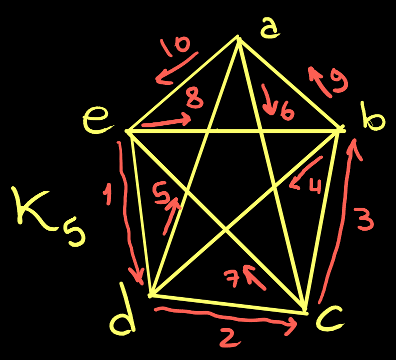
Matemática Discreta

15/08/24

Ciclo Euleriano

- Em um grafo, um ciclo que contém todas as arestas e todos os vértices é chamado ciclo eureliano

Exemplo



Teorema

Um grafo G possui um ciclo euleriano, se e somente se, G é conexo e todo vértice de G tem grau par.

G tem ciclo E. $\Longleftrightarrow$ G conexo e $\delta(v)$ par $\forall v \in V$

$\Rightarrow$)

$\Rightarrow$ Supomos que $G=(V,E)$ possui um ciclo euleriano, dado que C contém todos os vértices de G e é necessariamente conexo.

Seja $v \in V$, cada vez que C passa por v, tem que utilizar duas arestas diferentes (uma para chegar, outra para sair) ou um laço. Dado que C é euleriano, ele passa exatamente uma vez em cada aresta incidente em v. Deduzimos que o conjunto de arestas incidentes em v está formado por pares de arestas e/ou laços. Portanto, a paridade de todos os vértices deve ser par

$\Leftarrow$) SUPOMOS QUE G É CONEXO E $\delta(v)$ PAR, $\forall v \in V$,

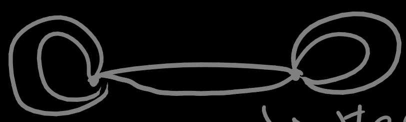
A PROVA É INDUÇÃO NO NÚMERO $n = |E|$

CASO $n = 1$

$|V| = 1$

$\propto$ CICLOS

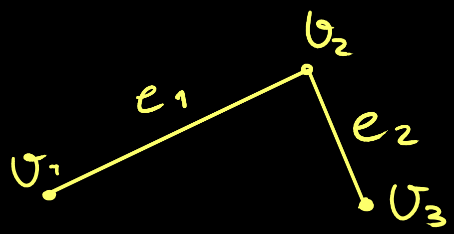
$|V| = 2$



$\propto$ CICLOS

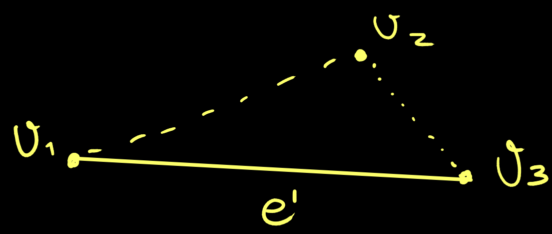
$\forall e \in E \,/\, e = \{v_1, v_2\}$ $\quad \exists e' \in E \,/\, e' = \{v_1, v_2\}$

PODEMOS SUPOR ENTÃO QUE $|V| \geq 3$, DADO QUE G É CONEXO E COM PELO MENOS 3 VÉRTICES, EXISTEM $v_1, v_2, v_3 \in V$ E ARESTAS e_1, e_2 COMO NA FIGURA:



PELA HIPÓTESE INDUTIVA, TODO GRAFO CONEXO COM TODOS OS VÉRTICES DE GRAU PAR, E $k < n$ ARESTAS POSSUI UM CICLO EULERIANO.

CONSTRUÍMOS O GRAFO G' OBTIDO ELIMINANDO e_1 E e_2 E CRIAMOS $e' = \{v_1, v_3\}$



SABEMOS QUE G' TEM $n-1$ ARESTAS E O GRAU DOS VÉRTICES SÃO TODOS PARES

NÃO É POSSÍVEL APLICAR A HIPÓTESE INDUTIVA SE G' FOR NÃO CONEXO

→ SE G' É CONEXO, SABEMOS QUE G' POSSUI UM CICLO EULERIANO C'. EM C' TROCAMOS:

$$(v_1, e', v_3) \text{ ou } (v_3, e', v_1)$$

POR:

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3) \text{ ou } (v_3, e_2, v_2, e_1, v_1)$$

ASSIM, OBTEMOS O CICLO EULERIANO EM G

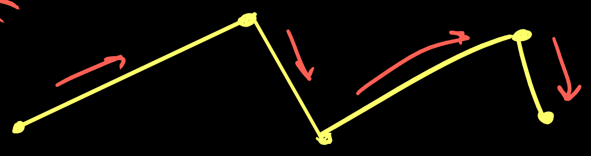
→ SE G' NÃO É CONEXO, ENTÃO ELE POSSUI DUAS COMPONENTES CONEXAS, A DO v_1 (OU v_3) E A DO v_2. CADA COMPONENTE É UM GRAFO CONEXO, O GRAU DE TODOS OS VÉRTICES É PAR E POSSUEM MENOS DE n ARESTAS. PELA HIPÓTESE INDUTIVA, CADA COMPONENTE POSSUI UM CICLO EULERIANO. CHAMAMOS DE C' O CICLO QUE CONTÉM e', E C'' O OUTRO.

EM C' ELIMINAMOS e' E TROCAMOS PELA SEQUÊNCIA $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3)$ OU $(v_3, e_2, v_2, e_2, v_1)$ E CONCATENAMOS O CICLO RESULTANTE COM C''. OBTEMOS ASSIM UM CICLO EULERIANO PARA G.

CAMINHO EULERIANO

- UM CAMINHO QUE PASSA POR TODOS OS VÉRTICES DO GRAFO E EXATAMENTE UMA VEZ POR CADA ARESTA.

EXEMPLO



TEOREMA

SEJA $G(V,E)$ E $v,w \in V$, COM $v \neq w$, ENTÃO G POSSUI UM CAMINHO EULERIANO DE v À w SE, E SOMENTE SE, G É CONEXO, OS GRAUS DE v E w SÃO ÍMPARES E O GRAU DOS VÉRTICES RESTANTES SÃO PARES!

DEM

DADO $G(V,E)$, E $v,w \in V$, $v \neq w$ DE GRAU ÍMPAR, CONSTRUÍMOS $G' = G(V, E \cup \{v,w\})$, LOGO, G' É CONEXO E TODOS SEUS VÉRTICES TEM GRAU PAR. PELO TEOREMA ANTERIOR, G' POSSUI UM CICLO EULERIANO, LOGO, HÁ UM CICLO QUE CONTÉM TODOS OS VÉRTICES (COM REPETIÇÃO) E TODAS AS ARESTAS (UMA ÚNICA VEZ)

RETIRANDO A ARESTA, FICARÍAMOS COM O GRAU v,w ÍMPAR E UM CAMINHO DE v À w QUE CONTENHA TODOS OS VÉRTICES (PODE REPETIÇÕES) E EXATAMENTE UMA VEZ CADA ARESTA.