Vetores no espaço – 3

Devemos abordar os determinantes de segunda e terceira ordens, pois eles terão grande importância nos temas que virão a seguir. Os determinantes, historicamente são muito anteriores às matrizes e foram criados como instrumento para compreender e resolver sistemas lineares com mesmo número de equações e incógnitas.

Determinantes

Considere o sistema

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

Vamos resolver:

$$\begin{cases} adx + bdy = md \\ bcx + bdy = bn \end{cases}$$

Subtraindo,

$$(ad - bc)x = md - bn$$

Encontramos para a incógnita x:

$$x = \frac{md - bn}{ad - bc}$$

se $ad - bc \neq 0$. De certa forma, o número $ad - bc$ "determina" se o sistema cujos coeficientes são $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ nessas posições, tem solução única ou não. Esse número foi chamado de *determinante* de segunda ordem e escrito como:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = p \end{cases}$$

Teremos um trabalho consideravelmente maior e encontramos para a incógnita x:

$$x = \frac{mei + bfp + cnh - cep - afh - bni}{aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi}$$

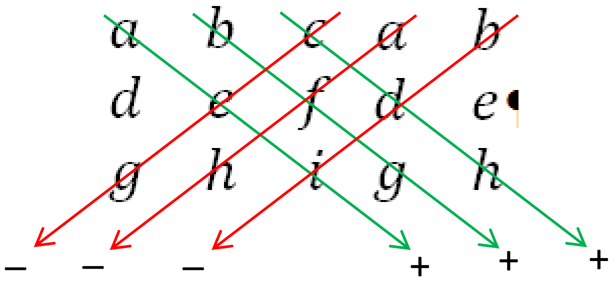
se $aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi \neq 0$.

Da mesma maneira, esse número "determina" se o sistema cujos coeficientes são $\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$ nessas posições, tem solução única ou não. Esse número foi chamado de determinante de terceira ordem e escrito como:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Determinantes de ordem superior seguem o mesmo caminho, mas será necessária uma notação mais complicada. Para nossos vetores do espaço só necessitaremos desses determinantes pequenos.

Para calcular um determinante de terceira ordem, um dos esquemas mais utilizados é conhecido como *Regra de Sarrus* que pode ser visto a seguir.
Na figura abaixo, são escritos os 9 elementos do determinante e as duas primeiras colunas são repetidas à direita. Nas diagonais, aparecem os 6 produtos sendo os da direita precedidos do sinal (+) e os da esquerda precedidos do sinal (–)



Exemplo

Calcule $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

Solução

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{matrix}$$

$$D = 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 5 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \cdot (-1) = 54$$

Para visualizar as próximas propriedades é conveniente mudar a notação. As definições de determinantes de segunda e terceira ordens são:

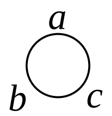
$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$d = a_1b_2 - b_1a_2$$

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$d = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

Observe que os índices são sempre os mesmos, e cada um dos termos é uma permutação das letras a, b, c. As três primeiras são chamadas de *permutações pares* e as outras de permutações ímpares. A diferença está na ordem de percurso dessas letras em torno de uma circunferência.



O desenvolvimento de Laplace

O matemático Pierre Laplace (1749-1827) descobriu que um determinante de ordem n pode ser escrito como uma soma de n determinantes de ordem $n-1$. Isso, apesar de não ser prático para o cálculo, permitiu uma definição geral de determinante por recorrência. No nosso caso, ela será bastante útil.
Vamos observar o desenvolvimento do determinante de terceira ordem e colocar em evidência (com uma pequena troca de sinal) os elementos da primeira linha.

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$d = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

$$d = a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + b_1c_2a_3 - b_1a_2c_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3$$

$$d = a_1(b_2c_3 - c_2b_{3)} - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$d = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$d = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Os determinantes

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

São chamados de *menores complementares* dos elementos a_1, b_1, c_1, respectivamente.

$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ Observe onde estão os menores complementares.

O desenvolvimento de Laplace usando os elementos da <u>primeira linha</u> é, então,

$$d = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1$$

O desenvolvimento de Laplace pode ser usado para calcular determinantes pequenos, como no nosso caso.

Exemplo

Calcule $d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Solução

Usando o desenvolvimento de Laplace temos:

$$d = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$d = 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3(32 - 35)$$

$$d = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3)$$

$$d = -3 + 12 - 9 = 0$$

Propriedades dos determinantes

Vou listar aqui as propriedades que terão importância no nosso curso. As propriedades ligadas às das matrizes serão deixadas para o curso de Álgebra Linear.
As propriedades que aparecerão aqui serão visualizadas ou demonstradas para determinantes de terceira ordem, mas são válidas em geral.
Algumas propriedades são evidentes pela observação do desenvolvimento do determinante de terceira ordem, e outras terão uma breve justificativa.

1. Alternando a posição de duas linhas, o determinante muda de sinal.

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$d = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

$$d' = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$d' = a_2b_1c_3 + b_2c_1a_3 + c_2a_1b_3 - c_2b_1a_3 - a_2c_1b_3 - b_2a_1c_3 = -d$$

2. Multiplicando uma linha por um número real o determinante fica multiplicado por esse número.

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$d = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

$$d' = \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$d' = \alpha a_1b_2c_3 + \alpha b_1c_2a_3 + \alpha c_1a_2b_3 - \alpha c_1b_2a_3 - \alpha a_1c_2b_3 - \alpha b_1a_2c_3 = \alpha d$$

3. Se duas linhas forem proporcionais (ou iguais) o determinante é nulo.

Basta verificar que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$

4. Soma de determinantes
Se dois determinantes diferem por apenas uma linha a soma deles é um determinante que mantêm as linhas iguais e tem como linha diferente a soma das respectivas linhas dos dois determinantes iniciais.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1{}' & b_1{}' & c_1{}' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_1{}' & b_1 + b_1{}' & c_1 + c_1{}' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

A verificação é imediata. Basta observar que cada termo do determinante soma é do tipo:

$$a_1 b_2 c_3 + a_1{}' b_2 c_3 = (a_1 + a_1{}') b_2 c_3$$

Para continuar vamos introduzir agora uma nova notação.
Consideremos os vetores do espaço,

$$u = (a_1, b_1, c_1)$$
$$v = (a_2, b_2, c_2)$$
$$w = (a_3, b_3, c_3)$$

O determinante cujas linhas são esses vetores será representado por $\det\,[u, v, w]$

$$\det\,[u, v, w] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Com essa notação, as quatro propriedades que enunciamos ficam escritas assim:

1. $\det[v, u, w] = -\det\,[u, v, w]$

2. $\det[\alpha u, v, w] = \alpha \cdot \det\,[u, v, w]$

3. $\det[u, \alpha u, w] = 0$

4. $\det[u + u', v, w] = \det[u, v, w] + \det\,[u', v, w]$

Exercício
Prove que se uma linha for combinação linear das outras duas o determinante é nulo.

Solução

$$\det[u, v, \alpha u + \beta v] = \det[u, v, \alpha u] + \det[u, v, \beta v] = 0 + 0 = 0$$

Obs
Pelas propriedades conclui-se que um determinante não se altera quando uma linha é substituída pela soma dela com um múltiplo de outra. Por exemplo, se a segunda linha for substituída pela soma dela com α vezes a primeira temos

$$\det[u, v, w] = \det\,[u, v + \alpha u, w]$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 16 \\ 2 & 7 & 33 \end{vmatrix}$$

Solução

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 16 \\ 2 & 7 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 33 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 33 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -(7 - 8) = 1$$

Obs

O determinante não se altera quando as linhas são trocadas pelas respectivas colunas

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Consequentemente, as propriedades anteriores são mantidas quando a palavra linha for trocada pela palavra coluna.

O produto vetorial

Começamos com um exercício já conhecido.

Exercício
Encontre um vetor perpendicular aos vetores $u = (2, 3, -1)$ e $v = (1, 0, 2)$.

Solução
Seja $w = (a, b, c)$ um vetor simultaneamente perpendicular a u e v.
Temos:

$$w \perp u \quad \rightarrow \quad 2a + 3b - c = 0$$
$$w \perp v \quad \rightarrow \quad a + 2c = 0$$

Temos liberdade para uma incógnita. Sendo $a = -2c$ ficamos com

$$2(-2c) + 3b - c = 0$$
$$3b = 5c \quad \rightarrow \quad b = \frac{5c}{3}$$

Escolhendo, para nosso conforto, $c = 3$, ficamos com $b = 5$ e $a = -6$.

Portanto, o vetor $w = (-6, 5, 3)$ é perpendicular a u e v.

A definição do produto vetorial será uma consequência desse exercício.

Definição
O produto vetorial do vetor $u = (a_1, b_1, c_1)$ pelo $v = (a_2, b_2, c_2)$ é o vetor definido por

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Essa definição pode ser visualizada no esquema a seguir:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

Exemplo
Se $u = (2, 3, -1)$ e $v = (1, 0, 2)$ então o nosso esquema é

$$\begin{matrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

e, então,

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6, -5, -3)$$

O produto vetorial do vetor $u = (a_1, b_1, c_1)$ pelo $v = (a_2, b_2, c_2)$ possui interessantes propriedades. Para ligar as propriedades do produto vetorial com as dos determinantes, lembre que $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ e observe que

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} e_3 =$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Observe o caráter híbrido desse último determinante. Sua primeira linha é formada por vetores e as outras por números, que são as coordenadas dos vetores u e v, nessa ordem. Fica então claro que não podemos falar em produto vetorial de dois vetores, livremente. Devemos falar em produto vetorial de um vetor por outro.
As seguintes propriedades do produto vetorial decorrem diretamente da definição.

Propriedades do produto vetorial

1. $u \times v = -(v \times u)$
De fato, trocando de posição duas linhas o determinante muda de sinal.

2. $(u + u') \times v = u \times v + u' \times v$
Consequência da propriedade análoga de determinantes.

3. $(\alpha \cdot u) \times v = u \times (\alpha \cdot v) = \alpha \cdot (u \times v), \;\; \alpha \in \mathbb{R}.$

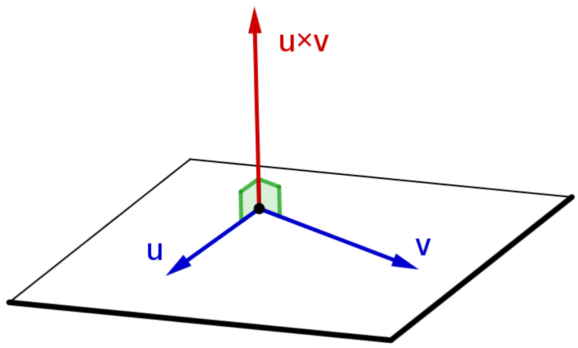
4. Para qualquer vetor $w = (a_3, b_3, c_3)$ tem-se $u \times v \cdot w = \det[u, v, w]$
De fato,

$$u \times v \cdot w = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (a_3, b_3, c_3) =$$

$$= b_1c_2a_3 - b_2c_1a_3 + c_1a_2b_3 - c_2a_1b_3 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 = \det[u, v, w]$$

5. $u \times v$ é um *vetor ortogonal* a u e a v
Essa importantíssima propriedade é agora fácil de demonstrar

$$u \times v \cdot u = \det[u, v, u] = 0$$
$$u \times v \cdot v = \det[u, v, v] = 0$$



As outras propriedades serão vistas na próxima aula.