Problema 3. (EUA) Para quantos inteiros positivos n entre 1 e 100 é possível fatorar $x^2 + x - n$ como produto de dois fatores lineares com coeficientes inteiros?

Sejam α e β raízes de x^2+x-n $(\alpha, \beta \in \mathbb{Z})$. Logo $\alpha+\beta=-1$ e $\alpha\beta=-n$

$\therefore \beta(\beta+1)=n \Rightarrow n$ é o produto de dois inteiros seguidos.

$\beta=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Logo, há 9 inteiros n. Inclusive, são eles $\{2,6,12,20,30,42,56,72,90\}$.

Problema 4. (ITA) Se a, b, c são as raízes da equação $x^3 - 2x^3 + x - 4 = 0$, determine o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{ab+ac+bc}{abc} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Problema 5. (ITA) As raízes da equação $x^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, com $q, r, s, t \in \mathbb{Q}^*_+$, são L, M, N, P. Determine o valor de

$$\frac{L}{MNP} + \frac{M}{LNP} + \frac{N}{LMP} + \frac{P}{LMN}.$$

$$\frac{L^2+M^2+N^2+P^2}{LMNP}$$

$\cdot (L+M+N+P)(L+M+N+P) = L^2 + LM + LN + LP + LM + M^2 + MN + MP + LN + MN + N^2 + NP + PL + PM + PN + P^2$

$$(L+M+N+P)^2-2(LM+LN+LP+MN+MP+NP)=L^2+M^2+N^2+P^2.$$

$$\frac{L^2+M^2+N^2+P^2}{LMNP}=\frac{(L+M+N+P)^2-2(LM+LN+LP+MN+MP+NP)}{LMNP}$$

$$=\frac{(-q)^2-2.r}{t}=\boxed{\frac{q^2-2r}{t}}_{//}$$

Problema 6. (IME) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2+(m-15)x+m=0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para m.

$$x_1+x_2=15-m$$
$$x_1x_2=m$$
$$x_1x_2=15-(x_1+x_2).$$
$$x_1(x_2+1)=15-x_2.\ -16+16$$
$$(x_1+1)(x_2+1)=16.\ \Rightarrow \{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8;\pm16\}$$

Como queremos apenas as possibilidades de m e as relações são simétricas, basta pegar uma sequência que teremos os possíveis valores de m:

$$\begin{cases} x_1+1=\pm1;\pm2;\pm4 \\ x_2+1=\pm16;\pm8;\pm4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1= 0, -2, 1, -3, 3, -5 \\ x_2= 15, -17, 7, -9, 3, -5 \end{matrix}$$

Valores de $m=\{0,34,7,27,9,25\}$

Problema 7. Os três números distintos a, b, c verificam as igualdades

$$\begin{cases} a^3 + pa + q & = & 0 \\ b^3 + pb + q & = & 0 \\ c^3 + pc + q & = & 0 \end{cases}.$$

Prove que $a + b + c = 0$.

Temos que a, b, c são raízes de $x^3 + px + q$. Fazendo a relação de Girard para obter a soma das raízes:

$$a+b+c = \frac{-0}{1} = 0 \checkmark.$$

Problema 8. Sejam $m, n, k \in \mathbb{Q}$ as raízes de $t^3 + at + b$. Prove que as raízes de $mt^2 + nt + k$ também são racionais.

Raízes de $mt^2 + nt + K \Rightarrow \alpha, \beta$.

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{n}{m}$; $\alpha\beta = \frac{K}{m}$.

Da primeira equação: $m+n+K=0$,

$mn + mK + nK = a$

$mnK = -b$

Se $m+n+K=0$, então 1 é raiz de mt^2+nt+K.

$\therefore \alpha = 1$ e $\beta = \frac{K}{m}$ (ambas racionais).

Problema 9. (ITA) As raízes da equação de coeficientes reais $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Determine o valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

Raízes: $k-1$, k e $k+1$.

$(k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 = 14$

$3k^2 + 2 = 14$

$k = \pm 2 \Rightarrow \boxed{k=2}$

Raízes: 1, 2, 3.

$\therefore\ 6 = -a \quad \Rightarrow 2+3+6 = b$

$6 = -c$

$\Rightarrow a = -6$

$b = 11 \quad \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 2 \cdot 36 + 121 = \boxed{193}$

$c = -6$

Problema 10. Determine o valor da soma $a + b$ para que as raízes do polinômio

$$4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$$

estejam em progressão aritmética de razão $\dfrac{1}{2}$.

Raízes: $k + 1/2$, $k+1$, $k+3/2$ e $k+2$

$\therefore\ 4k + 3 + 2 = 5$

$\boxed{k=0}$ $\quad \boxed{b=0}$.

$\Rightarrow \boxed{a+b=41}$

$4 - 20 + a - 25 = 0$

$a = 45 - 4 = 41$

Problema 1. (ITA) Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira x_1 e uma raiz x_2 (ou seja, as raízes são x_1, x_1 e x_2), distinta de x_1. Determine o valor de $(k + x_1)x_2$.

Raízes : x_1, x_1 e x_2.

Relações de Girard: $\begin{cases} 2x_1+x_2 = -7/2 \\ x_1^2+2x_1x_2 = 2 \\ x_1^2 x_2 = -k/2 \end{cases}$

$x_2 = -7/2 - 2x_1$

$\Rightarrow x_1^2 - 2x_1\left(\frac{7}{2} + 2x_1\right) = 2$

$x_1^2 - 7x_1 - 4x_1^2 = 2$

$3x_1^2 + 7x_1 + 2 = 0$

$x_1 = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6} = -2$ ou $-1/3$

$\boxed{x_1 = -2}$; $\boxed{x_2 = 1/2}$; $\boxed{k = -4}$

$\therefore (x_1 + k)x_2 = -6 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-3}$

Problema 2. Mostrar que $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ é divisível por $(x - 1)$ mas não é divisível por $(x - 1)^2$.

Fazendo $f(1) = 1 + 1 - 10 + 8 = 0 \therefore x - 1 \mid f(x)$.

Fazendo as raízes $1, \alpha, \beta$ e aplicando as relações de Girard:

$1 + \alpha + \beta = -1$; $1 \cdot \alpha\beta = -8$.

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-2 \\ \alpha\beta=-8 \end{cases}$$

Se α ou $\beta = 1$, chegaremos num sistema impossível de ser resolvido

Logo, $x=1$ não possui multiplicidade 2. Portanto, $(x-1) \mid f(x)$, mas $(x-1)^2 \nmid f(x)$.

Problema 3. Verifique se a equação $x^3 - 3x + 8 = 0$ tem raízes iguais.

Faça as raízes serem α, α, α.

$\therefore \alpha+\alpha+\alpha=0$ e $\alpha=0$.

Absurdo.

Faça as raízes serem α, α, β.

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \\ \alpha^2+2\alpha\beta=-3 \\ \alpha^2\beta=-8 \end{cases}$$

$\therefore \beta=-2\alpha$.

$\Rightarrow \alpha^3-3\alpha+8=0$

$\beta^3-3\beta+8=0 \Rightarrow -8\alpha^3+6\alpha+8=0$

$\Rightarrow \alpha^3-3\alpha+\cancel{8} = -8\alpha^3+6\alpha+\cancel{8}$

$9\alpha^3-9\alpha=0$

$\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)=0$

$\alpha\neq 0 \Rightarrow \alpha\neq 1 \Rightarrow \alpha\neq -1$. (Absurdo).

Logo, a equação não possui raizes iguais

Problema 4. Determinar m para que a equação $x^3 - 7x + m = 0$ tenha uma raiz igual ao dobro de uma outra.

Suponha as raizes $a, 2a, b$.

Fazendo as relações de Girard:

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \\ 2a^2 + 3ab = -7 \\ 2a^2 b = -m \end{cases} \qquad \begin{matrix} b = -3a. \\ \Rightarrow 2a^2 - 9a^2 = -7 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = \pm 1 \\ b = \mp 3 \end{matrix}} \\ \end{matrix}$$

$$\therefore \ m = -2a^2 b \ \boxed{= \pm 6}$$

Problema 5. (IME) Seja

$$p(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as cinco raízes de $p(x)$ são números inteiros positivos, sendo quatro deles pares e um ímpar. Determine o número de coeficientes pares de $p(x)$.

Temos que p, q, r, s, t são raízes e p, q, r, s são pares e t é ímpar.

$$\therefore \begin{cases} p + q + r + s + t = -b. \\ pq + pr + ps + pt + qr + qs + qt + rs + rt + st = c \\ pqr + pqs + pqt + qrs + qrt + rst = -d \\ pqrs + pqrt + qrst = e \\ pqrst = -f \end{cases}$$

Analisando a paridade, temos que c, d, e e f são pares

Problema 6. (OCM) Considere todas as retas que encontram o gráfico da função

$$f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$$

em quatro pontos distintos, digamos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Mostre que o valor de $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ é independente da reta e ache esse valor.

Reta: $y = ax + b \Rightarrow$

$\therefore 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5 = ax + b$

$2x^4 + 7x^3 + (3-a)x - 5 - b = 0$

Logo, x_1, x_2, x_3 e x_4 são raízes de

$2x^4 + 7x^3 + (3-a)x - 5 - b = 0$

Por Girard: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -7/2$

$\therefore$ O que queremos é $\boxed{-7/8}$.

Problema 7. (IME) Determine o valor da soma das raízes da equação

$$y^{\frac{3}{2}} + 5y + 2y^{\frac{1}{2}} + 8 = 0.$$

Faça $\sqrt{y} = \alpha \Rightarrow \alpha^3 + 5\alpha^2 + 2\alpha + 8 = 0.$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \therefore \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -5 & \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -8 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 2 & \end{array}}$$

Queremos $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=K$

$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2-2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$

$\Rightarrow K=25-2\cdot 2=\boxed{21}$

Problema 8. São dados $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sabe-se que

$$a+b+c>0,$$

$$bc+ca+ab>0,$$

$$abc>0.$$

Prove que $a>0, b>0, c>0$.

Faça a,b,c serem raízes de
$p(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\theta$

Sabemos que $-\alpha>0 \therefore \boxed{\alpha<0}$
$\boxed{\beta>0}$
$-\theta>0 \therefore \boxed{\theta<0}$

$(a,b,c\neq 0)$

Faça agora $p(x)=x^3-Ax^2+Bx-C$
e faça r uma raiz negativa

$\therefore \underbrace{r^3}_{<0}\underbrace{-Ar^2}_{<0}+\underbrace{Br}_{<0}\underbrace{-C}_{<0}=0$ (Absurdo)

$\boxed{\text{Logo } a>0,\ b>0,\ c>0.}$

Problema 9. Suponha que $t^3 + pt + q = 0$ tenha uma raiz não real $a + bi$, sendo a, b, p, q todos reais e $q \neq 0$. Mostre que $aq > 0$.

Teorema: Se $a+bi$ é raiz, então $a-bi$ também é raiz.

Logo, as raízes são $a-bi$, $a+bi$, r.

Por Girard
$$2a+r=0$$
$$(a^2+b^2)\cdot r=-q$$
$$\underbrace{(a^2+b^2)}_{>0}\cdot 2a=q$$

Se $a>0 \Rightarrow q>0$

Se $a<0 \Rightarrow q<0$

$\therefore$ $\boxed{aq>0, \text{ ambos os casos}}$ //

Problema 10. (OCM) Mostre que 1 é a única raiz real da equação $x^3 + x^2 = 2$.

$p(x) = x^3+x^2-2$

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-2 & x-1 \\ -x^3+x^2 \quad\quad & x^2+2x+2 \\ \hline 2x^2-2 & \\ -2x^2+2x & \\ \hline 2x-2 & \\ 0 & \end{array}$$

$x^3+x^2-2 = (x-1)(x^2+2x+2)$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$ raízes complexas

Outro jeito, por Girard, as raízes são 1, a+bi e a-bi

Problema 11. (ITA) A equação $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$ admite i (unidade imaginária) como raiz. Determine as demais raízes.

Como os coeficientes são reais, então $-i$ também é raiz.

Por girard: $i - i + x = \frac{3}{4}$ $\therefore x = \frac{3}{4}$

Raízes: $\boxed{i, -i, \frac{3}{4}}$

Problema 1. Calcule i^{2011}, i^{2012}, i^{2013}.

$$\begin{cases} i^{2011} = i^{2008} \cdot i^3 = (i^4)^{502} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i. \\ i^{2012} = (-i) i = -i^2 = 1. \\ i^{2013} = i. \end{cases}$$

Problema 2. Calcule o valor de $i^{8n+3} + i^{4n+1}$.

$$i^{8n+3} + i^{4n+1} = i^3 \cdot (i^4)^{2n} + (i^4)^n \cdot i = -i + i \boxed{= 0}$$

Problema 3. Calcule $(1+i)^{2011}$, $(1-i)^{2012}$, $(1+i)^{2013}$.

$$(1+i)^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^4 = -4 \; ; \; (1-i)^2 = -2i \Rightarrow (1-i)^4 = -4$$

- $(1+i)^{2011} = (1+i)^{2008} \cdot (1+i)^2 (1+i) = \left((1+i)^4\right)^{502} \cdot (1+i)^2 (1+i)$
$= (-4)^{502} \cdot 2i(1+i) = 2^{1004} \cdot 2(i-1) \boxed{= 2^{1005}(i-1)}$

- $(1-i)^{2012} = \left((1-i)^4\right)^{503} = (-4)^{503} \boxed{= -2^{1006}}$

- $(1+i)^{2013} = 2^{1005}(i-1)(1+i)^2 = 2^{1005} \cdot (i-1) \cdot 2i = \boxed{2^{1006}(-1-i)}$

Problema 4. Encontre todas as raízes da equação $z^3 = 1$.

$$z^3 - 1 = 0 \Rightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ z = 1 \\ \bullet\ z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ \bullet\ z = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{array}}$$

Problema 5. Encontre as raízes das equações

a) $z^3 = 8$;

b) $z^4 = 81$.

a) $z^3 - 2^3 = 0 \Rightarrow (z-2)(z^2+2z+4) = 0$

$(z-2)((z+1)^2+3) = 0$

- $z = 2$
- $z = -1 + i\sqrt{3}$
- $z = -1 - i\sqrt{3}$

//

b) $z^4 - 9^2 = 0 \Rightarrow (z^2+9)(z^2-9) = 0$

$(z+3)(z-3)(z^2+9) = 0$

- $z = 3$
- $z = -3$
- $z = 3i$
- $z = -3i$

//

Problema 6. Encontre números reais x, y, u, v satisfazendo

$$z = x + i, w = 3 + iy,$$

$$z + w = u - i, zw = 14 + iv.$$

$z + w = (3+x) + (1+y)i$

$zw = (x+i)(3+iy) = 3x + xyi + 3i - y = (3x-y) + i(xy+3)$

$$\begin{cases} 3+x = u \\ 1+y = -1 \\ 3x - y = 14 \\ xy + 3 = v \end{cases}$$

$\boxed{y=-2}$, $\boxed{x=4}$, $\boxed{u=7}$, $\boxed{v=-5}$

Problema 7. Seja $z = a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Encontre condições sobre a e b para que:

a) z^3 seja real;

b) z^3 seja imaginário puro.

a) $(a+bi)^2(a+bi) = (a^2 + 2abi - b^2)(a+bi) = z^3$

$a^3 + a^2bi + 2a^2bi - 2ab^2 - ab^2 - b^3i = z^3$

$(a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3) = z^3 \in \mathbb{R}$

$\therefore 3a^2b - b^3 = 0 \Rightarrow b(3a^2 - b^2) = 0$

$\boxed{b = 0 \text{ ou } b = \pm\sqrt{3}a}$

b) $z \notin \mathbb{R}$

$a^3 - 3ab^2 = 0 \Rightarrow a(a^2 - 3b^2) = 0$ $\boxed{\begin{matrix} a = 0 \\ a = \pm\sqrt{3}\cdot b \end{matrix}}$

Problema 8. Para $z \in \mathbb{C}$, prove que

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}.$$

$\Rightarrow$) Temos uma propriedade que nos diz $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

Neste caso $z \cdot \overline{z} = 1^2 = 1$

$$\boxed{\therefore \overline{z} = \frac{1}{z}}_{//}$$

$\Leftarrow$ $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ $\Rightarrow$ $z \cdot \overline{z} = 1 = |z|^2 \Rightarrow |z| = 1 \ (\geq 0)$

Problema 9. Prove que $|1 + iz| = |1 - iz|$ se, e somente se, z é um número real.

$z = a + bi$ $\Rightarrow$ $1 + iz = 1 + ai - b = (1-b) + ai$

$iz = ai - b$ $\quad$ $1 - iz = 1 + b - ai = (1+b) + ai$

$|1+iz| = |1-iz|$

$= (1-b)^2 + \cancel{a^2} = (1+b)^2 + \cancel{a^2}$

$\cancel{1} - 2b + \cancel{b^2} = \cancel{1} + 2b + \cancel{b^2}$

$4b = 0$

$\boxed{b = 0}_{//}$ Logo, $z \in \mathbb{R}$.

Problema 10. Sejam a e b números reais. Se $a + bi \neq 0$, determine a forma algébrica do número $\dfrac{1}{a+bi}$.

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i$$

Problema 11. (ITA) Seja $z = a + bi$ um número complexo. Se $z + \dfrac{1}{z}$ é um número real, então mostre que $b = 0$ ou $|z| = 1$.

$$z = a+bi$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} + z = \left(a + \frac{a}{a^2+b^2}\right) + \left(b - \frac{b}{a^2+b^2}\right)i$$

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \quad \therefore \quad b - \frac{b}{a^2+b^2} = 0$$

$$\frac{b}{a^2+b^2}\left(1 - (a^2+b^2)\right) = 0$$

$$\boxed{\therefore\ b = 0 \quad \text{ou} \quad a^2+b^2 = |z| = 1}$$

Problema 12. (ITA) Se z_1 e z_2 são números complexos e $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$ são ambos reais, então mostre que z_1 e z_2 são ambos reais ou $z_1 = \overline{z}$.

$z_1 = a + bi$

$z_2 = x + yi$

$z_1 + z_2 = (a + x) + (b + y)i$

$z_1 z_2 = (ax - by) + (ay + bx)i$

$\Rightarrow (z_1 + z_2),\ z_1 z_2 \in \mathbb{R}$

$\therefore \begin{cases} b + y = 0 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = -y \\ ay - xy = 0 \end{matrix} \Rightarrow y \cdot (a - x) = 0$

$\boxed{\begin{matrix} y = 0 \\ b = 0 \end{matrix}}$ ou $\begin{matrix} a = x \\ b = -y \end{matrix}$ $\therefore z_1 = a + bi = x - yi$

$\boxed{z_1 = \overline{z_2}.}$

Ambos reais.

Problema 1. Escreva os seguintes números na forma trigonométrica.

a) 2.

b) $3i$.

c) $1 + i$.

d) $1 + i\sqrt{3}$.

a) $2 \operatorname{cis} 0$

b) $3 \operatorname{cis} \pi/2$

c) $\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \pi/4$

d) $2 \operatorname{cis} \pi/3$

Problema 2. Determine o polinômio de menor grau e com coeficientes reais que possui um número complexo com módulo 1 e argumento $\frac{2\pi}{3}$ como raiz.

Olha a malandragem: Olhe para as raízes cúbicas da unidade $z^3 = 1$

$|z| = 1 \Rightarrow (z-1)(z^2+z+1) \Rightarrow z = cis\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$

$\therefore$ O polinômio que possui $cis(2\pi/3)$ como raiz não é x^3-1 e sim x^2+x+1 (ele quer o menor).

Problema 3. Sejam $x = a + b$, $y = a\omega + b\omega^2$, $z = a\omega^2 + b\omega$, onde $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Calcule $x + y + z$ e expresse $x^3 + y^3 + z^3$ em termos de a e b.

$x+y+z = a(\underbrace{1+\omega+\omega^2}_{0}) + b(\underbrace{1+\omega^2+\omega}_{0}) = 0+0 = \boxed{0}$

$x^3+y^3+z^3 \Rightarrow$ como $x+y+z=0$, então

$x^3+y^3+z^3 = 3xyz$.

$= 3(a+b)(a\omega^2+b\omega)(a\omega+b\omega^2)$

$= 3(a+b)(a^2\omega^3+ab\omega^4+ab\omega^2+b^2\omega^3)$

$= 3(a+b)(a^2+b^2+ab(\omega+\omega^2))$

$= 3(a^3+ab^2+a^2b(\omega+\omega^2)+a^2b+b^3+ab^2(\omega+\omega^2))$

$= 3(a^3+b^3+\cancel{ab^2}+\cancel{a^2b}-\cancel{a^2b}-\cancel{ab^2})$

$\boxed{= 3(a^3+b^3)}$

Problema 4. (EUA) O número complexo z satisfaz $z + |z| = 2 + 8i$. Calcule $|z|^2$.

$z = a+bi$

$$a + bi + \sqrt{a^2+b^2} = 2+8i$$

$$a + \sqrt{a^2+b^2} = 2$$

$$\boxed{b = 8}$$

$$\sqrt{a^2+64} = 2-a$$

$$\cancel{a^2}+64 = 4 - 4a + \cancel{a^2}$$

$$4a = -60$$

$$\boxed{a=-15}$$

$$\boxed{z = -15+8i}$$

$$|z|^2 = 225+64 = \boxed{289}$$

Problema 5. (IME) Dois números complexos z_1 e z_2, não-nulos, são tais que $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$. Mostre que $\frac{z_2}{z_1}$ é imaginário puro.

$z_1 = a+bi$

$z_2 = x+yi$

$$(a+x)^2 + (b+y)^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2$$

$$2ax + 2by + 2ax + 2by = 0$$

$$ax+by=0.$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x+yi}{a+bi} = \frac{(x+yi)(a-bi)}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{ax - bxi + ayi + by}{a^2+b^2} = \frac{(ax+by)}{a^2+b^2} + \frac{(ay-bx)i}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{(ay-bx)i}{a^2+b^2} \quad \text{(imaginário puro)}$$

Problema 6. (IME) Sendo a, b e c números naturais em progressão aritmética e z um número complexo de módulo unitário, determine um valor para cada um dos números a, b, c e z de forma que eles satisfaçam a igualdade

$$\frac{1}{z^a} + \frac{1}{z^b} + \frac{1}{z^c} = z^9.$$

Como o exercício pede para encontrar um valor, podemos tomar $i = z$.

$$\therefore \quad \frac{1}{i^a} + \frac{1}{i^b} + \frac{1}{i^c} = i^9$$

$$\begin{cases} a = b - r \\ b = b \\ c = b + r \end{cases}$$

$$\frac{i^r}{i^b} + \frac{1}{i^b} + \frac{1}{i^b \cdot i^r} = i$$

$$i^{2r} + i^r + 1 = i^{b+r+1}$$

$$(-1)^r + 1 + i^r = i^{b+r+1}.$$

$$-1 + 1 + i = i = i^5$$

$$\boxed{r = 1} \qquad \boxed{b = 3}$$

$$\therefore \boxed{a = 2 \ ; \ b = 3 \ ; \ c = 4}$$

Problema 7. (ITA) Determine todos os números complexos z, que são raízes da equação $|z| - z = 1 + 2i$, sendo i a unidade imaginária.

$$\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right) - bi = 1 + 2i \qquad \{\ z = a + bi$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} - a = 1 \\ -b = 2 \end{cases} \qquad \boxed{b=-2}$$

$$\sqrt{a^2+4} = a+1$$

$$\cancel{a^2}+4 = \cancel{a^2} + 2a + 1$$

$$a = 3/2$$

$$\boxed{z = 3/2 - 2i}$$

Problema 8. (ITA) Considerando z e w números complexos arbitrários e $u = z \cdot w + \overline{z} \cdot \overline{w}$, mostre que o conjugado de u é igual ao dobro da parte real do número $z \cdot w$.

$$u = zw + \overline{zw} \quad (\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{zw})$$

Temos que $\begin{cases} z + \overline{z} = 2\,\text{Re}(z) \\ a+bi + a - bi = 2a \end{cases}$

$$\boxed{\therefore\ zw + \overline{zw} = 2\,\text{Re}(zw) = u = \overline{u}}$$

Problema 9. (ITA) Determine o valor da expressão $|1-z|^2+|1+z|^2$, sendo z um número complexo unitário.

$z = a+bi \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 1$

$|(1-a)-bi|^2 + |(1+a)+bi|^2$

$= (1-a)^2 + b^2 + (1+a)^2 + b^2$

$= 1 - \cancel{2a} + \cancel{a^2 + b^2} + 1 + \cancel{2a} + \cancel{a^2+b^2}$

$= 1+1+1+1 \boxed{= 4}$

Problema 10. (ITA) Determine o produto dos números complexos $z = x+yi$ que têm módulo igual a $\sqrt{2}$ e tais que $y = 2x-1$.

$z = x + (2x-1)i$

$\sqrt{2} = \sqrt{x^2 + (2x-1)^2}$

$2 = x^2 + 4x^2 - 4x + 1$

$5x^2 - 4x - 1 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+20}}{10} = \dfrac{4 \pm 6}{10}$ 1, $-1/5$.

$\boxed{\begin{array}{l} z = 1 + i \\ z = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i \end{array}}$ $\Rightarrow (1+i)\left(-\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i\right) = \boxed{\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i}$

Problema 11. (ITA) Mostre que, resolvendo a equação $z^2 = \overline{2+z}$ no conjunto dos números complexos, todas as raízes são números inteiros.

$z = a+bi \Rightarrow (a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$

$\overline{z+2} = (a+2) - bi$

$$a^2 + 2abi - b^2 = (a+2) - bi$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = a+2 \\ 2ab = -b \end{cases}$$

$$b(2a+1) = 0$$

$$b = 0 \quad \text{ou} \quad a = -1/2$$

Se $a = -1/2 \Rightarrow 1/4 - b^2 = 3/2 \Rightarrow -b^2 = 5/4$ (Absurdo)

$b = 0 \Rightarrow a^2 = a+2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$$(a-2)(a+1) = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} a = +2 \\ a = -1 \end{matrix}} \quad \boxed{z = 2, \ z = -1 \in \mathbb{Z}}$$

Problema 12. (ITA) Sejam x e y números reais, com $x \neq 0$, satisfazendo $(x+iy)^2 = (x+y)i$. Mostre que x é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$.

$$x^2 + 2xyi - y^2 = xi + yi$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = x+y \end{cases} \Rightarrow x = y \text{ ou } x = -y.$$

I) $x = y \Rightarrow \cancel{2}x^2 = \cancel{2}x \Rightarrow x = 0$ ou $\boxed{x=1}$, (Raíz) ✓

II) $x = -y \Rightarrow -2x^2 = 0$ (Absurdo)

Problema 13. Resolva a equação $(z+i)^2 + (z-i)^2 = 2$.

$z = a+bi$

$z^2 + 2zi - 1 + z^2 - 2zi - 1 = 2$

$2z^2 = 4$

$\boxed{z = \pm\sqrt{2}.}$

Problema 14. (ITA) Escreva as formas algébrica e trigonométrica da potência $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$.

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)^{93}$ $\sqrt{2}(1-i) = \sqrt{2}.\sqrt{2}\,\text{cis}(-\pi/4)$

$\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\,\text{cis}(-\pi/4)\right)^{93} = \text{cis}\left(\frac{7.93\pi}{4}\right) = \text{cis}\left(\frac{651\pi}{4}\right)$

$= \text{cis}\left(162\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

1. (ARML) Seja z uma raiz de $x^5 - 1 = 0$, com $z \neq 1$. Determine o valor de $z^{15} + z^{16} + z^{17} + \ldots + z^{50}$.

$x^5 = 1$ (z é raiz)

$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

$z^{15} + z^{16} + z^{17} + \ldots + z^{50} =$

$(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) + (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) + \ldots +$

$(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) + z^{50} = 0 + 0 + \ldots + 0 + 1 \boxed{= 1}$.

2. (AIME) Seja z um número complexo tal que $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos 3°$. Determine o menor inteiro maior que $z^{2000} + \dfrac{1}{z^{2000}}$.

Temos que $z + \bar{z} = 2\rho\cos\theta \Rightarrow z = \rho\,\text{cis}\,\theta$, se $\rho = 1$, então $z \cdot \bar{z} = 1$ e $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

Além disso $z^n + \bar{z}^n = 2\text{cis}\,n\theta \Rightarrow z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\text{cis}\,n\theta$.

- $z^n = \text{cis}\,n\theta$.

$\therefore$ No problema, $\rho = 1$ e $\theta = 3$, pois $z + \bar{z} = z + \dfrac{1}{z} = 2\cos 3°$

e $z^{2000} + \dfrac{1}{z^{2000}} = 2 \cdot \cos(3 \cdot 2000°) = 2\cos 6000°$

$= 2\cos(16 \cdot 360° + 240°) = 2\cos 240° = 2 \cdot \cos(180° + 60°)$

$= -2\cos 60 \boxed{= -1}$.

$\boxed{R = 0}$.

3. (Harvard - MIT) O polinômio $f(x) = x^{2007}+17x^{2006}+1$ tem raízes distintas $r_1, r_2, \ldots, r_{2007}$. Um polinômio P de grau 2007 tem a propriedade que $P\left(r_j + \frac{1}{r_j}\right) = 0$ para $j = 1, \ldots, 2007$. Determine o valor de $\frac{P(1)}{P(-1)}$.

$$(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_{2007}) = x^{2007}+17x^{2006}+1 \quad f(1)=19\,;\ f(-1)=17$$

$$P(x) = \left(x-\left(r_1+\frac{1}{r_1}\right)\right)\left(x-\left(r_2+\frac{1}{r_2}\right)\right)\cdots\left(x-\left(r_{2007}+\frac{1}{r_{2007}}\right)\right)\cdot a$$

$$f(x) = \prod_{k=1}^{2007}(x-r_k)$$

$$P(x) = K\cdot\prod_{j=1}^{2007}\left(x-\left(r_j+\frac{1}{r_j}\right)\right)$$

$$P(1)/P(-1) = \frac{\cancel{K}\prod_{j=1}^{2007}\left(1-\left(r_j+\frac{1}{r_j}\right)\right)}{\cancel{K}\prod_{j=1}^{2007}\left(-1-\left(r_j+\frac{1}{r_j}\right)\right)} = \prod_{j=1}^{2007}\frac{(r_j-r_j^2-1)}{-(r_j+r_j^2+1)}$$

$$\Rightarrow \prod_{j=1}^{2007}\frac{(r_j^2-r_j+1)}{(r_j^2+r_j+1)} = \frac{P(1)}{P(-1)}$$

Faça $\omega^3=1$ e $\omega^2+\omega+1=0$.

$$-1=\omega^2+\omega$$

$$\Rightarrow \prod_{j=1}^{2007} \frac{(r_j^2 - r_j + 1)}{(r_j^2 + r_j + 1)} = \prod_{j=1}^{2007} \frac{(r_j^2 - r_j + w^3)}{(r_j^2 + r_j + w^3)} = \prod_{j=1}^{2007} \frac{(-w-r_j)(-w^2-r_j)}{(w-r_j)(w^2-r_j)}$$

$$= \frac{f(-w) \cdot f(-w^2)}{f(w) \cdot f(w^2)} = \frac{(-w^{2007} + 17w^{2006} + 1)(-w^{4014} + 17w^{4012} + 1)}{(w^{2007} + 17w^{2006} + 1)(w^{4014} + 17w^{4012} + 1)}$$

$$= \frac{(-1 + 17w^2 + 1)(-1 + 17w + 1)}{(1 + 17w^2 + 1)(1 + 17w + 1)} = \frac{17^2}{259} \Rightarrow \boxed{\frac{289}{259}}$$

$$(2+17w^2)(2+17w)$$

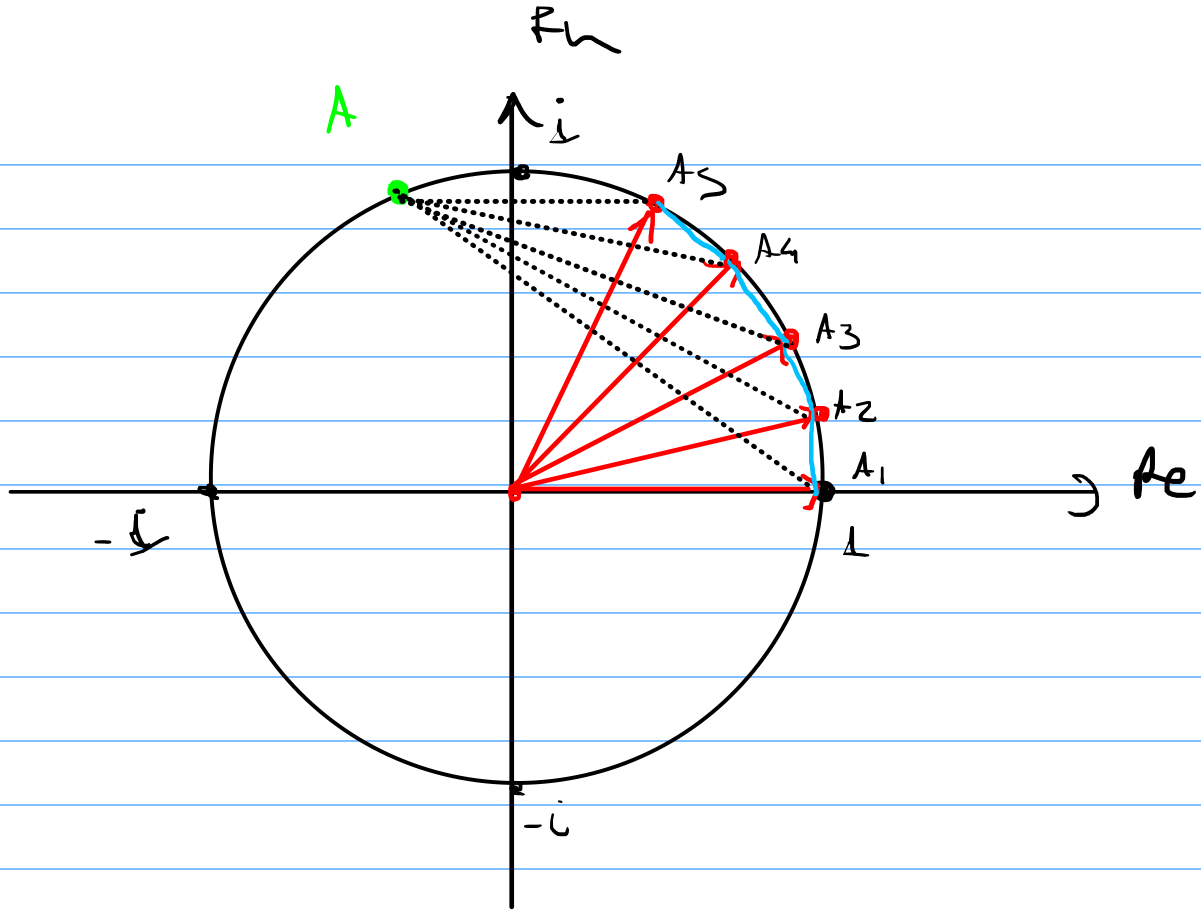
$$4 + 34\cancel{(w + w^2)}^{-1} + 17^2$$

4. (OCM) Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ os vértices de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência unitária S e A um ponto dessa circunferência. Encontre o valor máximo do produto P dos n segmentos $A_1A, A_2A, \ldots A_nA$ e a posição de A para o qual esse máximo ocorre.

Como temos um polígono de n lados e vértices que é regular e está inscrito em uma circunferência unitária, podemos pensar nas raízes n-ésimas da unidade:

Faça $w^n = 1$ e $w^{n-1} + w^{n-2} + \cdots + w + 1 = 0$.

$A_K = \left(\cos \frac{2K\pi}{n}, \operatorname{sen} \frac{2K\pi}{n}\right)$; $A = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.



$$AA_k = \sqrt{\left(\cos\theta - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2}$$

$$AA_k = \sqrt{2 - 2\left(\cos\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)\right)} \qquad \frac{2k\pi}{n} = \alpha_k$$

$$AA_k = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(\theta - \alpha_k)}$$

$$\overline{AA_1} \cdot \overline{AA_2} \cdot \ldots \cdot \overline{AA_n} = \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \sqrt{\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \cos(\theta - \alpha_k)\right)}.$$

$$1 - \cos(\theta - \alpha_k) = 1 - \left(\cos^2\left(\frac{\theta - \alpha_k}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta - \alpha_k}{2}\right)\right)$$

$$= 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta - \alpha_k}{2}\right).$$

$$P = (\sqrt{2})^n \cdot \sqrt{\prod_{k=1}^{n} 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta - \alpha_k}{2}\right)}$$

$$\boxed{P = 2^n \prod_{k=1}^{n} \mathrm{sen}\left(\frac{\theta - \alpha_k}{2}\right).}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \mathrm{sen}\left(\frac{\theta - \alpha_k}{2}\right) = 1 \qquad \boxed{P_{máx} = 2^n}$$

$$\therefore \quad \frac{\theta - \alpha_k}{\cancel{2}} = \frac{\pi}{\cancel{2}} \qquad \theta = \pi + \alpha_k$$

$$\boxed{\theta = \pi + \frac{2k\pi}{n}}$$

▸ **Problema 4**

Determine (se existirem) todos os números inteiros positivos n de modo que a fração $\frac{2n+3}{5n+7}$ seja redutível.

$\text{mdc}(5n+7, 2n+3) = 1.$

$= \text{mdc}(5n+7-2(2n+3), 2n+3)$

$= \text{mdc}(n+1, 2n+3) = (2n+3-2(n+1), n+1) = (1, n+1)$

$= 1$

$\boxed{\text{Todos}}_n$.

▸ **Problema 7**

Determine a soma e o produto das raízes reais da equação

$$x^2 + 18x + 30 = \sqrt{x^2 + 18x + 45}.$$

$x^2 + 18x + 30 = \alpha \qquad \alpha > 0$.

$\alpha^2 = \alpha + 15$

$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1+\sqrt{61}}{2}}$.

$x^2 + 18x + \left(30 - \left(\frac{1+\sqrt{61}}{2}\right)\right) = 0$

$$\begin{cases} a+b = -18 \\ ab = 30 - \left(\frac{1+\sqrt{61}}{2}\right) \end{cases}$$

▸ **Problema 1**

Encontre todas as raízes reais da equação

$$\sqrt{\frac{x^2-2x-2}{x^2+4x+2}}+\sqrt{\frac{x^2+4x+2}{x^2-2x-2}}=2.$$

▸ **Problema 2**

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=0$ $\qquad a,b\neq 0.$

$\frac{a^2+b^2}{ab}-2=0.$

$a^2+b^2-2ab=0.$

$(a-b)^2=0$

$a=b$

$\sqrt{\cancel{x^2}-2x-2}=\sqrt{\cancel{x^2}+4x+2}$

$6x=-4$

$\boxed{x=-2/3}$.

$\boxed{x=-2/3.}$.

5. Prove que para todo natural n e α real satisfazendo $n > 1$ e $\sin\alpha \neq 0$, o polinômio

$$P(x) = x^n \sin\alpha - x\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$$

é divisível pelo polinômio $Q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

$$Q(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2}$$

$$\boxed{x = \cos\alpha \pm i\,\text{sen}\,\alpha}$$

considere $z = \text{cis}\,\alpha$ e $\bar{z} = \text{cis}(-\alpha)$.

Se $z = \text{cis}\,\alpha$ for raiz de $P(x)$, pelo teorema da raiz conjugada, $\bar{z}$ também será raiz de $P(x)$ e $Q(x) \mid P(x)$ (todas as raízes de Q também são raízes de P).

$$P(z) = (\text{cis}\,\alpha)^n \,\text{sen}\,\alpha - \text{cis}\,\alpha\,\text{sen}\,n\alpha + \text{sen}(n-1)\alpha$$

$$= \text{cis}\,n\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{cis}\,\alpha\,\text{sen}\,n\alpha + \text{sen}\,n\alpha\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha\cos n\alpha$$

$$= \cancel{\cos n\alpha\,\text{sen}\,\alpha} + \cancel{i\,\text{sen}\,n\alpha\,\text{sen}\,\alpha} - \cancel{\cos\alpha\,\text{sen}\,n\alpha} - \cancel{i\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,n\alpha}$$

$$+ \cancel{\text{sen}\,n\alpha\cos\alpha} - \cancel{\text{sen}\,\alpha\cos n\alpha} = 0$$

$$\boxed{\text{Logo } P(z) = 0 = P(\bar{z}) \therefore Q(x) \mid P(x)}$$

6. (AIME) A equação

$$x^{10} + (13x-1)^{10} = 0$$

possui 10 raízes complexas $r_1, \overline{r_1}, r_2, \overline{r_2}, r_3, \overline{r_3}, r_4, \overline{r_4}, r_5, \overline{r_5}$. Determine o valor de

$$\frac{1}{r_1\overline{r_1}} + \frac{1}{r_2\overline{r_2}} + \frac{1}{r_3\overline{r_3}} + \frac{1}{r_4\overline{r_4}} + \frac{1}{r_5\overline{r_5}}.$$

$x \neq 0 \Rightarrow \quad 1 + (13 - 1/x)^{10} = 0$

$\begin{cases} \alpha = 1/x \\ 13 - \alpha = w \end{cases} \Rightarrow 1 + (13-\alpha)^{10} = 0$

$w^{10} = -1$.

Usando D' Moivre: $\boxed{w = cis\left(\frac{2k\pi + \pi}{10}\right)}$.

• $(\theta = \pi$, pois quando $k = 0 \Rightarrow cis\,\pi = -1)$.

$\boxed{\alpha_k = 13 - cis\left(\frac{(2k+1)\pi}{10}\right)}$ $\quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$$\alpha_k \cdot \overline{\alpha_k} = \left(13 - cis\left(\frac{(2k+1)\pi}{10}\right)\right)\left(13 - cis\left(-\frac{(2k+1)\pi}{10}\right)\right)$$

$$= 169 - 13\left(cis\left(\frac{(2k+1)\pi}{10}\right) + cis\left(\frac{(2k+1)\pi}{10}\right)\right) + 1 \quad \leftarrow z \cdot \overline{z}$$

$$= 170 - 26\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{10}\right) \quad \leftarrow z + \overline{z}$$

$$170 \cdot 5 - 26 \sum_{k=0}^{4} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{10}\right).$$

$\cos \pi/2 = 0$

$$850 - 26\left(\cancel{\cos\frac{1\pi}{10}} + \cancel{\cos\frac{3\pi}{10}} + \cos\frac{5\pi}{10} + \cancel{\cos\frac{7\pi}{10}} + \cancel{\cos\frac{9\pi}{10}}\right)$$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\boxed{I = 850}_m$

3ª QUESTÃO

Para n inteiro positivo, seja $I_n = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq n-1\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. São dados dois inteiros positivos m e n primos entre si.

(a) Para cada par ordenado $(x, y) \in I_m \times I_n$, prove que existe um único elemento z de I_{mn} tal que $z \equiv x \pmod m$ e $z \equiv y \pmod n$.

(b) Prove que a função $f\colon I_m \times I_n \to I_{mn}$ definida pela regra $f(x, y) \equiv x \pmod m$ e $f(x, y) \equiv y \pmod n$ é bijetiva.

(c) Seja I_n^* o subconjunto de I_n formado pelos seus elementos primos com n, ou seja, $I_n^* = \{x \in I_n \mid (x, n) = 1\}$. Prove que a função $f^*\colon I_m^* \times I_n^* \to I_{mn}^*$, definida por $f^*(x, y) = f(x, y)$, é bijetiva.

a)