

Metodi di Monte Carlo Applicati Alla Computer Grafica

Tesi in Calcolo Numerico

**Presentata da:
Tanzi Alessio**

**Relatore:
Prof.ssa Marina Popolizio**

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

Acknowledgements

Contents

I	Fondamenti fisici e presentazione del problema	1
1	Richiami sull'elettromagnetismo e Radiometria	2
1.1	Radiazione Elettromagnetica	2
1.2	Dualità onda-particella	5
1.3	Introduzione all'assorbimento di radiazione	6
1.4	Radiometria	7
1.4.1	Proprietà Particolari	11
1.4.2	Radianza incidente ed uscente	13
1.5	Radiazione di Corpo Nero	14
2	Fotometria, Colore e Camera	15
2.1	Fotometria	15
2.1.1	fotometria e sistemi di rendering	16
2.2	Colorimetria	16
2.2.1	xy chromaticity diagram	19
2.2.2	sRGB color space	21
2.2.3	Conversione da XYZ o RGB a SPD	22
2.3	camera	26
2.3.1	pinhole camera model	26
3	Modelli di Fonti Luminose e Superfici	30
4	Trasporto di Energia Elettromagnetica nel Mezzo	31
II	Metodi di Monte Carlo	32
5	Campionamento e Ricostruzione con Quasirandom Number Generation	33
6	Integrazione di Monte Carlo	34

7	Metodi di Riduzione della Varianza	35
III	Applicazione	36
8	Light Transport Modello e Surface Reflection	37
9	Light Transport: Volume Rendering e Bidirectional Methods	38
IV	Appendici	39
A	Fondamenti di Probabilità e Statistica	40
B	Algebra Lineare applicata	41
C	Numeri Pseudocasuali e Algoritmi Vari	42
	C.1 Metodo di Gauss-Newton	42
D	Codice Vulkan & HLSL	43
E	Implementazione dei Concetti Fisici	44
	Bibliography	45
	Glossary	46

Part I

Fondamenti fisici e presentazione del problema

Chapter 1

Richiami sull'elettromagnetismo e Radiometria

1.1 Radiazione Elettromagnetica

La luce è un fenomeno fisico che si propaga come un'onda elettromagnetica ed interagisce con le altre sostanze come una particella. Dal punto di vista ondulatorio, una *onda elettromagnetica* si propaga nel vuoto a velocità costante c , la quale è correlata alla *permeabilità magnetica nel vuoto* μ_0 [H/m] e *costante dielettrica nel vuoto* ϵ_0 [F/m]

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

mentre la *Velocità di fase* v [m/s] è similmente legata alla *permittività dielettrica del mezzo* ϵ e *permeabilità magnetica nel mezzo*

$$\epsilon = \frac{1}{\mu v^2}$$

il rapporto tra le costanti nel mezzo e le costanti nel vuoto definiscono *permittività relativa* ϵ_r e *permeabilità relativa* μ_r .

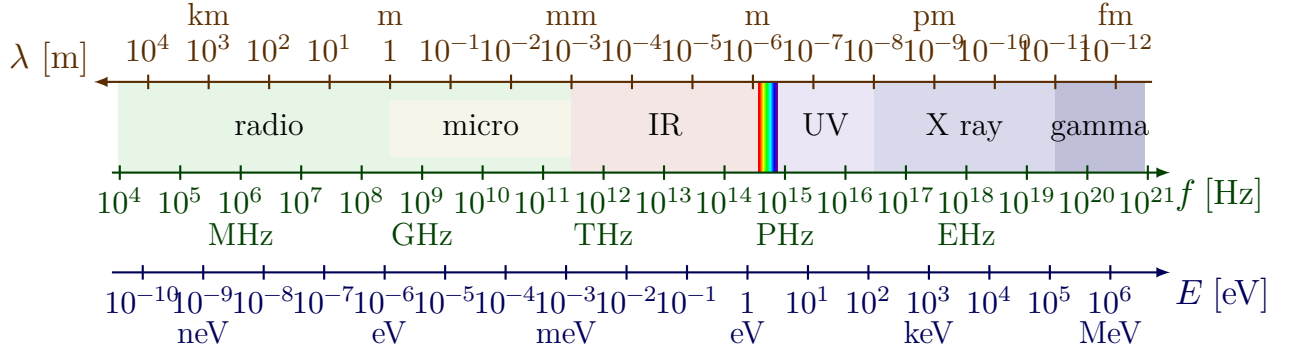
Come osservi in figura ??, un'onda monocromatica è caratterizzata da

$$\text{frequenza di oscillazione } \nu \text{ [Hz] e periodo } T \text{ [s]} \quad \nu = \frac{1}{T} \quad (1.1)$$

$$\text{frequenza angolare } \omega \text{ [rd/s]} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (1.2)$$

$$\text{lunghezza d'onda } \lambda \text{ [m], nel vuoto e nel mezzo } \lambda_0 = cT = \frac{c}{\nu} \quad (1.3)$$

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} \quad (1.4)$$



La luce visibile all'*occhio umano* corrisponde al sottoinsieme dello spettro [383, 783] THz, equivalentemente [783, 383] nm

Inoltre si definisce *numero d'onda angolare* [rd/m]

$$\text{nel vuoto } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{c} \nu = \frac{\omega}{c} \quad (1.5)$$

$$\text{nel mezzo } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v} \nu = \frac{\omega}{v} \quad (1.6)$$

che rappresenta lo shift di fase dell'onda. Assieme alla direzione di propagazione \hat{k} definiscono il *vettore d'onda* $\vec{k} = k\hat{k}$

Le proprietà dell'onda in un mezzo relative alle proprietà dell'onda nel vuoto sono determinate dall'*indice di rifrazione* (IOR), dipendente dalla lunghezza d'onda

$$\eta = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{v} = \frac{k}{k_0}$$

radiazione elettromagnetica è composta da campo elettrico \vec{E} ed un campo magnetico \vec{B} oscillanti in fase, perpendicolari tra loro e alla direzione di propagazione \hat{k} (Figura ??). Le proprietà di tali campi sono descritti in funzione della posizione

\vec{r} e tempo t dalle *Equazioni di Maxwell*¹ [Peg16]:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t) \right) \quad (1.10)$$

dove ρ è la densità di carica totale e \vec{J} la densità di corrente.

Tali equazioni, date le condizioni a contorno e condizioni iniziali, portano ad una equazione differenziale parziale detta equazione d'onda, che per assenza di cariche $\rho = 0$, assenza di corrente $\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{0}$, e propagazione nel vuoto porta a

\vec{x} è sostituibile sia con \vec{E} che con \vec{B}

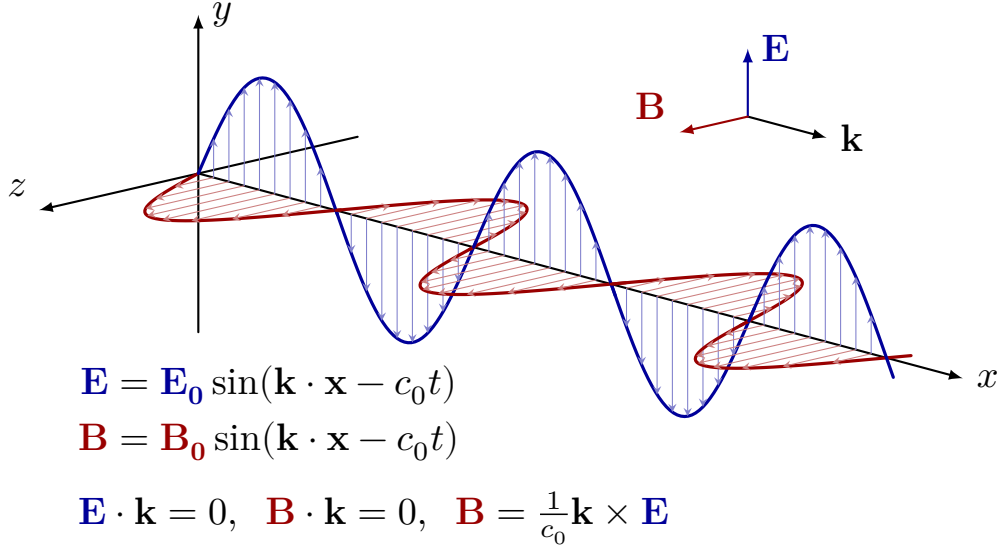
$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{x} = 0$$

la cui soluzione è una qualsiasi funzione differenziabile due volte della forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = f(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) = f\left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{r} - ct}{k}\right)$$

Proprietà importante per un'onda elettromagnetica è la sua *polarizzazione*, la quale specifica l'orientamento nello spazio del campo elettrico (per convenzione) nella propagazione nello spazio dell'onda. Il campo elettrico può avere direzione fissa o essere rotante in base ad una data funzione [[McC14]]. Esso è importante per le proprietà ottiche dei materiali, discussi in seguito. Gli stati di polarizzazione fondamentali che citiamo sono *polarizzazione lineare*, nella quale il campo elettromagnetico è confinato in un piano dello spazio, *polarizzazione circolare*, nella quale il vettore campo elettrico descrive una circonferenza nella sua rotazione con velocità angolare costante, *polarizzazione ellittica*, la quale è una combinazione tra polarizzazioni circolari e planari. Con il termine *polarizzazione casuale* ci riferiamo invece a luce con polarizzazione ellittica, le cui caratteristiche (eccentricità, velocità angolare) sono casuali, diverso da *luce non polarizzata* nella quale le caratteristiche (modulo e orientamento) del campo elettrico sono casuali. Un raggio luminoso può essere costituito dalla sovrapposizione di più radiazioni aventi differente stato di polarizzazione. Ci sono diversi metodi per scomporre tali componenti e analizzarle [Hec02].

¹qui mostrate le equazioni per propagazione nel vuoto



Una delle proprietà ottiche cangianti con lo stato di polarizzazione è la *Riflettanza*, la quale ha espressioni note differenti per radiazione linearmente polarizzata con piano di vibrazione \parallel e \perp al piano di incidenza.

Tratteremo principalmente luce non polarizzata, la quale è una buona approssimazione considerando che la luce del cielo, che si propaga nell'atmosfera, è parzialmente polarizzata.

1.2 Dualità onda-particella

Una radiazione elettromagnetica mostra sia aspetti ondulatori che aspetti particellari. Tale fenomeno è detto *dualità onda-particella*. La luce è assorbita ed emessa in pacchetti discreti di energia elettromagnetica chiamati *fotoni*. Dunque il campo elettromagnetico ² è quantizzato. Ciascuna delle sue particelle elementari costituenti ha energia definita dall' *equazione di Planck-Einstein*

$$\xi = h\nu$$

dove h costante di Plank. Si osservi come l'energia di un singolo fotone è dipendente dall'alunghezza d'onda.

Il modello fornito dall'elettrodinamica quantistica è stato citato in quanto esso ci suggerisce un nuovo modello operativo della luce, orientato alla misurazione piuttosto che alla formulazione da primi principi, nel quale ci disinteressiamo

²inteso come spostamento di energia

Materiale	λ [nm]	κ_a [cm ⁻¹]	Osservazioni
Vapore Acqueo	$10.6 \cdot 10^3$ (infrarossi)	1.5	Ogni centimetro la luce che passa per vapore acqueo l'1.5% dell'energia è assorbita
Vetro	550 (verde)	0.1	Così basso che è praticamente trascurabile. Il vetro è praticamente trasparente alla luce
Ferro	400 (violetto)	$2.5 \cdot 10^4$	Assorbe fortemente la luce violetta, motivo per cui appare grigio scuro
Clorofilla	680 (rosso)	10^5	Assorbe fortemente luce rossa, motivo per cui appare verde
Diossido di Carbonio	$4.3 \cdot 10^3$ (infrarossi)	7	Assorbe fortemente radiazione infrarossa, motivo per cui contribuisce al riscaldamento globale

Table 1.1: Esempi di coefficiente di assorbimento per alcuni materiali a date lunghezze d'onda

dell'origine fisica della luce e misuriamo l'energia aggregata trasportata dai fotoni contenuti in una radiazione. Tale scienza è la *Radiometria* (sezione Radiometria)

1.3 Introduzione all'assorbimento di radiazione

Quando la luce passa per un mezzo, parte di essa viene rifratta e riflessa (capitolo 3). In alcuni materiali³, quando la luce passa attraverso il mezzo è assorbita, e il wavelength-dependent *coefficiente di assorbimento* κ_a [m⁻¹], il quale indica la percentuale di energia di onda elettromagnetica assorbita, per una data lunghezza d'onda, nella propagazione nel materiale. Alcuni esempi di coefficiente di assorbimento sono mostrati in Tabella Introduzione all'assorbimento di radiazione

Dall'coefficiente di assorbimento, caratterizzante il decadimento della energia nella propagazione dell'onda, e il numero d'onda, caratterizzante lo shift di fase dell'onda stessa, si definisce il *numero d'onda complesso*

$$\underline{k} = k + i \frac{\kappa_a}{2}$$

³come i metalli

Ricordiamo l'equazione di un'onda elettromagnetica linearmente polarizzata, in assenza di assorbimento

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right)$$

Introducendo un coefficiente di assorbimento non-nullo, e supponendo propagazione nell'asse z , $\hat{k} = [0, 0, 1]^T$

$$\vec{E}(z, t) = \Re \left(\vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \right) = \Re \left(e^{-\frac{\kappa_a}{2} z} \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \right)$$

Da cui l'*intensità*⁴ dell'onda (potenza media nel periodo trasferita per unità di superficie) $[\text{W}/\text{m}^2]$ diventa [Peg16]

$$I(z) = \frac{1}{T} \int_T |\vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}|^2 dt = \frac{1}{T} |e^{-\frac{\kappa_a}{2} z} \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}|^2 \quad (1.11)$$

$$= |e^{-\frac{\kappa_a}{2} z}|^2 \frac{1}{T} \int_T |\vec{E}_0 e^{-i(kz - \omega t)}|^2 dt = e^{-\kappa_a z} I_0 \quad (1.12)$$

dove I_0 è l'intensità in assenza di assorbimento. La distanza alla quale l'intensità si riduce di un fattore e^{-1} , ($z = \kappa_a^{-1}$), è detta *profondità di penetrazione*

Altro coefficiente caratterizzante il materiale e la sua interazione con radiazione incidente, contando anche l'assorbimento, è l' *indice di rifrazione complesso*

$$\underline{\eta} = \frac{k}{k_0} + i \frac{\kappa_a}{2k_0} = \eta + i\kappa$$

dove $\kappa = \frac{\kappa_a}{2k_0}$ è l'*indice di assorbimento* della superficie

1.4 Radiometria

Branche dell'ottica prese come riferimento dal physically based rendering sono la *Radiometria* e *Radiative Transfer*. La *Radiometria* è il modello matematico per studiare e misurare la propagazione delle radiazioni elettromagnetiche. In tale modello, ci disinteressiamo degli aspetti ondulatori delle onde elettromagnetiche e guardiamo la radiazione come energia fluente nello spazio. Ciò suggerisce che la Radiometria opera a livello dell'ottica geometrica, assumendo dunque

⁴In fotometria e radiometria *intensità* ha un altro significato: essa è la potenza radiante o luminosa per unità di angolo solido. In Ottica e Termodinamica, *intensità* essa è associata alla potenza media nel periodo per unità di superficie, come in questo caso, altre volte all'intensità radiante o luminosa, oppure all'irradianza o alla radianza. Per Radiometria, vedi Radiometria

propagazione rettilinea della luce e trascurando fenomeni dovuti alla natura ondulatoria della radiazione. Si considerano solamente gli effetti della riflessione, trasmissione, scattering ed assorbimento. In particolare, le assunzioni fatte sono le seguenti[[PJH23]]:

Linearità:	La combinazione lineare di più input ad un sistema ottico è pari alla combinazione lineare degli effetti dei singoli input
Conservazione dell'energia:	Quando una fonte di radiazioni scatters da una superficie o mezzo trasmissivo, gli <i>scattering events</i> [[Peg16]], non possono produrre più energia di quella iniziale
No polarizzazione:	Ignoriamo la polarizzazione del campo elettromagnetico di una radiazione, rendendo l'unica proprietà rilevante di una radiazione la sua <i>Distribuzione Spettrale</i> [Radiazione di Corpo Nero]
No fluorescenza o fosforescenza:	Il comportamento della radiazione ad una lunghezza d'onda è indipendente dal comportamento della radiazione ad altre lunghezze d'onda
A regime:	Il <i>Light Field</i> (Radiometria) nell'ambiente è assunto a regime, indipendente dal tempo. Nota che la fosforescenza viola anche questo presupposto

Il *Radiative Transfer*, qui solo accennato, è lo studio dei fenomeni legati al trasferimento di energia radiante, basato sulla radiometria, ed utilizzato nella computer grafica per introdurre fenomeni legati all'ottica fisica e modellare la propagazione in un mezzo diverso dal vuoto.

Le unità fondamentali della radiometria sono riassunte nella tabella 1.2

Def. 1.4.1. — L'*Energia Radiante* Q_e è l'energia aggregata di tutti i fotoni, ognuno ad una particolare lunghezza d'onda con contributo energetico diverso, verso/attraverso/da una superficie in un dato intervallo di tempo

Ciascuno di questi fotoni trasporta energia pari all'Equazione di plank-Einstein $Q_\lambda = \frac{hc}{\lambda}$ 1.2

Def. 1.4.2. — L'*Energia Radiante Spettrale* $Q_{e,\lambda}$ ⁵ è il contributo di una singola lunghezza d'onda all'energia radiante complessiva

$$Q_{e,\lambda} = \frac{\partial Q_e}{\partial \lambda}$$

Quantità	Simbolo	unità S.I.	Note
Energia Radiante	Q_e	J	Energia aggregata di tutti i fotoni in una radiazione elettromagnetica
Flusso Radiante	Φ_e	W	Energia Radiante <i>emessa, riflessa, trasmessa, incidente</i> , per unità di tempo
Intensità Radiante	$I_{e,\Omega}$	W/sr	Flusso Radiante emesso, riflesso, trasmesso, per unità di angolo solido
Irradianza	E_e	W/m ²	Flusso Radiante incidente per unità di area
Emittanza Radiante	M_e	W/m ²	Flusso Radiante emesso per unità di area
Radiosità	J_e	W/m ²	Flusso Radiante <i>uscente</i> (emesso, riflesso e trasmesso) per unità di area
Radianza	$L_{e,\Omega}$	W/(sr · m ²)	Flusso Radiante emesso, riflesso, trasmesso, incidente da/su una superficie, per unità di angolo solido per unità di <i>area proiettata</i>

Table 1.2: nomenclatura e misure delle quantità radiometriche per noi rilevanti

Data l'assunzione di sistema a regime, siamo interessati a misurare l'energia radiante in un istante piuttosto che per un periodo definito di tempo. Dunque definiamo

Def. 1.4.3. — Il *Flusso Radiante* Φ_e è la quantità di energia radiante passante attraverso una superficie per unità di tempo

$$\Phi_e = \frac{\partial Q_e}{\partial t}$$

La cui derivata rispetto alle frequenze fornisce il *Flusso Radiante Spettrale*

$$\Phi_{e,\lambda} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \lambda}$$

⁵Le grandezze spettrali possono essere espresse in funzione della lunghezza d'onda (e.g. $Q_{e,\lambda}$) o del suo inverso, la frequenza (e.g. $Q_{e,\nu}$)

Ogni misurazione di un flusso richiede un'area ben definita per attribuirle senso. Nei sistemi di rendering, non è insolito invece compiere delle misure "puntuali" di un flusso radiante, cioè *flusso radiante per unità di area*.

Def. 1.4.4. — La densità superficiale del flusso radiante (energia per unità di tempo, per unità di superficie) è detta *Irradianza* E_e se tale flusso è entrante la superficie, *Emittanza Radiante* M_e se emesso dalla superficie, *Radiosità* J_e se uscente (emesso, riflesso o trasmesso) dalla superficie

$$E_e | J_e | M_e = \frac{\partial \Phi_e}{\partial A}$$

La cui derivata rispetto alle frequenze fornisce la rispettiva grandezza spettrale

$$E_{e,\lambda} | J_{e,\lambda} | M_{e,\lambda} = \frac{\partial E_e | J_e | M_e}{\partial \lambda}$$

Si noti infine che l'Irradianza, per definizione, è pari alla media temporale in un periodo del vettore di Pointing perpendicolare alla superficie

$$E_e = \langle |\vec{S}| \rangle$$

Piuttosto che concentrarci su un unico punto della superficie, possiamo concentrarci su una singola direzione, considerando il flusso radiante per unità di angolo solido.

Def. 1.4.5. — La *Intensità Radiante* $I_{e,\Omega}$ è la densità angolare del flusso radiante emesso, riflesso, trasmesso o incidente da/verso un punto dello spazio e propagante lungo una direzione specificati

$$I_{e,\Omega} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \Omega}$$

L'*Intensità (Radiante) Spettrale* è l'intensità radiante per unità di lunghezza d'onda

$$I_{e,\Omega,\lambda} = \frac{\partial I_{e,\Omega}}{\partial \lambda}$$

Tale grandezza è utile per la modellazione, ad esempio, delle sorgenti luminose puntuali omnidirezionali, le quali distribuiscono il loro flusso radiante emesso, inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente, in modo uniforme in ogni direzione $I_{e,\Omega} = \frac{\Phi_e}{4\pi}$.

La descrizione più granulare dell'energia emessa da un'onda elettromagnetica è fornita dalla *Radianza*, definita come

Def. 1.4.6. — La *Radianza* $L_{e,\Omega}$ è definita come flusso radiante emesso, riflesso, trasmesso o incidente da/su una dato punto della superficie, da/verso una data direzione, dunque per unità di angolo solido per unità di area *proiettata*

$$L_{e,\Omega} = \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \Omega \partial (A \cos \theta)}$$

dove θ angolo tra la direzione perpendicolare alla superficie sul punto considerato e la direzione del flusso

Significativa ai nostri fini è la relazione inversa che sussiste tra Irradianza e Radianza, che sfrutteremo per definire l'equazione del rendering

$$E_e(\vec{p}) = \int_{\Omega} L_{e,\Omega}(\vec{p}, \hat{\omega}) \cos \theta d\hat{\omega}^6 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} L_{e,\Omega}(\vec{p}, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (1.13)$$

1.4.1 Proprietà Particolari

Ciascuna di queste grandezze assume il suo ruolo in un sistema di rendering e possiede proprietà particolari. Ad esempio, il *Flusso Radiante* può essere utilizzato al fine di poter campionare una fonte luminosa con probabilità proporzionale alla potenza emessa dalla sua superficie.

Relazione significativa che coinvolge l'*Irradianza* è la *Legge del coseno di Lambert*

Def. 1.4.7. — La *Legge del coseno di Lambert* afferma che L'*Intensità Radiante*⁷ osservata da un *Radiatore Lambertiano*/verso una *Superficie Lambertiana* è direttamente proporzionale all'angolo θ tra l'osservatore e la normale alla superficie

$$I = I_0 \cos \theta$$

⁶Si noti la distinzione tra $\hat{\omega}$ e $d\hat{\omega}$. Il primo è un vettore unitario dal punto \vec{p} ad un punto della porzione di sfera unitaria costituente il dominio di integrazione, il secondo è un elemento di angolo solido. Un angolo solido è un numero adimensionale rappresentante la porzione di area di sfera coperta, nell'intervallo $[0, 4\pi]$. Il suo differenziale rappresenta un piccolo quadratino della superficie della sfera, spesso approssimato ad un quadrato ai fini di dimostrazioni geometriche

⁷o Intensità Luminosa

⁸da cui $E = E_0 \cos \theta$

Dove per *Radiatore Lambertiano* si intende ogni superficie radiante la cui radianza emessa è indipendente dalla direzione considerata, mentre per *Superficie Lambertiana* si intende ogni superficie che obbedisce alla legge del coseno, e riflette radianza incidente in tutte le direzioni in modo uniforme, e tale tipologia di riflessione è detta *Riflessione diffusa*, che riprendiamo in seguito.

La *Radiosità*, la quale può essere scomposta in

$$J_e(\vec{p}) = \frac{\partial \Phi_e}{\partial A} = M_e(\vec{p}) + J_{e,r}(\vec{p}) + J_{e,t}(\vec{p})$$

dove

- M_e Emittanza Radiante dalla superficie nel punto \vec{p} , componente emessa della radiosità
- $J_{e,r}$ Componente riflessa della radiosità
- $J_{e,t}$ Componente trasmessa della radiosità, nullo per superfici opache

è la grandezza protagonista dell'algoritmo di rendering deterministico che porta il suo nome, *Metodo della radiosità*, nel quale è possibile, mediante la risoluzione di un sistema di equazioni, renderizzare un scena contenenti superfici caratterizzate da riflessione diffusa.

Definiamo brevemente *Etendue*

Def. 1.4.8. — *Etendue* è una proprietà geometrica di un sistema ottico che quantifica quanto spazio la luce occupa in termini di area e angolari. Essa quantifica dunque il throughput di una sorgente luminosa. Matematicamente, essa è pari al prodotto tra l'area della sorgente/osservatore e l'angolo solido della sorgente/osservatore che tale area sottende, tenendo conto del mezzo in cui la luce si propaga (indice di rifrazione)

$$dG = \eta^2 \langle \hat{n}_s, \hat{\omega} \rangle dA(\vec{p}) d\hat{\omega}$$

Considerando una sorgente luminosa Σ , e un osservatore S , entrambi superfici separate da un mezzo con indice di rifrazione η , omogeneo, isotropico, senza perdite (cioè in assenza di scattering⁹ e assorbimento) e distanti d , l'etendue è dato da

$$dG_\Sigma = \eta^2 d\Sigma \cos \theta_\Sigma d\omega_\Sigma = \eta^2 d\Sigma \cos \theta_\Sigma \frac{dS \cos \theta_S}{d^2}$$

per ogni punto della superficie della sorgente. Im modo simile, l'etendue da un particolare punto della superficie di osservazione (e.g. una lente, o un camera film) è dato da

$$dG_S = \eta^2 dS \cos \theta_S d\omega_S = \eta^2 dS \cos \theta_S \frac{d\Sigma \cos \theta_\Sigma}{d^2}$$

⁹anche detto mezzo trasparente

Da cui si osserva che $dG_\Sigma = dG_S$, cioè che *L'etendue*, il throughput di una sorgente, *si conserva*.

Dalla conservazione dell'etendue segue la *Conservazione della radianza di base*, in quanto, dalla definizione di Radianza

$$L_{e,\Omega}(\vec{p}, \hat{\omega}) = \frac{\partial^2 \Phi_e}{\langle \hat{n}, \hat{\omega} \rangle \partial A(\vec{p}) \partial \hat{\omega}} = \eta^2 \frac{\partial^2 \Phi_e}{dG(\vec{p}, \hat{w})} \quad (1.14)$$

$$\frac{L_{e,\Omega}(\vec{p}, \hat{\omega})}{\eta^2} = \frac{\partial^2 \Phi_e}{dG(\vec{p}, \hat{w})} = \frac{\partial^2 \Phi_e}{dG(\vec{q}, -\hat{w})} = \frac{L_{e,\Omega}(\vec{q}, -\hat{\omega})}{\eta^2} \quad (1.15)$$

In quanto la potenza e l'etendue si conservano, anche il rapporto tra radianza e indice di rifrazione, detto radianza di base, si conserva nella propagazione in un mezzo ideale.

1.4.2 Radianza incidente ed uscente

La radianza L è generalmente una funzione discontinua sulle superfici di separazione tra due mezzi, dette interfacce.

$$L^+ = \lim_{t \rightarrow 0^+} L(\vec{p} + t\hat{n}, \hat{\omega}) \quad (1.16)$$

$$L^- = \lim_{t \rightarrow 0^-} L(\vec{p} + t\hat{n}, \hat{\omega}) \quad (1.17)$$

dunque, piuttosto che lavorare con un'unica funzione discontinua, si preferisce distinguere tra *radianza incidente* L_i e *radianza uscente*¹⁰.

$$L_i(\vec{p}, \hat{\omega}) = \begin{cases} L^+(\vec{p}, -\hat{w}), & \langle \omega, \hat{n} \rangle > 0 \\ L^-(\vec{p}, -\hat{w}), & \langle \omega, \hat{n} \rangle < 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

$$L_o(\vec{p}, \hat{\omega}) = \begin{cases} L^+(\vec{p}, \hat{w}), & \langle \omega, \hat{n} \rangle > 0 \\ L^-(\vec{p}, \hat{w}), & \langle \omega, \hat{n} \rangle < 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Si noti che in punti dello spazio non giacenti su una superficie, la radianza è invece continua, $L^+ = L^-$, da cui

$$L_o(\vec{p}, \hat{\omega}) = L_i(\vec{p}, -\hat{\omega}) \quad (1.20)$$

Si può riscrivere la conservazione della radianza di base in termini della radianza incidente e radianza uscente

$$\frac{L_o(\vec{p}, \hat{\omega})}{\eta_1^2} = \frac{L_i(\vec{q}, \hat{\omega})}{\eta_2^2} \quad (1.21)$$

¹⁰emessa, riflessa, trasmessa

¹¹Si noti come per convenzione, la radianza incidente ha direzione $\hat{\omega}$ sia uscente dal punto *vecp*, nonostante il flusso radiante abbia direzione opposta. In altre parole, la radianza incidente ha come argomento la direzione di provenienza del flusso

1.5 Radiazione di Corpo Nero

Tutti i corpi con temperatura superiore allo zero assoluto emettono radiazione, in quantità proporzionale alla temperatura assoluta in quanto essa corrisponde allo stato di agitazione delle molecole, causando accelerazione di elettroni e protoni degli atomi costituenti, portando all'emissione di campo elettromagnetico secondo le equazioni di Maxwell. Tale flusso radiante spettrale emesso costituisce una *Spectral Power Distribution* (SPD).

Un *Corpo Nero* corpo ideale che assorbe ogni tipo di radiazione incidente, indipendentemente da frequenza o angolo di incidenza. In equilibrio termico, esso emette radiazioni che seguono la *Legge di Planck*^{1.24}. Esso è un *Radiatore Ideale e diffusore*, cioè emette radiazioni uniformemente in tutte le direzioni (superficie lambertiana).

per tali corpi neri, l'Emittanza radiante M_{bb} dalla superficie obbedisce alla *Legge di Stefan-Boltzmann*

$$M_{bb} = \sigma T^4 \quad (1.22)$$

dove $\sigma = 5.67032 \cdot 10^{-8} \text{W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$ costante di Stefan-Boltzmann

Dunque tale corpo nero è una superficie opaca (trasmittanza nulla), perfettamente assorbente (absorptance unitaria) che non riflette alcuna radiazione incidente (riflettanza nulla). Ciò vuol dire che emette tutta la radiazione che assorbe ($A + R + T = 1$).

Essendo una superficie lambertiana, anche la radianza emessa deve essere costante. Sapendo che un emisfera unitaria ha integrale pari a π ,

$$M_{bb\lambda} = \pi L_{bb\lambda} \quad (1.23)$$

In equilibrio termico, tale radianza ha espressione detta *Legge di Planck*

$$L_{bb\lambda}(T, \lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)} \quad (1.24)$$

dove

$$h = 6.626176 \cdot 10^{-34} \text{J/s} \text{ costante di Planck } k = 1.380662 \cdot 10^{-23} \text{J/K} \text{ costante di Boltzmann} \quad (1.25)$$

È facile dimostrare come, integrando nell'emisfera unitaria, si ottiene un emittanza radiante corrispondente alla legge di Stefan-Boltzmann

Tali corpi neri si dimostrano utili non solo come modelli per parametrizzare, tramite temperatura, una sorgente luminosa, ma risultano rilevanti anche per la colorimetria, in quanto costituenti il luogo plankiano.

Chapter 2

Fotometria, Colore e Camera

2.1 Fotometria

L'occhio umano non è equamente sensibile a tutte le lunghezze d'onda della luce visibile, la quale è un sottoinsieme dello spettro elettromagnetico corrispondente all'intervallo $[360, 830] \text{ nm}$, come accennato nel primo capitolo I. Dunque, si introduce

Def. 2.1.1. — La *Fotometria* è la scienza che studia la misurazione della luce in termini della *intensità percepita* dall'occhio umano.

Tale definizione permette di capire che la fotometria si distingue dalla radiometria in quanto, data una sorgente luminosa Σ con una certa SPD, lo scopo è pesarne il contributo di ciascuna lunghezza d'onda secondo la percezione umana.

L'occhio umano possiede due tipi di fotorecettori: *coni* e *bastoncini*

I *coni* sono responsabili per la percezione in ambienti illuminati, detta *visione fotopica*

I *bastoncini* sono responsabili per la percezione in ambienti bui, detta *visione scotopica*

A seguito di esperimenti condotti nel 1931 dalla CIE, è stato associato un modello di risposta spettrale standard, e sono chiamate *Efficacia Luminosa Spettrale Fotopica* $V_p(\lambda)$ e *Efficacia Luminosa Spettrale Scotopica* $V_s(\lambda)$.

Tali funzioni, in ciascuna lunghezza d'onda, rappresentano un peso $\in [0, 1]$, il quale può essere integrato con una grandezza radiometrica spettrale per ottenere

l'analogia grandezza fotometrica.¹

$$\text{Energia Luminosa } Q_v = K \int_{\Lambda} Q_{e,\lambda}(\lambda) V(\lambda) d\lambda \quad (2.1)$$

$$\text{Flusso Luminoso } \Phi_v = K \int_{\Lambda} \Phi_{e,\lambda}(t, \lambda) V(\lambda) d\lambda \quad (2.2)$$

$$\text{Illuminanza|Emittanza Luminosa } E_v|M_v = K \int_{\Lambda} E_{e,\lambda}|M_{e,\lambda}(\vec{p}, \lambda) V(\lambda) d\lambda \quad (2.3)$$

$$\text{Intensità Luminosa } I_v = K \int_{\Lambda} I_{e,\Omega,\lambda}(\hat{\omega}, \lambda) V(\lambda) d\lambda \quad (2.4)$$

$$\text{Luminanza}^2 Y = K \int_{\Lambda} L_{e,\Omega,\lambda}(\vec{p}, \hat{\omega}, \lambda) V(\lambda) d\lambda \quad (2.5)$$

dove $\Lambda = [380, 830]\text{nm}$, cioè intervallo nel quale le funzioni $V(\lambda) \neq 0$

Nota che non si è indicato quale funzione di efficacia luminosa si sta utilizzando, in quanto le formule sono universalmente valide. Le costanti, invece, che rappresentano l'*Efficacia Luminosa di una radiazione* cambiano valore:

$K = 683.002 \text{ lm/W}$ Efficacia luminosa fotopica

$K \approx 1700 \text{ lm/W}$ Efficacia luminosa scotopica

Tali costanti rappresentano l'efficacia luminosa, cioè il fattore di conversione $\text{W} \rightarrow \text{lm}$ per una radiazione monocromatica a lunghezza d'onda 555nm.

2.1.1 fotometria e sistemi di rendering

La fotometria, nel contesto di Physically based Rendering, è utile per la modellazione di sorgenti luminose, per specificare parametri come intensità luminosa, light falloff, e così via.

Includendo parametri fotometrici si può ottenere una descrizione più vicina all'uomo della percezione della luce mantenendone il rigore fisico.

2.2 Colorimetria

Il colore è un fenomeno la cui origine è sia fisica, determinato dalla distribuzione nelle lunghezze d'onda della radianza spettrale, sia psicobiologica, in quanto la sua

¹Si noti che tutte le formule viste finora per le grandezze radiometriche, come la relazione tra radianza e etendue 1.14, o le relazioni tra grandezze radiometriche

²Nota come piuttosto che seguire la nomenclatura ISO per la Luminanza L_v si è scelto di adottare Y . I motivi appariranno chiari nei cenni sulla colorimetria 2.2

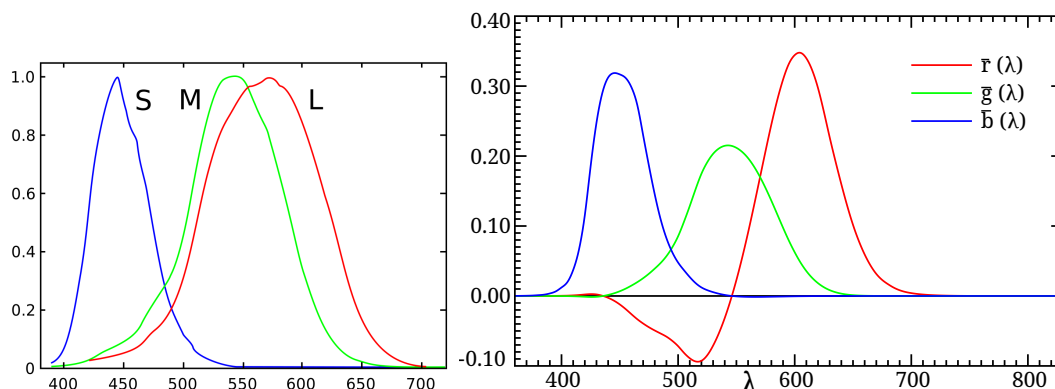


Figure 2.1: *A destra*, Sensibilità spettrali per i tre tipi di coni dell'occhio umano. *A sinistra*, color matching functions del CIE 1931 RGB Color Space

percezione è artefatto dell'interpretazione di tali lunghezze d'onda nella corteccia cerebrale posteriore.

Ciò suggerisce che il colore *non è una proprietà degli oggetti*, ma della luce da essi riflessa e dunque dipendente alle lunghezze d'onda contenute nella radiazione incidente.

Nonostante specificare un colore sottoforma di spettro di frequenza del flusso radiante sia la modalità più fedele e ottimale, essa

- Non è una interfaccia human-friendly e orientata alla percezione
- Non corrisponde alla rappresentazione utilizzata dai display odierni

Dunque, nel fornire un'interfaccia per un sistema di rendering, bisogna implementare la possibilità di specificare colore in modo intuitivo, convertire tale specifica in uno spettro di frequenze per effettuare la computazione, e convertire nella rappresentazione nativa per mostrare a schermo i risultati.

Def. 2.2.1. — Risulta dunque conveniente specificare delle *funzioni di base* per poter costituire uno spazio vettoriale tramite il quale, specificandone i componenti, si specifica un determinato colore. Tale spazio vettoriale è chiamato *Color Space*.

Un *color stimulus* può essere ricostruito dalla combinazione lineare da tre stimoli (distribuzioni spettrali) di base indipendenti [[Sch07]], in quanto dei fotorecettori umani che distinguono il colore, i coni, ce ne sono di *tre tipi* (vedi figura ??). Tale mappa da SPD a *tristimulus values* non è biunivoca, infatti, nei diversi color spaces che definiamo, esistono valori tristimolo che possono risultare dalla scomposizione di diverse SPDs. Tali colori sono detti *metameri*.

Dunque l'obiettivo è quello di ottenere distribuzioni spettrali $\langle R \rangle, \langle G \rangle, \langle B \rangle$

tali che ogni colore possa essere rappresentato come

$$C = R\langle R \rangle + G\langle G \rangle + B\langle B \rangle \quad (2.6)$$

tale compito non è scontato in quanto, da come si osserva in figura ??, quasi tutte le lunghezze d'onda stimolano con diversa intensità almeno due tipi di coni. Dunque, nel 1931, fu derivato il CIE 1931 RGB Trichromatic system, cioè una terna di color matching functions $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$, $\bar{b}(\lambda)$, derivate compiendo dei test con un *osservatore standard colorimetrico*, cioè limitando il field of view dei soggetti testati a 2° dentro la fovea, per eliminare la variabilità di percezione causata dal field of view dell'osservatore. Tali soggetti sono stati esposti a luci monocromatiche, i.e. i colori primari scelti, alle frequenze 700 nm (rosso), 546.1 nm (verde), 435.8 nm (blu). L'intensità di queste tre sorgenti primarie erano tali che, se addizionate, restituiscono uno spettro costante la cui intensità è pari alla Luminanza della sorgente complessiva

$$R = \int_{\Lambda} \bar{r}(\lambda) L_{e,\Omega,\lambda}(\lambda) d\lambda \quad (2.7)$$

$$G = \int_{\Lambda} \bar{g}(\lambda) L_{e,\Omega,\lambda}(\lambda) d\lambda \quad (2.8)$$

$$B = \int_{\Lambda} \bar{b}(\lambda) L_{e,\Omega,\lambda}(\lambda) d\lambda \quad (2.9)$$

$$L_v = 1.0000R + 4.5907G + 0.0601B \text{ [cd/m}^2\text{]} \quad (2.10)$$

Le tre color matching functions (CMFs) così ottenute sono mostrate in figura ??.

Ai tempi della standardizzazione di un sistema tricromatico, in assenza di computers, risultava complicato fare calcoli con queste tre CMFs per via dei lobi negativi. Dunque, sempre nel 1931, fu standardizzato il *CIE 1931 XYZ Color System*, nel quale sono stati scelti tre *primari immaginari*³ a partire dai primari del sistema CIE RGB 1931 in modo tale che

- uno spettro costante dia luogo a componenti $X = Y = Z$
- la componente Y sia la luminanza della radiazione $Y = L_v$
- la CMF \bar{y} sia uguale alla funzione di efficacia luminosa fotopica $\bar{y}(\lambda) = V_p(\lambda)$
- Z è quasi uguale al blu di CIE RGB
- X è un mix delle tre CMFs di CIE RGB

Dai requisiti la seguente trasformazione lineare CIE RGB 1931 \rightarrow CIE XYZ 1931 è stata ricavata

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.768892 & 1.751748 & 1.130160 \\ 1.000000 & 4.590700 & 0.060100 \\ 0 & 0.056508 & 5.594292 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

³non percepibili all'occhio umano

La quale è anche valida per trasformare una CMF del sistema CIE RGB in una CMF del sistema CIE XYZ 1931.

Per passare da radianza spettrale ai tristimulus values, distinguiamo il caso in cui si sta analizzando una radiazione/superficie emissiva

$$X = K \int_{\Lambda} L_{e,\Omega,\lambda}(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda \quad (2.12)$$

$$Y = K \int_{\Lambda} L_{e,\Omega,\lambda}(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \quad (2.13)$$

$$Z = K \int_{\Lambda} L_{e,\Omega,\lambda}(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \quad (2.14)$$

Ed il caso in cui si sta analizzando un colore di una radiazione riflessa o trasmessa (fonti luminose secondarie)

$$X = \frac{1}{\int_{\Lambda} L_{e,\Omega,\lambda}(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda} \int_{\Lambda} S(\lambda) L_{e,\Omega,\lambda}(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda \quad (2.15)$$

$$Y = \frac{1}{\int_{\Lambda} L_{e,\Omega,\lambda}(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda} \int_{\Lambda} S(\lambda) L_{e,\Omega,\lambda}(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \quad (2.16)$$

$$Z = \frac{1}{\int_{\Lambda} L_{e,\Omega,\lambda}(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda} \int_{\Lambda} S(\lambda) L_{e,\Omega,\lambda}(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \quad (2.17)$$

$$(2.18)$$

dove

$$S(\lambda) = \begin{cases} R(\lambda) & \text{se riflessione} \\ T(\lambda) & \text{se trasmissione} \end{cases} \quad (2.19)$$

2.2.1 xy chromaticity diagram

Spesso si preferisce normalizzare i valori tristimolo per ottenere le *coordinate di cromaticità*

$$x = \frac{X}{X + Y + Z} \quad (2.20)$$

$$y = \frac{Y}{X + Y + Z} \quad (2.21)$$

$$z = \frac{Z}{X + Y + Z} \quad (2.22)$$

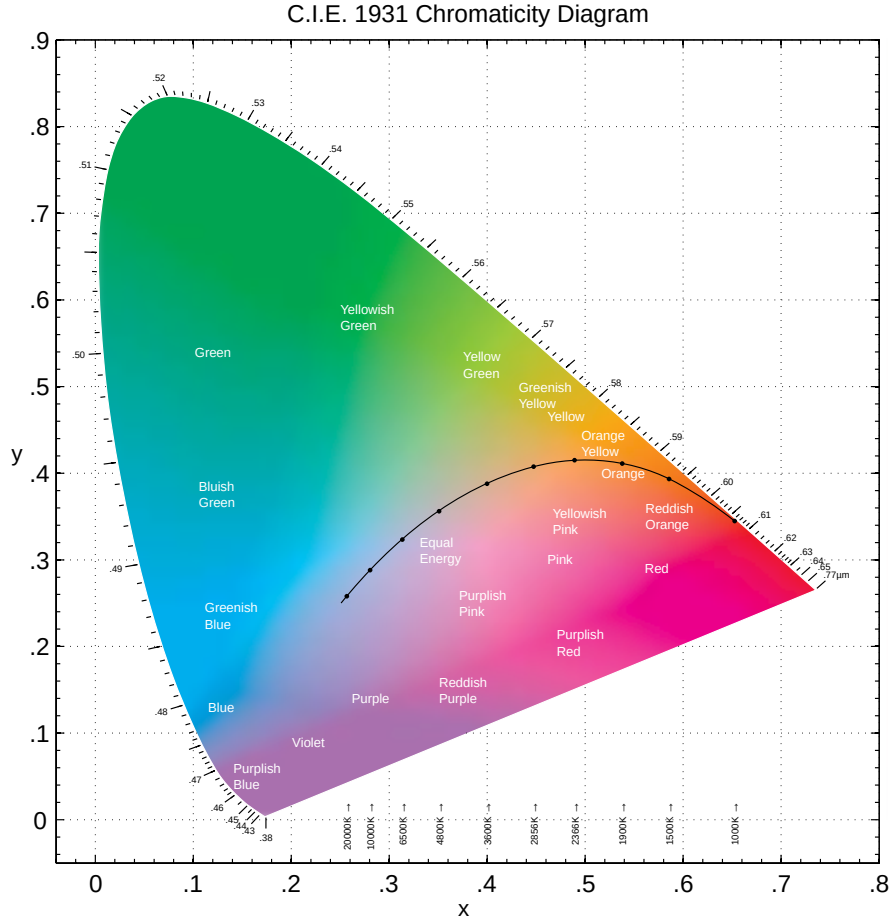


Figure 2.2: xy Chromaticity Diagram del sistema tricromatico CIE XYZ 1931

dove, in quanto $x + y + z = 1$, soltanto le coordinate xy sono necessarie per una completa descrizione del colore.

Il diagramma di cromaticità è riportato in figura ???. Il contorno curvo rappresenta l'insieme di punti nel diagramma corrispondente alle radiazioni monocromatiche, mentre la curva evidenziata rappresenta il *Luogo Planckiano*, insieme di punti corrispondenti ad uno spettro di emissione di un corpo nero plankiano (formula 1.24), con temperatura da $[1000, \infty]$ K. Parametro utile per descrivere ciascun punto del diagramma, in particolare quelli legati alle sorgenti luminose, è quello di

Def. 2.2.2. — La *Temperatura di colore Correlata*(CCT) T_{cp} è definita come temperatura del radiatore plankiano il cui colore percepito si avvicina di più allo stimolo dato nelle stesse condizioni di osservazione.

Nome	CIE 1931 2° xy	CCT K	Sorgente modellata
A	0.4476, 0.4075	2856	Filamento di tungsteno incandescente
D50	0.3457, 0.3585	5003	Luce diurna all'orizzonte
E	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	5454	SPD equienergia
D55	0.3324, 0.3474	5503	Luce diurna mattina/pomeriggio
D65	0.3127, 0.3290	6504	Luce diurna mezzogiorno

Table 2.1: Illuminanti standard CIE

Cromaticità	Rosso	Verde	Blu	White point(D65)
x	0.64	0.30	0.15	0.3127
y	0.33	0.60	0.06	0.329
Y	0.2126	0.7152	0.0722	1

Table 2.2: Coordinate degli stimoli primari e del white point del sRGB color space

Ciò si traduce nel trovare il punto nel luogo planckiano con distanza minima al punto di cromaticità dato

Altrettanto importanti nella specifica del diagramma di cromaticità sono gli *Illuminanti Standard*, sorgenti luminose teoriche con SPD e coordinate di cromaticità note che approssimano determinate sorgenti luminose reali.

2.2.2 sRGB color space

Mentre per memorizzare image data un qualsiasi color space può essere utilizzato (infatti, si possono memorizzare anche dati relativi allo spettro direttamente [[al21]]), per mostrare colore a schermo si preferisce scegliere 3 primari ed un punto bianco, punto nel quale i 3 primari danno contributo massimo. La scelta dei primari è guidata dalla percentuale di gamut che si desidera coprire con tutte le combinazioni lineari dei tre primari scelti e limitazioni fisiche. Lo standard adottato per monitors e World Wide Web nel 1996 da IEC è *sRGB*. Esso è un color space additivo basato sui tre primari rosso, verde, blu, e white point, le cui coordinate di cromaticità sono riportate in tabella ??.

Altro componente per la specifica di un color space per un display è la funzione di trasferimento del display, in particolare

Def. 2.2.3. — La *electro-optical transfer function* (EOTF) è un funzione di

trasferimento che converte un segnale immagine in input in intensità luminosa in output. Essa *non è lineare*

Tale funzione di trasferimento non è lineare per l'operazione di *gamma correction* compiuta dai displays, la quale include sempre un elevamento a potenza $v_{in} = Av_{out}^\gamma$ (di solito $\gamma = 2.2$). Tale operazione è compiuta per ottimizzare l'uso dei bits nella codifica dell'immagine, dando più importanza ai toni più scuri, in accordo con la percezione umana in grado di apprezzarli con più sensibilità.

Dunque se l'output finale del sistema di rendering è un colore sRGB, dobbiamo essere capaci di convertire a/da un colore in sRGB color space da/a un colore in XYZ color space. Sia $C_{srgb} = [R_{srgb} | G_{srgb} | B_{srgb}] \in [0, 1]$ componenti del colore nello spazio sRGB gamma encoded. Simile definizione per il colore nello spazio sRGB gamma corrected C_{linear} ed il colore $[X, Y, Z]^T$ nello spazio XYZ.

$$\text{Applica gamma expansion}^4: C_{linear} = \begin{cases} \frac{C_{srgb}}{12.92}, & C_{srgb} \leq 0.04045 \\ \left(\frac{C_{srgb} + 0.055}{1.055} \right)^{2.4}, & C_{srgb} > 0.04045 \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\text{Applica trasformazione lineare}^5: \begin{bmatrix} X_{D65} \\ Y_{D65} \\ Z_{D65} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4124 & 0.3576 & 0.1805 \\ 0.2126 & 0.7152 & 0.0722 \\ 0.0193 & 0.1192 & 0.9505 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{linear} \\ G_{linear} \\ B_{linear} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

2.2.3 Conversione da XYZ o RGB a SPD

I color spaces sono spazi vettoriali, per i quali sono definite le operazioni di addizione tra colori (vettori) e moltiplicazione scalare colore. *La moltiplicazione tra più colori non è un'operazione ben definita.* Nel trasporto della luce, la moltiplicazione tra due SPD è una operazione fondamentale. Si potrebbe pensare di definire arbitrariamente una operazione analoga in uno spazio RGB qualsiasi e definire la moltiplicazione tra due colori come *prodotto di Hadamard* \odot .

⁴la semplice funzione potenza viene modificata secondo standards, come ITU-R per poter evitare problematiche. Per esempio, per evitare di avere derivata infinita nello zero, si definisce la funzione di gamma expansion per valori piccoli come divisione per una costante definita dallo standard

⁵i valori tristimolo X,Y,Z qui utilizzati/ottenuti sono scalati in modo tale che l'illuminante standard D65 abbia luminanza unitaria, cioè moltiplicate per ≈ 3.039513678

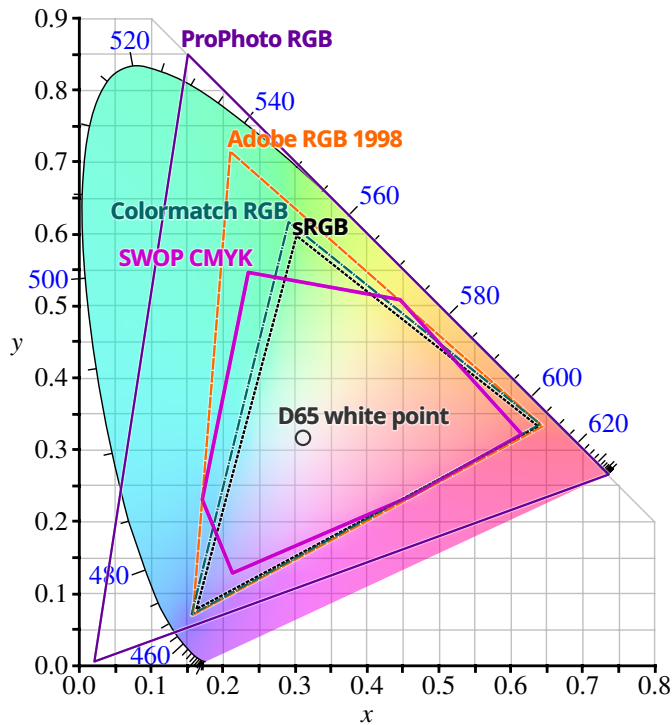


Figure 2.3: comparazione tra i diversi colorspace, ed i colori percepibili che riescono a rappresentare. Notiamo che sRGB copre all'incirca 35% del color gamut

Tale operazione risulta problematica perchè essa non è consistente tra color spaces, producendo risultati differenti (a volte al di fuori del color gamut, producendo un colore impossibile, si veda in figura ?? ProPhoto RGB), ma più importante, produce colori eccessivamente più scuri e saturati.

Si giustifica dunque l'affermazione precedente di dover interpretare i colori in input negli arbitrari formati/color spaces supportati in uno spettro, eseguire la computazione, ed infine convertire il risultato per ogni pixel in sRGB per display. Mentre la conversione color space \rightarrow SPD è ben definita (vedi 2.19 e 2.12), non vale lo stesso per l'operazione inversa ed è ad oggi oggetto di ricerca [[al22]]. Ciò che complica tale compito sono i requisiti di

Identità La conversione da RGB a spettro, seguita dalla ben definita operazione inversa, deve restituire lo stesso risultato

Smoothness Lo spettro ottenuto deve essere derivabile con continuità affinché, sotto nessuna condizioni di luce, uno spettro di riflessione presenti seams visibili

Conservazione dell'energia Lo spettro ottenuto deve avere integrale $\in [0, 1]$

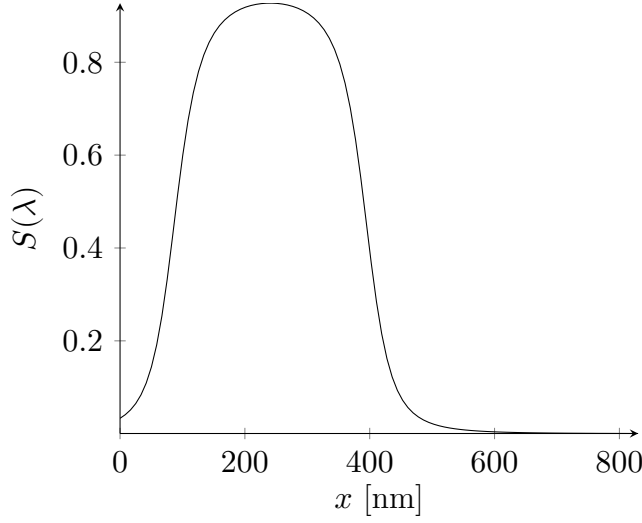


Figure 2.4: esempio di $S(\lambda)$ con $c_0 = -0.000073447$, $c_1 = 0.035354$, $c_2 = -2.607$

se $[R, G, B]^T \in [0, 1]^3$

L'approccio qui seguito è quello proposto da [[PJH23]] e [[Wen19]], il quale consiste nel ricostruire un valore RGB utilizzando una parabola parametrizzata da tre coefficienti c_0, c_1, c_2 , la quale è prima resa limitata da una funzione sigmoide per poter ottenere un risultato limitato in $[0, 1]$. Vedi figura 2.4.

$$S(\lambda) = s(c_0\lambda^2 + c_1\lambda + c_2) \quad (2.25)$$

$$s(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} \quad (2.26)$$

Tali coefficienti sono calcolati a partire da un colore nell'sRGB color space, il quale è formulato come problema di ottimizzazione con scopo la minimizzazione della metrica di residuo seguente

$$\begin{bmatrix} c_0^* \\ c_1^* \\ c_2^* \end{bmatrix} = \arg \min_{c_0, c_1, c_2} \left\| \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix} - \int_{\Lambda} \begin{bmatrix} R(\lambda) \\ G(\lambda) \\ B(\lambda) \end{bmatrix} S(\lambda, c_0, c_1, c_2) W_{D_{65}}(\lambda) d\lambda \right\| \quad (2.27)$$

dove $\|\cdot\|$ è la CIE76 ΔE color distance⁶

$$\Delta E = \sqrt{(L_2^* - L_1^*)^2 + (a_2^* - a_1^*)^2 + (b_2^* - b_1^*)^2}$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{t} & \text{se } \frac{Y}{Y_n} > \left(\frac{6}{29}\right)^3 \\ \frac{1}{3} \left(\frac{29}{6}\right)^2 t + \frac{4}{29} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$L^* = 16f\left(\frac{Y}{Y_n}\right)$$

$$a^* = 500 \left(f\left(\frac{X}{X_n}\right) - f\left(\frac{Y}{Y_n}\right) \right)$$

$$b^* = 200 \left(f\left(\frac{Y}{Y_n}\right) - f\left(\frac{Z}{Z_n}\right) \right)$$

con $X_n = 0.950489$ $Y_n = 1$ $Z_n = 1.08884$
se il bianco di riferimento è assunto come $Y_{white} = 1$

Tale problema di ottimizzazione è risolto con il metodo di Gauss-Newton (vedi C.1).

Se questa operazione fosse eseguita per ogni colore sRGB nel processo di rendering, le performance ne risentirebbero. Dunque una lookup table 5D viene precomputata. La struttura di tale tabella è dovuta al fatto che il gamut del sRGB color space è suddiviso in tre quadrilateri, tali che ciascuno di essi contenga rispettivamente

- punti in cui $R = \max\{R, G, B\}$, corrispondente a indice 0 nella prima dimensione della LUT
- punti in cui $G = \max\{R, G, B\}$, corrispondente a indice 1 nella prima dimensione della LUT
- punti in cui $B = \max\{R, G, B\}$, corrispondente a indice 2 nella prima dimensione della LUT

Ciascuno di questi quadrilateri mappa a 4 cubi nello spazio RGB. Tali sottospazi sono campionati con una griglia uniforme $64 \times 64 \times 64$ (le tre dimensioni delle 3

⁶Tale metrica richiede la conversione ad un color space uniforme, cioè dove la distanza fra colori è proporzionale alla differenza percepita dall'occhio umano. Il color space utilizzato nella metrica sopracitata è il CIE 1976 $L^*a^*b^*$

griglie costituiscono $2^a, 3^a, 4^a$ dimensioni della LUT). Per ciascuno di questi vengono calcolati i coefficienti del polinomio desiderati (i quali costituiscono l'ultima dimensione della LUT).

Nota aggiuntiva: spettri di illuminanti o di coefficienti che descrivono il mezzo trasmissivo tendono ad avere valori spettrali > 1 , il che significa che bisogna gestire anche la conversione per coordinate RGB > 1 . Tali coordinate vengono normalizzate a 1 o 0.5 (a seconda della saturazione), affinché si possa ottenere una migliore curva spettrale, e si memorizza un coefficiente di scala da utilizzare in seguito.

2.3 camera

Affinchè si possa associare ad ogni punto 2D nell'*color buffer* che conterrà eventualmente l'immagine output uno o più coppie $(\vec{p}_0, \hat{\omega}_0)$ punto e direzione di partenza, necessitiamo di un *camera model*

Def. 2.3.1. — Un *camera model* descrive la relazione matematica tra le coordinate 3D di un punto nella scena dal quale la luce proviene e le coordinate 2D della sua proiezione nel *film plane*⁷ [[Ike14]]

2.3.1 pinhole camera model

Modello di camera ideale secondo la quale la scena è osservata attraverso una apertura infinitesima. Tale modello genera immagini con messa a fuoco nitida ovunque, trascurando tutte le distorsioni geometriche e effetti di aberrazione tipici delle lenti finite.⁸

Considerazioni Geometriche:

Origine:	punto \vec{o} , nel quale è posizionata l'apertura della camera
Film plane:	posizionato a distanza n (f in figura), <i>distanza focale</i> della camera, dall'origine \vec{o} . Definisce il <i>field of view</i> . Anche chiamato image plane o near plane

⁷*film* è il termine che utilizziamo per il piano dell'immagine finale [[PJH23]]

⁸descrivere ed implementare modelli di camera realistici è fuori dallo scope

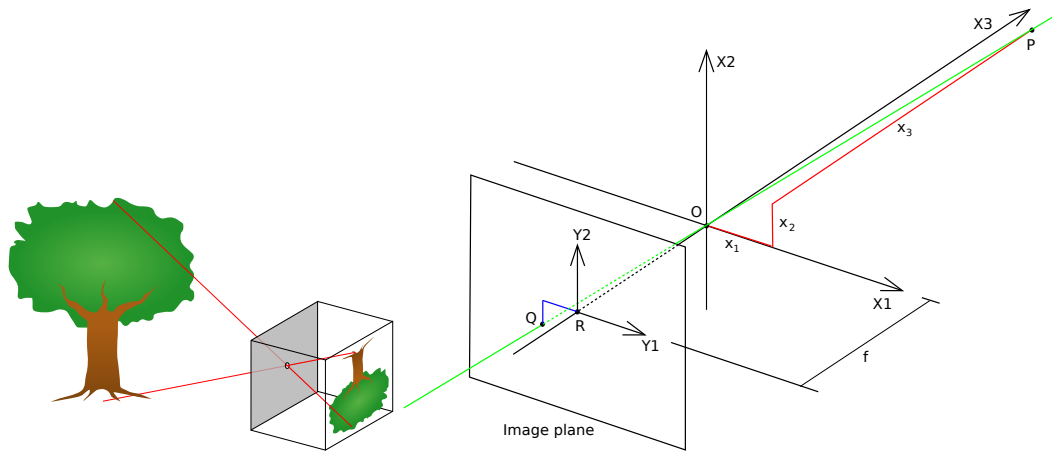


Figure 2.5: A sinistra, diagramma del pinhole camera model. A destra, geometria del pinhole camera model con un sistema di riferimento left-handed. Di solito l'asse z punta verso la camera, risiedente in $z=0$

Punti: \vec{p} e \vec{q} , rispettivamente punto da proiettare, "trasportante radianza", e punto \vec{q} , proiezione del punto \vec{p} sul film plane

Definiamo inoltre dei Coordinate Spaces:

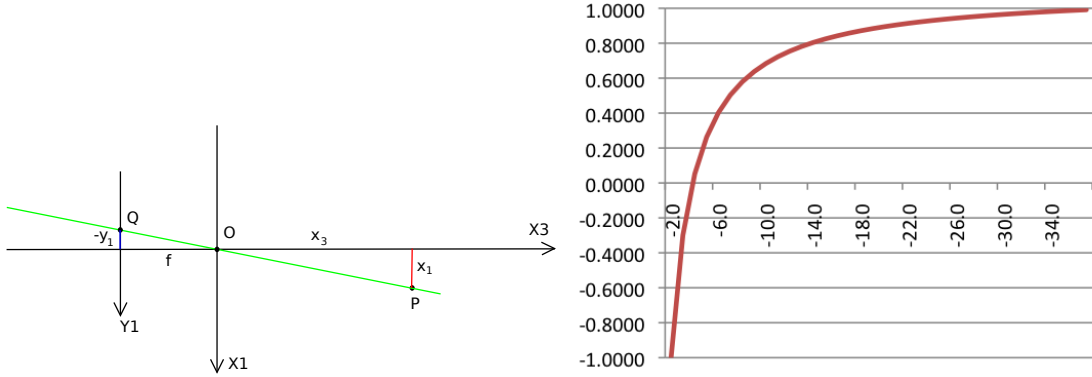
Object Space: spazio tridimensionale in cui è definito ciascun oggetto

World Space: spazio tridimensionale utilizzato dalla scena

Camera Space: spazio tridimensionale avente come origine il punto di apertura della camera, asse x e y direzioni parallele al film plane, e z direzione perpendicolare al film plane

Rendering Space: spazio tridimensionale avente come origine il punto di apertura della camera, ma preservante le direzioni del world space. Lo utilizziamo negli algoritmi basati su ray tracing in quanto, fa in modo che gli oggetti vicini alla camera abbiano posizioni rappresentati da numeri piccoli, dunque sfruttanti precisione floating point maggiore, mentre le direzioni preservate permettono un migliore test di intersezione mediante *Axis Aligned Bounding Boxes*

Image Space: spazio bidimensionale corrispondente a coordinate in $[-1, 1]$ nel film plane, con origine il centro, e assi x , y paralleli alle direzioni x, y del Camera Space



(a) Geometria del pinhole camera model visto dall'asse x (b) Mostra la mappa nonlineare della depth⁹

Figure 2.6: proiezione prospettica su pinhole camera model

Le formule che seguono utilizzano, per comodità, il Camera Space.

La mappa $\vec{q} = [y_1, y_2]^T$ da $\vec{p} = [x_1, x_2, x_3]^T$. Siano l, r, b, t, n, f rispettivamente left, right, bottom, top, near, far.

Possiamo ricavare una *proiezione prospettica*¹⁰ esprimendo il punto \vec{p} in coordinate omogenee e concatenando una trasformazione di *shearing*¹¹ per sovrapporre far plane $[l, r] \times [b, t]$ con il near plane, seguito da una scala affinché i due piani sovrapposti abbiano dimensione tale da ottenere un angolo di visione 90° .

$$\begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{r+l}{2n} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{t+b}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{t+b}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

che mappa

$$\begin{aligned} [l, b, n, 1]^T &\mapsto [-n, -n, n, 1]^T \\ [r, f, n, 1]^T &\mapsto [n, n, n, 1]^T \end{aligned}$$

Dunque il prossimo step è la normalizzazione delle tre coordinate spaziali, cioè la divisione di tutte le tre coordinate per la coordinata z , affinché più lontano sia un oggetto e più piccolo esso appare (step detto *perspective divide*) il che è ottenuto

⁹Immagine da http://learnwebgl.brown37.net/08_projections/projections_perspective.html

¹⁰Weak perspective projection

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Shear_mapping

ponendo un coefficiente non nullo nell'elemento di indice $(4, 3)$ nella matrice di trasformazione. A seguire, centriamo la media armonica $\frac{2fn}{f+n}$ nell'origine e normalizziamo l'intervallo delle distanze, in modo tale che la mappa $[-n, f] \mapsto [-1, 1]$ sia nonlineare, dando più importanza ai valori vicini alla camera. Vedi figura 2.6 a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{2} & -fn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Combinando 2.29 e 2.28 si ottiene una trasformazione che mappa il view frustum, piramide retta a base piramidale con dimensioni arbitrarie, ad un cubo $[-1, 1]^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{r+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{r+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Chapter 3

Modelli di Fonti Luminose e Superfici

Chapter 4

Trasporto di Energia Elettromagnetica nel Mezzo

Part II

Metodi di Monte Carlo

Chapter 5

Campionamento e Ricostruzione con Quasirandom Number Generation

Chapter 6

Integrazione di Monte Carlo

Chapter 7

Metodi di Riduzione della Varianza

Part III

Applicazione

Chapter 8

Light Transport Modello e Surface Reflection

Chapter 9

Light Transport: Volume Rendering e Bidirectional Methods

Part IV

Appendici

Appendix A

Fondamenti di Probabilità e Statistica

Appendix B

Algebra Lineare applicata

Appendix C

Numeri Pseudocasuali e Algoritmi Vari

C.1 Metodo di Gauss-Newton

Appendix D

Codice Vulkan & HLSL

Appendix E

Implementazione dei Concetti Fisici

Bibliography

- [Hec02] Eugene Hecht. *Optics*. Addison Wesley, 2002.
- [Sch07] Janos Schanda. *Colorimetry. Understanding The CIE System*. Wiley Interscience, 2007.
- [Ike14] Katsushi Ikeuchi. *Computer Vision*. 1st ed. Springer New York, NY, 2014.
- [McC14] Ross McCluney. *Introduction to Radiometry and Photometry*. 2nd ed. Artech House Publishers, 2014.
- [Peg16] Vincent Pegoraro. *Handbook of Digital Image Synthesis: Scientific Foundations of Rendering*. 1st ed. A K Peters/CRC Press, 2016.
- [Wen19] Johannes Hanika et al. Wenzel Jakob. “A Low-Dimensional Function Space for Efficient Spectral Upsampling”. In: *Eurographics Symposium on Rendering 2019*. 2019.
- [al21] Alban Fichet et al. “An OpenEXR Layout for Spectral Images”. In: *Journal of Computer Graphics Techniques* 10.3 (2021).
- [al22] Jingang Zhang et al. “A survey on computational spectral reconstruction methods from RGB to hyperspectral imaging”. In: *Science Reports* 12 (2022).
- [PJH23] Matt Pharr, Wenzel Jakob, and Greg Humphreys. *Physically Based Rendering: From Theory to Implementation*. 4th ed. Morgan Kaufmann, 2023.

Glossary

Emittanza Luminosa Flusso luminoso emesso da una superficie per unità di area, emittanza radiante spettrale pesata sulla percezione umana. Si misura in lx. 16

Emittanza Radiante Flusso Radiante emesso per unità di area. Misurata in W/m^2 . 9

Energia Luminosa Energia trasportata dalla luce percepita da un osservatore umano. Misurata in $\text{lm} \cdot \text{s}$. 16

Energia Radiante Energia aggregata di tutti i fotoni in una radiazione elettromagnetica. Misurata in J. 9

Flusso Luminoso Misura la potenza della luce percepita da un osservatore umano. Misurata in lm. 16

Flusso Radiante Energia Radiante *emessa, riflessa, trasmessa, incidente*, per unità di tempo. Misurata in W. 9

Illuminanza Flusso luminoso incidente una superficie per unità di area, irradianza spettrale pesata sulla percezione umana. Si misura in lx. 16

Intensità Luminosa Misura della intensità radiante spettrale pesata sulla percezione umana. Misurata in cd. 16

Intensità Radiante Flusso Radiante emesso, riflesso, trasmesso, per unità di angolo solido. Misurata in W/sr . 9

Irradianza Flusso Radiante incidente per unità di area. Misurata in W/m^2 . 9

Luminanza misura dell'intensità luminosa per unità di area di luce che è emessa, incidente, trasmessa, riflessa, passa attraverso una particolare direzione. Misurata in cd/m^2 . 16

Radianza Flusso Radiante emesso, riflesso, trasmesso, incidente da/su una superficie, per unità di angolo solido per unità di *area proiettata*. Misurata in $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{sr})$. 9, 13

Radiosità Flusso Radiante *uscente* (emesso, riflesso e trasmesso) per unità di area. Misurata in W/m^2 . 9