Vetores – 6

Área do triângulo

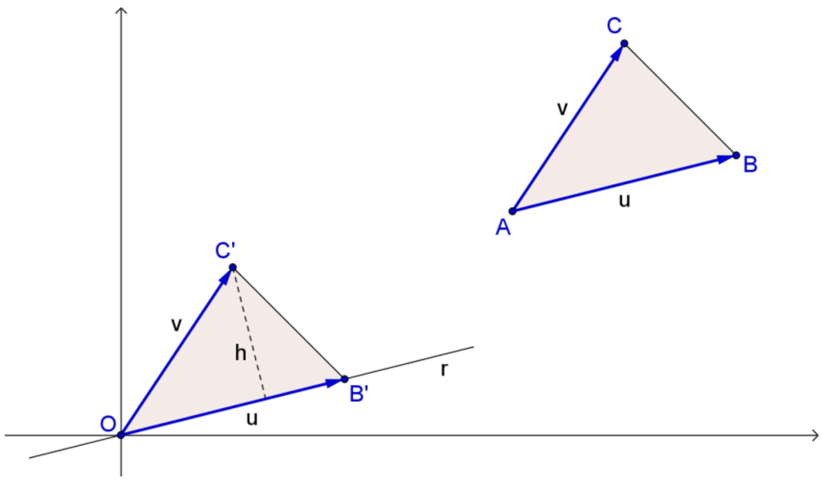
Dado um triângulo ABC no plano cartesiano inicialmente escolhemos um vértice (por exemplo, A) e traçamos os vetores u e v sobre dois de seus lados:

$\overrightarrow{AB} = u \;\; e \;\; \overrightarrow{AC} = v$

Em seguida tiramos cópias desses vetores pela origem. Ficamos com:

$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{AB} = u = (a, b)$

$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC} = v = (c, d)$



Os triângulos $OB'C'$ e ABC são congruentes e seja S a área deles. A base do triângulo $OB'C'$ é $|u|$ e a altura é a distância de $C' = (c, d)$ à reta r que contém a origem $O = (0, 0)$ e o ponto $B' = (a, b)$. A reta r tem equação $-bx + ay = 0$ e a distância de C' a r é:

$$h = \frac{|-bc + ad|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Calculamos então a área do triângulo $OB'C'$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |u| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |u| \cdot \frac{|ad - bc|}{|u|} = \frac{1}{2}|ad - bc|$$

Com a notação de um determinante,

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right| \quad ou \quad S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}\right|$$

A área é a metade do módulo do determinante cujas linhas são as coordenadas dos dois vetores definidos sobre seus lados.

Exemplo

Calcule a área do triângulo cujos vértices são $A = (1,3), B = (5,1), C = (4,8)$.

Solução

$$u = \overrightarrow{AB} = (4,-2) \quad \text{e} \quad v = \overrightarrow{AC} = (3,5)$$

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{matrix} \right\| = \frac{20-(-6)}{2} = 13$$

Se os três pontos forem colineares, o determinante que calcula a área do "triângulo" é zero (e vv). Portanto, uma outra forma de encontrar a equação da reta que passa por dois pontos dados é a de utilizar esse fato.

Exemplo

Determine a equação da reta que passa pelos pontos $(1,2)$ e $(3,5)$.

Solução (alternativa)

Se (x,y) é colinear com os pontos dados então

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$3x - 3 - (2y - 4) = 0$$

$$3x - 2y + 1 = 0$$

Obs:

Podemos calcular a área de polígonos simples desde que seja conhecida a ordem dos vértices. Sabe-se que todo polígono simples pode ser dividido em triângulos e, sabendo calcular a área do triângulo a questão fica resolvida.

Daremos apenas um exemplo com um quadrilátero.

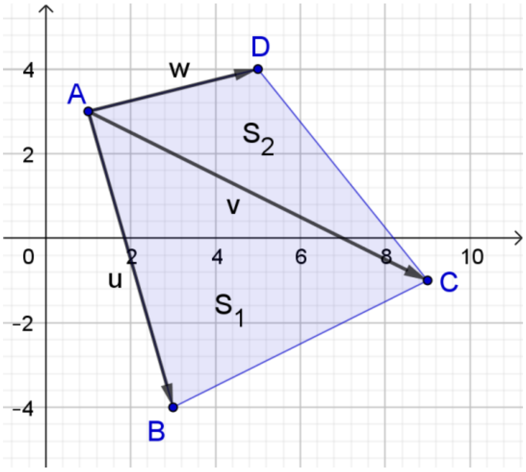
Exemplo

Calcule a área do quadrilátero $ABCD$ onde

$$A = (1,3), B = (3,-4), C = (7,-1), D = (5,4)$$

Solução

$$A = (1,3), B = (3,-4), C = (7,-1), D = (5,4)$$



Temos os vetores

$$u = \overrightarrow{AB} = (2,-7)$$

$$v = \overrightarrow{AC} = (8,-4)$$

$$w = \overrightarrow{AD} = (4,1)$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}\right| = \frac{|-8+56|}{2} = 24$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{|8+16|}{2} = 12$$

$$S = 24 + 12 = 36$$

Para os que precisam resolver com frequência problemas desse tipo, o artifício abaixo é conveniente:

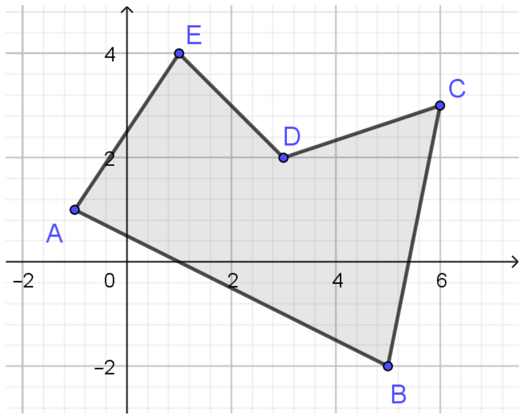
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 8 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{|-8+56+8+16|}{2} = 36$$

Problema

Determinar a área do pentágono $ABCDE$ onde $A = (-1,1)$, $B = (5,-2)$, $C = (6,3)$, $D = (3,2)$ e $E = (1,4)$.

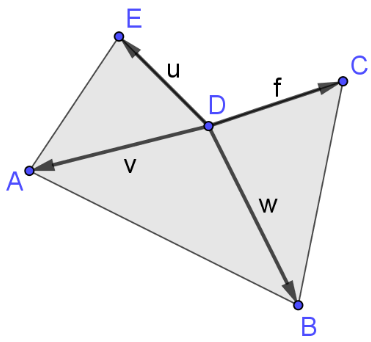
Solução

Em primeiro lugar precisamos, neste caso, fazer um esboço do polígono dado no plano cartesiano para nos certificarmos que não há lados que se cruzem. De fato, o desenho a seguir mostra que o pentágono dado não é convexo, mas é um polígono simples (ou seja, não há lados que se cruzem).



Com essa condição cumprida, podemos dividir o pentágono dado em três triângulos e somar suas áreas. Aqui, mais uma vez, o desenho sugere a divisão do pentágono em triângulos.

Consideremos então a divisão do pentágono nos triângulos DEA, DAB e DBC.



Para calcular as áreas precisamos dos vetores:

$$u = \overrightarrow{DE} = (-2, 2)$$

$$v = \overrightarrow{DA} = (-4, -1)$$

$$w = \overrightarrow{DB} = (2, -4)$$

$$f = \overrightarrow{DC} = (3, 1)$$

Assim, a área do pentágono $ABCDE$ é

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

$$S = \frac{1}{2}(10 + 18 + 14) = \frac{42}{2} = 21$$

Ou

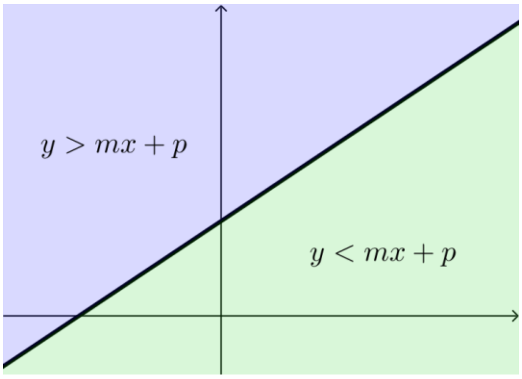
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -1 \\ 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{|10 + 18 + 14|}{2} = 21$$

Semiplanos

Veja as desigualdades:

$y > mx + p$ representa a região **acima** da reta $y = mx + p$.

$y < mx + p$ representa a região **abaixo** da reta $y = mx + p$.



As desigualdades $y \geq mx + p$ e $y \leq mx + p$ representam os semiplanos superior e inferior, respectivamente, incluindo a reta – que é chamada de *origem* dos semiplanos.

Analogamente, as desigualdades $ax + by + c \geq 0$ e $ax + by + c \leq 0$ representam os semiplanos determinados pela reta $ax + by + c = 0$.

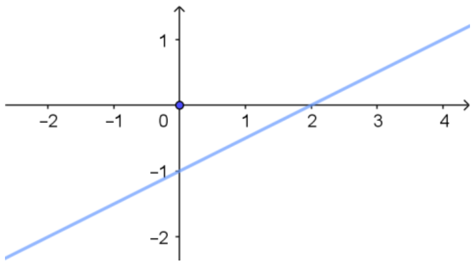
Nesse caso, uma forma prática para determinar qual semipleno é determinado por cada uma das desigualdades, é fazer o *teste da origem* como você verá no exemplo a seguir.

Exemplo

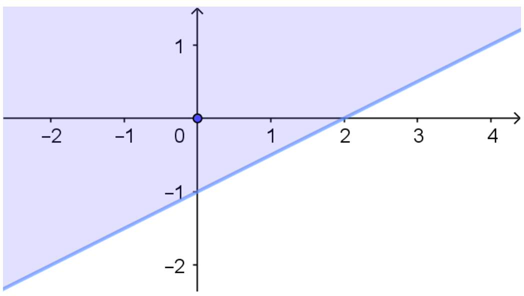
Desenhe o semiplano definido pela desigualdade $x - 2y - 2 \leq 0$.

Solução

A reta $x - 2y - 2 = 0$ está desenhada ao lado.



Para saber qual é o semiplano definido pela inequação $x - 2y - 2 \leq 0$ verificamos que $(0, 0)$ satisfaz essa desigualdade, pois $-2 \leq 0$ está correto. Logo, o semiplano definido por essa desigualdade é o que contém a origem.



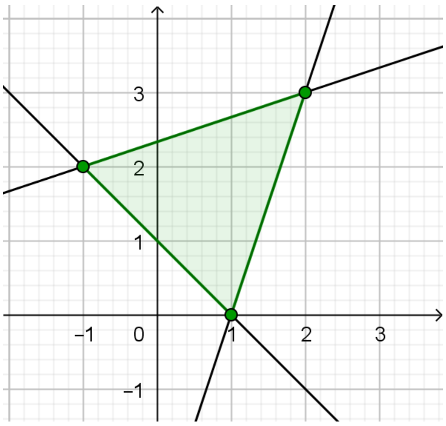
Exercício

Desenhe a região definida por

$$\begin{cases} -x + 3y \leq 7 \\ x + y \geq 1 \\ 3x - y \leq 3 \end{cases}$$

Se essa região for limitada, calcule sua área.

Solução



Determinamos os pontos de interseção das retas

$$\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ x + y = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

São eles: $(-1, 2), (1, 0)$ e $(2, 3)$.

A interseção dos semiplanos definidos pelas desigualdades é o triângulo determinado pelas três retas. Calculando a área encontramos $S = 4$.