Fundamentos de Matemática
Lista 5 - 16/05/2024

A consulta é livre, mas você deve entregar suas soluções escritas de próprio punho e mencionar as fontes de consulta.

95. Prove que, para quaisquer sentenças lógicas p e q, são verdadeiras as seguintes implicações:

(a) $p \implies (p \vee q)$

(b) $(p \wedge q) \implies p$

96. Prove que, se $x^2 + x - 1 = 0$, então $x^3 - 2x + 1 = 0$.

97. Determine se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa, e construa sua negação.

(a) Existe um número real x tal que $x^2 = -1$.

(b) Para todo número inteiro n, vale $n^2 > n$.

(c) Para todo número real x, tem-se $x > 1$ ou $x^2 \leq 1$.

(d) Para todo número real x existe um número natural n tal que $n > x$.

(e) Existe um número natural n tal que , para todo número real x, tem-se $n > x$.

98. Prove cada uma das seguintes propriedades dos conjuntos, considerando um certo conjunto universo U.

(a) $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(b) $A \subset B$ se, e somente se, $A \cup B = B$.

(c) $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B = A$.

(d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(f) $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \emptyset$, $\emptyset^c = U$, $U^c = \emptyset$.

(g) $(A^c)^c = A$.

(h) $A \subset B$ se, e somente se, $B^c \subset A^c$.

(i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(j) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

99. Em cada um dos itens seguintes, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Justifique.

(a) Se $x \in A$ e $A \subset B$, então $x \in B$.

(b) Se $A \not\subset B$ e $B \subset C$, então $A \not\subset C$.

(c) Se $A \not\subset B$ e $B \not\subset C$, então $A \not\subset C$.

(d) Se $x \in A$ e $A \not\subset B$, então $x \notin B$.

(e) Se $A \subset B$ e $x \notin B$, então $x \notin A$.

100. Para quaisquer conjuntos A, B, C, D prove que

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

(d) $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$

101. Prove que no item (d) da questão anterior a inclusão não pode ser substituída por uma igualdade, ou seja, que não necessariamente se tem $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

102. Qual é a negação da proposição "Quem não tem cão caça com gato"?

103. Se A é o conjunto das palavras da língua portuguesa e B é o conjunto dos números naturais, a regra que associa a cada palavra o seu número de letras define uma função de A em B?

104. Se A é o conjunto de todas as pessoas que já viveram no planeta terra, a regra que associa a cada pessoa x uma pessoa y tal que x e y são irmãos define uma função de A em B?

105. Se A é um conjunto com 3 elementos e B é um conjunto com 4 elementos, quantas funções distintas existem com domínio A e contradomínio B?

106. *Função composta.* Dadas as funções $f\colon A \to B$ e $g\colon C \to D$, se $B \subset C$ definimos a função composta $g \circ f\colon A \to D$ pela regra $g \circ f(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$. Prove que se $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ e $h\colon C \to D$ são funções, então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

107. Defina as funções reais de variável real f e g pelas regras $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 - 1$. Determine as funções $f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g$. Determine o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,|\, f \circ g(x) = g \circ f(x)\}$.

108. Em cada um dos itens a seguir defina uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja imagem seja o conjunto indicado.

(a) $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

(b) $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^+$

(c) $\operatorname{Im} f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

(d) $\operatorname{Im} f = \mathbb{Z}$

109. Diz-se que uma função $f\colon D \to C$ é *injetiva* se ela satisfaz a seguinte condição:

Para todos os $x_1, x_2 \in D$, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Quando uma função $f\colon D \to C$ não é injetiva?

110. Diz-se que uma função $f\colon D \to C$ é *sobrejetiva* se ela satisfaz a seguinte condição:

Para todo $b \in C$, existe $a \in D$ tal que $f(a) = b$.

Quando uma função $f\colon D \to C$ não é sobrejetiva?

111. Diz-se que uma função $f\colon D \to C$ é *crescente* se ela satisfaz a seguinte condição:

Para todos os $x_1, x_2 \in D$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

Quando uma função $f\colon D \to C$ não é crescente?

112. Diz-se que uma função $f\colon D \to C$ é *limitada* se ela satisfaz a seguinte condição:

Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in D$ tem-se $|f(x)| \leq M$.

Quando uma função $f\colon D \to C$ não é limitada?

113. Determine o maior subconjunto D de $\mathbb{R}$ para o qual a regra $f(x) = \sqrt{x}$ define uma função de D em $\mathbb{R}$. Qual é a imagem dessa função?

114. Prove que $\sqrt{55 - 8\sqrt{39}} + \sqrt{103 - 16\sqrt{39}} = 4$.

115. Seja E o plano euclidiano. Uma função $f\colon E \to E$ é chamada de *isometria* quando, para quaisquer $P, Q \in E$, a distância entre os pontos $f(P)$ e $f(Q)$ é igual à distância entre P e Q. Seja ABC um triângulo qualquer e sejam $f, g\colon E \to E$ duas isometrias tais que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ e $f(C) = g(C)$. Prove que $f = g$.

116. Seja E o plano euclidiano. Dada uma reta r em E, definimos a *reflexão* em relação a r como a função $R_r\colon E \to E$ tal que para todo $A \in E$, $A \notin r$, a mediatriz do segmento de extremos A e $R_r(A)$ é a reta r, e $R_r(A) = A$ quando $A \in r$.

(a) Prove que R_r está bem definida para toda reta r em E.

(b) Prove que toda reflexão é uma bijeção.

(c) Qual é a função inversa de uma reflexão?

(d) Prove que toda reflexão é uma isometria.

(e) Descreva a função composta de duas reflexões.

117. Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que f é injetiva e g é sobrejetiva, mas que f não necessariamente é a função inversa de g.

118. Prove que, se $p > 3$ é primo, então p^2 deixa resto 1 quando dividido por 12.

119. Prove que não é possível criar um programa de computador que ganhe sempre no xadrez.