Vetores – 4

A Geometria Plana, na parte métrica trata de três elementos fundamentais: as distâncias, os ângulos e as áreas. Neste capítulo vamos abordar a questão dos ângulos no plano cartesiano.

4.1. O produto escalar

A operação de multiplicação de um vetor por outro é, de certa forma, estranha. O produto escalar de um vetor por outro não dá como resultado um novo vetor, mas sim um número real e essa é a razão dessa operação ser chamada de produto *escalar*. A definição é a seguinte:

Dados os vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ o produto escalar de u por v é defindo por:

$$u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2$$

A definição é clara. Se, por exemplo, $u = (2, 5)$ e $v = (-4, 3)$ então o produdo escalar desses vetores é $u \cdot v = 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 3 = 7$.

Mas, para que serve esse número? Vamos ver mais adiante. Inicialmente, mostraremos suas propriedades, que são de verificação imediata:

a) $u \cdot v = v \cdot u$

b) $u \cdot (v + v') = u \cdot v + u \cdot v'$ e $(u + u') \cdot v = u \cdot v + u' \cdot v$

c) $(\alpha u) \cdot v = \alpha(u \cdot v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

d) $u \cdot u = |u|^2$

No item 2.2 do texto anterior demonstramos a condição de perpendicularismo. Recordando, ela diz que, se nenhum dos vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ é nulo então esses vetores são perpendiculares se, e somente se, $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. Portanto, podemos agora escrever essa condição assim:

$$u, v \neq O, \ \ u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$$

Atenção

O vetor nulo $O = (0, 0)$ não deve ser confundido com o número real 0 (zero).

Exemplo

Dados os pontos $A = (2, 1)$, $B = (4, 5)$ e $C = (1, 5)$, determine o ponto P, do eixo X, de forma que as retas AB e CP sejam perpendiculares.

Solução

Consideremos então o ponto do eixo X, $P = (x, 0)$.

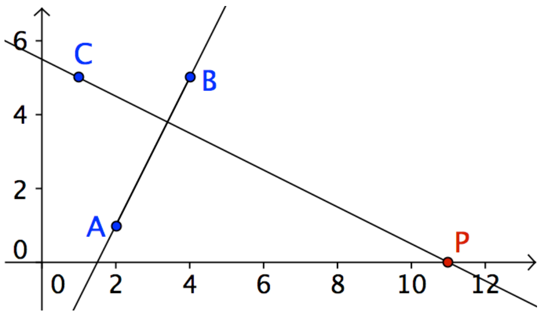
Temos que $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$ e $\overrightarrow{CP} = (x - 1, -5)$ são perpendiculares. Logo o produto escalar deles é zero:

$$(2, 4) \cdot (x - 1, -5) = 0$$

$$2(x - 1) + 4(-5) = 0$$

As contas simples fornecem $x = 11$ e, assim, a resposta é $P = (11, 0)$.

A figura a seguir mostra o que foi calculado. Observe que essa figura é apenas uma ilustração e não é absolutamente necessária para a resolução do problema.



Exemplo

Por que as diagonais de um losango são perpendiculares?

Solução

Seja $ABCD$ um losango. Tomemos $\overrightarrow{AB} = u$ e $\overrightarrow{AD} = v$. Sobre as diagonais do losango temos $\overrightarrow{AC} = u + v$ e $\overrightarrow{DB} = u - v$. Utilizando o fato de que $|u| = |v|$ vamos calcular o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DB}$:

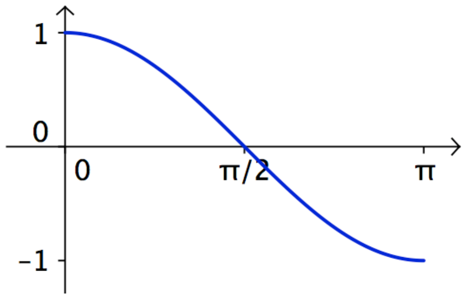
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (u + v) \cdot (u - v) = u \cdot u - v \cdot v = |u|^2 - |v|^2 = 0$$

Portanto, as diagonais do losango são perpendiculares.

Obs: Observe que, neste exemplo, não houve necessidade de estabelecermos um sistema de coordenadas. A propriedade do losango pode ser demonstrada com a utilização, apenas, das propriedades do produto escalar.

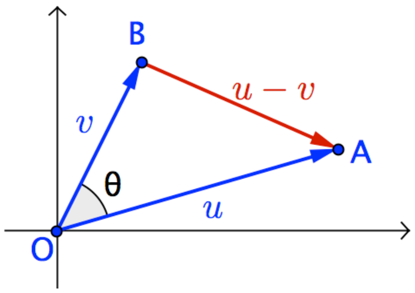
4.2. Ângulo entre dois vetores

Na geometria com coordenadas cada ângulo é identificado por uma de suas razões trigonométricas. Na geometria analítica tradicional cada ângulo é identificado por sua tangente. Aqui, vamos identificar cada ângulo por seu cosseno. De fato para cada ângulo do intervalo $[0, \pi]$ existe uma bijeção entre o ângulo e seu cosseno.



Portanto, nesse contexto, conhecer o cosseno de um ângulo significa conhecer o ângulo.

A figura a seguir mostra o triângulo OAB onde $\overrightarrow{OA} = u$ e $\overrightarrow{OB} = v$.



A lei dos cossenos nesse triângulo fornece:

$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \theta$$

Entretanto, o lado esquerdo da igualdade acima pode ser escrito, usando as propriedades do produto escalar, da seguinte forma:

$$|u-v|^2 = (u-v)\cdot(u-v) =$$

$$= (u-v)\cdot u - (u-v)\cdot v =$$

$$= u\cdot u - v\cdot u - u\cdot v + v\cdot v =$$

$$= u\ \cdot u - u\cdot v - u\cdot v + v\cdot v =$$

$$= |u|^2 - 2u\cdot v + |v|^2$$

A relação inicial da lei dos cossenos fica então:

$$|u|^2 - 2u\cdot v + |v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta$$

ou seja,

$$u\cdot v = |u||v|\cos\theta$$

Se u e v são colineares e de mesmo sentido, então $\cos\theta = 1$ e se são colineares e de sentidos opostos, então $\cos\theta = -1$. Portanto, concluimos que:

$$-|u||v| \le u\cdot v \le |u||v|$$

Por outro lado, como sabemos calcular o produto escalar de dois vetores e como também sabemos calcular seus módulos, então podemos calcular o ângulo entre eles:

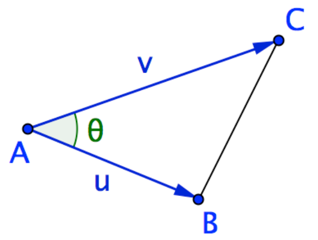
$$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{|u||v|}$$

Exemplo

O triângulo ABC tem vértices $A = (1, 1)$, $B = (4, -1)$ e $C = (6, 4)$. Determine um valor aproximado em graus para o ângulo BAC.

Solução

O desenho deve ser apenas um esboço. Na geometria com coordenadas não há a menor necessidade de executar desenhos precisos a partir dos eixos. Basta algo assim:



Como o ângulo que queremos determinar tem vértice A, determinamos os vetores:

$u = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, -2)$ e $v = \overrightarrow{AC} = C - A = (5, 3)$. A seguir calculamos:

$u \cdot v = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 3 = 9$

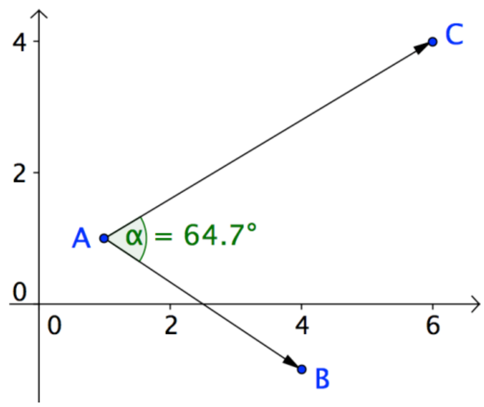
$|u| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$|v| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

Assim, o ângulo θ entre os vetores u e v é dado por

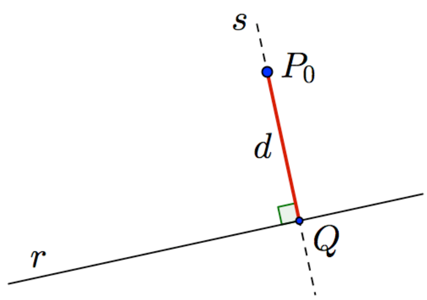
$$\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{34}} = \frac{9}{\sqrt{442}}$$

Essa é a resposta correta, mas esse valor nada diz de concreto a respeito desse ângulo. Nesse ponto, usamos a calculadora científica, ou melhor, a do celular e encontramos para esse ângulo o valor aproximado de 64,7°. A situação real está a seguir.



4.3. Distância de um ponto a uma reta

Na geometria analítica tradicional que está presente nos livros didáticos brasileiros a distância de um ponto a uma reta, quando aparece, é dada por uma misteriosa fórmula. A demonstração, me geral, não aparece nesses livros, pois demanda um grande trabalho de cálculos, mas a ideia é fácil de entender. Dados um ponto P_0 e uma reta r, para obter



a distância de P_0 até r construímos uma reta s, que contém P_0 e é perpendicular a r. Determinamos, em seguida o ponto Q, interseção das retas r e s. A distância entre P_0 e Q é a distância de P_0 à reta r.

Exemplo

Calcule a distância do ponto $P_0 = (6, 4)$ à reta $r: 2x + 3y - 5 = 0$.

Solução

Vamos resolver a questão seguindo, inicialmente, a sugestão dada acima.

A reta dada é $r: 2x + 3y = 5$. Como sabemos dos cursos anteriores, uma reta perpendicular a r é a reta s: $3x - 2y = c$. Observe que as retas r e s são perpendiculares porque seus vetores normais $n_r = (2, 3)$ e $n_s = (3, -2)$ são perpendiculares, uma vez que $2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0$.

Como a reta s contém o ponto $P_0 = (6, 4)$ então, substituindo esse ponto na equação da reta s temos $3 \cdot 6 - 2 \cdot 4 = c$, ou seja, $c = 10$. Assim, a reta s tem equação $3x - 2y = 10$.

O ponto Q, interseção das retas r e s é dado pela solução do sistema formado pelas duas equações:

$$2x + 3y = 5$$
$$3x - 2y = 10$$

Multiplicando a primeira equação por 2 e a segunda por 3, obtemos:

$$4x + 6y = 10$$
$$9x - 6y = 30$$

Somando, encontramos $x = \frac{40}{13}$ e, substituindo esse valor em qualquer uma das equações encontramos $y = -\frac{5}{13}$.

Assim, o ponto de interseção das retas r e s é $Q = (\frac{40}{13}, -\frac{5}{13})$.

Vamos, a seguir, construir o vetor $\overrightarrow{P_0Q}$ e calcular o seu módulo.

$$\overrightarrow{P_0Q} = Q - P_0 = \left(\frac{40}{13}, -\frac{5}{13}\right) - (6, 4) = (-\frac{38}{13}, -\frac{57}{13})$$

Para facilitar o cálculo do módulo desse vetor, podemos observar que $38 = 2 \cdot 19$ e que $57 = 3 \cdot 19$. Assim, $\overrightarrow{P_0Q} = \frac{19}{13}(-2, -3)$.

Assim, a distância de P_0 até Q é:

$$\left|\overrightarrow{P_0Q}\right| = \frac{19}{13}\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \frac{19\sqrt{13}}{13}$$

Vamos ver a seguir que com vetores o trabalho se reduz consideravelmente. Antes, porém, vamos tratar de calcular o comprimento da projeção de um vetor sobre uma reta.