Limites de Funções

1 Seja $I \subset \mathbb{R}$; $\bar{I}$ denotará a união de I com seus extremos (se existirem). Consideremos uma função $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $c \in \bar{I}$.

definição: existe o limite da função quando a variável tende a $\underline{c}$ ($\lim_{x \to c} f(x)$) se algum $L \in \mathbb{R}$ satisfaz a propriedade: dado $\varepsilon > 0$ qualquer podemos encontrar $\delta > 0$ (dependendo de ε) de modo que $0 < |x - c| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$; obviamente devemos considerar $x \in I$.

Observemos que se existe $\lim_{x \to c} f(x)$ e L, L' satisfazem a definição então $L = L'$ ("unicidade do limite"). De fato, suponhamos $L' > L$; então para algum $\delta_0 > 0$ e $0 < |x - c| < \delta_0$ temos que $|f(x) - L| < \frac{L' - L}{2}$ e $|f(x) - L'| < \frac{L' - L}{2}$ simultaneamente, o que é absurdo.

Se na definição acima trocamos $0 < |x - c| < \delta$ por $0 < x - c < \delta$, diremos que existe o limite da função quando a variável tende a $\underline{c}$ pela direita ($\lim_{x \to c^+} f(x)$); se trocamos por $0 < c - x < \delta$, diremos que existe o limite da função quando a variável tende a $\underline{c}$ pela esquerda ($\lim_{x \to c^-} f(x)$). Naturalmente quando $c \in \bar{I}$ é a extremidade esquerda de I estamos de fato tratando do limite lateral $\lim_{x \to c^+} f(x)$; se $c \in \bar{I}$ é a extremidade direita de I, estamos tratando de $\lim_{x \to c^-} f(x)$. Quando $c \in \bar{I}$ não é uma extremidade de I, vê-se facilmente que $\lim_{x \to c} f(x)$ existe se e somente se existem e são iguais os dois limites

$\lim_{x\to c^+} f(x)$ e $\lim_{x\to c^-} f(x)$.

Um exemplo simples é a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = x$ se $x < 0$, $g(x) = 1 + x$ se $x > 0$, e $g(0)$ qualquer. Temos $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$.
Não existe $\lim_{x\to 0} g(x)$.

E' importante entender o que significa "não existir $\lim_{x\to c} f(x)$". Isso quer dizer: é falso que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ~~para~~ $\underbrace{\text{qualquer}}_{\text{que seja}}$ $L \in \mathbb{R}$. Portanto existe algum $\varepsilon_L > 0$ de modo que $|f(x) - L| < \varepsilon_L$ não vale em nenhum conjunto $0 < |x - c| < \delta$; mais especificamente para todo $\delta > 0$ existe algum $0 < |x_\delta - c| < \delta$ satisfazendo $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon_L$. Observe que ε_L depende de L!

O resultado mais importante deste capítulo é a seguinte

<u>Proposição</u>: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ e $c \in \bar{I}$. Então $\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim f(x_n) = L$ para qualquer sequência $(x_n) \in I$ com $\lim x_n = c$ e $|x_n - c| > 0$.

<u>Prova</u>: 1) Seja $\lim_{x\to c} f(x) = L$ e $x_n \to c$ ($x_n \in I$, $|x_n - c| > 0$). Dado $\varepsilon > 0$, gostaríamos de encontrar $N \in \mathbb{N}$ de modo que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ para $n > N$. Ora, existe $\delta > 0$ de modo que $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
Como $x_n \to c$, existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $0 < |x_n - c| < \delta$ se $n > N$.
Segue-se que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ para $n > N$.

2) Reciprocamente: suponhamos $\lim f(x_n) = L$ sempre que $x_n \to c$ ($|x_n - c| > 0$). Pretendemos mostrar que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$. De fato, caso isto não ocorra, existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que em qualquer conjunto $0 < |x-c| < \delta$ (escolheremos $\delta = \frac{1}{n}$) encontramos algum y_δ com $0 < |y_\delta - c| < \delta$ (e escreveremos $y_\delta = y_n$) satisfazendo $|f(y_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$ (isto é, $|f(y_n) - L| \geq \varepsilon_0$). Portanto, $y_n \to c$ mas $f(y_n)$ não converge a L, absurdo $\square$

Exercício: analisar as versões correspondentes para os limites laterais.

Podemos portanto derivar fatos relativos a limites de funções usando o que já se sabe sobre limites de sequências. Por exemplo:

(i) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \to c} |f(x) - L| = 0$

(ii) Se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$ então

$\lim\limits_{x \to c} f(x) + g(x) = L + M$ e $\lim\limits_{x \to c} f(x)\, g(x) = L \cdot M$

(iii) Se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \neq 0$ então existe $\delta_0 > 0$ de modo que $f(x) \neq 0$ em $0 < |x - c| < \delta_0$

prova: se conseguíssemos sempre algum $0 < |x_n - c| < \frac{1}{n}$ de modo que $f(x_n) = 0$ então $\lim f(x_n) = 0$, absurdo

(IV) Se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \neq 0$ então $\lim\limits_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$

(para a afirmativa fazer sentido devemos considerar x no conjunto $0 < |x - c| < \delta_0$ onde $f(x) \neq 0$)

(V) Se $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L$ e $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ então $\lim_{x\to c} h(x) = L$

Exemplo: seja $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ crescente, isto é, se $x<y$ então $f(x) \leq f(y)$. Se f for limitada superiormente e $\sup(f) = \sup\{f(x) \,;\, x\in(a,b)\}$ então $\lim_{x\to b^-} = \sup(f)$. De fato, dado $\varepsilon>0$ qualquer, no intervalo $(\sup(f)-\varepsilon, \sup(f)]$ encontramos algum valor $f(x_0)$; portanto, $f((x_0,b)) \subset (\sup(f)-\varepsilon, \sup(f)]$ pois f é crescente.

Do mesmo modo, se f for limitada inferiormente e $\inf(f) = \inf\{f(x) \,;\, x\in(a,b)\}$ então $\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf(f)$ (demonstre!).

Observe que se f estiver definida em $[a,b)$ então é limitada inferiormente, e se estiver definida em $(a,b]$ é limitada superiormente. (sempre na hipótese de f ser crescente).

Exercício: enunciar e demonstrar o resultado correspondente para funções decrescentes.

Consideremos novamente $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ crescente e $c\in(a,b)$; se restringimos f a um intervalo $[c-\delta_0, c+\delta_0] \subset (a,b)$, f é obviamente limitada. Segue-se que existem $\lim_{x\to c^-} f(x)$ e $\lim_{x\to c^+} f(x)$, com $\lim_{x\to c^-} f(x) \leq \lim_{x\to c^+} f(x)$ (e $\lim_{x\to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c^+} f(x)$). Quando $\lim_{x\to c^-} f(x) < \lim_{x\to c^+} f(x)$, diremos que c é um ponto de descontinuidade de f (pode ocorrer tanto $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c) < \lim_{x\to c^+} f(x)$ quanto $\lim_{x\to c^-} f(x) < f(c) = \lim_{x\to c^+} f(x)$ ou ainda $\lim_{x\to c^-} f(x) < f(c) < \lim_{x\to c^+} f(x)$)

Seja $I_c = \left(\lim_{x\to c^-} f(x) ; \lim_{x\to c^+} f(x)\right)$ quando c é ponto de descontinuidade. Como f é crescente segue-se que, dados $c_1 < c_2$, então $\lim_{x\to c_1^+} f(x) \leq \lim_{x\to c_2^-} f(x)$, e portanto $I_{c_1} \cap I_{c_2} = \emptyset$.

Exercício: seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ crescente. Então o conjunto de pontos de descontinuidade de f é enumerável.

Os demais pontos do intervalo são os pontos de continuidade da função: temos $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c^+} f(x)$, ou seja, $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Exemplo: a partir das propriedades descritas anteriormente, vemos que se $p(x)$ é um polinômio então $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

Sendo $p(x), q(x)$ polinômios, a função $\frac{p(x)}{q(x)}$ é chamada função racional, e está definida fora dos pontos onde q se anula (as raízes de q). Portanto, se c não é raiz de q segue-se que $\lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$.

Toda raiz $q(c) = 0$ de q possui multiplicidade: trata-se do ~~maior~~ natural $k \in \mathbb{N}$ t.q. $q(x) = (x-c)^k q_1(x)$

e $q_1(c) \neq 0$.

Suponhamos então que p e q se anulam no ponto $c \in \mathbb{R}$ com multiplicidades k_1 e k_2 respectivamente (estamos interessados no caso $k_2 \geq 1$!). Para analisar $\lim\limits_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)}$, temos diferentes casos:

1) se $k_1 = k_2$, então $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-c)^{k_1} p_1(x)}{(x-c)^{k_2} q_1(x)}$ para $x \neq c$; concluimos que $\lim\limits_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(c)}{q_1(c)}$.

2) se $k_1 > k_2$ então $\frac{p(x)}{q(x)} = (x-c)^{k_1-k_2} \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$ e daí $\lim\limits_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$

3) se $k_1 < k_2$ temos $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{(x-c)^{k_2-k_1}} \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$ e $\lim\limits_{x \to c} \left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| = +\infty$, de acordo com a seguinte definição: seja $h : (a,b) \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$; então $\lim\limits_{x \to c} h(x) = +\infty$ quando dado $M > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ (dependendo de M) de modo que se $0 < |x-c| < \delta$ então $h(x) > M$.

De modo análogo, $\lim\limits_{x \to c} h(x) = -\infty$ quando dado $M < 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ t.q. se $0 < |x-c| < \delta$ então $h(x) < -M$.
Por exemplo, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x^{2k}} = -\infty$ $(k \in \mathbb{N})$

Para obter informações mais precisas, podemos analisar os limites laterais $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$, como no caso $f(x) = \frac{1}{x^{2k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$. Temos $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

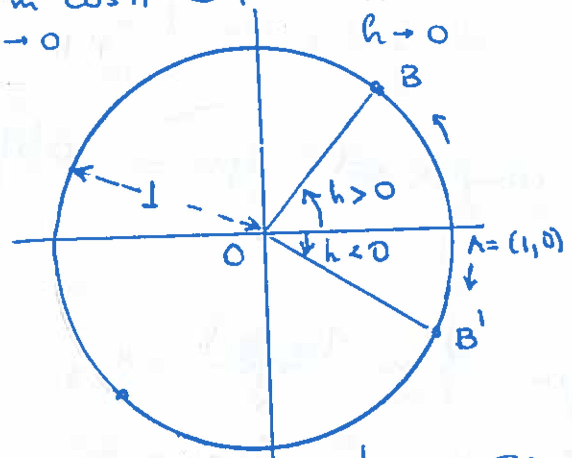
(2) Um limite notável.

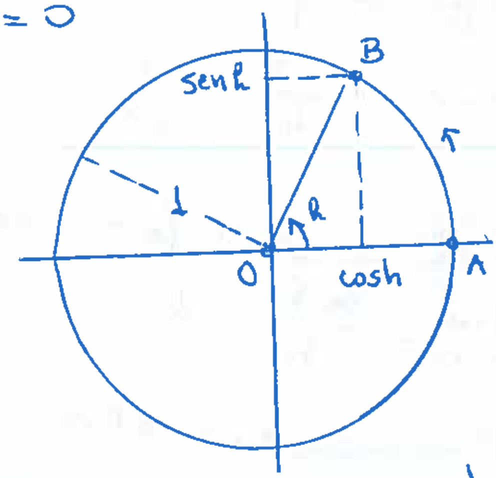
Consideremos em $\mathbb{R}^2$ o círculo de raio 1 centrado em $O=(0,0)$, e $A=(1,0)$. Associado ao arco $\widehat{AB}$ (tomado no sentido anti-horário) temos um número real $h \geq 0$ de modo que a área do setor $\widehat{AOB}$ é dada por $\frac{h}{2}$; quando B percorre o círculo no sentido anti-horário a partir de A até se aproximar novamente de A temos $h \in [0, 2\pi)$.

Se o ponto B' percorre o círculo no sentido horário a partir de A, convencionamos que $h \in (-2\pi, 0]$ (a área do setor $\widehat{AOB'}$ é $\frac{|h|}{2}$).

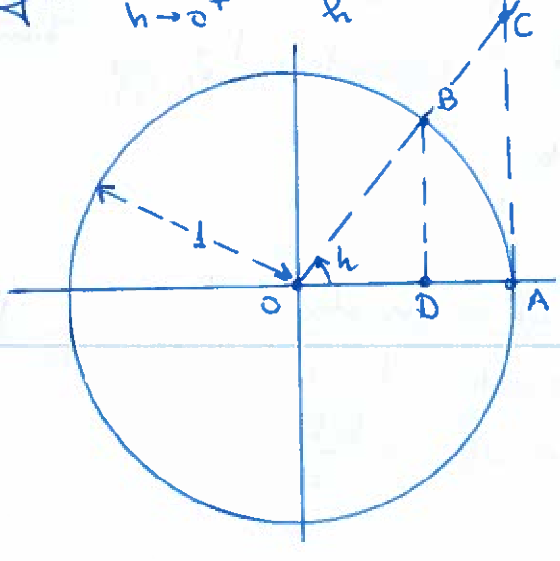
Definimos $(\operatorname{sen} h, \cos h)$, para $h \in (-2\pi, 2\pi)$ como as coordenadas do ponto B. Vemos que

$\lim\limits_{h \to 0} \cos h = 1$ e $\lim\limits_{h \to 0} \operatorname{sen} h = 0$





Provemos que $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$. Na figura abaixo,



D é o pé da perpendicular ao segmento OA traçada a partir de B, e C é o ponto situado na reta OB de modo que o triângulo OAC é reto em A. Temos que:

área ΔODB < área $\widehat{OAB}$ < área ΔOAC.

Ora: área $\Delta ODB = \dfrac{|OD||DB|}{2} = \dfrac{(\operatorname{sen} h)(\cos h)}{2}$

área $\widehat{OAB} = \dfrac{h}{2}$

área $\Delta \widehat{OAC} = \dfrac{|OA||AC|}{2} = \dfrac{|AC|}{2}$

Como ΔODB e ΔOAC são semelhantes,

$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|OA|}{|OD|} \Rightarrow \frac{|AC|}{\operatorname{sen} h} = \frac{1}{\cos h} \Rightarrow |AC| = \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}$$

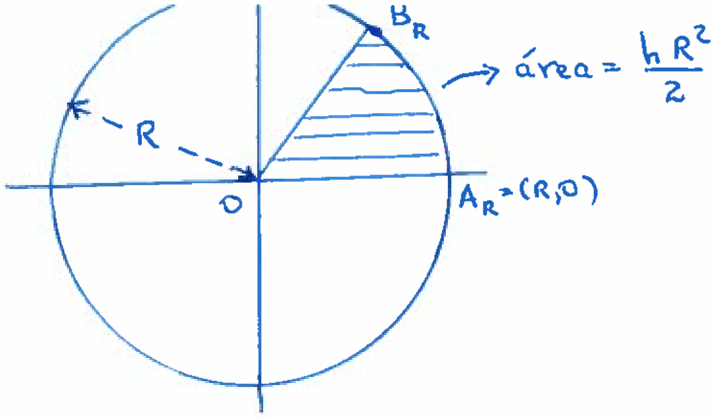
Segue-se que $\dfrac{(\operatorname{sen} h)(\cos h)}{2} < \dfrac{h}{2} < \dfrac{\operatorname{sen} h}{2\cos h}$, ou

$\cos h < \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} < \dfrac{1}{\cos h}$. Concluímos que $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$

<u>Exercício</u>: refazer o argumento para obter $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$

<u>Exercício</u>: mostre que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tang} h}{h} = 1$, onde $\operatorname{Tang}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ é definida como $\operatorname{tang} h = \dfrac{\operatorname{sen} h}{h}$. Calcule $\lim\limits_{h\to(-\frac{\pi}{2})^+} \operatorname{Tang} h$ e $\lim\limits_{h\to(\frac{\pi}{2})^-} \operatorname{Tang} h$.

<u>Observações</u>: 1) considerando os pontos $A_R = (R,0)$ e B_R no círculo de raio R centrado em O temos área $\widehat{A_R O B_R} = \dfrac{hR^2}{2}$



2) Estendemos as funções sen e cos a todo $\mathbb{R}$ colocando:

$\operatorname{sen} x := \operatorname{sen} h$ e $\cos x := \cos h$

quando $x \geq 0$ e $x = h + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{N}$ e $h \in [0, 2\pi)$; se $x \leq 0$, $x = h - 2k\pi$ para $k \in \mathbb{N}$ e $h \in (-2\pi, 0]$.

Deste modo, $\operatorname{sen}(h + 2k\pi) = \operatorname{sen} h$ e $\cos(h + 2k\pi) = \cos h$ quando $k \in \mathbb{Z}$; dizemos que sen e cos são periódicas com período 2π.

3) Mostre que $\cos(h - 2\pi) = \cos h$ e $\operatorname{sen}(h - 2\pi) = \operatorname{sen} h$ quando $h \in [0, 2\pi)$.