Romberg integráció

Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy integrálható függvény, $\lambda_k f, k = \overline{0,m}$ az f függvényre vonatkozó adott információk illetve egy $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény, ekkor a

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^{m} A_i \lambda_i(f) + R(f) \tag{1}$$

alakú képletet *numerikus integrálási képlet*nek vagy *kvadratúra formulá*nak nevezzük. A $\lambda_i(f)$ információk általában az f függvénynek az értékeit, vagy bizonyos rendű deriváltjainak az értékét adják meg egy $x_i, i = \overline{0,m}$ pontrendszeren, melyet (kvadratúra)-alappontoknak nevezünk:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j \in I_k} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + R(f). \tag{2}$$

A feladat az A_{kj} együtthatók, az x_k alappontok (ha ezek nem adottak) meghatározása, illetve a hibatag tanulmányozása.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + R_1(f),$$

az úgynevezett *trapéz formula*

$$R_1(f) = f''(\xi) \int_a^b \frac{(a-t)(b-t)}{2} dt = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), a \le \xi \le b.$$

Felosztjuk az $[a,b]$ intervallumot m ekvidisztáns részintervallumra

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b, x_{k+1} - x_k = h, h = \frac{b-a}{m}.$$

A $k+1$-dik részintervallumon a numerikus integrálási képlet

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \underbrace{h \sum_{i=0}^{n-1} A_{ki} f(x_i^k)}_{Q_n^{[x_k,x_{k+1}]}} + R_n^{[x_k,x_{k+1}]}(f).$$

Az x_i^k alappontok is ekvidisztánsan helyezkednek el az $[x_k, x_{k+1}]$ intervallumban, így $x_i^k = x_k + i\frac{h}{n-1}$. Ekkor az $[a,b]$ intervallumon a kvadratúraszabály

$$Q_m^n(f) = \sum_{j=0}^{m-1} Q_n^{[x_j,x_{j+1}]}(f) = \sum_{j=0}^{m-1} h \sum_{i=0}^{n-1} A_{ki} f(x_i^k).$$

Amikor az egyes részintervallumokon a trapéz formulával közelítunk

$$Q_2^{[x_j,x_{j+1}]}(f) = \frac{h}{2}(f(x_j) + f(x_{j+1})),$$

az úgynevezett összetett trapézformulát kapjuk

$$\begin{aligned} S_m^{(2)}(f) &= \sum_{j=0}^{m-1} Q_2^{[x_j,x_{j+1}]}(f) = \sum_{j=0}^{m-1} h(1/2f(x_j)+1/2f(x_{j+1})) \\ &= h\left\{1/2f(a)+\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j)+1/2f(b)\right\}. \end{aligned}$$

Ha $f \in C^2[a,b]$, akkor az összetett formula maradéktagja

$$\begin{aligned} R_m^{(2)}(f) &= \sum_{j=0}^{m-1} R_2^{[x_j,x_{j+1}]}(f) = \sum_{j=0}^{m-1} -\frac{h^3}{12}f''(\xi_j) \\ &= \frac{b-a}{12}h^2\frac{\sum_{j=0}^{m-1} f''(\xi_j)}{m} = -\frac{(b-a)^3}{12m^2}f''(\xi), \end{aligned}$$

Tetszőleges pontosságú közelítesek meghatározásánál az előzőleg tanult módszereknél a hibatagban megjelenő derivált megbecsülése a gyakorlatban problémát jelenthet. Ilyenkor iterációs eljárást lehet alkalmazni. A módszer lényege, hogy az első lépésben valamely elemi formulát használva, a következő lépésekben tovább felezve az intervallumokat újabb és újabb közelítéseket szerkesztünk meg felhasználva az előző lépésben meghatározott approximációkat.
Trapézformula esetén az első lépésben az appoximáció:

$$Q_{T_0}(f) = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right], h = b-a$$

. Felezzük az $[a,b]$ intervallumot, mindkét $h/2$ hosszúságú részintervallumra alkalmazzuk a trapézformulát:

$$Q_{T_1}(f) = \frac{h}{4}\left[f(a)+2f(a+\frac{h}{2})+f(b)\right],$$

vagy

$$Q_{T_1}(f) = \frac{1}{2}Q_{T_0}(f)+\frac{h}{2}f(a+\frac{h}{2}).$$

Tovább felezzük mindkét intervallumot. A kapott négy $h/4$ hosszúságú részintervallumra összegezve a trapézformulákat következik

$$Q_{T_2}(f) = \frac{h}{8}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{3} f(a+\frac{ih}{4})+f(b)\right],$$

$$Q_{T_2}(f) = \frac{1}{2}Q_{T_1}(f)+\frac{h}{2^2}\left[f(a+\frac{1}{2^2}h)+f(a+\frac{3}{2^2}h)\right].$$

Az iterációs sorozat tetszőleges k-dik eleme a következő rekurzív összefüggéssel határozható meg:

$$Q_{T_k}(f) = \frac{1}{2}Q_{T_{k-1}}(f)+\frac{h}{2^k}\sum_{j=1}^{2^{k-1}} f(a+\frac{2j-1}{2^k}h), k = 1,2,...$$

Ezzel a következő sorozatot generáltuk

$$Q_{T_0}(f), Q_{T_1}(f), ..., Q_{T_k}(f), ...$$

Adott ϵ pontosságú közelítés meghatározásához a következő megállási feltételt alkalmazhatjuk

$$|Q_{T_n}(f) - Q_{T_{n-1}}(f)| < \epsilon,$$

ekkor $Q_{T_n}(f)$ fogja megadni a kért pontosságú közelítést.

Feladat Implementáljuk a Romberg algoritmust egy tetszoleges f függvényre, $[a, b]$ intervallumon ϵ pontossággal.

J.Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analisys, Springer, New York, 1996.