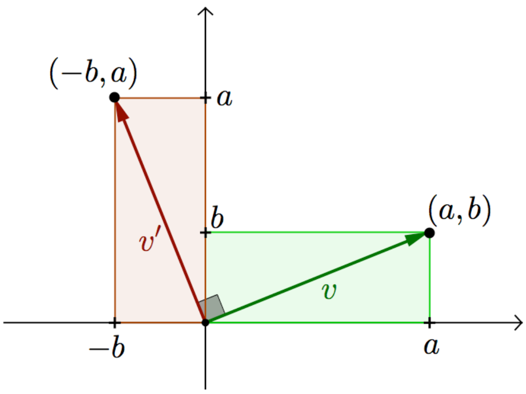
Vetores-3

Rotação de 90º

Um caso particular interessante da condição de perpendicularismo que veremos a seguir é o caso da rotação de 90º de um vetor dado. Na figura ao lado, o vetor $v = (a, b)$ girou de 90º em torno da origem, resultando no vetor $v' = (-b, a)$.

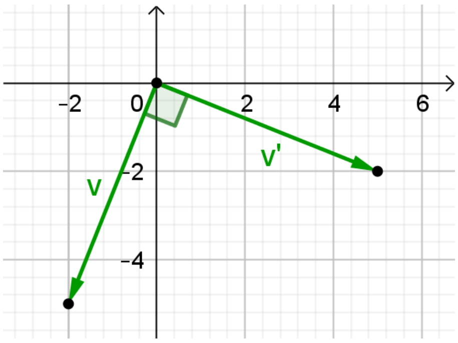


Os vetores $v = (a,b)$ e $v' = (-b,a)$ são perpendiculares e possuem mesmo módulo.

A propriedade a seguir será bastante útil:

Para girar um vetor de 90º *no sentido trigonométrico positivo, trocamos de posição as coordenadas e trocamos o sinal da primeira.*

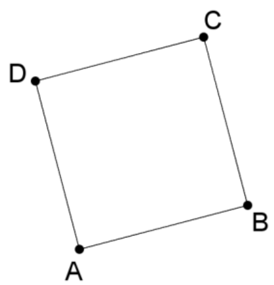
Por exemplo, girando de 90º o vetor $(-2, -5)$ obtemos o vetor $(5, -2)$.



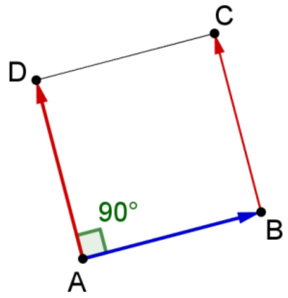
Problema

$ABCD$ é um quadrado.

Dados os vértices $A = (3, 1)$ e $B = (8, 4)$ determine os outros dois vértices.



Solução



$$A = (3,1) \text{ e } B = (8,4)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5,3)$$

Girando de 90°,

$$\overrightarrow{AD} = (-3,5)$$

$$D = A + \overrightarrow{AD} = (3,1) + (-3,5) = (0,6)$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (-3,5)$$

$$C = B + \overrightarrow{BC} = (8,4) + (-3,5) = (5,9)$$

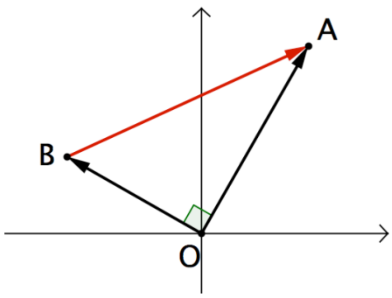
Condição de perpendicularismo

Vamos agora considerar dois vetores perpendiculares e observar o que ocorre com suas coordenadas.

Sejam $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$ dois pontos do plano cartesiano, distintos da origem *O*, e tais que o triângulo *OAB* seja retângulo em *O*.

Consideremos ainda os vetores

$\overrightarrow{OA} = (x, y)$, $\overrightarrow{OB} = (x', y')$ e $\overrightarrow{BA} = (x - x', y - y')$.



Pelo teorema de Pitágoras, $\left|\overrightarrow{BA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2$, ou seja,

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2xx' + 2yy' = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$xx' + yy' = 0$$

Essa relação é conhecida como a condição de perpendicularismo entre dois vetores do plano cartesiano.

A recíproca vale, pois as operações acima são todas reversíveis e, além disso, a recíproca do teorema de Pitágoras é verdadeira. Assim, dados dois vetores $\overrightarrow{OA} = (x,\ y)$ e $\overrightarrow{OB} = (x',\ y')$, nenhum deles nulo e tais que $xx' + yy' = 0$, então esses vetores são perpendiculares.

Exercício

$A = (1,1), B = (4,6), C = (-1,5)$. A reta que passa por P e é perpendicular a AB corta o eixo X em P. Determine P.

Solução

Seja $P = (x,0)$. Temos $\overrightarrow{AB} = (3,5)$ e $\overrightarrow{CP} = (x+1,-5)$ Pela condição de perpendicularismo desses vetores temos:

$$3(x+1) + 5(-5) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{22}{3}$$

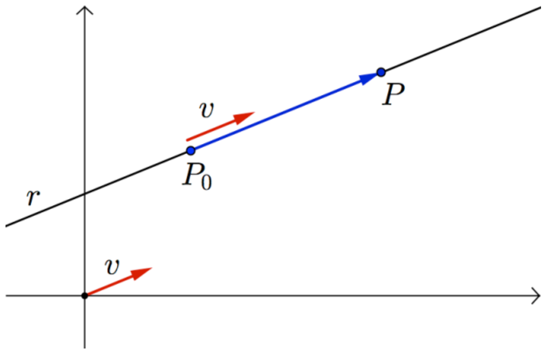
Resp: $P = (22/3, 0)$

Equação da reta

Construção das equações paramétricas

Inicialmente, definiremos uma reta da seguinte forma. São dados um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e um vetor $v = (a,b)$. A reta r é a reta que passa pelo ponto P_0 e é paralela ao vetor v. Esse vetor é chamado de *vetor diretor* da reta, pois ele dá a sua direção.

A figura a seguir mostra a proposta de construção da reta r e observe que o vetor v pode ser desenhado em qualquer lugar.



Se $P=(x,y)$ é um ponto qualquer da reta r então os vetores $\overrightarrow{P_0P}$ e v são paralelos, ou seja, um é múltiplo do outro.

Assim, para algum real t temos que $\overrightarrow{P_0P}=tv$, ou seja,

$$P=P_0+tv$$

Essa é a equação vetorial da reta r. Entretanto, a equação de uma reta pode assumir diversas formas, e é isso o que veremos a seguir.

A partir da equação vetorial podemos trabalhar com as coordenadas obtendo:

$$(x,y)=(x_0,y_0)+t(a,b)$$

A partir do conceito de igualdade de pares ordenados e das operações definidas entre eles obtemos as *equações paramétricas* da reta r:

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases} \quad t\in \mathrm{R}$$

O número real t é chamado de *parâmetro* e, dessa forma, para cada valor de t é obtido um ponto (x,y) da reta r.

Exemplo

Determinar as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $P_0=(3,4)$ e é paralela ao vetor $v=(2,\,1)$.

Solução

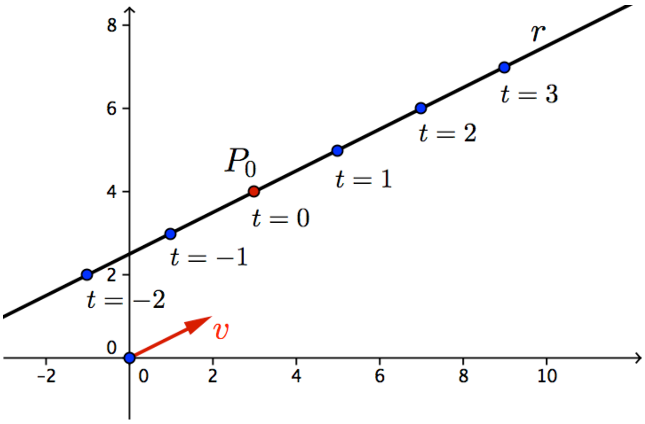
Se (x,y) é um ponto qualquer da reta r devemos ter $(x,y)=(3,4)+t(2,1)$ o que nos dá, imediatamente,

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=4+t \end{cases}, \quad t\in \mathrm{R}$$

Costumamos também exibir o conjunto de todos os pontos dessa reta assim:

$$r = \{(3+2t, 4+t); t \in \mathbb{R}\}$$

A figura abaixo mostra alguns pontos da reta *r* obtidos para diversos valores do parâmetro *t*.



As equações paramétricas mostram uma régua graduada infinita sobre a reta *r*.

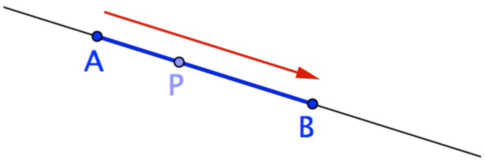
Obtendo as outras formas da equação da reta

A partir das equações paramétricas, a forma geral (ou cartesiana) e a forma reduzida são obtidas facilmente. Vamos mostrar isso, informalmente, trabalhando no exemplo acima.
As equações paramétricas da reta *r* são:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \end{cases}$$

Isolando *t* em ambas as equações temos $\frac{x-3}{2} = t$ e $y - 4 = t$. Igualando, temos $\frac{x-3}{2} = y - 4$, o que fornece a equação na forma geral $x - 2y + 5 = 0$. Naturalmente que, a partir da forma geral, obtemos equação na forma reduzida $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, com a visualização do coeficiente angular.
É interessante notar que se o vetor diretor de uma reta é $v = (a, b)$ então o coeficiente angular dessa reta é $m = \frac{b}{a}$.

A equação de um segmento de reta



Dados dois pontos A e B, para todo ponto P da reta AB, os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares. Então, $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ para algum real t. Entretanto, P pertence ao segmento AB se, e somente se, $t \in [0,1]$. De fato, quando $t = 0$ o ponto P coincide com A, quando $t = 1$ o ponto P coincide com B, e quanto $0 < t < 1$, o ponto P está no interior do segmento AB.

Temos então,

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB},\ t \in [0,1]$$
$$P - A = t(B - A)$$
$$P - A = tB - tA$$
$$P = (1-t)A + tB, \qquad t \in [0,1]$$

Por exemplo, se $A = (1,6)$ e $B = (5,3)$ então todo ponto P do segmento AB é dado por:

$$P = (1-t)A + tB, \qquad t \in [0,1]$$
$$P = (1-t)(1,6) + t(5,3) = (1-t, 6-6t) + (5t, 3t) = (1+4t, 6-3t), \quad t \in [0,1]$$

Observe que, quando $t = 0$ temos $P = (1,6) = A$, e quando $t = 1$, $P = (5,3) = B$.

Essa equação resolve também o problema de dividir um segmento em uma dada razão. Por exemplo, com os dados acima, se quisermos encontrar o ponto P do segmento AB tal que

$\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{2}{3}$, basta observar que $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{2}{5}$ e fazer $t = \dfrac{2}{5}$ na equação anterior.

O vetor normal

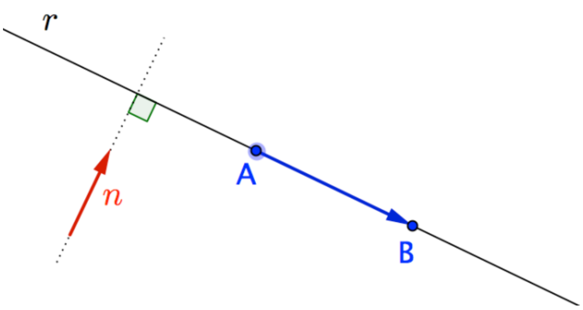
Consideremos agora uma reta *r* com equação na forma geral $ax+by+c=0$. Vamos obter, a seguir, um significado interessante para os coeficientes *a* e *b*. Para isso vamos escolher dois pontos quaisquer da reta *r*: $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ e, a seguir, vamos construir dois vetores. Com os dois primeiros coeficientes da equação da reta construímos o vetor $n=(a,b)$ e, com os dois pontos da reta, construímos o vetor $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

Como os pontos *A* e *B* pertencem à reta *r* temos $ax_1+by_1+c=0$ e $ax_2+by_2+c=0$. Porém subtraindo membro a membro obtemos $a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0$.

O que isso significa?

Lembrando da condição de perpendicularismo, essa última relação significa que o vetor (a,b) é perpendicular ao vetor (x_2-x_1,y_2-y_1).

Concluímos então que o vetor $n=(a,b)$ é perpendicular à reta *r* de equação $ax+by+c=0$.



O vetor $n=(a,b)$ é chamado de *vetor normal* da reta *r*.

Conhecer o vetor normal de uma reta permite que possamos obter soluções rápidas e eficientes para diversos problemas, como se pode ver nos exemplos a seguir.

Exemplo

Encontre a equação da reta que passa pelos pontos $A=(1,3)$ e $B=(5,0)$.

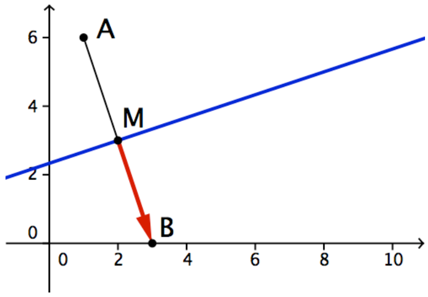
Solução

O vetor diretor da reta *r* é $\overrightarrow{AB}=(4,-3)$. Fazendo uma rotação de 90º encontramos o vetor normal $n=(3,4)$. Assim, a equação de *r* é $3x+4y+c=0$ e, substituindo um dos dois pontos dados, encontramos $c=-15$. A equação é, então, $3x+4y-15=0$.

Exemplo

Dados os pontos $A = (1,6)$ **e** $B = (3,0)$ determine a equação da mediatriz do segmento *AB*.

Solução



O ponto médio do segmento *AB* é $M = \dfrac{A+B}{2} = (2,3)$.

O vetor $\overrightarrow{MB} = B - M = (1,-3)$ é perpendicular à mediatriz. Logo, a equação da mediatriz é $x - 3y + c = 0$ e, como o ponto M pertence a essa reta, temos que $c = 7$. Assim, a equação da mediatriz do segmento *AB* é $x - 3y + 7 = 0$.

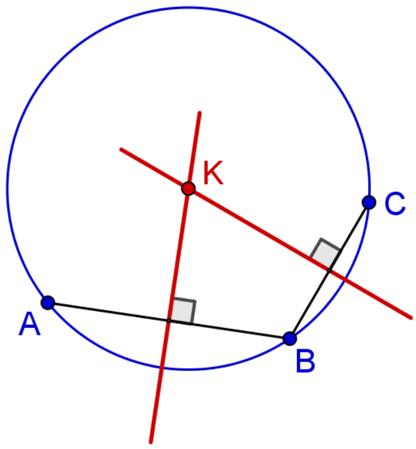
Exemplo

Dados os pontos $A = (1,7)$, $B = (3,1)$ e $C = (9,-1)$, determine o centro da circunferência que contém os pontos *A*, *B* e *C*.

Solução

Sabemos que, se dois pontos pertencem a uma circunferência então a mediatriz do segmento determinado por eles passa pelo centro da circunferência.

Assim, o centro da circunferência que contém os pontos *A*, *B* e *C* é o ponto de interseção das mediatrizes dos segmentos *AB* e *BC*. Como já sabemos de encontrar a equação da mediatriz de um semento, então o problema está, teoricamente, resolvido.



Retas paralelas e perpendiculares

Se duas retas são **paralelas**, seus vetores diretores são paralelos e seus vetores normais são paralelos também.

Assim, as retas $2x + 3y = 5$ e $4x + 6y = 17$ são paralelas pois seus vetores normais são paralelos.

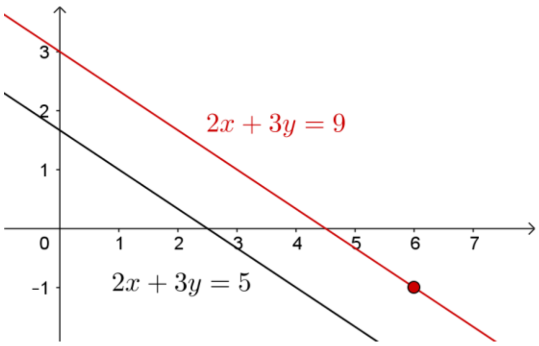
Exemplo

Determine a equação da reta paralela a $2x + 3y = 5$ que passa pelo ponto $(6, -1)$.

Solução

Toda reta paralela à reta $2x + 3y = 5$ tem a forma $2x + 3y = k$. Se ela passa pelo ponto $(6, -1)$ então $2 \cdot 6 + 3 \cdot (-1) = k$, ou seja, $k = 9$. A reta procurada é

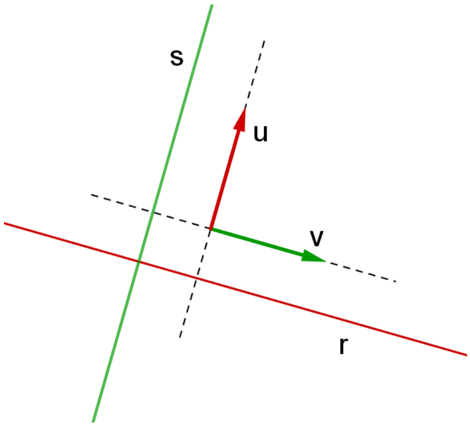
$$2x + 3y = 9$$



Observando as equações reduzidas, fica claro que duas retas paralelas possuem mesmo coeficiente angular, uma vez que possuem mesmo vetor diretor. Assim, as retas definidas pelas equações $y = mx + p$ e $y = mx + p'$ são paralelas.

Se duas retas são **perpendiculares**, o vetor diretor de uma é o vetor normal da outra.

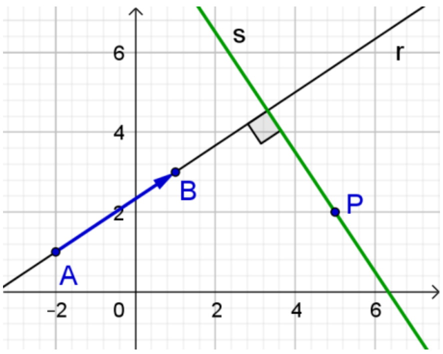
Na figura a seguir, o vetor u é normal da reta r, mas é diretor da reta s. Por outro lado, o vetor v é normal da reta s, mas é diretor da reta r.



Naturalmente que se duas retas são perpendiculares, seus vetores normais são também perpendiculares. Assim, as retas $ax + by = c$ e $bx - ay = c'$ são perpendiculares pois seus vetores normais (a, b) e $(b, -a)$ são perpendiculares.

Exemplo

A reta r passa pelos pontos $A = (-2, 1)$ e $B = (1, 3)$. Determine a equação da reta s que passa por $P = (5, 2)$ e é perpendicular a r.



Solução

O vetor $\overrightarrow{AB} = (3, 2)$ é normal da reta s. Logo a equação de s é $3x + 2y = c$. Como ela passa por $P = (5, 2)$ substituímos as coordenadas desse ponto na equação:

$$3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = c \quad \rightarrow \quad c = 19$$

A equação da reta s é $3x + 2y = 19$.

Perpendicularismo e coeficiente angular

Sendo $a, b \neq 0$ toda reta perpendicular à reta $ax + by = c$ tem a forma $bx - ay = c'$. De fato, os vetores normais delas são (a, b) e $(b, -a)$ que são perpendiculares. Escrevendo essas equações na forma reduzida temos

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{a}x + \frac{c'}{a}$$

Os coeficientes angulares são

$$m = -\frac{b}{a} \quad e \quad m' = \frac{a}{b}$$

Logo,

$$mm' = -1, \quad \text{ou seja,} \quad m' = -\frac{1}{m}$$

Por exemplo, toda reta perpendicular à reta $y = -3x + 1$ tem a forma $y = \frac{1}{3}x + p$.

Equação da reta que passa por (x_0, y_0) e tem coeficiente angular m

(equação favorita do Cálculo)

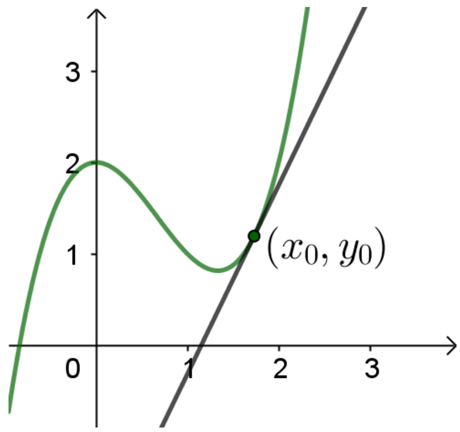
Encontrar uma reta desse tipo é um problema centrar do capítulo de derivadas. No Cálculo, (x_0, y_0) é um ponto de uma curva e o coeficiente angular m é a derivada da equação de curva nesse ponto.

Se (x, y) é um ponto qualquer dessa reta então:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

Ou seja,

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$


3
2
1
0
1
2
3
(x_0, y_0)