

Metodi di Monte Carlo Applicati Alla Computer Grafica

Tesi in Calcolo Numerico

**Presentata da:
Tanzi Alessio**

**Relatore:
Prof.ssa Marina Popolizio**

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

Acknowledgements

Contents

I	Fondamenti fisici e presentazione del problema	1
1	Richiami sull'elettromagnetismo e Radiometria	2
1.1	Radiazione Elettromagnetica	2
1.2	Dualità onda-particella	5
1.3	Introduzione all'assorbimento di radiazione	6
1.4	Radiometria	7
1.4.1	Proprietà Particolari	11
1.4.2	Radianza incidente ed uscente	13
1.5	Radiazione di Corpo Nero	14
2	Fotometria, Colore e Camera	15
3	Modelli di Fonti Luminose e Superfici	16
4	Trasporto di Energia Elettromagnetica nel Mezzo	17
II	Metodi di Monte Carlo	18
5	Campionamento e Ricostruzione con Quasirandom Number Generation	19
6	Integrazione di Monte Carlo	20
7	Metodi di Riduzione della Varianza	21
III	Applicazione	22
8	Light Transport Modello e Surface Reflection	23
9	Light Transport: Volume Rendering e Bidirectional Methods	24

IV	Appendici	25
A	Fondamenti di Probabilità e Statistica	26
B	Algebra Lineare applicata	27
C	Generazione di Numeri Pseudocasuali	28
D	Codice Vulkan & HLSL	29
E	Implementazione dei Concetti Fisici	30
	Bibliography	31
	Glossary	32

Part I

Fondamenti fisici e presentazione del problema

Chapter 1

Richiami sull'elettromagnetismo e Radiometria

1.1 Radiazione Elettromagnetica

La luce è un fenomeno fisico che si propaga come un'onda elettromagnetica ed interagisce con le altre sostanze come una particella. Dal punto di vista ondulatorio, una *onda elettromagnetica* si propaga nel vuoto a velocità costante c , la quale è correlata alla *permeabilità magnetica nel vuoto* μ_0 [H/m] e *costante dielettrica nel vuoto* ϵ_0 [F/m]

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

mentre la *Velocità di fase* v [m/s] è similmente legata alla *permittività dielettrica del mezzo* ϵ e *permeabilità magnetica nel mezzo*

$$\epsilon = \frac{1}{\mu v^2}$$

il rapporto tra le costanti nel mezzo e le costanti nel vuoto definiscono *permittività relativa* ϵ_r e *permeabilità relativa* μ_r .

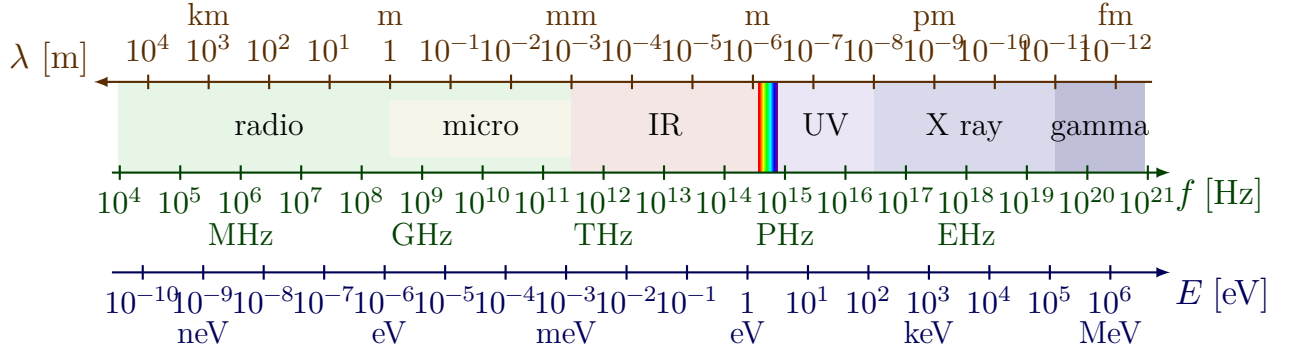
Come osservi in figura 1.1, un'onda monocromatica è caratterizzata da

$$\text{frequenza di oscillazione } \nu \text{ [Hz] e periodo } T \text{ [s]} \quad \nu = \frac{1}{T} \quad (1.1)$$

$$\text{frequenza angolare } \omega \text{ [rd/s]} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (1.2)$$

$$\text{lunghezza d'onda } \lambda \text{ [m], nel vuoto e nel mezzo } \lambda_0 = cT = \frac{c}{\nu} \quad (1.3)$$

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} \quad (1.4)$$



La luce visibile all'*occhio umano* corrisponde al sottoinsieme dello spettro [383, 783] THz, equivalentemente [783, 383] nm

Inoltre si definisce *numero d'onda angolare* [rd/m]

$$\text{nel vuoto } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{c} \nu = \frac{\omega}{c} \quad (1.5)$$

$$\text{nel mezzo } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v} \nu = \frac{\omega}{v} \quad (1.6)$$

che rappresenta lo shift di fase dell'onda. Assieme alla direzione di propagazione \hat{k} definiscono il *vettore d'onda* $\vec{k} = k\hat{k}$

Le proprietà dell'onda in un mezzo relative alle proprietà dell'onda nel vuoto sono determinate dall'*indice di rifrazione* (IOR), dipendente dalla lunghezza d'onda

$$\eta = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{v} = \frac{k}{k_0}$$

radiazione elettromagnetica è composta da campo elettrico \vec{E} ed un campo magnetico \vec{B} oscillanti in fase, perpendicolari tra loro e alla direzione di propagazione \hat{k} (Figura 1.1). Le proprietà di tali campi sono descritti in funzione della posizione

\vec{r} e tempo t dalle *Equazioni di Maxwell*¹ [Peg16]:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t) \right) \quad (1.10)$$

dove ρ è la densità di carica totale e \vec{J} la densità di corrente.

Tali equazioni, date le condizioni al contorno e condizioni iniziali, portano ad una equazione differenziale parziale detta equazione d'onda, che per assenza di cariche $\rho = 0$, assenza di corrente $\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{0}$, e propagazione nel vuoto porta a

\vec{x} è sostituibile sia con \vec{E} che con \vec{B}

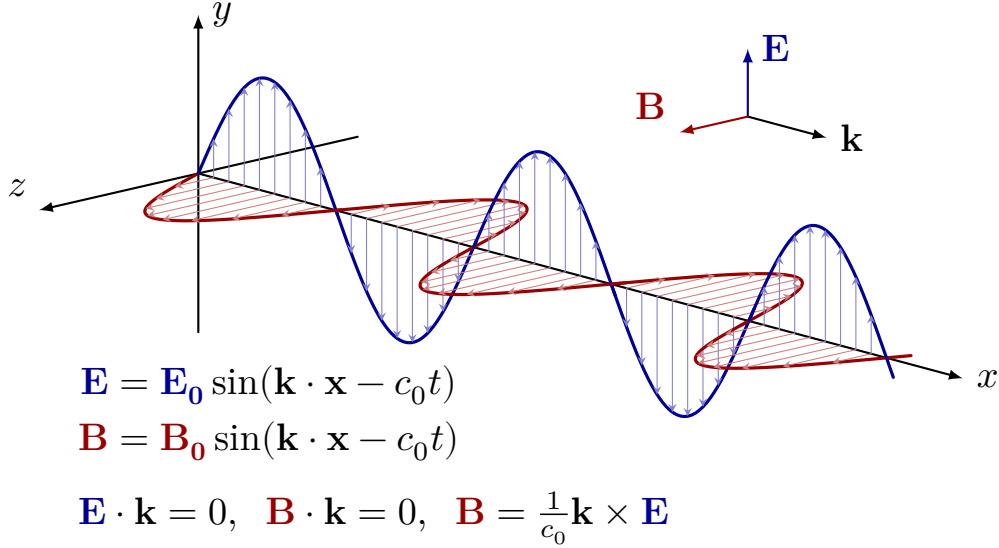
$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{x} = 0$$

la cui soluzione è una qualsiasi funzione differenziabile due volte della forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = f(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) = f\left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{r} - ct}{k}\right)$$

Proprietà importante per un'onda elettromagnetica è la sua *polarizzazione*, la quale specifica l'orientamento nello spazio del campo elettrico (per convenzione) nella propagazione nello spazio dell'onda. Il campo elettrico può avere direzione fissa o essere rotante in base ad una data funzione [[McC14]]. Esso è importante per le proprietà ottiche dei materiali, discussi in seguito. Gli stati di polarizzazione fondamentali che citiamo sono *polarizzazione lineare*, nella quale il campo elettromagnetico è confinato in un piano dello spazio, *polarizzazione circolare*, nella quale il vettore campo elettrico descrive una circonferenza nella sua rotazione con velocità angolare costante, *polarizzazione ellittica*, la quale è una combinazione tra polarizzazioni circolari e planari. Con il termine *polarizzazione casuale* ci riferiamo invece a luce con polarizzazione ellittica, le cui caratteristiche (eccentricità, velocità angolare) sono casuali, diverso da *luce non polarizzata* nella quale le caratteristiche (modulo e orientamento) del campo elettrico sono casuali. Un raggio luminoso può essere costituito dalla sovrapposizione di più radiazioni aventi differente stato di polarizzazione. Ci sono diversi metodi per scomporre tali componenti e analizzarle [Hec02].

¹qui mostrate le equazioni per propagazione nel vuoto



Una delle proprietà ottiche cangianti con lo stato di polarizzazione è la *Riflettanza*, la quale ha espressioni note differenti per radiazione linearmente polarizzata con piano di vibrazione \parallel e \perp al piano di incidenza.

Tratteremo principalmente luce non polarizzata, la quale è una buona approssimazione considerando che la luce del cielo, che si propaga nell'atmosfera, è parzialmente polarizzata.

1.2 Dualità onda-particella

Una radiazione elettromagnetica mostra sia aspetti ondulatori che aspetti particellari. Tale fenomeno è detto *dualità onda-particella*. La luce è assorbita ed emessa in pacchetti discreti di energia elettromagnetica chiamati *fotoni*. Dunque il campo elettromagnetico ² è quantizzato. Ciascuna delle sue particelle elementari costituenti ha energia definita dall' *equazione di Planck-Einstein*

$$\xi = h\nu$$

dove h costante di Plank. Si osservi come l'energia di un singolo fotone è dipendente dall'alunghhezza d'onda.

Il modello fornito dall'elettrodinamica quantistica è stato citato in quanto esso ci suggerisce un nuovo modello operativo della luce, orientato alla misurazione piuttosto che alla formulazione da primi principi, nel quale ci disinteressiamo

²inteso come spostamento di energia

Materiale	λ [nm]	κ_a [cm ⁻¹]	Osservazioni
Vapore Acqueo	$10.6 \cdot 10^3$ (infrarossi)	1.5	Ogni centimetro la luce che passa per vapore acqueo l'1.5% dell'energia è assorbita
Vetro	550 (verde)	0.1	Così basso che è praticamente trascurabile. Il vetro è praticamente trasparente alla luce
Ferro	400 (violetto)	$2.5 \cdot 10^4$	Assorbe fortemente la luce violetta, motivo per cui appare grigio scuro
Clorofilla	680 (rosso)	10^5	Assorbe fortemente luce rossa, motivo per cui appare verde
Diossido di Carbonio	$4.3 \cdot 10^3$ (infrarossi)	7	Assorbe fortemente radiazione infrarossa, motivo per cui contribuisce al riscaldamento globale

Table 1.1: Esempi di coefficiente di assorbimento per alcuni materiali a date lunghezze d'onda

dell'origine fisica della luce e misuriamo l'energia aggregata trasportata dai fotoni contenuti in una radiazione. Tale scienza è la *Radiometria* (sezione Radiometria)

1.3 Introduzione all'assorbimento di radiazione

Quando la luce passa per un mezzo, parte di essa viene rifratta e riflessa (capitolo 3). In alcuni materiali³, quando la luce passa attraverso il mezzo è assorbita, e il wavelength-dependent *coefficiente di assorbimento* κ_a [m⁻¹], il quale indica la percentuale di energia di onda elettromagnetica assorbita, per una data lunghezza d'onda, nella propagazione nel materiale. Alcuni esempi di coefficiente di assorbimento sono mostrati in Tabella Introduzione all'assorbimento di radiazione

Dall'coefficiente di assorbimento, caratterizzante il decadimento della energia nella propagazione dell'onda, e il numero d'onda, caratterizzante lo shift di fase dell'onda stessa, si definisce il *numero d'onda complesso*

$$\underline{k} = k + i \frac{\kappa_a}{2}$$

³come i metalli

Ricordiamo l'equazione di un'onda elettromagnetica linearmente polarizzata, in assenza di assorbimento

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right)$$

Introducendo un coefficiente di assorbimento non-nullo, e supponendo propagazione nell'asse z , $\hat{k} = [0, 0, 1]^T$

$$\vec{E}(z, t) = \Re \left(\vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \right) = \Re \left(e^{-\frac{\kappa_a}{2} z} \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \right)$$

Da cui l'*intensità*⁴ dell'onda (potenza media nel periodo trasferita per unità di superficie) $[\text{W}/\text{m}^2]$ diventa [Peg16]

$$I(z) = \frac{1}{T} \int_T |\vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}|^2 dt = \frac{1}{T} |e^{-\frac{\kappa_a}{2} z} \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}|^2 \quad (1.11)$$

$$= |e^{-\frac{\kappa_a}{2} z}|^2 \frac{1}{T} \int_T |\vec{E}_0 e^{-i(kz - \omega t)}|^2 dt = e^{-\kappa_a z} I_0 \quad (1.12)$$

dove I_0 è l'intensità in assenza di assorbimento. La distanza alla quale l'intensità si riduce di un fattore e^{-1} , ($z = \kappa_a^{-1}$), è detta *profondità di penetrazione*

Altro coefficiente caratterizzante il materiale e la sua interazione con radiazione incidente, contando anche l'assorbimento, è l' *indice di rifrazione complesso*

$$\underline{\eta} = \frac{k}{k_0} + i \frac{\kappa_a}{2k_0} = \eta + i\kappa$$

dove $\kappa = \frac{\kappa_a}{2k_0}$ è l'*indice di assorbimento* della superficie

1.4 Radiometria

Branche dell'ottica prese come riferimento dal physically based rendering sono la *Radiometria* e *Radiative Transfer*. La *Radiometria* è il modello matematico per studiare e misurare la propagazione delle radiazioni elettromagnetiche. In tale modello, ci disinteressiamo degli aspetti ondulatori delle onde elettromagnetiche e guardiamo la radiazione come energia fluente nello spazio. Ciò suggerisce che la Radiometria opera a livello dell'ottica geometrica, assumendo dunque

⁴In fotometria e radiometria *intensità* ha un altro significato: essa è la potenza radiante o luminosa per unità di angolo solido. In Ottica e Termodinamica, *intensità* essa è associata alla potenza media nel periodo per unità di superficie, come in questo caso, altre volte all'intensità radiante o luminosa, oppure all'irradianza o alla radianza. Per Radiometria, vedi Radiometria

propagazione rettilinea della luce e trascurando fenomeni dovuti alla natura ondulatoria della radiazione. Si considerano solamente gli effetti della riflessione, trasmissione, scattering ed assorbimento. In particolare, le assunzioni fatte sono le seguenti[[PJH23]]:

Linearità:	La combinazione lineare di più input ad un sistema ottico è pari alla combinazione lineare degli effetti dei singoli input
Conservazione dell'energia:	Quando una fonte di radiazioni scatters da una superficie o mezzo trasmissivo, gli <i>scattering events</i> [[Peg16]], non possono produrre più energia di quella iniziale
No polarizzazione:	Ignoriamo la polarizzazione del campo elettromagnetico di una radiazione, rendendo l'unica proprietà rilevante di una radiazione la sua <i>Distribuzione Spettrale</i> [Radiazione di Corpo Nero]
No fluorescenza o fosforescenza:	Il comportamento della radiazione ad una lunghezza d'onda è indipendente dal comportamento della radiazione ad altre lunghezze d'onda
A regime:	Il <i>Light Field</i> (Radiometria) nell'ambiente è assunto a regime, indipendente dal tempo. Nota che la fosforescenza viola anche questo presupposto

Il *Radiative Transfer*, qui solo accennato, è lo studio dei fenomeni legati al trasferimento di energia radiante, basato sulla radiometria, ed utilizzato nella computer grafica per introdurre fenomeni legati all'ottica fisica e modellare la propagazione in un mezzo diverso dal vuoto.

Le unità fondamentali della radiometria sono riassunte nella tabella 1.2

Def. 1.4.1. — L'*Energia Radiante* Q_e è l'energia aggregata di tutti i fotoni, ognuno ad una particolare lunghezza d'onda con contributo energetico diverso, verso/attraverso/da una superficie in un dato intervallo di tempo

Ciascuno di questi fotoni trasporta energia pari all'Equazione di plank-Einstein $Q_\lambda = \frac{hc}{\lambda}$ 1.2

Def. 1.4.2. — L'*Energia Radiante Spettrale* $Q_{e,\lambda}$ ⁵ è il contributo di una singola lunghezza d'onda all'energia radiante complessiva

$$Q_{e,\lambda} = \frac{\partial Q_e}{\partial \lambda}$$

Quantità	Simbolo	unità S.I.	Note
Energia Radiante	Q_e	J	Energia aggregata di tutti i fotoni in una radiazione elettromagnetica
Flusso Radiante	Φ_e	W	Energia Radiante <i>emessa, riflessa, trasmessa, incidente</i> , per unità di tempo
Intensità Radiante	$I_{e,\Omega}$	W/sr	Flusso Radiante emesso, riflesso, trasmesso, per unità di angolo solido
Irradianza	E_e	W/m ²	Flusso Radiante incidente per unità di area
Emittanza Radiante	M_e	W/m ²	Flusso Radiante emesso per unità di area
Radiosità	J_e	W/m ²	Flusso Radiante <i>uscente</i> (emesso, riflesso e trasmesso) per unità di area
Radianza	$L_{e,\Omega}$	W/(sr · m ²)	Flusso Radiante emesso, riflesso, trasmesso, incidente da/su una superficie, per unità di angolo solido per unità di <i>area proiettata</i>

Table 1.2: nomenclatura e misure delle quantità radiometriche per noi rilevanti

Data l'assunzione di sistema a regime, siamo interessati a misurare l'energia radiante in un istante piuttosto che per un periodo definito di tempo. Dunque definiamo

Def. 1.4.3. — Il *Flusso Radiante* Φ_e è la quantità di energia radiante passante attraverso una superficie per unità di tempo

$$\Phi_e = \frac{\partial Q_e}{\partial t}$$

La cui derivata rispetto alle frequenze fornisce il *Flusso Radiante Spettrale*

$$\Phi_{e,\lambda} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \lambda}$$

⁵Le grandezze spettrali possono essere espresse in funzione della lunghezza d'onda (e.g. $Q_{e,\lambda}$) o del suo inverso, la frequenza (e.g. $Q_{e,\nu}$)

Ogni misurazione di un flusso richiede un'area ben definita per attribuirle senso. Nei sistemi di rendering, non è insolito invece compiere delle misure "puntuali" di un flusso radiante, cioè *flusso radiante per unità di area*.

Def. 1.4.4. — La densità superficiale del flusso radiante (energia per unità di tempo, per unità di superficie) è detta *Irradianza* E_e se tale flusso è entrante la superficie, *Emittanza Radiante* M_e se emesso dalla superficie, *Radiosità* J_e se uscente (emesso, riflesso o trasmesso) dalla superficie

$$E_e|J_e|M_e = \frac{\partial \Phi_e}{\partial A}$$

La cui derivata rispetto alle frequenze fornisce la rispettiva grandezza spettrale

$$E_{e,\lambda}|J_{e,\lambda}|M_{e,\lambda} = \frac{\partial E_e|J_e|M_e}{\partial \lambda}$$

Si noti infine che l'Irradianza, per definizione, è pari alla media temporale in un periodo del vettore di Pointing perpendicolare alla superficie

$$E_e = \langle |\vec{S}| \rangle$$

Piuttosto che concentrarci su un unico punto della superficie, possiamo concentrarci su una singola direzione, considerando il flusso radiante per unità di angolo solido.

Def. 1.4.5. — La *Intensità Radiante* $I_{e,\Omega}$ è la densità angolare del flusso radiante emesso, riflesso, trasmesso o incidente da/verso un punto dello spazio e propagante lungo una direzione specificati

$$I_{e,\Omega} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \Omega}$$

L'*Intensità (Radiante) Spettrale* è l'intensità radiante per unità di lunghezza d'onda

$$I_{e,\Omega,\lambda} = \frac{\partial I_{e,\Omega}}{\partial \lambda}$$

Tale grandezza è utile per la modellazione, ad esempio, delle sorgenti luminose puntuali omnidirezionali, le quali distribuiscono il loro flusso radiante emesso, inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente, in modo uniforme in ogni direzione $I_{e,\Omega} = \frac{\Phi_e}{4\pi}$.

La descrizione più granulare dell'energia emessa da un'onda elettromagnetica è fornita dalla *Radianza*, definita come

Def. 1.4.6. — La *Radianza* $L_{e,\Omega}$ è definita come flusso radiante emesso, riflesso, trasmesso o incidente da/su una dato punto della superficie, da/verso una data direzione, dunque per unità di angolo solido per unità di area *proiettata*

$$L_{e,\Omega} = \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \Omega \partial (A \cos \theta)}$$

dove θ angolo tra la direzione perpendicolare alla superficie sul punto considerato e la direzione del flusso

Significativa ai nostri fini è la relazione inversa che sussiste tra Irradianza e Radianza, che sfrutteremo per definire l'equazione del rendering

$$E_e(\vec{p}) = \int_{\Omega} L_{e,\Omega}(\vec{p}, \hat{\omega}) \cos \theta d\hat{\omega}^6 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} L_{e,\Omega}(\vec{p}, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (1.13)$$

1.4.1 Proprietà Particolari

Ciascuna di queste grandezze assume il suo ruolo in un sistema di rendering e possiede proprietà particolari. Ad esempio, il *Flusso Radiante* può essere utilizzato al fine di poter campionare una fonte luminosa con probabilità proporzionale alla potenza emessa dalla sua superficie.

Relazione significativa che coinvolge l'*Irradianza* è la *Legge del coseno di Lambert*

Def. 1.4.7. — La *Legge del coseno di Lambert* afferma che L'*Intensità Radiante*⁷ osservata da un *Radiatore Lambertiano*/verso una *Superficie Lambertiana* è direttamente proporzionale all'angolo θ tra l'osservatore e la normale alla superficie

$$I = I_0 \cos \theta$$

⁶Si noti la distinzione tra $\hat{\omega}$ e $d\hat{\omega}$. Il primo è un vettore unitario dal punto \vec{p} ad un punto della porzione di sfera unitaria costituente il dominio di integrazione, il secondo è un elemento di angolo solido. Un angolo solido è un numero adimensionale rappresentante la porzione di area di sfera coperta, nell'intervallo $[0, 4\pi]$. Il suo differenziale rappresenta un piccolo quadratino della superficie della sfera, spesso approssimato ad un quadrato ai fini di dimostrazioni geometriche

⁷o Intensità Luminosa

⁸da cui $E = E_0 \cos \theta$

Dove per *Radiatore Lambertiano* si intende ogni superficie radiante la cui radianza emessa è indipendente dalla direzione considerata, mentre per *Superficie Lambertiana* si intende ogni superficie che obbedisce alla legge del coseno, e riflette radianza incidente in tutte le direzioni in modo uniforme, e tale tipologia di riflessione è detta *Riflessione diffusa*, che riprendiamo in seguito.

La *Radiosità*, la quale può essere scomposta in

$$J_e(\vec{p}) = \frac{\partial \Phi_e}{\partial A} = M_e(\vec{p}) + J_{e,r}(\vec{p}) + J_{e,t}(\vec{p})$$

dove

- M_e Emittanza Radiante dalla superficie nel punto \vec{p} , componente emessa della radiosità
- $J_{e,r}$ Componente riflessa della radiosità
- $J_{e,t}$ Componente trasmessa della radiosità, nullo per superfici opache

è la grandezza protagonista dell'algoritmo di rendering deterministico che porta il suo nome, *Metodo della radiosità*, nel quale è possibile, mediante la risoluzione di un sistema di equazioni, renderizzare un scena contenenti superfici caratterizzate da riflessione diffusa.

Definiamo brevemente *Etendue*

Def. 1.4.8. — *Etendue* è una proprietà geometrica di un sistema ottico che quantifica quanto spazio la luce occupa in termini di area e angolari. Essa quantifica dunque il throughput di una sorgente luminosa. Matematicamente, essa è pari al prodotto tra l'area della sorgente/osservatore e l'angolo solido della sorgente/osservatore che tale area sottende, tenendo conto del mezzo in cui la luce si propaga (indice di rifrazione)

$$dG = \eta^2 \langle \hat{n}_s, \hat{\omega} \rangle dA(\vec{p}) d\hat{\omega}$$

Considerando una sorgente luminosa Σ , e un osservatore S , entrambi superfici separate da un mezzo con indice di rifrazione η , omogeneo, isotropico, senza perdite (cioè in assenza di scattering⁹ e assorbimento) e distanti d , l'etendue è dato da

$$dG_\Sigma = \eta^2 d\Sigma \cos \theta_\Sigma d\omega_\Sigma = \eta^2 d\Sigma \cos \theta_\Sigma \frac{dS \cos \theta_S}{d^2}$$

per ogni punto della superficie della sorgente. Im modo simile, l'etendue da un particolare punto della superficie di osservazione (e.g. una lente, o un camera film) è dato da

$$dG_S = \eta^2 dS \cos \theta_S d\omega_S = \eta^2 dS \cos \theta_S \frac{d\Sigma \cos \theta_\Sigma}{d^2}$$

⁹anche detto mezzo trasparente

Da cui si osserva che $dG_\Sigma = dG_S$, cioè che *L'etendue*, il throughput di una sorgente, *si conserva*.

Dalla conservazione dell'etendue segue la *Conservazione della radianza di base*, in quanto, dalla definizione di Radianza

$$L_{e,\Omega}(\vec{p}, \hat{\omega}) = \frac{\partial^2 \Phi_e}{\langle \hat{n}, \hat{\omega} \rangle \partial A(\vec{p}) \partial \hat{\omega}} = \eta^2 \frac{\partial^2 \Phi_e}{dG(\vec{p}, \hat{w})} \quad (1.14)$$

$$\frac{L_{e,\Omega}(\vec{p}, \hat{\omega})}{\eta^2} = \frac{\partial^2 \Phi_e}{dG(\vec{p}, \hat{w})} = \frac{\partial^2 \Phi_e}{dG(\vec{q}, -\hat{w})} = \frac{L_{e,\Omega}(\vec{q}, -\hat{\omega})}{\eta^2} \quad (1.15)$$

In quanto la potenza e l'etendue si conservano, anche il rapporto tra radianza e indice di rifrazione, detto radianza di base, si conserva nella propagazione in un mezzo ideale.

1.4.2 Radianza incidente ed uscente

La radianza L è generalmente una funzione discontinua sulle superfici di separazione tra due mezzi, dette interfacce.

$$L^+ = \lim_{t \rightarrow 0^+} L(\vec{p} + t\hat{n}, \hat{\omega}) \quad (1.16)$$

$$L^- = \lim_{t \rightarrow 0^-} L(\vec{p} + t\hat{n}, \hat{\omega}) \quad (1.17)$$

dunque, piuttosto che lavorare con un'unica funzione discontinua, si preferisce distinguere tra *radianza incidente* L_i e *radianza uscente*¹⁰.

$$L_i(\vec{p}, \hat{\omega}) = \begin{cases} L^+(\vec{p}, -\hat{w}), & \langle \omega, \hat{n} \rangle > 0 \\ L^-(\vec{p}, -\hat{w}), & \langle \omega, \hat{n} \rangle < 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

$$L_o(\vec{p}, \hat{\omega}) = \begin{cases} L^+(\vec{p}, \hat{w}), & \langle \omega, \hat{n} \rangle > 0 \\ L^-(\vec{p}, \hat{w}), & \langle \omega, \hat{n} \rangle < 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Si noti che in punti dello spazio non giacenti su una superficie, la radianza è invece continua, $L^+ = L^-$, da cui

$$L_o(\vec{p}, \hat{\omega}) = L_i(\vec{p}, -\hat{\omega}) \quad (1.20)$$

Si può riscrivere la conservazione della radianza di base in termini della radianza incidente e radianza uscente

$$\frac{L_o(\vec{p}, \hat{\omega})}{\eta_1^2} = \frac{L_i(\vec{q}, \hat{\omega})}{\eta_2^2} \quad (1.21)$$

¹⁰emessa, riflessa, trasmessa

¹¹Si noti come per convenzione, la radianza incidente ha direzione $\hat{\omega}$ sia uscente dal punto *vecp*, nonostante il flusso radiante abbia direzione opposta. In altre parole, la radianza incidente ha come argomento la direzione di provenienza del flusso

1.5 Radiazione di Corpo Nero

Tutti i corpi con temperatura superiore allo zero assoluto emettono radiazione, in quantità proporzionale alla temperatura assoluta in quanto essa corrisponde allo stato di agitazione delle molecole, causando accelerazione di elettroni e protoni degli atomi costituenti, portando all'emissione di campo elettromagnetico secondo le equazioni di Maxwell. Tale flusso radiante spettrale emesso costituisce una *Spectral Power Distribution* (SPD).

Un *Corpo Nero* corpo ideale che assorbe ogni tipo di radiazione incidente, indipendentemente da frequenza o angolo di incidenza. In equilibrio termico, esso emette radiazioni che seguono la *Legge di Planck*^{1.24}. Esso è un *Radiatore Ideale e diffusore*, cioè emette radiazioni uniformemente in tutte le direzioni (superficie lambertiana).

per tali corpi neri, l'Emittanza radiante M_{bb} dalla superficie obbedisce alla *Legge di Stefan-Boltzmann*

$$M_{bb} = \sigma T^4 \quad (1.22)$$

dove $\sigma = 5.67032 \cdot 10^{-8} \text{W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$ costante di Stefan-Boltzmann

Dunque tale corpo nero è una superficie opaca (trasmittanza nulla), perfettamente assorbente (absorptance unitaria) che non riflette alcuna radiazione incidente (riflettanza nulla). Ciò vuol dire che emette tutta la radiazione che assorbe ($A + R + T = 1$).

Essendo una superficie lambertiana, anche la radianza emessa deve essere costante. Sapendo che un emisfera unitaria ha integrale pari a π ,

$$M_{bb\lambda} = \pi L_{bb\lambda} \quad (1.23)$$

In equilibrio termico, tale radianza ha espressione detta *Legge di Planck*

$$L_{bb\lambda}(T, \lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)} \quad (1.24)$$

dove

$$h = 6.626176 \cdot 10^{-34} \text{J/s} \text{ costante di Planck } k = 1.380662 \cdot 10^{-23} \text{J/K} \text{ costante di Boltzmann} \quad (1.25)$$

È facile dimostrare come, integrando nell'emisfera unitaria, si ottiene un emittanza radiante corrispondente alla legge di Stefan-Boltzmann

Tali corpi neri si dimostrano utili non solo come modelli per parametrizzare, tramite temperatura, una sorgente luminosa, ma risultano rilevanti anche per la colorimetria, in quanto costituenti il luogo plankiano.

Chapter 2

Fotometria, Colore e Camera

Chapter 3

Modelli di Fonti Luminose e Superfici

Chapter 4

Trasporto di Energia Elettromagnetica nel Mezzo

Part II

Metodi di Monte Carlo

Chapter 5

Campionamento e Ricostruzione con Quasirandom Number Generation

Chapter 6

Integrazione di Monte Carlo

Chapter 7

Metodi di Riduzione della Varianza

Part III

Applicazione

Chapter 8

Light Transport Modello e Surface Reflection

Chapter 9

Light Transport: Volume Rendering e Bidirectional Methods

Part IV

Appendici

Appendix A

Fondamenti di Probabilità e Statistica

Appendix B

Algebra Lineare applicata

Appendix C

Generazione di Numeri Pseudocasuali

Appendix D

Codice Vulkan & HLSL

Appendix E

Implementazione dei Concetti Fisici

Bibliography

- [Hec02] Eugene Hecht. *Optics*. Addison Wesley, 2002.
- [McC14] Ross McCluney. *Introduction to Radiometry and Photometry*. 2nd ed. Artech House Publishers, 2014.
- [Peg16] Vincent Pegoraro. *Handbook of Digital Image Synthesis: Scientific Foundations of Rendering*. 1st ed. A K Peters/CRC Press, 2016.
- [PJH23] Matt Pharr, Wenzel Jakob, and Greg Humphreys. *Physically Based Rendering: From Theory to Implementation*. 4th ed. Morgan Kaufmann, 2023.

Glossary

Emittanza Radiante Flusso Radiante emesso per unità di area. 9

Energia Radiante Energia aggregata di tutti i fotoni in una radiazione elettromagnetica. 9

Flusso Radiante Energia Radiante *emessa, riflessa, trasmessa, incidente*, per unità di tempo. 9

Intensità Radiante Flusso Radiante emesso, riflesso, trasmesso, per unità di angolo solido. 9

Irradianza Flusso Radiante incidente per unità di area. 9

Radianza Flusso Radiante emesso, riflesso, trasmesso, incidente da/su una superficie, per unità di angolo solido per unità di *area proiettata*. 9, 13

Radiosità Flusso Radiante *uscente* (emesso, riflesso e trasmesso) per unità di area. 9