Spline interpoláció

Legyen $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása.

ÉRTELMEZÉS 1. *Az $s_\Delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt a Δ felosztáshoz rendelt köbös másodrendű spline függvénynek nevezzük, ha*

- $s_\Delta \in C^2[a, b]$
- *az $[x_j, x_{j+1}], j = \overline{0, n-1}$ intervallumok mindenikén s_Δ egy harmadfokú polinom.*

A köbös másodrendű spline függvény a következő feltételeknek kell eleget tegyen:
(i.) minden egyes $[x_j, x_{j+1}], j = \overline{0, n-1}$ részintervallumon egy harmadfokú polinom
(ii.) $s_\Delta(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, ..., n$
(iii.)$s_\Delta(x_{i+1})|_{[x_{i+1},x_{i+2}]} = s_\Delta(x_{i+1})|_{[x_i,x_{i+1}]}, i = 0, 1, ..., n-2$
(iv.) $s'_\Delta(x_{i+1})|_{[x_{i+1},x_{i+2}]} = s'_\Delta(x_{i+1})|_{[x_i,x_{i+1}]}, i = 0, 1, ..., n-2$
(v.) $s''_\Delta(x_{i+1})|_{[x_{i+1},x_{i+2}]} = s''_\Delta(x_{i+1})|_{[x_i,x_{i+1}]}, i = 0, 1, ..., n-2$
Teljesül valamely határfeltétel:
(a.)$s''_\Delta(x_0) = s''_\Delta(x_n)$-természetes spline
(b.)$s'_\Delta(x_0) = f'(x_0), s'_\Delta(x_n) = f'(x_n)$-teljes spline

Legyen $Y = \{y_i | i = 0, ..., n\}$ a függvényértékek és

$$h_{j+1} = x_{j+1} - x_j, j = 0, 1, ..., n-1$$

illetve

$$M_j = s''_\Delta(x_j), j = 0, 1, ..., n$$

amelyet a spline függvény momentumainak fogunk nevezni.Ekkor s''_Δaz $[x_j, x_{j+1}]$ intrevallumon lineáris és $s''_\Delta(x_j) = M_j, s''_\Delta(x_{j+1}) = M_{j+1}$ és így

$$s''_\Delta(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_{j+1}}, x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Integrálva

$$s'_\Delta(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + A_j$$

és

$$s_\Delta(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_{j+1}} + A_j(x - x_j) + B_j$$

ahol $x \in [x_j, x_{j+1}], j = \overline{0, n-1}$ és A_j, B_j meghatározandó állandók. Mivel $s_\Delta(x_j) = y_j$ illetve $s_\Delta(x_{j+1}) = y_{j+1}$

$$\begin{aligned} B_j &= y_j - M_j \frac{h_{j+1}^2}{6}, \\ A_j &= \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}^2}{6}(M_{j+1} - M_j) \end{aligned}$$

A spline függvény

$$s_\Delta(x) = \alpha_j + \beta_j(x - x_j) + \gamma_j(x - x_j)^2 + \delta_j(x - x_j)^3,$$

meghatározásához a következő együtthatókat kell meghatározni

$$\begin{aligned}
\alpha_j &= y_j, \\
\beta_j &= \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{2M_j + M_{j+1}}{6} h_{j+1} \\
\gamma_j &= \frac{M_j}{2}, \\
\delta_j &= \frac{M_{j+1} - M_j}{6h_{j+1}}.
\end{aligned}$$

Az együtthatók meghatározásához az M_j momentumok meghatározása szükséges. Mint láthattuk

$$s'_\Delta(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}^2}{6}(M_{j+1} - M_j),$$

kiszámítva ezek jobb és balodali határértékét amikor $x \to x_j$

$$s'_\Delta(x_j^-) = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + \frac{h_j}{3} M_j + \frac{h_j}{6} M_{j-1}$$

$$s'_\Delta(x_j^+) = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1},$$

de $s'_\Delta(x_j^-) = s'_\Delta(x_j^+)$, ahonnan

$$\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_{j+1} + h_j}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}, \tag{1}$$

$j = 1, 2, ..., n-1$. Az n-1 egyenlet mellé még két egyenletet az (a.) illetve (b.) feltételekből kapunk:
-természtes spline függvény esetén

$$s''_\Delta(a) = s''_\Delta(b) = 0 \Rightarrow M_0 = M_n = 0$$

-teljes spline esetén

$$\begin{aligned}
s'_\Delta(a) &= y'_0 \Rightarrow \frac{h_1}{3} M_0 + \frac{h_1}{6} M_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \\
s'_\Delta(b) &= y'_n \Rightarrow \frac{h_n}{6} M_{n-1} + \frac{h_n}{3} M_n = y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}.
\end{aligned}$$

(1) alapján

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, j = 2, ..., n-1$$

ahol

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \mu_j = 1 - \lambda_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} \\ d_j &= \frac{6}{h_j + h_{j+1}}(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}) \end{aligned}$$

j=1,2,...,n-1. A fenti feltételekből
(a.) esetben

$$\lambda_0 = 1, d_0 = 0, \mu_n = 1, d_n = 0 \texttt{ és így } \mu_0 = 0, \lambda_n = 0,$$

(b.) esetben

$$\lambda_0 = 1, d_0 = \frac{6}{h_1}(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'), \mu_n = 1, d_n = \frac{6}{h_n}(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}).$$

Az M_i momentumok meghatározásához a következő tridiagonális egyenletrendszert kell megoldani

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ 0 & \mu_2 & 2 & & \\ & & . \quad . & . & \\ & & . \quad . & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ . \\ . \\ . \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix}.$$

μ_j, λ_j csak az együtthatóktól függnek és $\mu_j + \lambda_j = 1$. A momentumok ismeretében meghatározzuk a $A_j, B_j,\ j = \overline{0, n-1}$ állandókat is, így a s_Δ függvény meg van határozva minden $x \in [x_j, x_{j+1}]$ pontban, $j = \overline{0, n-1}$.

Feladat Ábrázoljuk az $[a, b]$ intervallumon a Δ felosztáshoz és Y értékekhez rendelt harmadfokú spline függvényt (a.) vagy (b.) esetben. Meg kell határozni az M_j értékeket(ehhez először meghatározzuk μ_j, λ_j, d_j) megoldva az egyenletrendszert(az egyenletrendszer mátirixát az *spdiags* függvény segítségével szerkeszthetjük meg), ezután az együtthatókat-ajánlott külön függvényben megírni. Kiszámítjuk a közelítő értékeket adott vektorra attól függően, hogy mely $[x_j, x_{j+1}]$ intervallumban vannak a pontok.

J.Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analisys, Springer, New York, 1996.