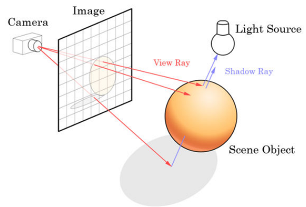
Metodi di Monte Carlo Applicati Alla Computer Grafica

Presentata da: Tanzi Alessio

Relatore: Prof.ssa Marina Popolizio

Politecnico di Bari, Anno Accademico 2022/2023

Introduzione

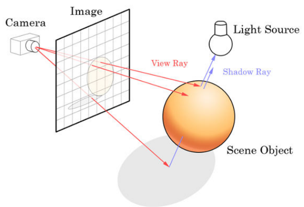


Stima della funzione immagine $r_f(x, y)$ attraverso Path Tracing.

- Calcolo della Funzione Immagine

$$r_f(x, y) = \int_{A_{px}} r(x', y')\mathrm{d}A$$

Introduzione

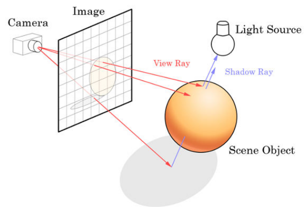


Stima della funzione immagine $r_f(x, y)$ attraverso Path Tracing.

- Calcolo della Funzione Immagine
- Attraverso il suo campionamento

$$r_f(x, y) = \int_{A_{px}} f(x - x', y - y')r(x', y')\mathrm{d}A$$

Introduzione

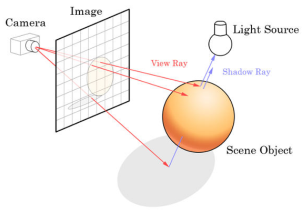


Stima della funzione immagine $r_f(x, y)$ attraverso Path Tracing.

- Calcolo della Funzione Immagine
- Attraverso il suo campionamento
- Approssimazione con MC

$$r_f(x, y) \approx \frac{\|A_{px}\|}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x - x_i, y - y_i)r(x_i, y_i)$$

Introduzione



Stima della funzione immagine $r_f(x, y)$ attraverso Path Tracing.

Path Tracing

Input: scena σ, risoluzione richiesta (w, h), camera c
Output: funzione immagine filtrata $r_f(x, y)$
  $r_f \leftarrow$Array(w,h);
  for each pixel (x, y) **in** r_f **do**
    ss $\leftarrow$GenerateSamplesWithinPixel(x,y);
    for each sample $(\vec{s})$ **in** ss.positions **do**
      $\rho \leftarrow$CastRay$\left(c.\vec{p}, \frac{\vec{s}-c.\vec{p}}{\|\vec{s}-c.\vec{p}\|}\right)$;
      ss.contributions($\vec{s}$)$\leftarrow$SampleRadiance(σ,ρ, depth$=0$);
    end for
    $r_f(x, y)\leftarrow$Aggregate(ss.contributions);
  end for

Indice

Indice: Monte Carlo Integration

Preliminari

Probabilità $\Pr(A)$: Funzione definita su un dominio Σ avente immagine $[0, 1]$.

Variabile Casuale X: Formalizzazione matematica di quantità numerica dipendente da eventi aleatori.

Caratterizzata univocamente da

CDF: $P(x) = \Pr(X \leq x)$

PDF: $p(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P(x)$

Preliminari

Stimatore $\tilde{F}_n$: funzione di una collezioni di variabili aleatorie X_i, n campioni, mappati ad una stima di uno stimando F

$$
\begin{aligned}
\text{Aspettazione :} \quad & E[f(X)] &&= \int_{\mathcal{D}} f(x)p(x)\mathrm{d}x \\
\text{Varianza :} \quad & V[f(X)] &&= E\left[(f(X) - E[f(X)])^2\right] \\
\text{Bias :} \quad & \beta &&= E\left[\tilde{F}_n(X_1, \dots, X_n)\right] - F \\
\text{Efficienza :} \quad & \epsilon\left[\tilde{F}_n\right] &&= \frac{1}{T\left[\tilde{F}_n\right] V\left[\tilde{F}_n\right]} \\
\text{MSE :} \quad & \textit{MSE}\left[\tilde{F}_n\right] &&= E\left[(\tilde{F}_n - F)^2\right] = V\left[\tilde{F}_n\right] + \beta^2
\end{aligned}
$$

Integrazione di Monte Carlo

Stimatore Unbiased per l'Integrazione Monte Carlo

$$\tilde{F}_n = \|\mathcal{D}\|\tilde{E}_n[f(X)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(X_i)}{p(x)}$$

Il campionamento secondo PDF $p(x)$ permette di scegliere accuratamente i campioni più significativi (*Importance Sampling*)

Integrazione di Monte Carlo

Stimatore Unbiased per l'Integrazione Monte Carlo

$$\tilde{F}_n = \|\mathcal{D}\|\tilde{E}_n[f(X)] = \frac{\|\mathcal{D}\|}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$$

(Campionamento $\mathcal{U}(\mathcal{D})$)

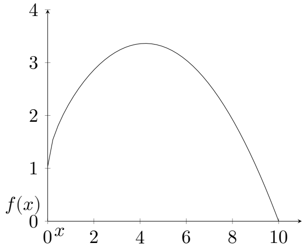
Integrazione di Monte Carlo

$$\tilde{F}_n = \|\mathcal{D}\|\tilde{E}_n[f(X)] = \frac{\|\mathcal{D}\|}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$$

Per n campioni, la deviazione standard diminuisce di $\sqrt{n}$

$$\sigma[\tilde{F}_n] = \sqrt{V[\tilde{F}_n]} = \sqrt{\frac{\|\mathcal{D}\|^2}{n}V[f(X)]} = \frac{\|\mathcal{D}\|}{n^{\frac{1}{2}}}\sigma[f(X)]$$

Esempio: Integrale monodimensionale



$$\int_0^{10} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{10}x}\right)}{\sqrt{\frac{\pi^2}{10}x}} e^{\sqrt{\frac{\pi^2}{10}x}} \mathrm{d}x$$

è possibile giungere alla soluzione analitica

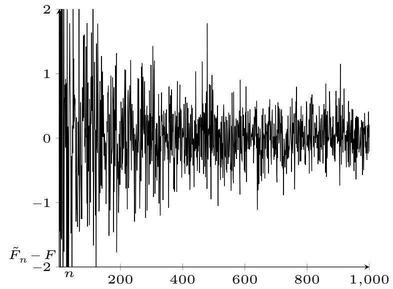
$$F = \frac{10e^{\pi} + 10}{\pi^2} \approx 24.45963551499059$$

Possiamo applicare il Metodo di Monte Carlo

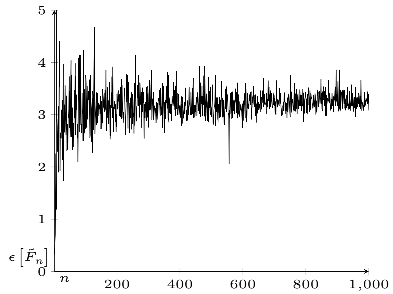
$$\tilde{F}_n = \|\mathcal{D}\| \tilde{E}_n[f(X)] = \frac{10}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)$$

Campionando uniformemente $[0, 10]$

Esempio: Integrale monodimensionale

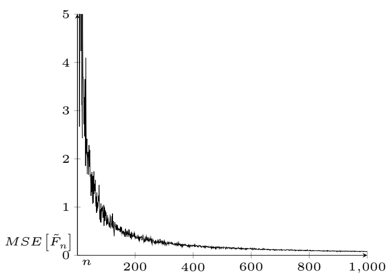


(a) Funzione Errore per $\tilde{F}_n$

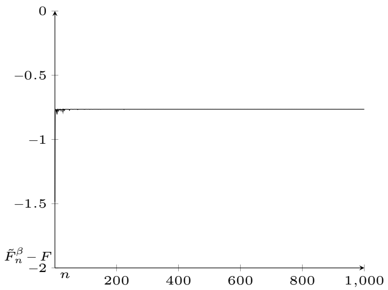


(b) Funzione efficienza $\epsilon\left[\tilde{F}_n\right]$

Esempio: Integrale monodimensionale



(a) $MSE[\tilde{F}_n]$ dello stimatore unbiased



(b) Funzione errore per stimatore biased $\tilde{F}_n^{\beta} = \frac{1}{2}\max\{f(X_1), ...\}$

Metodi di Riduzione della Varianza

Stratified Sampling: Suddivisione del dominio di integrazione in n regioni chiamate *strata*

Importance Sampling: Concentra i punti campionati per la stima dell'integrale utilizzando PDF proporzionale alla funzione integranda, per catturarne più rapidamente i contributi più significativi

Russian Roulette: Salta la valutazione di campioni che contribuiscono poco

Splitting: Aumenta il numero di campioni in alcune dimensioni di un integrale multidimensionale

Indice: Rendering Fundamentals

Radiometria

Modello matematico per studiare e misurare la propagazione delle radiazioni elettromagnetiche con la sola ottica geometrica.

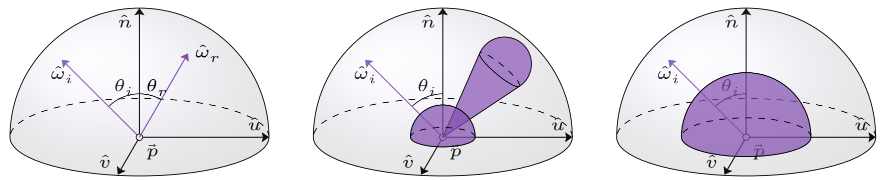
- Linearità
- Conservazione dell'energia
- No polarizzazione
- No fluorescenza o fosforescenza
- A regime

Radiometria

Quantità	Simbolo	unità S.I.	Formula
Energia Radiante	Q_e	J	$Q_{e,\lambda} = \frac{\partial Q_e}{\partial \lambda}$
Flusso Radiante	Φ_e	W	$\Phi_e = \frac{\partial Q_e}{\partial t}$
Intensita Radiante	$I_{e,\Omega}$	W/sr	$I_{e,\Omega} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \Omega}$
Irradianza Emittanza Radiante Radiosita	E_e M_e J_e	$\mathrm{W/m^2}$	$E_e \vert J_e \vert M_e = \frac{\partial \Phi_e}{\partial A}$
Radianza	$L_{e,\Omega}$	$\mathrm{W/(sr \cdot m^2)}$	$L_{e,\Omega} = \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \Omega \partial (A \cos \theta)}$

nomenclatura e misure delle quantità radiometriche per noi rilevanti

Rendering Equation



(a) Specular BRDF (b) Glossy BRDF (c) Diffuse BRDF

$$L_o(\vec{p}, \hat{\omega}_o) = L_e(\vec{p}, \hat{\omega}_o) + \int_{S^2} L_o(t(\vec{p}, \hat{\omega}_i), -\hat{\omega}_i) f_s(\vec{p}, \hat{\omega}_o, \hat{\omega}_i) |\langle \hat{n}, \hat{\omega}_i \rangle| \mathrm{d}\hat{\omega}_i$$

Rendering Equation

$$L_o(\vec{p},\hat{\omega}_o) = L_e(\vec{p},\hat{\omega}_o) + \int_{\mathcal{S}^2} L_o(t(\vec{p},\hat{\omega}_i),-\hat{\omega}_i) f_s(\vec{p},\hat{\omega}_o,\hat{\omega}_i)|\langle\hat{n},\hat{\omega}_i\rangle|\mathrm{d}\hat{\omega}_i$$

- $\vec{p},\hat{\omega}_i,\hat{\omega}_o$ risp. punto superficie considerato, direzione incidente considerata, direzione uscente
- $t(\vec{p},\hat{\omega}_i)$ *Ray Tracing Function*: dati punto di partenza e direzione, restituisce un punto $\vec{q}$, prima intersezione incontrata
- $\mathcal{S}^2$ sfera unitaria di centro $\vec{p}$
- $\int_{\mathcal{S}^2}$ Integrale in tutte le direzioni $\hat{\omega}_i$

BSDF

Densità di Distribuzione[1] di radianza incidente riflessa (BRDF f_r) o trasmessa (BTDF f_t) in una data direzione

$$f_s(\vec{p},\hat{\omega}_o,\hat{\omega}_i) = f_r(\vec{p},\hat{\omega}_o,\hat{\omega}_i) + f_t(\vec{p},\hat{\omega}_o,\hat{\omega}_i)$$

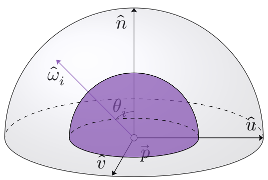
dove

$$f_r(\vec{p},\hat{\omega}_o,\hat{\omega}_i) = 0, \quad \text{se } \langle\hat{n},\hat{\omega}_o\rangle\langle\hat{n},\hat{\omega}_i\rangle \leq 0$$
$$f_t(\vec{p},\hat{\omega}_o,\hat{\omega}_i) = 0, \quad \text{se } \langle\hat{n},\hat{\omega}_o\rangle\langle\hat{n},\hat{\omega}_i\rangle \geq 0$$

[1] Non normalizzata, con integrale su emisfera proiettata pari all'albedo della superficie

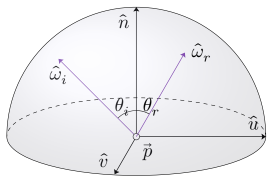
BSDF

Lambertian BRDF:



$$f_r(\vec{p}) = \frac{\rho(\vec{p})}{\pi}$$

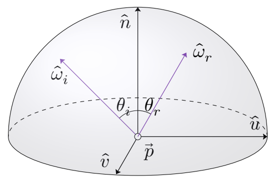
Perfectly Specular BRDF:



$$f_r(\vec{p},\hat{\omega}_o,\hat{\omega}_i) = F_r(\langle\hat{n},\hat{\omega}_o\rangle)\frac{\delta(\hat{\omega}_i-\hat{\omega}_r)}{|\langle\hat{n},\hat{\omega}_i\rangle|}$$

BSDF

Perfectly Specular BRDF:



$$F_r(\mu) \approx F_0 + (1-F_0)(1-\mu)^5$$
$$F_0 = \frac{(\eta-1)^2+\kappa^2}{(\eta+1)^2+\kappa^2} \overset{\kappa\approx 0}{=} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^2$$
$$\hat{\omega}_r = 2\langle\hat{n},\hat{\omega}_i\rangle - \hat{\omega}_i$$

$$f_r(\vec{p},\hat{\omega}_o,\hat{\omega}_i) = F_r(\langle\hat{n},\hat{\omega}_o\rangle)\frac{\delta(\hat{\omega}_i-\hat{\omega}_r)}{|\langle\hat{n},\hat{\omega}_i\rangle|}$$

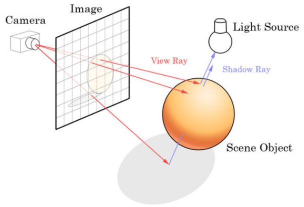
Indice: Campionamento e Ricostruzione

Campionamento

Affichè si sfruttino al meglio i campioni estratti per lo Stimatore di Monte Carlo

- Riduzione della Varianza per lo stimatore di Monte Carlo tramite scelta accurata della distribuzione dei campioni...
- ...Con conseguente bisogno di algoritmi capaci di estrarre osservazioni da una distribuzione arbitraria, dati campioni distribuiti uniformemente in $\mathcal{U}(0, 1)$

Campionamento



Stima della funzione immagine $r_f(x, y)$ attraverso Path Tracing.

In un sistema di rendering,

- Ciascun pixel è campionato generando raggi e accumulando radianza in ciascuno di essi
- Ogni superficie intersecata da ciascun raggio è campionata per generare un nuovo raggio

Campionamento

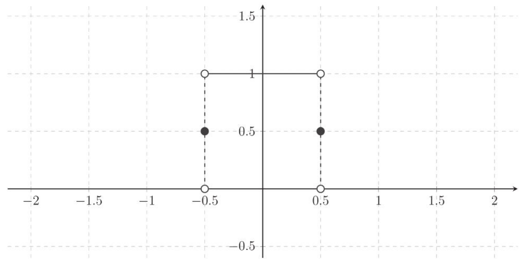
Variance Reduction	PDF Sampling
Stratified Sampling	Inverse Transform Sampling
Importance Sampling	Acceptance-Rejection Sampling
Russian Roulette	Metropolis-Hastings Sampling
Splitting	

Inverse Transform Sampling Lambertian BRDF $(\xi_\theta, \xi_\varphi \sim \mathcal{U}(0, 1))$

$$\varphi_i = 2\pi\xi_\varphi$$

$$\theta_i = \arccos\left(\sqrt{1 - \xi_\theta}\right)$$

Filtro di Ricostruzione



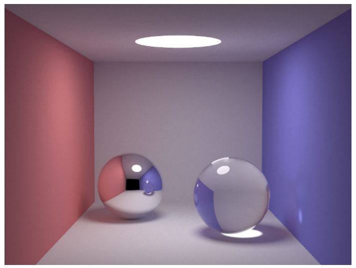
Ricostruzione della funzione immagine dai suoi campioni.
Box Filter: considera solamente campioni all'interno del pixel considerato, aggregati come spiegato nell'Introduzione

Indice: Simulazione

Simulazione: Cornell Box

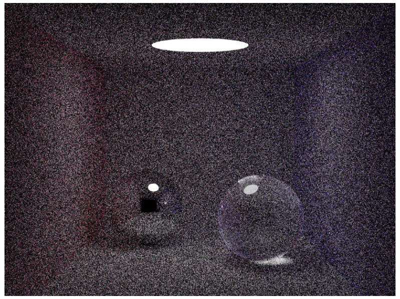
Path Tracer semplificato, supportante

- Tre tipi di BRDF, in particolare Lambertiana, Speculare opaca o traslucente
- Russian Roulette, applicata per terminare la valutazione di una path
- Stratified Sampling, dividendo ciascun pixel in 4 caselle (strata)
- Ciascun sample in ciascun strata è scelto casualmente con PDF triangolare

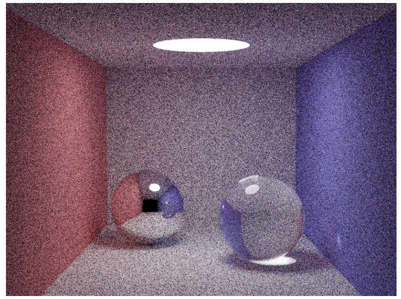


Scena Cornell Box.

Risultati Simulazione



(a) 8 campioni per stratum



(b) 40 campioni per stratum

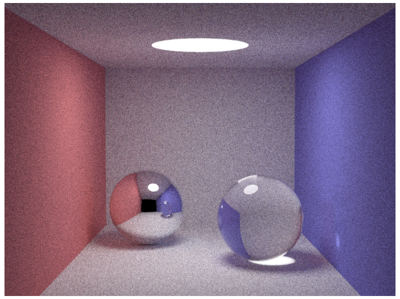
Risultati Simulazione

Componente analizzata	Varianza trovata	
	8 campioni per stratum	40 campioni per stratum
Red Channel	0.07344142	0.05132978
Green Channel	0.06190188	0.04714374
Blue Channel	0.07339846	0.05175589
Luminance[1]	0.06380390	0.04621717

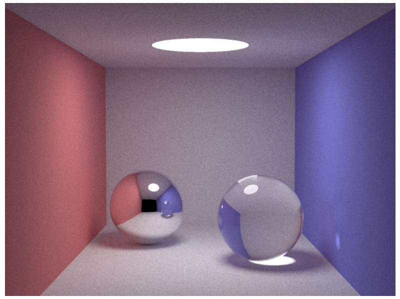
Tabella delle varianze per la resa con 8 campioni per stratum e 40 campioni per stratum

[1] Più precisamente, Luma channel del color space ITU-R BT.709

Risultati Simulazione



(a) 200 campioni per stratum



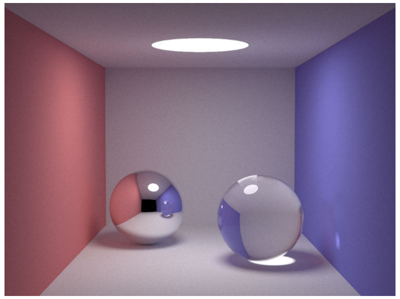
(b) 1000 campioni per stratum

Risultati Simulazione

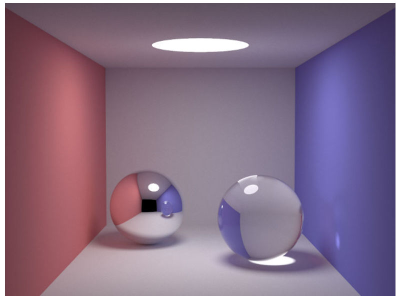
Componente analizzata	Varianza trovata	
	200 campioni per stratum	1000 campioni per stratum
Red Channel	0.02482136	0.02023584
Green Channel	0.02453323	0.02019825
Blue Channel	0.02517796	0.02031221
Luminance	0.02276842	0.01840096

Tabella delle varianze per la resa con 200 campioni per stratum e 1000 campioni per stratum

Risultati Simulazione



(a) 5k campioni per stratum



(b) 25k campioni per stratum

Risultati Simulazione

Componente analizzata	Varianza trovata	
	5000 campioni per stratum	25000 campioni per stratum
Red Channel	0.01904086	0.01885027
Green Channel	0.01936775	0.01919554
Blue Channel	0.01930308	0.01911878
Luminance	0.01754279	0.01737635

Tabella delle varianze per la resa con 5000 campioni per stratum e 25000 campioni per stratum