ÁLGEBRA LINEAR

04/11/24

LISTA 10

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Ache b tal que A tenha um autovalor negativo.

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)^2 - b^2 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - b^2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - b^2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\cdot(1-b^2)$$
$$\Delta = 4b^2 \longrightarrow \lambda = \frac{2 \pm 2b}{2} \rightarrow \lambda_1 = 1+b, \quad \lambda_2 = 1-b$$

$$\boxed{b \notin [-1, 1]}$$

(b) Como podemos concluir que A precisa ter um pivô negativo?

Veja $\rightarrow \det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = b^2$

Logo, $|1-\lambda| = |b|$, então eu preciso ter um pivô de módulo equivalente, como A é simétrico, o devemos ter um pivô λ e outro $-\lambda$

(c) Como podemos concluir que A não pode ter dois autovalores negativos?

Traço de $A = \lambda_1 + \lambda_2 \rightarrow 1+b+1-b = 2$

$\Rightarrow$ Se λ_1 e $\lambda_2 < 0$, $Tr(A) < 0$, o que não pode acontecer

2. Em quais das seguintes classes as matrizes A e B abaixo pertencem: invertível, ortogonal, projeção, permutação, diagonalizável, Markov?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quais das seguintes fatorações são possíveis para A e B? LU, QR, $S\Lambda S^{-1}$ ou $Q\Lambda Q^T$?

$A \rightarrow$ Permutação, ortogonal, diagonalizavel, Markov, Invertível

$B \rightarrow$ Markov, projeção

$A \rightarrow LU, QR, Q\Lambda Q^T$

$B \rightarrow QR$

3. Complete a matriz A abaixo para que seja de Markov e ache o autovetor estacionário. Sua conclusão é válida para qualquer matriz simétrica de Markov A? Por quê?

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} .7 & .1 & .2 \\ .1 & .6 & .3 \\ .2 & .3 & .5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{autovetor}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d+e \\ d+b+f \\ e+f+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sim, vale para toda matriz de Markov

4. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um grupo de matrizes invertíveis se $A, B \in \mathcal{M}$ implica $AB \in \mathcal{M}$ e $A^{-1} \in \mathcal{M}$. Quais dos conjuntos abaixo é um grupo?

(a) O conjunto das matrizes positivas definidas;
(b) o conjunto das matrizes ortogonais;
(c) o conjunto $\{e^{tC}\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$, para uma matriz C fixa;
(d) o conjunto das matrizes com determinante igual a 1.

a) Não são um grupo, não consigo garantir que $x^TABx > 0 \quad \forall x$

b) A ortogonal $\Rightarrow A^{-1}$ ortogonal ✓
B ortogonal

$\underbrace{A\cancel{B B^T}}_{I}\cancel{A^T}_{I} = I$ ✓

É um grupo

c) $e^{t_1 C}, e^{t_2 C} \rightarrow C = S\Lambda S^{-1}$

$$e^{t_1 C} = S \begin{bmatrix} e^{t_1\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t_1\lambda_n} \end{bmatrix} S^{-1} \rightarrow S \begin{bmatrix} e^{t_1\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t_1\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t_2\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t_2\lambda_n} \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$e^{t_2 C} = S \begin{bmatrix} e^{t_2\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t_2\lambda_n} \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$= S \begin{bmatrix} e^{(t_1+t_2)\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{(t_1+t_2)\lambda_n} \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{(t_1+t_2)C}$$ ✓

$C = S\Lambda S^{-1}$

$$e^{tC} = S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} S^{-1} \rightarrow (e^{tC})^{-1} = S \begin{bmatrix} \frac{1}{e^{\lambda_1 t}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{e^{\lambda_n t}} \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{-tC} \checkmark$$

É um grupo

d) $\det A = 1$, $\det B = 1$ $\rightarrow$ $\det AB = \boxed{1}$, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \boxed{1}$ É um grupo

5. Sejam A e B matrizes simétricas e positivas definidas. Prove que os autovalores de AB são positivos. Podemos dizer que AB é simétrica e positiva definida?

$x^T A x > 0$ $\rightarrow$ Se todo pivô de A e B são positivos, então $\det A_k > 0 \wedge \det B_k > 0$.

$x^T B x > 0$

Portanto $\det(AB)_k = \det A_k \cdot \det B_k > 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$

Logo, consequentemente, todo autovalor de AB é positivo.

6. Ache a forma quadrática associada à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. Qual o sinal dessa forma quadrática? Positivo, negativo ou ambos?

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 7 & 9-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(9-\lambda) - 35 \rightarrow \lambda^2 - 10\lambda - 26 = 0$$

$9 - 9\lambda - \lambda + \lambda^2 - 35$

$\Delta = 100 + 104$

$\Delta = 204$

$102 \cdot 2$

$61 \cdot 4$

$26 \cdot 4 = 104$

$$\lambda = \frac{10 \pm 2\sqrt{61}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 5 + \sqrt{61}, \quad \lambda_2 = 5 - \sqrt{61}$$

$61 - 25 = 36$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 25 - 61 = \underbrace{-36}_{\text{Hipérbole}}$$

$$1 = [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow [x \ y] \begin{bmatrix} x + 5y \\ 7x + 9y \end{bmatrix}$$

$$x^2 + 5xy + 7xy + 9y^2 = 1 \Rightarrow \underline{x^2 + 12xy + 9y^2 = 1}$$

7. Prove os seguintes fatos:

(a) Se A e B são similares, então A^2 e B^2 também o são.

(b) A^2 e B^2 podem ser similares sem A e B serem similares.

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ é similar à $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ não é similar à $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) $A = MBM^{-1} \rightarrow A^2 = MB\underbrace{\cancel{M^{-1}M}}_{I}BM^{-1} \Leftrightarrow \underbrace{A^2 = MB^2M^{-1}}$

b) Se A e B são similares $\Rightarrow \det A = \det B$

se $\det A = -\det B$, então A e B não são similares, mas $\det A^2 = (-\det B)^2 \Rightarrow \det A^2 = \det B^2$, isso nos mostra que é possível A^2 e B^2 serem similares, mas A e B não.

c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$ autovalores $= 3$ e 4

$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow (3-\lambda)(4-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 4$

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow$ autovalor 3 com $MA = 2$ e $MG = 2$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(3-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$MA = 2$ mas $MG = 1$

$\Rightarrow$ A é diagonalizável, mas B não, logo não podem ser similares

8. Ache os valores singulares (como na decomposição SVD) da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\Delta = 5 \rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-1}{\varphi} \end{cases} \Rightarrow \text{Valores singulares de A são}$$

$\hookrightarrow AA^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 1$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5 \rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Valores singulares: } \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

9. Suponha que as colunas de A sejam $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ que são vetores ortogonais com comprimentos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Calcule $A^T A$. Ache a decomposição SVD de A.

$$\|w_i\| = \sigma_i \Rightarrow w_i^T w_i = \sigma_i^2$$

$$w_i^T w_j = 0$$

$$\rightarrow A^T \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ & \vdots & \\ - & w_n & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ w_1 & \cdots & w_n \\ | & & | \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} (A^TA)_{ij} &= 0 \\ (A^TA)_{ii} &= \sigma_i^2 \end{aligned} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Se $w_1 \ldots w_n$ é base ortogonal, $\frac{w_1}{\sigma_1} \ldots \frac{w_n}{\sigma_n}$ é ortonormal:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ w_1 & \cdots & w_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_n} \end{bmatrix}}_{U} \overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix}}^{\Sigma} \cdot \overbrace{I}^{V}$$