Lista de Exercícios

1. Mostre que $||x|-|y|| \leq |x-y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$

2. Mostre que se $|a-b| < \epsilon$ então $|a| < |b| + \epsilon$

3. Se $b_1, \dots, b_n$ são números positivos e $\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ pertencem ao intervalo $[A, B)$ então

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n} \in (A, B)$$

4. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas superiormente, isto é, $\{f(x) ; x \in X\}$ e $\{g(x) ; x \in X\}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$ limitados superiormente. Mostre que $f + g : X \to \mathbb{R}$ também é limitada superiormente e que $\sup\{f(x)+g(x) ; x \in X\} \leq \sup\{f(x) ; x \in X\} + \sup\{g(x) ; x \in X\}$

5. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas superiormente e que só assumem valores positivos. Mostre que $f \cdot g$ é limitada superiormente e que

$$\sup\{f(x) \cdot g(x) ; x \in X\} \leq \sup\{f(x) ; x \in \mathbb{R}\} \cdot \sup\{g(x) ; x \in \mathbb{R}\}$$

6. Sejam S, T subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $s \leq t$ sempre que $s \in S$ e $t \in T$. Mostre que $\sup S \leq \inf T$

7. Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e constituído por números positivos. Definimos $-A = \{x \in \mathbb{R} ; -x \in A\}$. Mostre que $-A$ é limitado inferiormente e que $\inf(-A) = -\sup A$

---

① sabemos da definição de módulo:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

$\therefore \; x + y \leq |x| + |y|$

como $|x| + |y| \geq 0$

$\boxed{\text{então } |x+y| \leq |x| + |y|}$ //.

$|x| = |x + y - y|$

$\therefore \; |x| \leq |x-y| + |y|$

e $|x| - |y| \leq |x-y|$

$\boxed{\therefore \; ||x| - |y|| \leq |x-y|}$ //.

(2) Temos que $|a-b| < \varepsilon$. Queremos mostrar que $|a| < \varepsilon + |b|$

$$||a|-|b|| \leq |a-b| < \varepsilon$$
$$||a|-|b|| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$
$$|a|-|b| < \varepsilon$$
$$\boxed{|a| < \varepsilon + |b|}$$

(3) Temos: $b_1, \dots, b_n > 0$.

$$\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \in (A, B)$$

Mostrar que $\dfrac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n} \in (A, B)$

Vamos mostrar o caso geral: Se $b_1, \dots, b_n > 0$ e $\dfrac{a_1}{b_1}, \dots, \dfrac{a_n}{b_n} \in (A, B)$ e $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i b_i} \in (A, B).$$

Sabemos que $\forall i$, vale, $A < \dfrac{t_i a_i}{t_i b_i} < B$.

Como, $t_i, b_i > 0$, então segue que:

$$t_i b_i A < t_i a_i < B t_i b_i$$

$$\therefore A \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i b_i < \sum_{i=1}^{n} t_i a_i < B \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i b_i$$

e $$\boxed{A < \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i b_i} < B}$$ Tomando $t_i = 1$.

$$\boxed{\Rightarrow \quad A < \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} < B}$$ //.

4) $f, g : X \to \mathbb{R}$ limitadas superiormente.

- $A = \{f(x) \mid x \in X\}$ em que $\exists \sup(A), \sup(B)$.
  $B = \{g(x) \mid x \in X\}$

1) Seja $x \in A$ e $K = \sup(A) \therefore x \leq K \ \forall x \in A$, seja $y \in B$ e $L = \sup(B) \therefore y \leq L \ \forall y \in B$. Como $x \leq K$ e $y \leq L$, então $x + y \leq K + L$. Como $x \in A, y \in B$, então $f(x) + g(x) \leq K + L \ \forall x \in X$. Portanto, $f(x) + g(x)$ é limitada

superiormente.

2) Seja $C = \{f(x)+g(x) \mid x \in X\}$. Como $f(x)+g(x) \in C$ e $f(x)+g(x) \leq K+L$ $\forall f(x)+g(x) \in C$, então $\sup(C) \leq K+L = \sup A + \sup B$.

Então $\sup\{f(x)+g(x) \mid x \in X\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in X\} + \sup\{g(x) \mid x \in X\}$

5 $f, g : X \to \mathbb{R}$ limitadas superiormente.

- $A = \{f(x) > 0 \mid x \in X\}$
  $B = \{g(x) > 0 \mid x \in X\}$ em que $\exists \sup(A), \sup(B)$.

1) Seja $x \in A$ e $K = \sup(A)$ $\therefore$ $x \leq K$ $\forall x \in A$. Seja $y \in B$ e $L = \sup(B)$ $\therefore$ $y \leq L$ $\forall y \in B$. Como $x \leq K$ e $y \leq L$, e $x, y > 0$, temos que $x \cdot y \leq K \cdot L$

(*) $a \leq c$, $b \leq d$, $a, b > 0$ $\quad c = a + r$, $d = b + r'$, $r, r' \geq 0$ $\therefore$ $cd = ab + \underbrace{ar' + br + rr'}_{\geq 0}$

$\therefore$ $ab \leq cd$.

Como, $x \in A$ e $y \in B$, então $f(x) \cdot g(x) \leq K \cdot L$ $\forall x \in X$ e $f(x) \cdot g(x)$ é limitada superiormente

2) Seja $C = \{ f(x) \cdot g(x) \mid x \in X \}$. Como $f(x) \cdot g(x) \in C$ e $f(x) g(x) \leq K \cdot L$ $\forall f(x) g(x) \in C$, então $\sup(C) \leq K \cdot L = \sup A \cdot \sup B$.

Então $\sup\{f(x) g(x) \mid x \in X\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in X\} \cdot \sup\{g(x) \mid x \in X\}$

6) $s \leq t$ sempre que $s \in S$ e $t \in T$. $S, T \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{matrix} \sup(S) = y \\ \inf(T) = h \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} s \leq y \ \forall s \in S \\ h \leq t \ \forall t \in T \\ s \leq t \ \forall s \in S, t \in T \end{cases}$$

Sabemos que pelo teorema de Bolzano Wierstrass $\exists (s_n) \in S \mid s_{n+1} \geq s_n$ e $\lim s_n = y$ e $\exists (t_n) \in T \mid t_{n+1} \leq t_n$ e $\lim t_n = h$. Como $s_n \leq t_n$, segue que $\lim s_n \leq \lim t_n$ e $y \leq h$. Como $(s_n)(t_n)$ são seqüências monótonas e S, T são limitados superior e inferiormente, respectivamente, segue que $y \leq h$ e

$$\sup(S) \leq \inf(T).$$

⑦ $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e constituído por números positivos.

Def: $-A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$.

1) Se $-x \in A$ e $a = \sup(A)$, então $-x \leq a \ \forall -x \in A$. Portanto $-a \leq x \ \forall x \in (-A)$. Portanto $-A$ é limitado inferiormente.

2) Seja $b = \inf(-A)$. Como $-A$ é limitado inferiormente temos que $b \leq x \ \forall x \in (-A)$. Além disso, $-x \leq a \ \forall -x \in A$. Logo,

$$b - x \leq x + a \quad \text{e} \quad -x \leq \frac{a-b}{2}$$

Portanto, $\inf(A) = \frac{a-b}{2}$. Dada a unicidade

do infímio, temos $\frac{a-b}{2} = a$ e $b = -a$.

Portanto $\inf(-A) = -\sup(A)$.