1ª QUESTÃO

(a) Determine o menor inteiro positivo cujo dobro é um cubo perfeito e cujo triplo é um quadrado perfeito.

Obs: *Quadrado Perfeito* é o quadrado de um número inteiro. *Cubo Perfeito* é o cubo de um número inteiro.

(b) Se n é um número inteiro, prove que n^2 é ímpar se, e somente se, n é ímpar.

(c) Para todo n inteiro positivo, prove que

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

(d) Considere a seguinte "demonstração" de que 1 é o maior número inteiro:

Seja n o maior número inteiro. Como 1 é inteiro, devemos ter $1 \leq n$. Por outro lado, como n^2 também é inteiro devemos ter $n^2 \leq n$, o que implica $n \leq 1$. Assim, como $1 \leq n$ e $n \leq 1$, devemos ter $n = 1$. Logo 1 é o maior número inteiro, como queríamos demonstrar.

Qual é o erro? O que esse argumento realmente prova?

a) $n \in \mathbb{Z}$ $\quad 2n = K^3.$

$3n = q^2.$

K^3 é par $\therefore$ K é par e $2n = (2K')^3$

$n = 4K'^3$ $\quad$ (n é múltiplo de 4)

q^2 é múltiplo de 3 $\therefore$ q é múltiplo de 3

e $3n = (3q')^2$ $\quad n = 3q'^2$ (n é múltiplo de 3)

$\therefore$ n é múltiplo de 12. $(n = 12\alpha)$

$12\alpha \cdot 2 = K^3$ $\quad K = \sqrt[3]{24\alpha} = 2\sqrt[3]{3\alpha}$

$12\alpha \cdot 3 = q^2$ $\quad q = 6\sqrt{\alpha}.$

$\alpha \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}.$

$\alpha \in \{9, \dots\}$

Portanto, o menor valor de α é 9 e de $n = 12 \cdot 9 = 108$!

b) ($\Rightarrow$) n^2 ímpar $\Rightarrow$ n ímpar

Podemos escrever $n^2 = 2k+1$ (k inteiro não negativo)
$\therefore n^2 - 1 = 2k$ e $(n-1)(n+1) = 2k$
Se n é par, então n-1 e n+1 são ímpares.
No entanto, o produto de dois ímpares não resulta em par. Logo, n é ímpar.

($\Leftarrow$) n ímpar $\Rightarrow$ n^2 ímpar
Faça $n = 2p+1$ (p inteiro não negativo).
$\therefore n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2+2p)+1$
Faça $2p^2 + 2p = p'$ (p' inteiro não negativo).
$\therefore n^2 = 2p' + 1$ e n^2 ímpar.

c) $$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

Perceba que $$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$\therefore \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} + \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n-1}} - \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} - \dots - \frac{1}{2n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{\cancel{2}n+\cancel{1}-\cancel{1}}{2n+1}\right] \boxed{= \frac{n}{2n+1}}$$

d) Do raciocínio desenvolvido no enunciado, o maior inteiro é 1. Contudo, a primeira afirmação feita é falsa. Se $n \in \mathbb{Z}$, $n+1 \in \mathbb{Z}$, portanto n não pode ser o maior inteiro.

Ou seja, o raciocínio é falso pois a base do desenvolvimento é falsa.

Com isso, chegamos que os inteiros não possuem um maior elemento.

2ª QUESTÃO

(a) Determine, com justificativa, o maior número natural n para o qual $n^3 > 2^n$.

(b) Prove que $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$.

(c) Se x é um número real tal que $x + \frac{1}{x}$ é inteiro, prove que $x^n + \frac{1}{x^n}$ também é inteiro, para todo n natural.

a) O maior número natural é 9.

Agora, basta provar que $2^n \geqslant n^3$ par $n \geqslant 10$.

Caso base: $n = 10 \Rightarrow 2^{10} \geqslant 10^3$ ok!

Passo indutivo: super verdadeiro que $2^n \geqslant n^3$ $(n \geqslant 10)$.

Queremos verificar se $2^{n+1} \geqslant (n+1)^3$

Sabemos que $2^{n+1} \geqslant 2n^3$.

Basta provar que $2n^3 \geqslant (n+1)^3$ $(n \geqslant 10)$

$\therefore 2 \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$

Sabemos que se $n \geqslant m$, então $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$.

Testando o menor caso $(n=10)$, temos

$2 \geqslant (1{,}1)^3$ (verdade). Logo, para $n \geqslant 10$

$2 \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$. e $2^n \geqslant n^3$.

b) Frações parciais

c) Fazendo indução forte:

Caso base: $n=1$ $\quad x+\frac{1}{x}$ é inteiro ok!

Fazendo indução forte para $k \le n$, faça

$$x^k + \frac{1}{x^k} \in \mathbb{Z}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) \in \mathbb{Z}$$

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \in \mathbb{Z}$$

Pela hipótese de indução, $x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Portanto, } x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.}$

4ª QUESTÃO

Nesta questão você vai provar a famosa *Desigualdade das Médias*:

> Dados n números reais positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$ quaisquer, é verdadeira a desigualdade
>
> $$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$
>
> Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

(a) Prove a desigualdade das médias para $n = 2$.

(b) Suponha que a desigualdade das médias é verdadeira para $n = 2^k$, com k inteiro positvo. Prove que ela também é verdadeira para $n = 2^{k+1}$.

(c) Suponha agora que a desigualdade das médias é verdadeira para $n = m + 1$, com m inteiro positivo. Considere m números reais positivos quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_m$ e aplique a desigualdade das médias para os $m + 1$ números $x_1, x_2, \dots, x_m, \frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}$. Conclua que a desigualdade das médias também é válida para $n = m$.

(d) Explique por que os itens anteriores implicam que a desigualdade das médias é verdadeira para todos os números naturais n maiores que 1. (Ela também é válida para $n = 1$, mas quem liga pra isso?).

a) Sabemos que $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$

$x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

b) Por indução: Caso base $k=1$, já provado.

Suponha verdadeira para $n = 2^k$

Verificar para $n = 2^{k+1}$.

$$\frac{x_2 + x_4 + x_8 + \dots + x_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{x_2 \cdot x_4 \cdot x_8 \cdot \ldots \cdot x_{2^k}}.$$

(b) Determine o menor número da forma $99\cdots9$ que é divisível por 17.

(c) Prove que $n^5 - n$ é divisível por 30 para todo inteiro n.

b) $10^n - 1 \equiv 0 \pmod{17}$.

$10^n \equiv 1 \pmod{17}$.

$10 \equiv 10 \equiv -7$.

$100 \equiv -2$

$10^3 \equiv 14 \equiv -3$.

$10^4 \equiv 4$

$10^5 \equiv 40 \equiv 6$

$10^6 \equiv -8 \equiv 9$

$10^7 \equiv -12 \equiv 5$

$10^8 \equiv 16 \equiv -1$.

$10^{16} \equiv 1$ ✓.

$10^{16} \equiv 1 \therefore 10^{16} - 1 \equiv 0 \pmod{17}$

$\boxed{n = 16}$.

$\therefore \underbrace{999\ldots9}_{16 \text{ vezes}}$

c) $n^5 - n = n(n^4-1) = n(n^2+1)(n-1)(n+1)$.

$= \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{\text{div por } 6}(n^2+1)$

Pelo pequeno Teorema de Fermat

$a^p - a \equiv 0 \pmod{p} \therefore p \mid a^p - a$

Como 5 é primo então $5 \mid n^5 - n$

Portanto, como $n^5 - n$ é divisível por 5 e 6, então $n^5 - n$ é divisível por 30.

1 a) $\frac{2023^3-1}{1+2023^2+2024^2} = \frac{x^3-1}{1+(x)^2+(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2(x^2+x+1)} = \frac{x-1}{2}$

$=1011$

1 b) $\frac{x}{z} + \frac{z}{y} = 2015 \Rightarrow \frac{xy+z^2}{yz} = 2015$

$\frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 37 \Rightarrow \frac{xy+z^2}{xz} = 37$

$2015\,y\cancel{z} = 37\,x\cancel{z}$ $\qquad \frac{x}{y} = \frac{2015}{37} \Rightarrow 54$

1 c) $z + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} = y + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = x + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = C$

$xyz^2 + y^2z + zx^2 - xy^2z - x^2y - yz^2 = 0$

$xyz(\cancel{z-y}) - yz(\cancel{z-y}) + x^2(\cancel{z-y}) = 0$

$xyz = yz - x^2$

$= xy - z^2$

$= zx - y^2$

$\therefore\ yz - x^2 = xy - z^2$

$\therefore\ x+y+c=0$

$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=0$

Igualando todos os termos a C:

$$\begin{cases} Cxy = xyz + x^2 + y^2 \\ Cyz = xyz + y^2 + z^2 \\ Cxz = xyz + x^2 + z^2 \end{cases}$$

$$C(xy + xz + yz) = 3xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$C(xy + xz + yz) = -(x^2 + y^2 + z^2) + xy + xz + yz + 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$(C+1) = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$C + 1 = 0$$

$$\boxed{C = -1}$$

(2) a) $\boxed{\text{Inteiros: } \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.}$

Provar que para $n \geq 9$ $2^n > 5n^2$.

Para $n = 9$: ok!

Suponha que $2^n > 5n^2$

Verificar que $2^{n+1} > 5(n+1)^2$

Sabemos que $2^{n+1} > 10n^2$

Equivalente a provar que $10n^2 > 5(n+1)^2$

$\Rightarrow 2 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$. Sabemos que, se $m > n$ $(m, n \in \mathbb{Z}_+)$, então $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$.

Como $2 > \left(1+\frac{1}{9}\right)^2$, então $\forall n \geq 9$

$2 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ e $\boxed{2^n > 5n^2}$.

(2) b) $(x_1+x_2+\dots+x_m)^n = \sum\limits_{e_1+e_2+\dots+e_m=n} \binom{n}{e_1, e_2, \dots, e_m} x_1^{e_1} \cdot x_2^{e_2} \dots x_m^{e_m}$

Binômio generalizado

$P(x) = (\overset{x_1}{x^2} + \overset{x_2}{x} + \overset{x_3}{10})^{10}$

x^3: $x \cdot x \cdot x$ e $x^2 \cdot x$ e $x \cdot x^2$

x^3: $x_1 x_2$, $x_2 x_1$ e x_2^3

$\hookrightarrow$ $x_1^1 x_2^1 x_3^8$ e $x_1^0 x_2^3 x_3^7$

$$\binom{10}{1,1,8} + \binom{10}{0,3,7} = \boxed{210}$$

Os coeficientes de x^2+x+1 são simétricos e o polinômio é recíproco

$$P(1/x) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)^{10} = \frac{1}{x^{20}}(x^2+x+1)^{10} = /$$

$$\Rightarrow P(x) = x^{20} \cdot p\left(\frac{1}{x}\right).$$

Temos um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$x^n \cdot p(1/x) = x^n \left(a_n \cdot \frac{1}{x^n} + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{x} + a_0 \right)$$

$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

$$\therefore a_n = a_0 \;;\; a_{n-1} = a_1 \;; \ldots$$

Como (x^2+x+1) é recíproco, então $(x^2+x+1)^{10}$ também é. Logo, $a_3 = a_{17}$.

OUTRA SOLUÇÃO:

$$(x^2+x+1)^{10} = \underbrace{(x^2+x+1)(x^2+x+1)\cdots(x^2+x+1)}_{10 \text{ vezes}}$$

Como escolher x 3 vezes, x^2 0 vezes e 1 7 vezes:

$$\frac{10!}{3!\,7!} = 120$$

Como escolher x 1 vez, x^2 1 vez e 1 8 vezes:

$$\frac{10!}{8!} = 90$$

Soma $= 210$

Como $a_3 = a_{17}$, logo, $a_{17} = 210$

(2) c) $(x+1)^{59} = \sum_{k=0}^{59} \binom{59}{k} x^{59-k}$

$$\sum_{k=30}^{59} \binom{59}{k} = \sum_{k=0}^{29} \binom{59}{k} = \frac{2^{59}}{2} = \boxed{2^{58}}$$

• $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(3) a) Por indução em n

Para $n=1$: OK!
Suponha verdade que $(1+x)^n \geq 1+nx$
Queremos verificar que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Sabemos que $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$
Equivalente a provar que $(1+nx)(1+x) \geq 1+(n+1)x$

$1+x+nx+nx^2 \geq 1+nx+x$
$nx^2 \geq 0$ (o que é verdade)

• $n \geq 0$
• $x^2 > 1$.

③ b) $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ Para $n \geq k \geq 0$ inteiros

Hockey Stick Theorem

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad n \geq k \geq 0$$

Caso base $n = k$ OK!

Suponha que $\binom{k}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

$$\binom{k}{k} + \dots + \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1} \checkmark$$

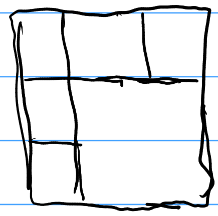
• **Fórmula de Stifel**: $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$

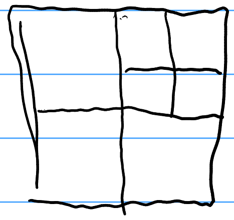
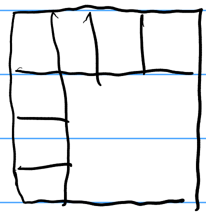
Prova: $\dfrac{n!}{m!(n-m)!} + \dfrac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}$

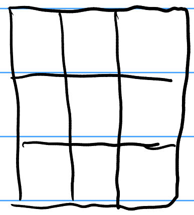
$$= \frac{n!(m+1)}{(m+1)!(n-m)!} + \frac{n!(n-m)}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{n!(n+1)}{(m+1)!(n-m)!}$$

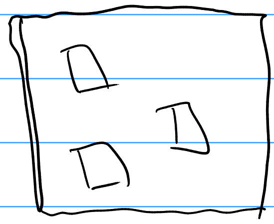
$$= \binom{n+1}{m+1} \quad \text{par} \quad n \geq m \geq 0$$

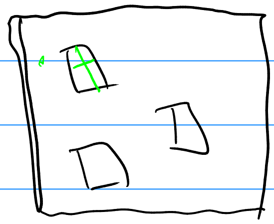
3) c) Provar que um quadrado pode ser dividido em n quadrados para $n \geq 6$

Casos base: $n=6$ 

$n=7$  $n=8$ 

$n=9$: 

Suponha que  tenha n quadrados

 Aqui conseguimos provar para $n+3$.

Logo, para $n=6$, provamos para $3k$, $n=7$ para $3k+1$, $n=8$ para $3k+2$ e o ciclo se repete!

(c) Sabemos que o número real C e números reais não-nulos x, y e z, dois a dois distintos, satisfazem:

$$x+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=y+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}=z+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=C.$$

Mostre que $C=-1$.

$$x^2yz + xy^2 + xz^2 = y^2xz + yx^2 + yz^2 = z^2xy + zx^2 + zy^2 = Cxyz.$$

$$z^2xy + zx^2 + zy^2 - y^2xz - yx^2 - yz^2 = 0.$$

$$xyz(z-y) + x^2(z-y) - zy(z-y) = 0$$

$$\begin{cases} xyz + x^2 - zy = 0. \\ xyz + y^2 - xz = 0 \\ xyz + z^2 - xy = 0 \end{cases}$$

Simetria de problema.

$$\rightarrow x^2 - zy = y^2 - xz = z^2 - xy$$

$$x^2 - y^2 + xz - zy = 0$$
$$(x-y)[(x+y+z)] = 0$$
$$\therefore x+y+z=0 \quad (x \neq y).$$

$$x^2+y^2+z^2 = -2(xy+yz+xz) \Rightarrow xyz = (xy+yz+xz)$$

$$xyz + y^2 + z^2 = Cyz$$
$$xyz + x^2 + z^2 = Cxz$$
$$xyz + y^2 + x^2 = Cxy$$

$$C(xy+xz+yz) = 2(x^2+y^2+z^2) + 3xyz.$$
$$C(xy+xz+yz) = -4(xy+xz+yz) + 3(xy+xz+yz)$$

$$\boxed{C=-1}$$

PASSOS:

1. Colocar todo mundo com denominador xyz e comparar a 1ª e 2ª.

2. Observar e aplicar a SIMETRIA.

3. Comparar as novas equações obtidas da simetria e chegar em $x+y+z=0$

4. $x^2+y^2+z^2=-2(xy+xz+yz)$ e $xyz=(xy+xz+yz)$.

5. Colocar as frações originais com denominador xy, xz, yz

6. Somar tudo e substituir os valores.

(b) Determine os coeficientes de x^3 e de x^{17} no polinômio $(x^2+x+1)^{10}$.

Perceba que x^2+x+1 é simétrico, logo $(x^2+x+1)^{10}$ também é.

Fazendo $(x^2+x+1)^{10} = a_1x^{20}+a_2x^{19}+\dots+a_{19}x+a_{20}$

$\therefore a_1 = a_{20}$; $a_2 = a_{19}$; $a_3 = a_{17}$; ...

Calculando a_3:

$(x^2+x+1)(x^2+x+1)\dots(x^2+x+1)(x^2+x+1)$

Temos que escolher x 3 vezes $(x \cdot x \cdot x = x^3)$, x^2 0 vezes e 1 7 vezes. Além disso, temos que escolher x 1 vez, x^2 1 vez e 1 8 vezes

I) Expressando em uma "frase" para facilitar o raciocínio $xxx1111111$. As formas de ordenar tal frase é $\dfrac{10!}{3!7!} = 120$

II) Fazendo a mesma coisa: $x^2x11111111$
As formas de ordenar são $\dfrac{10!}{1!1!8!} = 90$.

Somando, descobrimos que $120+90 = 210 = a_3 = a_{17}$.

POLINÔMIOS RECÍPROCOS:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 . x + a_0$$

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = a_n . \frac{1}{x^n} + a_{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + a_1 . \frac{1}{x} + a_0$$

Se $x^n . P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x)$, então $P(x)$ é recíproco, pois:

$$P(x) = x^n . P\left(\frac{1}{x}\right) = a_n + a_{n-1} x + \dots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$$

e $\boxed{a_0 = a_n \; ; \; a_1 = a_{n-1} \; ; \; \dots}$

→ CONDIÇÃO DE RECIPROCIDADE!!

OUTRA SOLUÇÃO:

Teorema polinomial.

$$(x_1+x_2+\dots+x_m)^n = \sum_{e_1+e_2+\dots+e_m=n} \binom{n}{e_1,e_2,\dots,e_m} \cdot x_1^{e_1} \cdot x_2^{e_2} \cdot \dots \cdot x_m^{e_m}.$$

$$P(x) = (x^2+x+1)^{10} = \sum_{e_1+e_2+e_3=10} \binom{10}{e_1,e_2,e_3} (x^2)^{e_1} \cdot x^{e_2} \cdot 1^{e_3}$$

Para x^3: I) $e_1=0$, $e_2=3$ e $e_3=7$.

$$\binom{10}{3,7} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$$

II) $e_1=1$, $e_2=1$ e $e_3=8$

$$\binom{10}{1,1,8} = \frac{10!}{8!} = 90$$

Coef. de $x^3 = \underline{210}$.

Para x^{17}: I) $e_1=8$, $e_2=1$ e $e_3=1$

$$\binom{10}{8,1,1} = \frac{10!}{8!} = 90$$

II) $e_1=7$, $e_2=3$ e $e_3=0$.

$$\binom{10}{7,3,0} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$$

Somando, temos que o coef. de x^{17} é $\underline{210}$.

2 OPÇÕES:

I) Combinatória: Escolher os coeficientes e polinômios recíprocos:

II) Teorema polinomial: A fórmula:

$$(x_1+x_2+\dots+x_m)^n = \sum_{e_1+e_2+\dots+e_m=n} \binom{n}{e_1, e_2, \dots, e_m} \cdot x_1^{e_1} \cdot x_2^{e_2} \cdot \dots \cdot x_m^{e_m}$$

(c) Determine a soma dos últimos 30 coeficientes do polinômio $(x+1)^{59}$.

$$(x+1)^{59} = \sum_{k=0}^{59} \binom{59}{k} \cdot x^{59-k} \cdot 1^{k} = \sum_{k=0}^{59} \binom{59}{k} x^{59-k}$$

Perceba que os coeficientes serão $\binom{59}{0}, \binom{59}{1}$, etc...

Perceba também que temos 60 fatores

e $\binom{59}{0} = \binom{59}{59}, \binom{59}{1} = \binom{59}{58}, \dots \binom{59}{29} = \binom{59}{30}$.

O que queremos: $\sum_{30}^{59} \binom{59}{k}$

Sabemos, portanto, que $\sum_{k=0}^{29} \binom{59}{k} = \sum_{k=30}^{59} \binom{59}{k}$

e $\sum_{k=0}^{59} \binom{59}{k} = 2^{59}$ (teorema das linhas).

Logo, $\sum_{k=30}^{59} \binom{59}{k} = \frac{2^{59}}{2} \boxed{= 2^{58}}$

(b) Para $n \geq k \geq 0$ inteiros, mostre que

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Vamos fazer uma indução em n.

Caso base: $n=k \Rightarrow \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ ok!

Suponha verdade que $\binom{k}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

Queremos verificar que $\binom{k}{k} + \dots + \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}$

Sabemos que $\binom{k}{k} + \dots + \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}$

Pelo teorema de Stifel

$$\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}$$

$\therefore$ Pela indução, $\sum_{i} \binom{i}{k}$

PEQUENO TEOREMA DE FERMAT

$p \mid (a+b)^p - a^p - b^p$ (p primo e $a,b \in \mathbb{Z}$)

$p \mid a^p - a$.

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} \cdot b^k$$

$$= a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \dots + \binom{p}{p-1} a b^{p-1} + b^p$$

$$(a+b)^p - a^p - b^p = \binom{p}{1} a^{p-1} b + \dots + \binom{p}{p-1} a b^{p-1}.$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} \cdot a^{p-j} \cdot b^j$$

$$\underbrace{\binom{p}{j}}_{\in \mathbb{Z}} = \frac{p!}{j!(p-j)!} = \overset{\text{primo}}{p} \cdot \overset{\in \mathbb{Z}}{\frac{(p-1)!}{j!(p-j)!}}$$

Como p é primo, $j!(p-j)! \mid (p-1)!$ $\wedge$

$$\frac{(p-1)!}{j!(p-j)!} \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} \cdot a^{p-j} \cdot b^{j} = p \cdot \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{j!(p-j)!} \cdot a^{p-j} b^{j}$$

$$\therefore p \mid (a+b)^p - a^p - b^p$$

Provar que $p \mid a^p - a$

$p \mid a^p - a$

$p \mid (a+1)^p - (a+1)$

$p \mid (a+1)^p - a^p - 1 + a - a$

$p \mid (a+1)^p - (a+1)$ $\quad a^p$

$p \mid -(a^p - a)$.

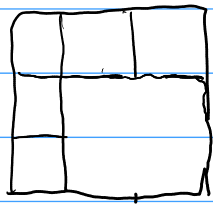
$\therefore p \mid (a+1)^p - (a+1) - (a^p - a)$

$\therefore \boxed{p \mid a^p - a}$

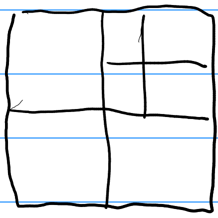
(c) Prove que um quadrado pode ser dividido em n quadrados para $n \geq 6$.

Provaremos por uma indução diferenciada.

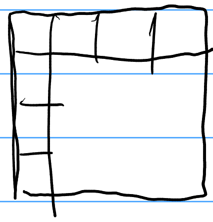
Casos base: $n=6$



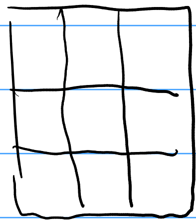
$n=7$:



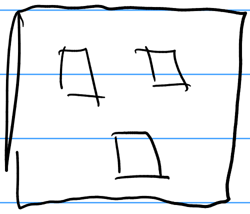
$n=8$:



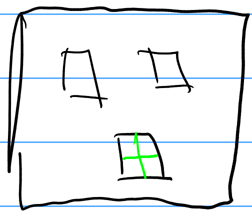
$n=9$:



Agora, pense que esse quadrado possui n quadrados



Uma forma de fazer mais quadrados é:



Dessa forma, de n, conseguimos provar para $n+3$.

Ou seja, do $n=6$, conseguimos provar para os casos $n=3K$ ($K \in \mathbb{Z}$, $K \geq 2$).
Do $n=7$ provamos para $n=3K+1$
Do $n=8$ provamos para $n=3K+2$
Do $n=9$ provamos para $n=3K+3$

Com isso, concluimos que todo quadrado pode ser dividido em n quadrados $(n \geq 6)$!

$$p \mid (a+b)^p - a^p - b^p$$

$b = a$

$$p \mid (2a)^p - a^p - a^p = 2^p a^p - 2a^p = a^p(2^p - 2)$$

$$b = (r-1)a$$

$$p \mid (a + (r-1)a)^p - a^p - [(r-1)a]^p$$

$$p \mid a^p[1 + r - 1]^p - a^p - a^p(r-1)^p$$

$$p \mid a^p[r^p - 1^p - (r-1)^p]$$

$$r = (1 + (r-1))$$

$$p \mid r^p - 1^p - (r-1)^p = [1 + (r-1)]^p - 1^p - (r-1)^p$$

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

I) a múltiplo de p.

$0^p \equiv 0 \pmod{p}$ ✓

II) a não é múltiplo de p.

$\text{mdc}(a, p) = 1$.

$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$

$a^p (p-1)! \equiv -a^p$