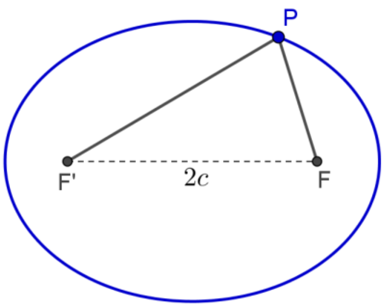
Elipse
1ª parte

Esta é a primeira aula sobre as cônicas: elipse, hipérbole e parábola. Elas se chamam cônicas porque podem ser obtidas pela seção de uma superfície cônica com um plano adequado. Vou mostrar isso mais adiante. Entretanto, cada uma delas possui definição própria e isso é que vai nos interessar agora. Falaremos hoje da elipse e preciso que você tenha toda a sua atenção na sua definição porque tudo o que vai ocorrer, a seguir, dependerá dela.
No centro do campo de futebol há uma circunferência, mas quem está na arquibancada vê essa circunferência assim:

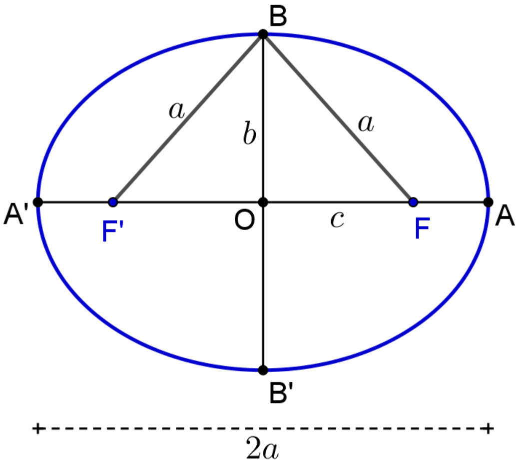
Uma circunferência quando vista em perspectiva assume uma forma achatada e o nome dessa curva é *elipse*.
Vamos, a seguir, definir precisamente essa curva e descobrir algumas de suas propriedades.

Definição de elipse

Sejam F e F' dois pontos fixos. Seja $FF' = 2c$.
Considere um número $2a > 2c$.
Chama-se *elipse* de focos F e F' com eixo maior $2a$ o lugar geométrico do ponto P tal que $PF + PF' = 2a$.



A elipse possui dois eixos de simetria: AA' e BB' da figura a seguir. Esses eixos cortam-se em O, o centro da elipse.
Pela simetria em relação ao eixo vertical temos que $A'F' = AF$ e como o ponto A está na elipse então $AF + A'F' = 2a$ e, portanto, $AA' = 2a$.



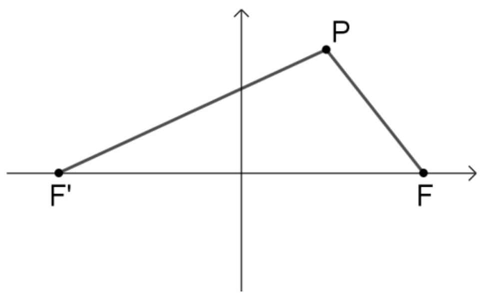
Observe agora o ponto B. Como ele está no eixo vertical de simetria da elipse e que é a mediatriz de FF' temos $BF = BF'$. Como $BF + BF' = 2a$ temos que $BF = BF' = a$.
Representaremos $OB = OB' = b$ e, pela definição, $OC = OC' = c$.
Os elementos da elipse são:
Eixo maior: $AA' = 2a$
Eixo menor: $BB' = 2b$
Distância focal: $FF' = 2c$
A relação clara entre esses elementos é o teorema de Protágoras no triângulo OBF:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A equação da elipse

Passamos agora a descobrir a equação da elipse introduzindo um sistema de eixos na posição mais favorável: origem em O e eixo X passando por F.

$$F = (c, 0)$$
$$F' = (-c, 0)$$
$$P = (x, y)$$
$$PF + PF' = 2a$$



Acompanhe as contas com atenção. Como PF e PF' envolvem raízes quadradas, vamos começar passando um desses termos para o outro lado:

$$PF' = 2a - PF$$

Elevamos ao quadrado:

$$(PF')^2 = 4a^2 - 4a \cdot PF + (PF)^2$$

Colocando as coordenadas:

$$(x + c)^2 + (y - 0)^2 = 4a^2 - 4a \cdot PF + (x - c)^2 + (y - 0)^2$$

Desenvolvendo e arrumando ficamos com:

$$4cx = 4a^2 - 4a \cdot PF$$

Ou seja,

$$a \cdot PF = a^2 - cx$$

Elevando ao quadrado e substituindo $(PF)^2$ em função das coordenadas, temos:

$$a^2[(x-c)^2 + (y-0)^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

Desenvolvendo,

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

Simplificando e começando a arrumar,

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Lembrando que $a^2 = b^2 + c^2$ temos que $a^2 - c^2 = b^2$. Daí a equação fica:

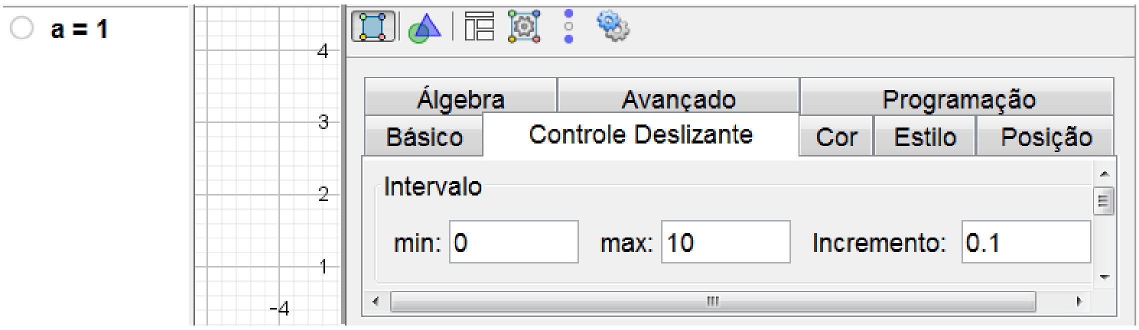
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo por a^2b^2 temos a equação da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Bonita, não? Repare que tudo o que precisamos são os comprimentos a e b dos semi-eixos maior e menor. Vamos, a seguir, conhecer todas as elipses usando o Geogebra.

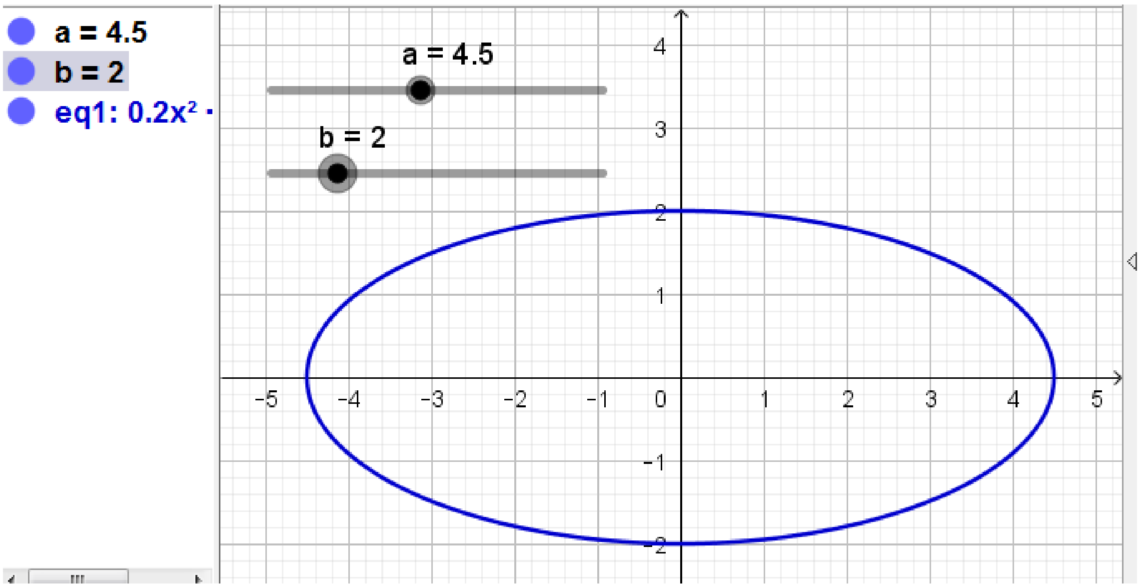
Exercício 1 (para fazer agora)
- Abra o Geogebra
- Desloque a origem do sistema de coordenadas para o centro da sua tela. Para isso, mantenha pressionada a tecla SHIFT e use o mouse para arrastar o plano inteiro.
- Escreva na barra de entrada $a = 1$ (enter)
- Sobre $a = 1$ clique com o botão direito do mouse. Abre-se uma janela.
- Selecione Propriedades. Nessa janela selecione Controle deslizante.
- Coloque os valores: min = 0,   max = 10   incremento = 0.1



Feche essa janela
- Escreva na barra de entrada $b = 1$ (enter)
- Repita o procedimento que você fez para a.

Agora você tem dois números que pode manipular

- Na barra de entrada digite a equação da elipse: x^2/a^2+y^2/b^2=1 (enter)
Apareceu uma pequena circunferência porque, nesse momento você tem $a = 1$ e $b = 1$. Para modificar esses números selecione $a = 1$ por exemplo. Com as setas ↑ e ↓ você pode aumentar e diminuir o valor de a. Mesma coisa com b você tem todas as formas e tamanhos possíveis da sua elipse.
Se preferir, clique em um dos números com o botão direito do mouse e selecione Exibir objeto. Nesse caso você verá uma barra que permite variar o valor do número arrastando o ponto para a direita ou para a esquerda.
O resultado é o que você vê abaixo.



Salve essa construção.

A excentricidade

Considere aqui apenas elipses com $a > b$. A metade da distância focal é fácil de calcular: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. A forma da elipse é caracterizada por um número chamado *excentricidade* e definido por

$$e = \frac{c}{a}$$

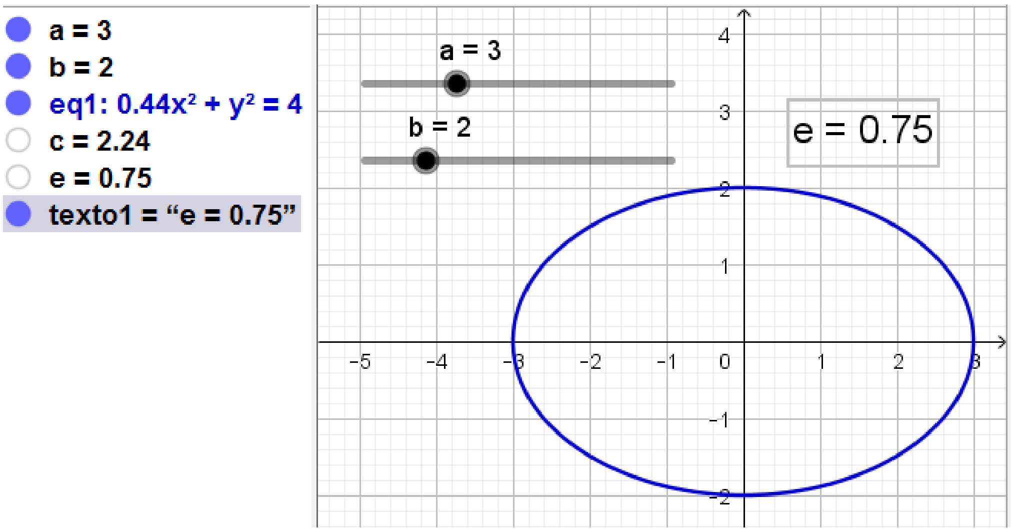
É claro que $0 < e < 1$. Quando $e \to 0$ a elipse se aproxima da circunferência e quando $e \to 1$ a elipse fica muito comprida e fina.

Exercício 2
A órbita da Terra em torno do Sol é uma elipse, e o Sol ocupa um dos focos. As distâncias mínima e máxima da Terra ao Sol são de 148 e 152 milhões de quilômetros, respectivamente. Determine a excentricidade da órbita da Terra.
Resposta: $e = 1/75 \cong 0{,}0133$. A órbita é quase uma circunferência.

Vamos agora continuar o exercício 1

Exercício 3
Volte ao arquivo Geogebra do exercício 1 que você salvou.

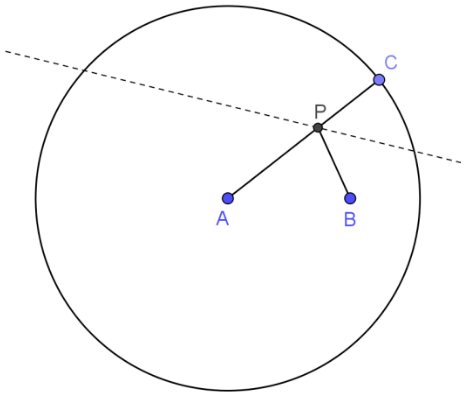
- calcule a semidistância focal digitando na barra de entrada: c=sqrt(a^2-b^2)   (enter)
Você tem o valor de c.
- digite na barra de entrada: e=c/a   (enter)
Você tem a excentricidade.
É possível colocar esse valor junto da elipse como você vê na figura a seguir. Mas não se preocupe com isso agora. Você tem o valor da excentricidade na Janela de Álgebra do Geogebra.
- Manipule os valores dos semieixos e observe como varia a excentricidade. Associe visualmente a forma da elipse e sua excentricidade.



Construção da elipse
Abra o Geogebra.
Em Opções, selecione Avançado
Abra a segunda janela: Preferências – Janela de visualização.
Retire a opção Exibir eixos.
Em Malha, retire a opção Exibir Malha.
Pronto, você tem uma página em branco.

Assinale um ponto A no centro da página.
Construa uma circunferência grande de centro A.
Assinale um ponto B no interior da circunferência.
Assinale um ponto C sobre a circunferência.

Construa o segmento AC, a mediatriz de BC e a interseção deles que você vai chamar de P. Vai ficar assim:



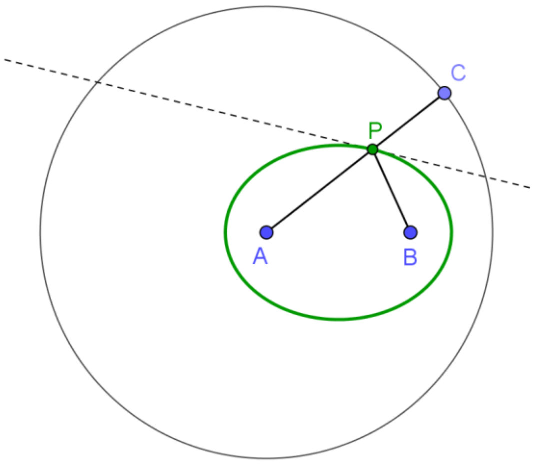
Exercício 4

Prove que P pertence a uma elipse de focos A e B.

Para visualizar essa elipse na 4ª janela da barra superior do Geogebra, lá no final, selecione Lugar Geométrico. Dê um clique no ponto *P* e outro no ponto *C*. A elipse vai aparecer. Faça a decoração que quiser.

Mova o ponto *C* e observe o ponto *P* percorrendo a elipse.

Mova o ponto B e observe a mudança da forma da elipse.



Nessa figura há um fato intrigante. A mediatriz de BC parece ser tangente à elipse. Será mesmo?

De fato ela é tangente mesmo, mas vamos ver isso depois, quando estudarmos, na próxima aula, as tangentes a uma elipse.