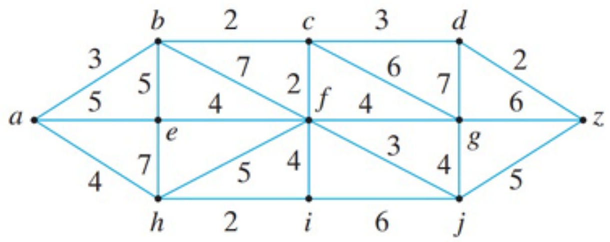
Exercício 1 No grafo com pesos abaixo, encontre o caminho de menor comprimento entre cada par de vértices nos itens a seguir e diga qual o menor dentre eles.



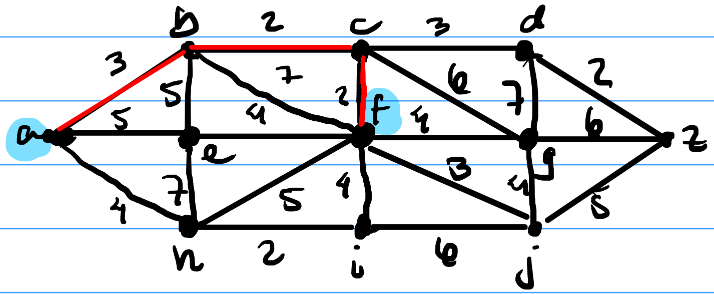
(a) a, f

(b) a, g

(c) b, j

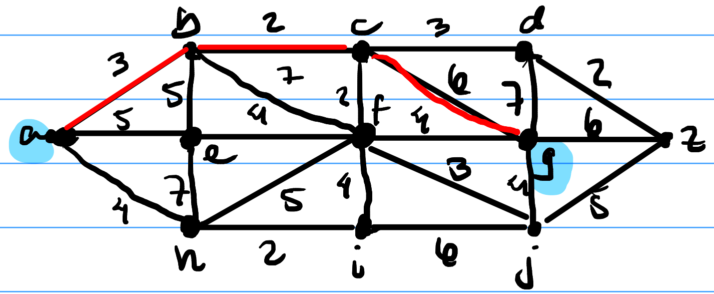
(d) h, d

a)



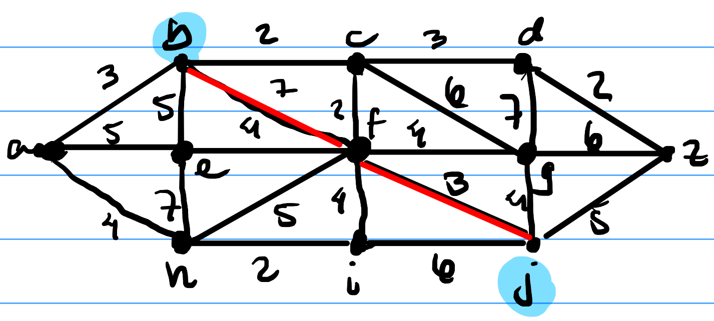
$C = \{a, b, c, f\}$
$\omega = 7.$

b)



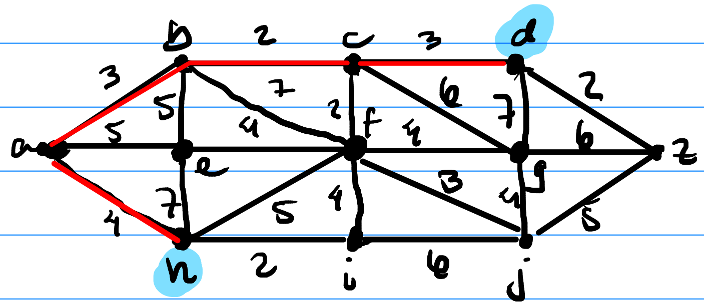
$c = \{a, b, c, g\}$
$\omega = 11$

c)



$c = \{b, f, j\}$
$\omega = 10$

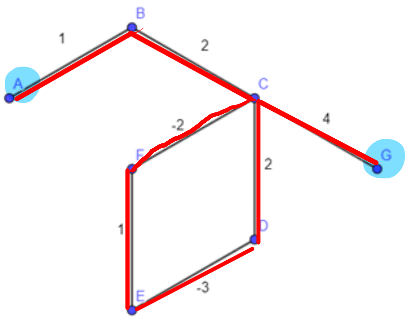
d)



$C = \{h, a, b, c, d\}$

↳ $= 12$

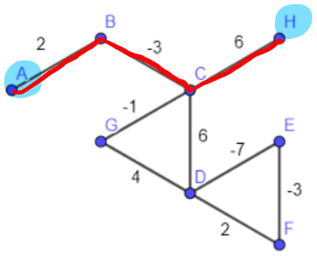
Exercício 2 Em cada um dos itens a seguir, determine o menor caminho entre o par de vértices no grafo.



(a) A,G

$C = \{A, B, C, F, E, D, G\}$

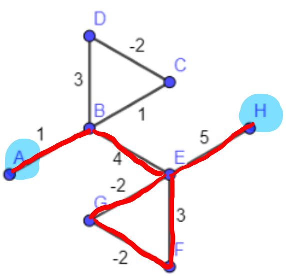
↳ $= 5$



(b) A,H

$C = \{A, B, C, H\}$

↳ $= 5$

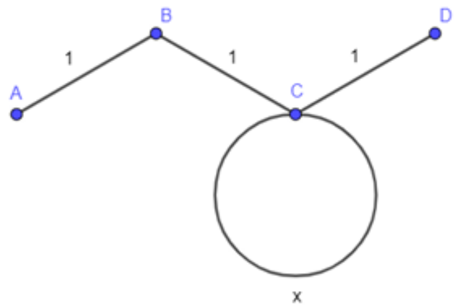


(c) A,H

$C = \{A, B, G, F, E, H\}$

↳ $= 9.$

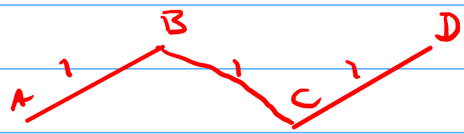
Exercício 3 Determine para quais valores de $x \in \mathbb{R}$, existe um único caminho mínimo de A a D, justificando-se.



I) Sem passar pelo laço:
O único caminho sem passar pelo laço é A, B, C, D. Para esse caminho ser mínimo, $x>0$, pois se $x \leq 0$, então o caminho A, B, C, D não seria o único mínimo

II) Passando pelo pelo laço, $x=0$, no entanto o caminho não seria o único mínimo.

$\boxed{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.}$ $\Rightarrow$ $x>0$:



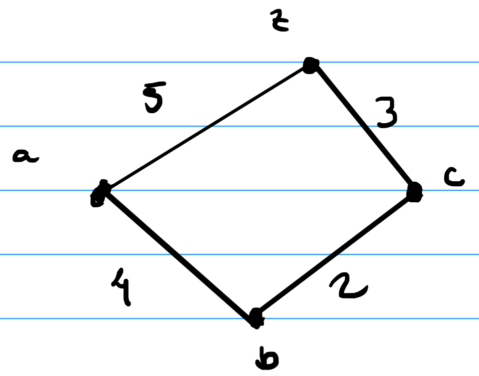
Exercício 4 Escreva um algoritmo que encontre os comprimentos dos menores caminhos entre um vértice dado para todos os outros vértices em um grafo com pesos conexo G.

```
def algoritmo (a, G)

    # Função de dijkstra para vértices a, z:
    def dijkstra (w, a, z)
        int L(a) = 0 ;
        for all vertices x≠a:
            L(x) = ∞ ;
        T = set(all vertices);
        while (z∈T):
            choose v∈T with min{L(v)}
            T = T.pop(v)   (T = T\{v})
            for each x∈T adjacent to v:
                L(x) = min{L(x), L(v) + w(v,x)}.

        return L(x) ((L(x) = min(L(z))).

    U = [ ]
    for vertice in G:
        U.append(dijkstra(edges G, a, vertice)

    return U.
```

Exercício 5 Verdadeiro ou falso? Quando um grafo com pesos conexo e dois vértices a e z são dados como entradas para o algoritmo a seguir, ele retorna o tamanho do menor caminho de a a z. Se o algoritmo estiver correto, demonstre. Caso contrário, dê um exemplo de um grafo conexo com pesos e um par de vértices a e z para os quais o algoritmo falha.

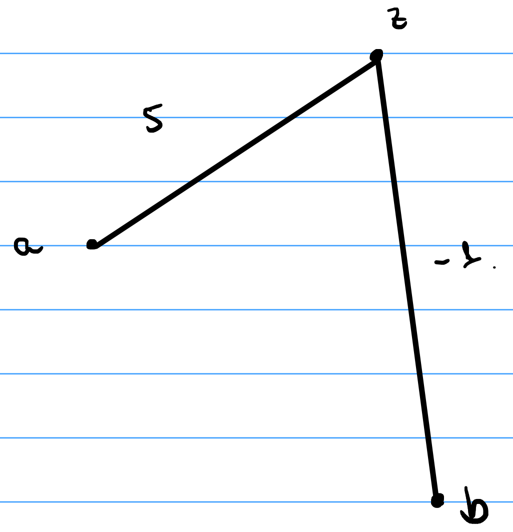
```
algor(w, a, z) {

    length = 0
    v = a
    T = conjunto de todos os vértices
    while(v ≠ z) {
        T = T − {v}
        escolha x ∈ T com menor w(v, x)
        length = length + w(v, x)
        v = x
    }
    return length
}
```

Dá muita merda. Exemplo:



Menor caminho: $\{a, z\} \Rightarrow 5$
Pelo algoritmo: $\{a, b, c, z\} \Rightarrow 9$.

Exercício 6 Verdadeiro ou falso? O Algoritmo de Dijkstra encontra o comprimento do caminho mais curto em um grafo com pesos conexo mesmo se alguns pesos forem negativos. Se for verdade, demonstre. Caso contrário, dê um contraexemplo e explique o motivo do algoritmo falhar com ele.



Como Dijsktra não revisita vértices, o menor caminho entre a e z seria {a,z}. Contudo, o caminho {a,z,b,z} é menor do que {a,z}.

Exercício 7 Considere um tabuleiro 3 × 4 como na figura abaixo. Cada quadro contém um número:

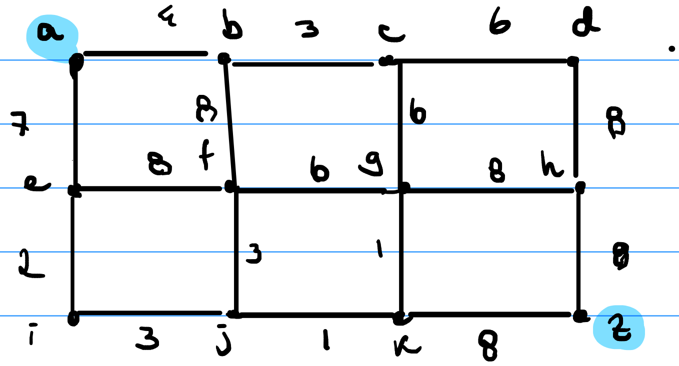
0	4	3	6
7	8	6	8
2	3	1	8

O objetivo deste jogo é mover um peão do canto superior esquerdo para o canto inferior direito, seguindo uma série de movimentos para a direita ou para baixo. O objetivo é minimizar a soma dos pontos associados aos quadrados pelos quais o peão passa durante o percurso.

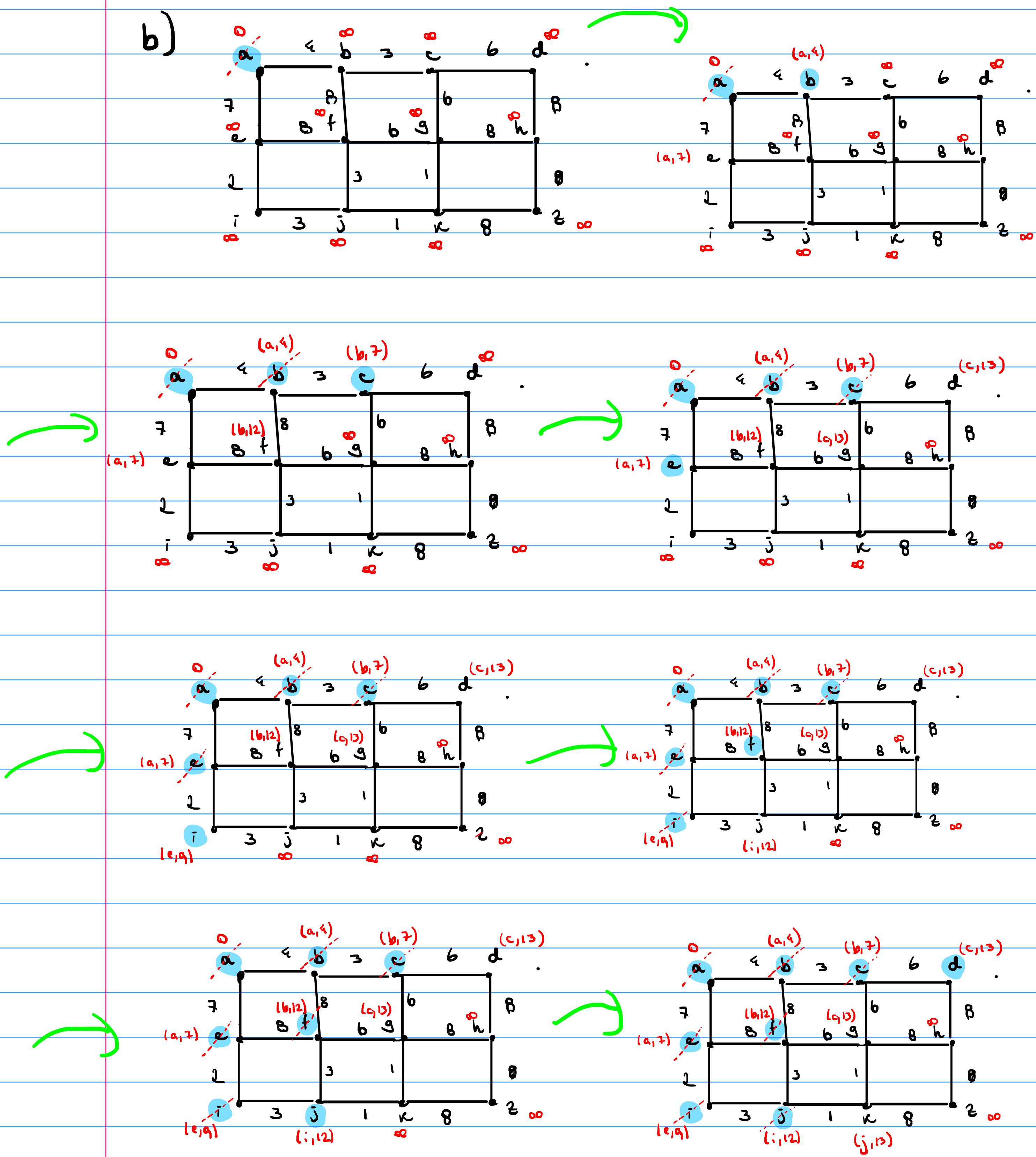
(a) Formule o jogo com um problema de caminho mínimo, exibindo o grafo correspondente.

(b) Resolva o problema usando o algoritmo de Dijkstra.

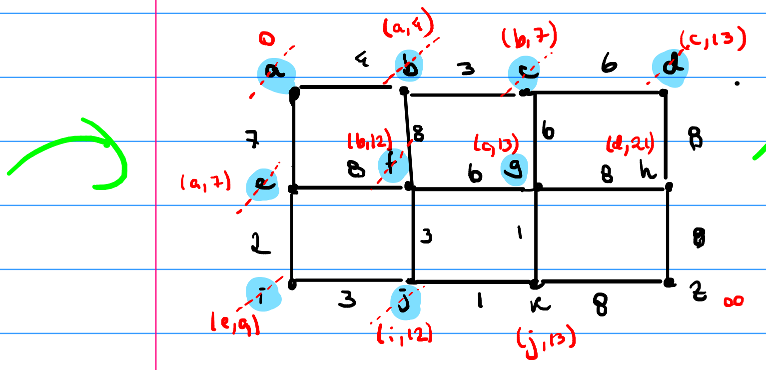
a)

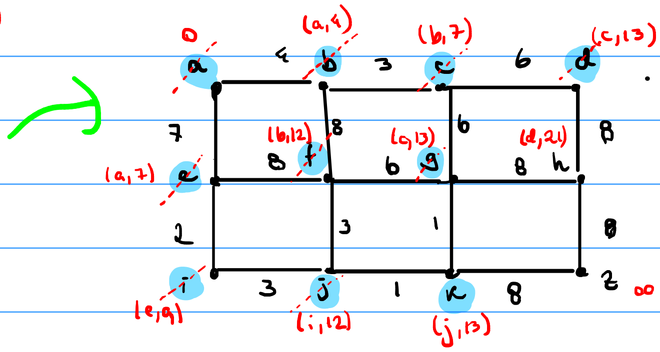


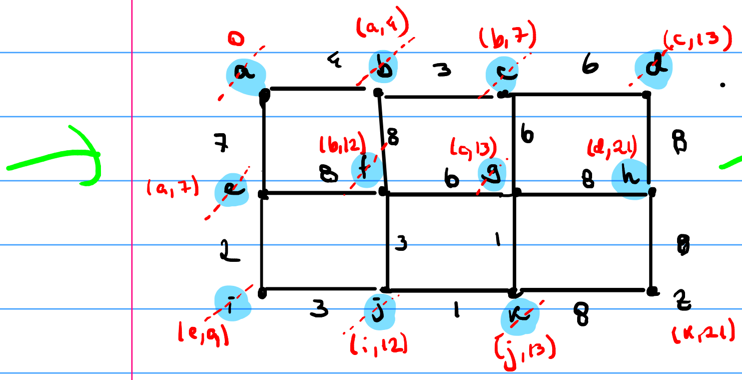
b)

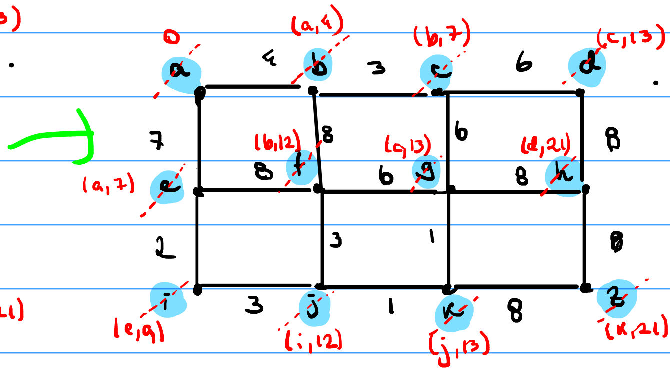


a b c d e f g h i j k z
4 3 6 7 8 8 6 6 8 8 2 3 1 3 1 8 8
0 ∞
(a,4)
(a,7)
(b,7)
(b,12)
(c,13)
(g,13)
(e,9)
(i,12)
(j,13)





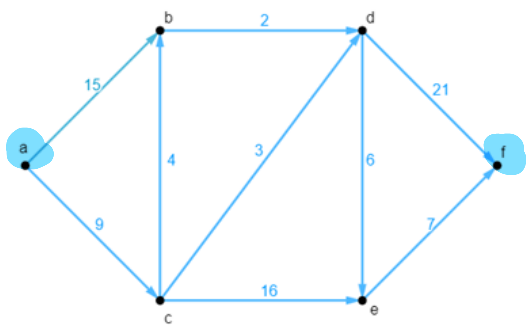




Acabou

Menor caminho: {a, e, i, j, k, z} = 21.
(0 → 7 → 2 → 3 → 1 → 8)

Exercício 8 Considere o seguinte grafo com pesos:

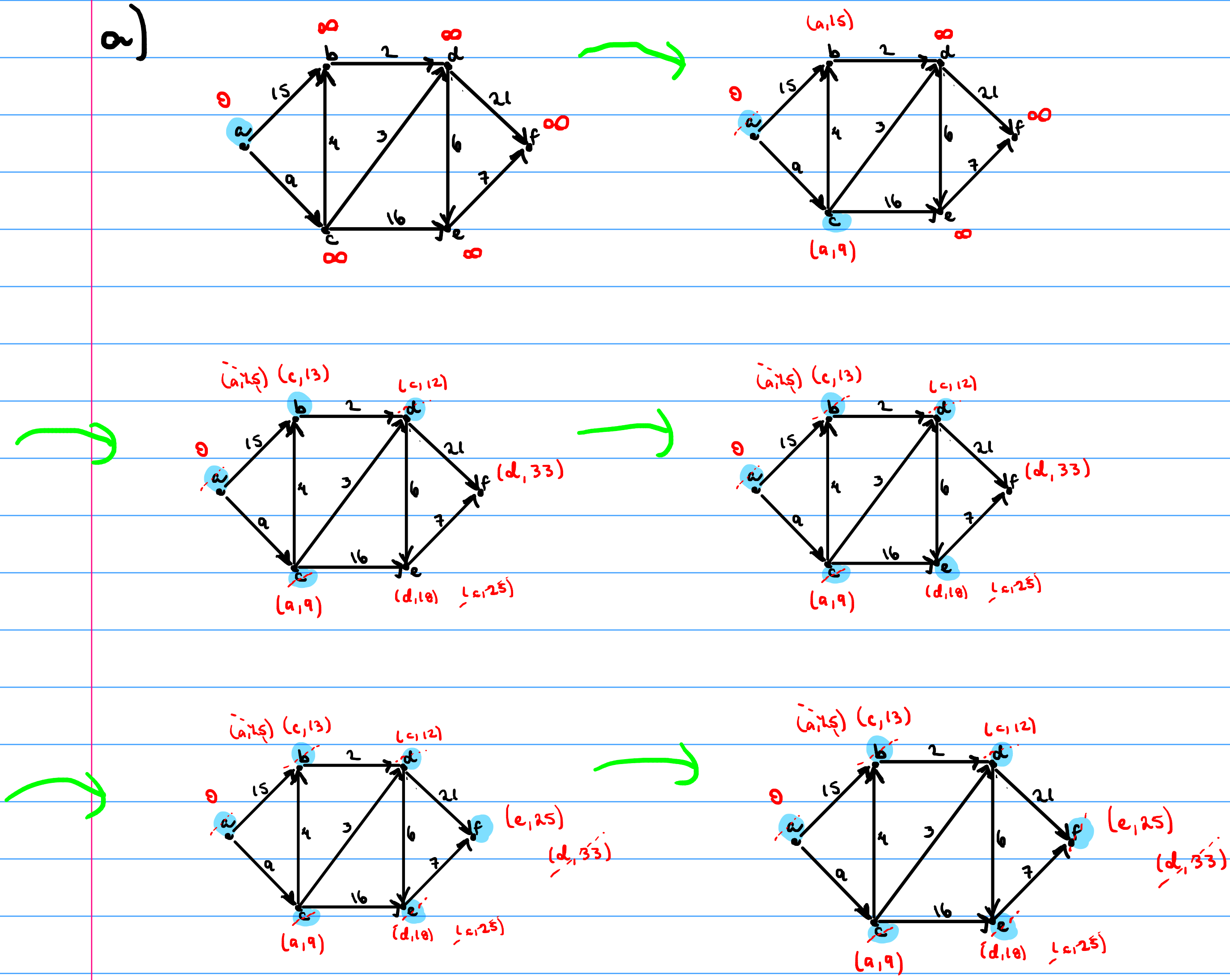


(a) Aplique o algoritmo de Dijkstra para calcular a distância mínima entre o vértice a e o vértice f, e identifique um ou o caminho correspondente a essa distância.

(b) Com base nos cálculos realizados no item (a), é possível determinar qual é a distância mínima do vértice a ao vértice d? Forneça uma justificativa.

(c) Mais uma vez com base nos cálculos realizados no item (a), seria possível indicar qual é a distância mínima entre os vértices b e f? Justifique.

a)



Acabou

Menor caminho {a, c, d, e, f}.

b) Sim. O algoritmo encontra o caminho mínimo entre a e z. Contudo d está no caminho. Logo, é possível achar o caminho minimal entre a e d. ({a, c, d})

c) Sim é possível. Achamos o menor caminho entre d e f. Logo, o menor caminho entre b e f é {b, d, e, f}.

Definição. Um *subcaminho* de uv é um caminho uw, onde w está em uv.

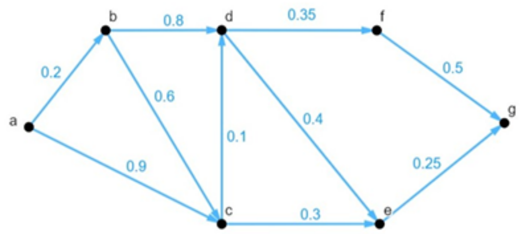
Exercício 9 Mostre que se uv é o caminho mínimo de u a v e uw é subcaminho de uv, então uw é caminho mínimo de u a w (isto é, mostre que todo subcaminho de um caminho mínimo é mínimo também).

Seja uv o caminho mínimo de u a v e seja w um vértice deste caminho.

Agora, por absurdo, suponha que uw não seja o caminho mínimo de u a w. Portanto, existe pelo menos um vértice w' tal que o caminho de u a w passe por w'. Contudo, temos que w' não pertence ao caminho uv.

Como w' está no caminho mínimo de u a w então, ele estaria no caminho mínimo de u a v (já que w pertence a uv), o que é um absurdo.

Exercício 10 Rota mais confiável. Espertinho vai trabalhar de carro todos os dias. Como acabou de concluir um curso de análise de redes, Espertinho sabe determinar o caminho mais curto até seu local de trabalho. Infelizmente, a rota escolhida é muito bem policiada e, com todas as multas por excesso de velocidade que ele recebe, o caminho mais curto pode não ser a melhor opção. Por isso, Espertinho decidiu escolher uma rota que maximize a probabilidade de ele não ser multado por um policial. A rede a seguir mostra as possíveis rotas entre sua casa e seu trabalho, e as probabilidades de ele não ser parado associadas a cada trecho. A probabilidade dele não ser parado em um rota *é o produto das probabilidades associadas aos segmentos.*



Por exemplo, considerando-se a rota $a \to c \to e \to g$, a probabilidade de não receber a multa é $0,9 \times 0,3 \times 0,25 = 0,0675$.

O objetivo é encontrar a rota que maximize a probabilidade de não receber multa, no caminho de 1 até 7.

O problema pode ser transformado num problema de caminho mínimo, considerando a transformação logarítmica que converte o produto das probabilidades numa soma, isto é, se $p_{1k} = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ é a probabilidade de não ser multado, então $\log p_{1k} = \log p_1 + \log p_2 + \ldots + \log p_k$.

Uma vez que $0 \leq p_{1k} \leq 1$, $\log p_{1k} \leq 0$. Assim, a maximização de $\log p_{1k}$ corresponde a minimizar $-\log p_{1k} = -\log p_1 - \ldots - \log p_k$.

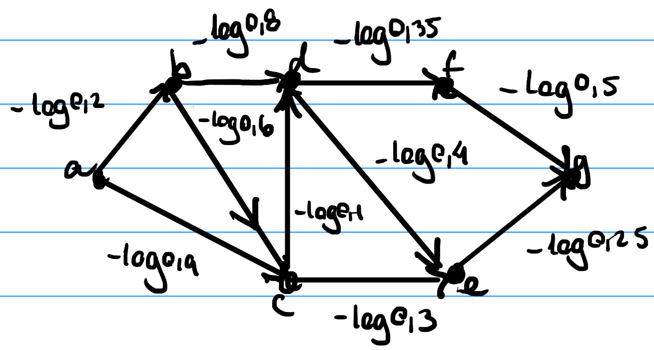
Pede-se:

(a) Reescreva a rede, substituindo as probabilidades das arestas pelo negativo do seu logaritmo.

(b) Concluído o item anterior, temos em mãos um problema de caminho mínimo. Faça a formulação do problema de menor caminho entre nós a e g.

(c) Encontre a solução do problema, usando um algoritmo apropriado

a)



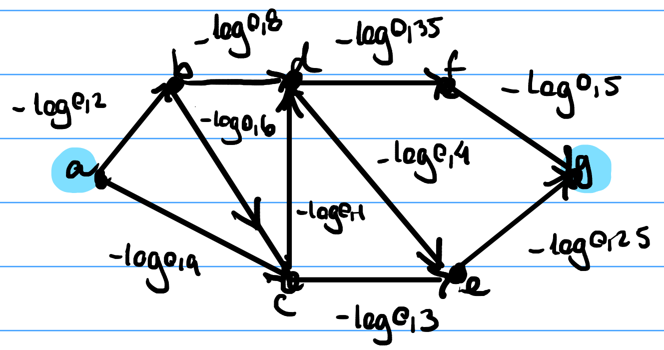
b) Devemos minimizar $-\log p_1 - \dots - \log p_n$

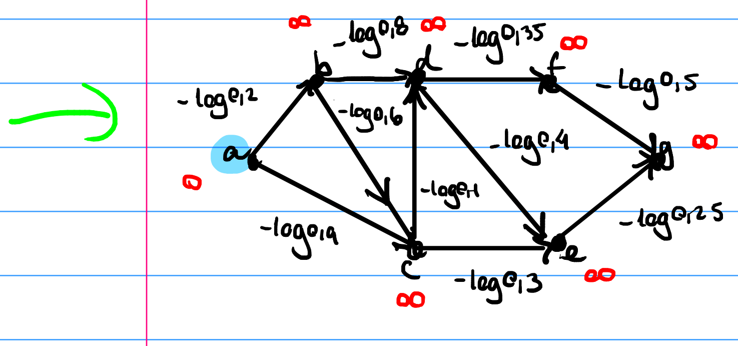
Como $0 < p_i \leq 1 \ \forall i \in \mathbb{N}$, então $0 \leq -\log p_i \leq 1$

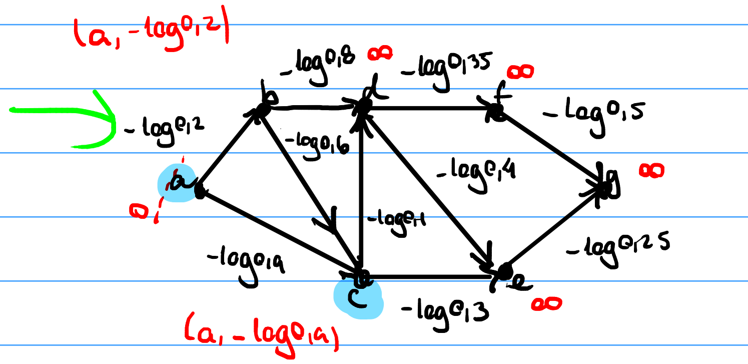
Lembrando que se $p_i \to 1$, $-\log p_i \to 0$ e se $p_i \to 0$, $-\log p_i \to \infty$

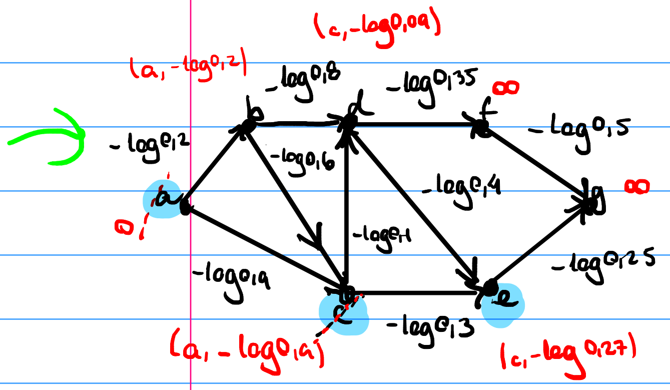
Por exemplo, o maior valor seria $-\log 0{,}1$ e o menor seria $-\log 0{,}9$

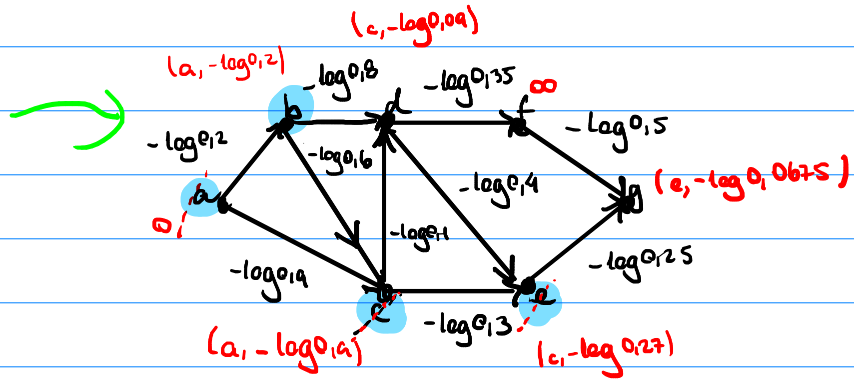
c)

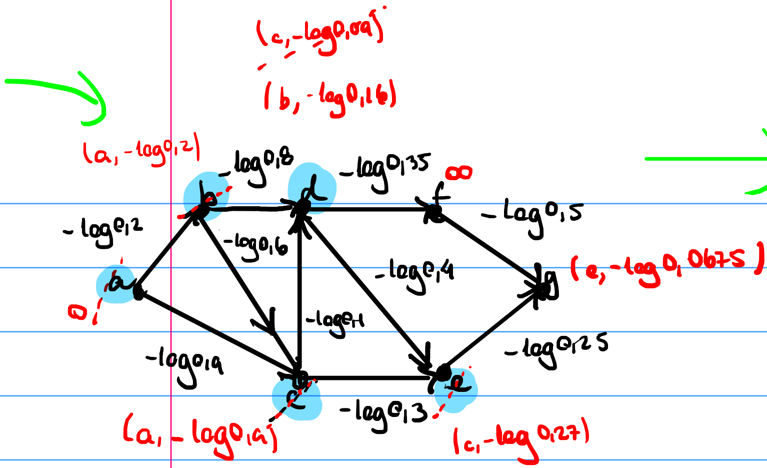


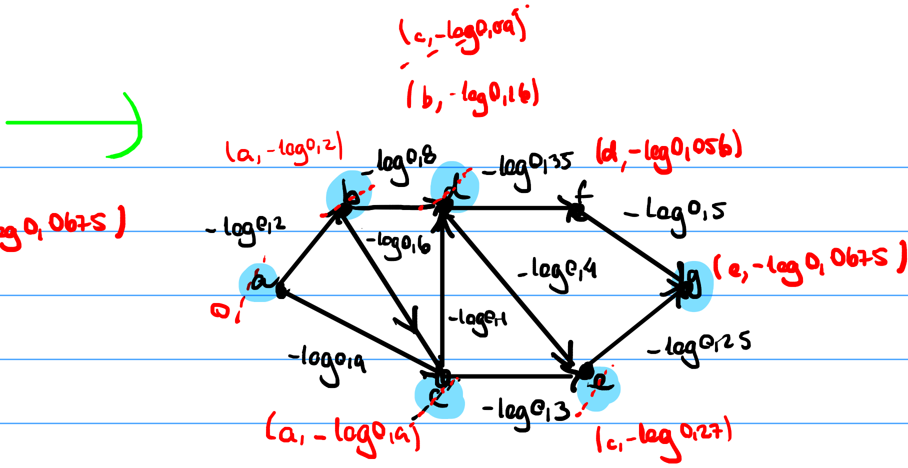


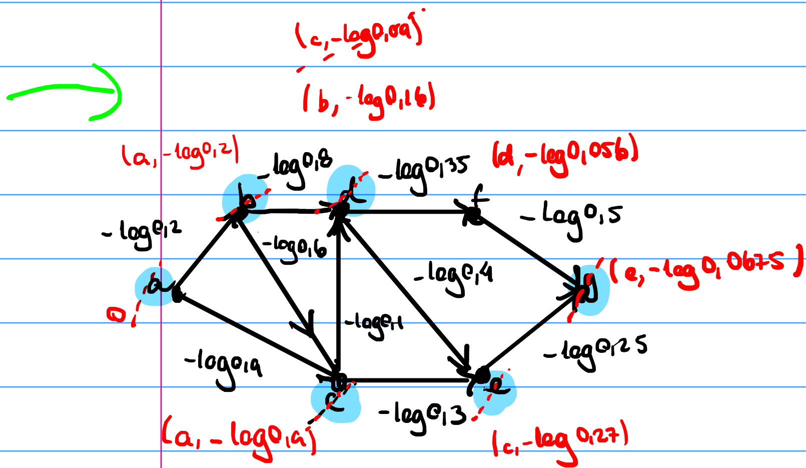












Acabou.

Menor caminho: {a, c, e, g}.