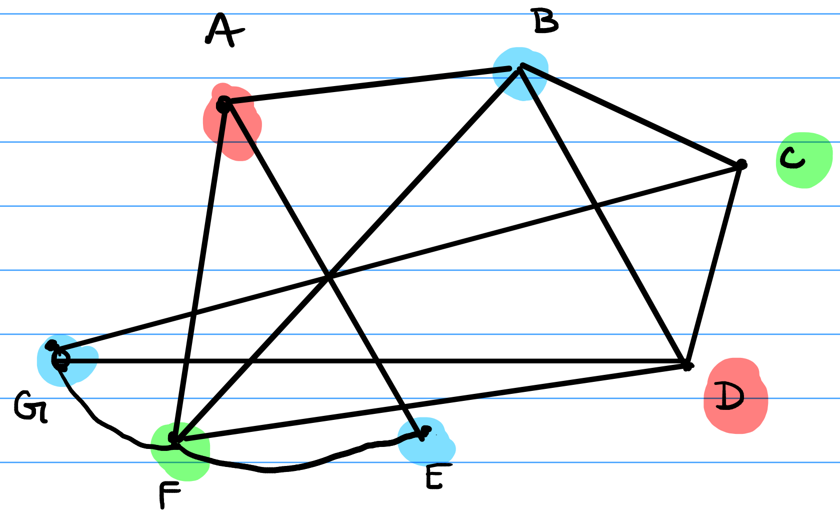
Portanto, sem perda de generalidade R_1, R_2, R_3 e R_4 também se cruzariam com algum grau de superposição:



o que faria o mapa não planar. Logo, todo dual de um mapa planar também é planar (possui ao menos uma representação sem interseção de arestas).

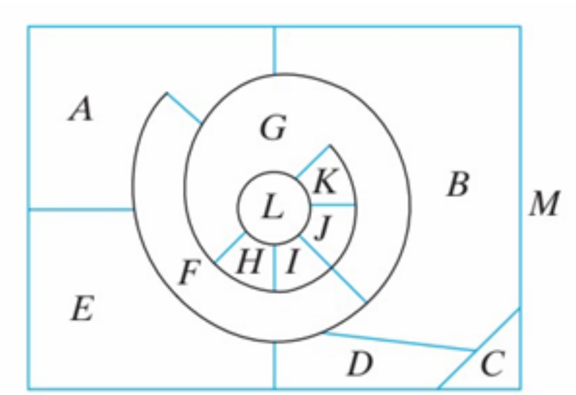
Exercício 10 Mostre que qualquer coloração do mapa do Exercício 8 excluindo a região ilimitada requer pelo menos três cores.

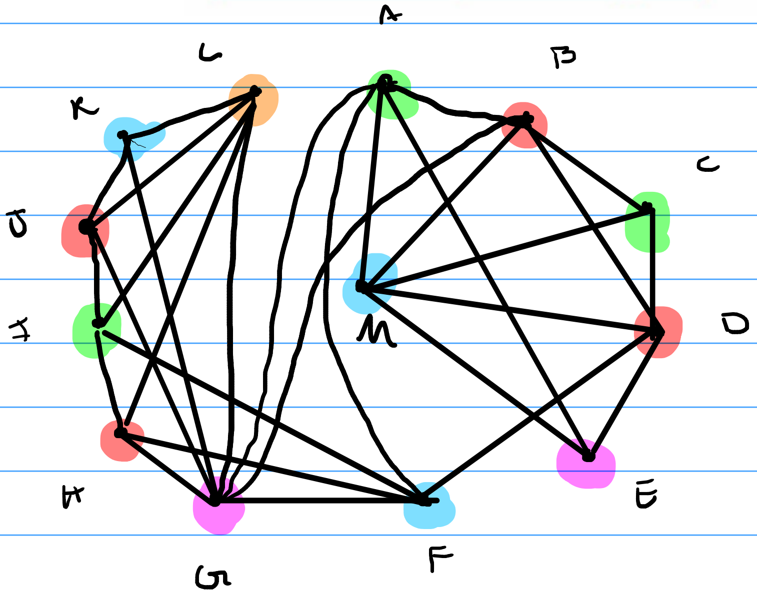
$\blacksquare$



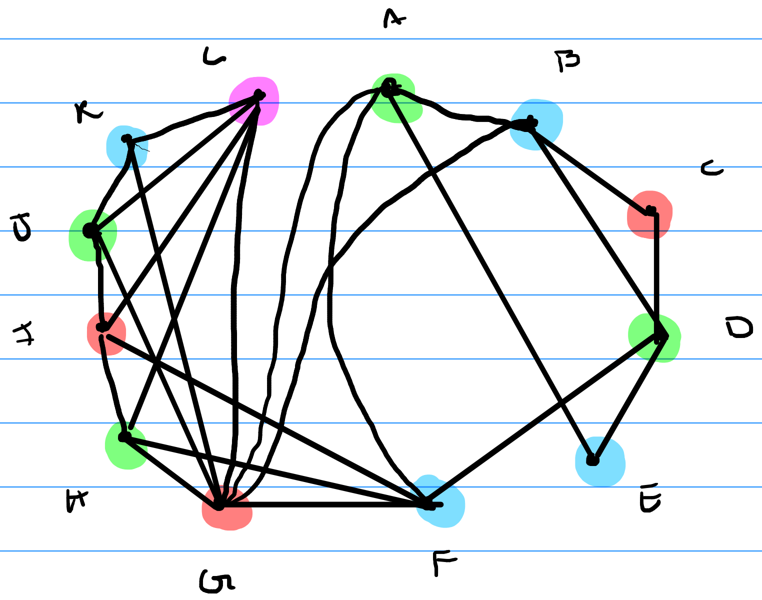
Sabemos que ele é 3-colorível. Contudo, ele não é 2-colorível pois não é bipartido já que possui ciclos de tamanho ímpar.
Logo, ele é 3-cromático.

Exercício 11 Encontre o dual do seguinte mapa.





Exercício 12 Mostre que qualquer coloração do mapa do Exercício 11 excluindo a região ilimitada requer pelo menos *quatro* cores.



L tem grau 5. Observando as outras ligações, podemos colorir os outros vértices com 3 cores (no mínimo, já que não é bipartido).
Portanto, L deverá ter outra coloração.