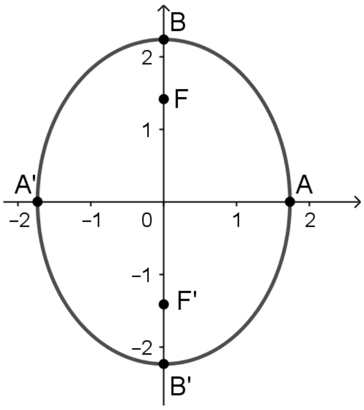
Elipse
2ª parte

Continuando a aula anterior vamos ver outras coisas importantes sobre a elipse. Recorde que, desde a primeira definição temos $a > b$ na equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. De fato, a é o semieixo <u>maior</u> e b o semieixo <u>menor.</u>

O que ocorre se $b > a$? Nesse caso, b será o semieixo <u>maior</u> e a o semieixo <u>menor</u>. Isso é equivalente a trocar as letras x e y na equação original. A elipse fica com seu eixo maior sobre o eixo Y do plano cartesiano, a relação entre a, b e c torna-se $b^2 = a^2 + c^2$ e os focos, que estão situados sobre o eixo maior passam a ser $F = (0, c)$ e $F' = (0, -c)$.

Veja, ao lado, a elipse de equação

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$$



Seus focos são $F = \left(0,\ \sqrt{2}\right)$ e $F' = (0, -\sqrt{2})$.

Tangentes

Uma reta é tangente a uma elipse quando possui um, e apenas um ponto comum com ela. Se uma reta e uma elipse são dadas por suas equações e se a reta é tangente à elipse, então o sistema formado por essas equações possui uma única solução. Vamos ver isso concretamente no exemplo a seguir.

Exemplo

Determinar as retas que passam por $P = (4, 0)$ e são tangentes à elipse $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Solução

Uma reta (não vertical) que passa por P tem equação $y - 0 = m(x - 4)$ onde m é o seu coeficiente angular. Por sua vez, a equação da elipse é $x^2 + 2y^2 = 8$. Se a reta é tangente à elipse então o sistema

$$\begin{cases} y = m(x - 4) \\ x^2 + 2y^2 = 8 \end{cases}$$

possui uma única solução.

Fazendo a substituição de y na segunda equação ficamos com

$$x^2 + 2m^2(x - 4)^2 = 8$$

Desenvolvendo e arrumando ficamos com a equação (confira)

$$(1 + 2m^2)x^2 - 16m^2x + 32m^2 - 8 = 0$$

O discriminante dessa equação deve ser nulo. Assim:

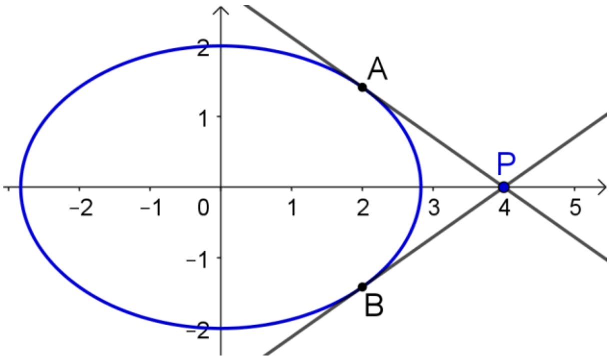
$$\Delta = 256m^4 - 4(1+2m^2)(32m^2-8) = 0$$

Fazendo as contas encontramos $m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

As equações das duas retas tangentes são $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)$ ou, arrumando melhor,

$$x \pm \sqrt{2}y = 4$$

A figura a seguir mostra a situação.



Exercício 1

No caso anterior, determine os pontos de tangência.

Resumo dos dados e equações

$$P = (4,0) \qquad \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\begin{cases} y = m(x-4) \\ x^2 + 2y^2 = 8 \end{cases}$$

$$(1+2m^2)x^2 - 16m^2x + 32m^2 - 8 = 0$$

$$\Delta = 256m^4 - 4(1+2m^2)(32m^2-8) = 0$$

$$m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Resposta: $A = (2, \sqrt{2})$, $B = (2, -\sqrt{2})$

Tangente por um ponto da curva

O exercício 7 da Lista 5 consiste em mostrar que se $P = (x_0, y_0)$ pertence à elipse

$$E:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

então a equação da reta r, tangente em P é

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$$

Curioso, não?

Imagino que vocês tentem demonstrar isso usando Cálculo, com derivação implícita. É um bom exercício, tanto de Cálculo como de Geometria analítica e, por isso, ele permanece na Lista.
Vou mostrar aqui uma solução completamente algébrica, mas que envolve um truque interessante. Observando novamente o exemplo anterior entendemos que uma reta é tangente a uma elipse quando o sistema formado por suas equações possui uma única solução. Vamos seguir esse caminho tratando as equações sem seus incômodos denominadores. Consideremos, então a elipse:

$$\text{E:} \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ou seja,

$$\text{E:} \ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

Seja $P=(x_0,y_0)$ um ponto dessa elipse. Logo,

$$b^2{x_0}^2 \ +a^2{y_0}^2=a^2b^2 \qquad (2)$$

A reta r tem equação, eliminando os denominadores,

$$b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2 \qquad (3)$$

Tudo bem até aqui ?
Muito bem, vamos continuar.
O ponto $P=(x_0,y_0)$ pertence à reta r, pois substituindo suas coordenadas em (3) obtemos (2), que é verdadeira. Assim, $P\in$ E e $P\in r$.
Vamos agora mostrar que P é o único ponto comum entre a elipse (1) e a reta(3).
Veja novamente as equações:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

$$b^2{x_0}^2 \ +a^2{y_0}^2=a^2b^2 \qquad (2)$$

$$b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2 \qquad (3)$$

Vamos, agora, construir a equação (1) + (2) – 2×(3):

$$b^2x^2+b^2{x_0}^2-2b^2x_0x \ +a^2y^2+a^2{y_0}^2-2a^2y_0y=0$$

Observe a arrumação:

$$b^2(x-x_0)^2+a^2(y-y_0)^2=0$$

Uma soma de quadrados igual a zero!

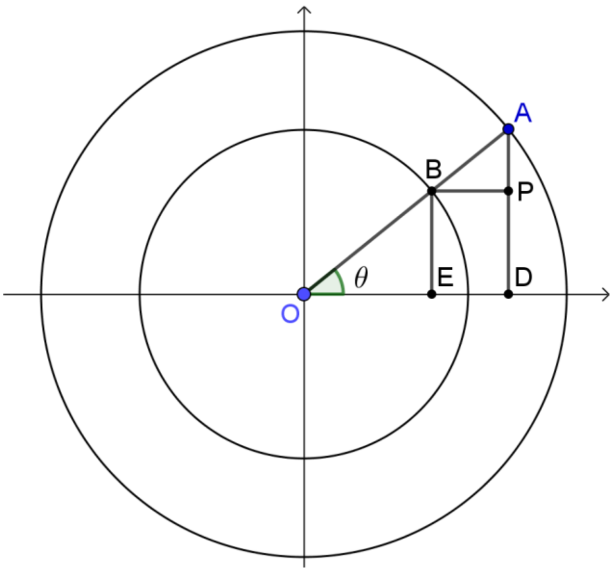
Isso significa que $x = x_0$ e $y = y_0$, ou seja, o ponto $P = (x_0, y_0)$ é o único ponto comum entre a reta r e a elipse E.
A reta é tangente à elipse.

Atenção
A Lista 5 já está aqui no eclass. Os exercícios de elipse são os de números 1 a 12.
Alguns são bem difíceis.

Solução do problema do final da aula passada

Lembram a construção?
Duas circunferências de centro O, raios a e b, com $a > b$
Raio OA, variável.
Triângulo retângulo ABP com catetos paralelos aos eixos.
Provar que o LG de P é uma elipse.

Tome o sistema de coordenadas como indicado na figura e observe as novas construções.



Seja θ o ângulo do eixo X com OA.
Por construção, $OA = a$ e $OB = b$.
Seja $P = (x, y)$.
Temos então:

$$x = OD = OA\cos\theta = a\cos\theta$$
$$y = DP = EB = OB\sin\theta = b\sin\theta$$

Daí,
$$\frac{x}{a} = \cos\theta \quad \text{e} \quad \frac{y}{b} = \sin\theta$$

Elevando ao quadrado cada uma delas e somando,
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Acabou.

Continuando
No restante do tempo que temos vamos fazer exercícios da Lista 5.
Vou escolher alguns:

3) Dados $A = (1, 0)$, $B = (3, 0)$ e $P = (x, y)$ determine a equação da curva descrita pelo ponto P de forma que $d(P, A) + d(P, B) = 4$.

Este é um exercício para praticar a álgebra necessária para encontrar a equação da elipse a partir da definição. Pode ser que alguns alunos conheçam recursos mais adiantados para resolver isso mais rapidamente. Se souber, ótimo, mas o objetivo aqui é praticar a álgebra.

Solução

Seja $P = (x, y)$. Vamos obter a equação a partir da condição $PA + PB = 4$

Imitando o que fizemos na primeira aula de elipse, passamos um dos termos para o outro lado e elevamos ao quadrado.

$$PB = 4 - PA$$

$$PB^2 = 16 - 8PA + PA^2$$

$$(x-3)^2 + (y-0)^2 = 16 - 8PA + (x-1)^2 + (y-0)^2$$

....

$$8PA = 4x + 8$$

$$2PA = x + 2$$

Elevando ao quadrado de novo:

$$4[(x-1)^2 + (y-0)^2] = x^2 + 4x + 4$$

Desenvolva e simplifique. A equação dessa elipse é

$$3x^2 + 4y^2 - 12x = 0$$

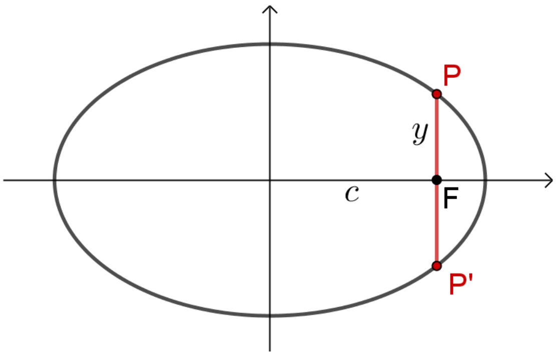
Com essa resposta, vá ao Geogebra e digite essa equação. Assinale os pontos A e B e visualize essa elipse.

4) Se $a > b$ determine na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, o comprimento da corda focal perpendicular ao eixo maior.

5) Determine a área do quadrado inscrito na elipse $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

Solução 4)

Fazendo $x = c$ o valor de y que encontrarmos é a metade da corda focal PP', perpendicular ao eixo maior.



$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2c^2$$

$$a^2y^2 = b^2(a^2 - c^2)$$

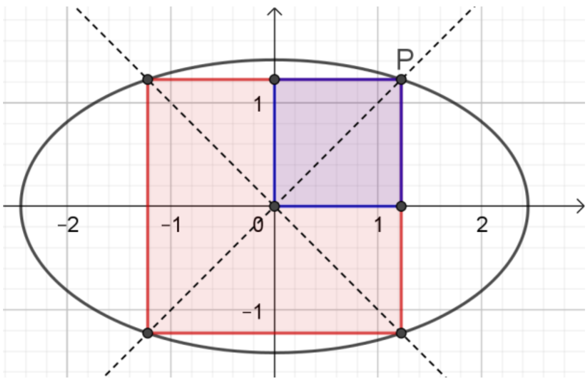
$$a^2y^2 = b^2 \cdot b^2$$

$$y = \frac{b^2}{a}$$

Daí, $PP' = \frac{2b^2}{a}$.

Solução 5)

A interseção da reta $y = x$ com a elipse é o ponto P, um dos vértices do quadrado.



$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$x^2 + 3y^2 = 6$$

$$x^2 + 3x^2 = 6$$

$$4x^2 = 6$$

$$x^2 = \frac{6}{4}$$

Repare que x^2 é a área do quadrado azul da figura, que é a quarta parte do quadrado vermelho. Logo, a área do quadrado vermelho é 6.