Geometria analítica – **Lista 7 –** Coordenadas no espaço

- Seja $u=(x,\ y,\ z)$. O módulo de u é $|u|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

- O espaço R^3 tem origem $O=(0,0,0)$. O vetor de origem A e extremidade B é $\overrightarrow{AB}=B-A$.

- A distância entre os pontos A e B é $d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

- Uma combinação linear dos vetores u e v é qualquer vetor da forma $w=\alpha u+\beta v$ onde α e β são números reais.

- Se $u=(a_1,\ b_1,\ c_1)$ e $v=(a_2,\ b_2,\ c_2)$ o produto interno de u e v é $u\cdot v=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$.

- Se θ é o ângulo entre u e v então $\cos\theta=\dfrac{u\cdot v}{|u|\cdot|v|}$.

- O ângulo entre duas retas é o menor ângulo formado por dois vetores paralelos a essas retas.

- Se $u=(a_1,\ b_1,\ c_1)$ e $v=(a_2,\ b_2,\ c_2)$ o produto vetorial de u e v é

$$u\times v=\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right).$$

- Propriedades: $u\times v\ \perp\ u,\ u\times v\ \perp\ v$ e $|u\times v|=|u|\cdot|v|\cdot\sin\theta$.

- A área do paralelogramo determinado pelos vetores u e v é $S=|u\times v|$.

- Se $u=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $v=(a_2,\ b_2,\ c_2)$ e $w=(a_3,\ b_3,\ c_3)$ o produto misto dos vetores u, v e w é

$$[u,v,w]=u\times v\cdot w=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

- O volume do paralelepípedo determinado pelos vetores u, v e w é $V=|\ [u,v,w]\ |$.

- O volume do tetraedro determinado pelos vetores u, v e w é $V=\dfrac{1}{6}|\ [u,v,w]\ |$.

Exercícios

1) Determine o ponto do eixo OX que tem mesma distância aos pontos $A = (2, 1, -1)$ e $B = (0, 3, -1)$.

2) A reta r passa pelo ponto $(3, 4, -1)$ e é paralela ao vetor $v = (1, -1, 2)$. Determine o ponto dessa reta cuja soma das coordenadas é 16.

3) São dados os vetores $u = (1, 1, 2)$ e $v = (-1, 3, 1)$.

a) Escreva $w = (7, -5, 5)$ como combinação linear de *u* e *v*.

b) Escreva $z = (3, 2, -1)$ como combinação linear de *u* e *v*.

4) Determine *k* para que os pontos $(k, 2, 4)$, $(3, k, 2)$ e $(7, -1, -2)$ sejam colineares.

5) A reta *r* passa pelos pontos $A = (2, 2, 8)$ $B = (4, 1, 6)$. Determine os pontos onde a reta *r* corta os planos *XY*, *YZ* e *XZ*.

6) Dados os pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 4, 2)$ e $C = (1, 6, 6)$ determine o cosseno do ângulo *BAC*.

7) Dados os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (3, 1, -1)$ $C = (0, 2, 1)$ e $D = (-1, 1, 3)$ verifique se as retas *AB* e *CD* são paralelas, concorrentes ou reversas.

8) A reta *r* passa pelo ponto $A = (-1, 2, 4)$ e é paralela ao vetor $v = (2, 1, -1)$. Determine o ponto de *r* mais próximo da origem.

9) Com os pontos *A*, *B* e *C* do exercício 6 determine:

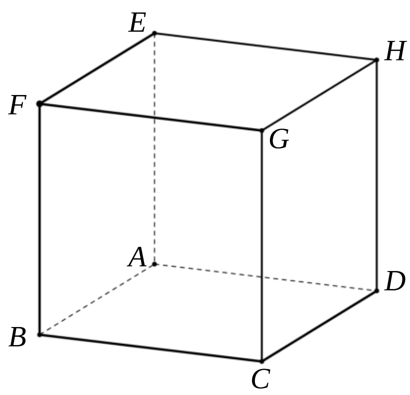
a) equações paramétricas para a reta *BC*.

b) o comprimento do segmento *BC*.

c) a distância de *A* até a reta *BC*.

d) a área do triângulo *ABC*.

10) É dado um cubo de aresta 2. Estabeleça um sistema de coordenadas e determine os oito vértices nesse sistema.



a) Calcule o comprimento de uma diagonal.

b) Calcule a distância entre os pontos médios de duas arestas reversas.

c) Seja *AG* uma diagonal. Determine os pontos médios das seis arestas que não concorrem nem em *A*, nem em *G*. Unindo cada um desses pontos ao mais próximo, que figura ficou formada?

11) Sejam *AB*, *AC* e *AD* arestas de um cubo. Mostre que a diagonal do cubo que passa por *A* é perpendicular ao plano *BCD*.

Obs: Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano ela é perpendicular a esse plano.

12) Dados os pontos $A = (2,\ -1,\ 1)$ e $B = (3,\ 4,\ 4)$ determine o ponto do eixo *Z* de forma que o ângulo *APB* seja reto.

13) Considere as retas

$r_1 = \{(1+3t, -1+4t, 2)\,;\, t \in \mathrm{R}\}$ e $r_2 = \{(4-3s, -2+6s, -1+2s)\,;\, s \in \mathrm{R}\}$.

a) Verifique se elas são concorrentes ou reversas.

b) Calcule o cosseno do ângulo entre elas.

c) Modifique apenas um dos coeficientes da reta r_2 para torná-las concorrentes.

14) A pirâmide regular *ABCDE* tem na base o quadrado *ABCD* de lado 4 e sua altura é igual a 6. Estabeleça um sistema de coordenadas e determine os cinco vértices nesse sistema.

a) Calcule a distância entre os pontos médios das arestas *AB* e *CE*.

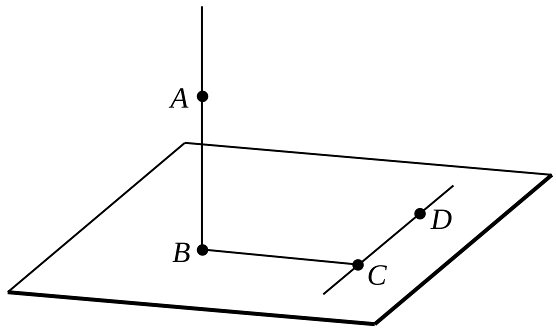
b) Calcule o cosseno do ângulo entre as retas *AD* e *BE*.

15) Encontre pelo menos três vetores (dois quaisquer não colineares) perpendiculares ao vetor $v = (1,\ 2,\ 3)$.

16) Dados os vetores $u = (3,\ 2,\ 4)$, $v = (1,\ 0,\ 1)$ determine um vetor de módulo 10 perpendicular a *u* e a *v*.

17) Na figura abaixo, *AB* é perpendicular ao plano *BCD* e *BC* é perpendicular a *CD*. Prove que *AC* é perpendicular a *CD*.

Obs: este resultado é conhecido como o Teorema das três perpendiculares.



18) Dados $A = (1,\ 0,\ 3)$ $B = (-2,\ 1,\ 1)$ e $C = (2, -1,\ 0)$ seja *ABCD* um paralelogramo.

a) Determine o vértice *D*.

b) Determine o cosseno do ângulo *ABC*.

c) Encontre um vetor perpendicular ao plano do paralelogramo.

19) Encontre um vetor unitário que esteja na bissetriz do ângulo formado pelos vetores $u = (1, -3, -5)$ e $v = (3,\ 5,\ 1)$.

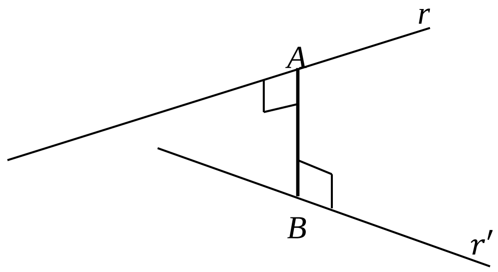
20) Calcule a área do triângulo cujos vértices são $A=(1,\ 1,\ 0)$, $B=(2,\ 3,\ -3)$ e $C=(3,\ -3,\ 2)$.

21) Calcule o volume do tetraedro cujos vértices são $(2,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 1)$, $(0,\ 3,\ 2)$ e $(4,\ 1,\ 1)$.

22) Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $u=(3,\ 4,\ 6)$,
$v=(24,\ 32,\ 50)$ e $w=(7,\ 9,\ 13)$.

23) Calcule *x* para que o triângulo *ABC* de vértices $A=(x,\ 0,\ 0)$, $B=(0,\ 4,\ 0)$ e $C=(0,\ 0,\ 2)$ tenha área 11.

24) Considere as retas reversas:
$r=\{(-3+2t, 2, 1-t); t\in\mathbb{R}\}$ e $r'=\{(-1+s, 2-s, -3); s\in\mathbb{R}\}$
Sejam $A\in r$ e $B\in r'$ tais que *AB* seja perpendicular a r e a r'.

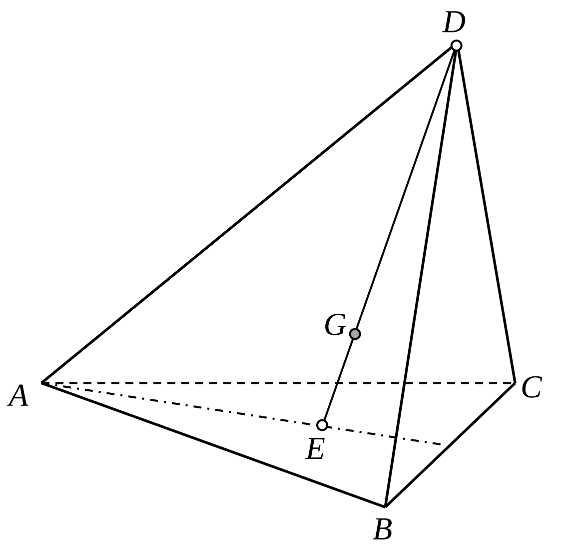


a) Determine os pontos *A* e *B*.
b) Determine a distância entre as retas r e r'.

25) No espaço com origem, o baricentro do tetraedro *ABCD* é o ponto *G* definido por

$$G=\frac{A+B+C+D}{4}.$$

Mostre que *G* está no segmento que une um vértice, ao baricentro da face oposta.
Mostre que a distância de *G* a um vértice é o triplo da sua distância ao baricentro da face oposta.



Respostas

1) $(-1, 0, 0)$

2) $(8, -1, 9)$

3) a) $w = 4u - 3v$ b) não é possível

4) $k = 1$

5) $(10, -2, 0)$, $(0, 3, 10)$, $(6, 0, 4)$

6) 1/3

7) reversas.

8) $(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3})$

9) a) $x = (3 - t, 4 + t, 2 + 2t)$ b) $2\sqrt{6}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ d) $5\sqrt{2}$

10) a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{6}$ c) c) um hexágono regular.

12) $(0, 0, 2)$ ou $(0, 0, 3)$

13) a) reversas b) 3/7 c) Resposta pessoal. Por exemplo, trocar –3 por 2.

14) a) $\sqrt{19}$ b) $1/\sqrt{11}$

15) Resposta pessoal.

16) $(\frac{20}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{20}{3})$

18) a) $D = (5, -2, 2)$ b) $\frac{12}{7\sqrt{6}}$ c) $(5, 11, -2)$

19) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

20) $4\sqrt{3}$

21) 1/2

22) 2

23) $\pm\sqrt{21}$

24) a) $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, -3)$ b) $\sqrt{6}$