

APPUNTI DI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LM

Prof. Massimo Cicognani

E Dio disse...

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

e la luce fu.

Alex Pacini

Cesena, 28 dicembre 2012

“THE BEER-WARE LICENSE” (Revision 42):
<alexpacini90@gmail.com> wrote this file. As long as you retain this notice you
can do whatever you want with this stuff. If we meet some day, and you think
this stuff is worth it, you can buy me a beer in return.
Alex Pacini

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Classificazione delle Equazioni di II ordine in due variabili (t, x) .	3
2	Equazione della Diffusione (Paraboliche)	5
2.1	Derivazione dell'equazione del calore	5
2.2	Problemi “Ben Posti”	7
2.3	Unicità e dipendenza continua dai dati	7
2.4	Problema di Cauchy globale	8
2.4.1	Esercizio: Condizioni agli estremi non nulle	11
2.4.2	Esercizio: Barra isolata agli estremi	12
3	Equazione di Laplace (Ellittiche)	14
4	Equazione delle Onde (Iperboliche)	15
	Elenco delle figure	15

Capitolo 1

Introduzione

Partendo dalle leggi generali (conservazione, bilancio di massa, energia, ecc) e dalle leggi costitutive si andranno a definire i vari modelli matematici composti dall'equazione (o sistema di equazioni) alle derivate parziali che governano i vari fenomeni fisici associati. Attraverso l'imposizione di condizioni iniziali e/o condizioni al contorno si dimostra l'esistenza, l'unicità della soluzione e la dipendenza continua dai dati iniziali.

1.1 Classificazione delle Equazioni di II ordine in due variabili (t, x)

La forma completa di un'equazioni di II ordine in due variabili può essere espressa come segue

$$\underbrace{au_{tt} + 2bu_{xt} + cu_{xx}}_{\text{parte principale}} + du_t + eu_x + hu = f$$

con $a > 0$. Considerando quindi la parte principale e sostituendo la derivata rispetto a t con la variabile simbolica p mentre la derivata rispetto a x con q , si può scrivere

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = tr(AH)$$

dove A è la matrice associata all'equazione differenziale e H è la matrice Hessiana di u .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} \partial_{tt} & \partial_{tx} \\ \partial_{xt} & \partial_{xx} \end{pmatrix}$$

È ora possibile classificare le equazioni differenziali in base alla matrice A .

A indefinita \Rightarrow iperbolica

A semidefinita positiva \Rightarrow parabolica

A definita positiva \Rightarrow ellittica

Infatti, definito $\Delta = b^2 - 4ac$, se

$\Delta > 0 \Rightarrow tr(AH) = 1$ indica un iperbole

$\Delta = 0 \Rightarrow tr(AH) = 1$ indica una parabola

$\Delta < 0 \Rightarrow tr(AH) = 1$ indica un'ellisse

La classificazione si estende in maniera naturale ad equazioni in $n > 2$ variabili.

Esempi noti

$$\begin{array}{ll} u_t - Du_{xx} = f & \text{eq. della diffusione: parabolica} \\ u_{tt} + u_{xx} = f & \text{eq. di Laplace: ellittica} \\ u_{tt} - c^2 u_{xx} = f & \text{eq. delle onde: iperbolica} \end{array}$$

Un'equazione può anche essere di tutti e tre i tipi, ne è un esempio l'equazione di Eulero-Tricomi ($u_{tt} - tu_{xx} = f$), che per $t > 0$ è iperbolica, per $t = 0$ parabolica e per $t < 0$ ellittica.

Capitolo 2

Equazione della Diffusione (Paraboliche)

2.1 Derivazione dell'equazione del calore

Definiamo innanzitutto le variabili in gioco:

t = tempo, x = posizione, $u(t, x)$ = temperatura nella posizione x e al tempo t .

Nel definire il modello si farà uso di:

$$r = \text{tasso di calore per unità di massa dall'esterno} \quad [r] = \frac{[cal]}{[tempo][massa]}$$

$$\rho = \text{densità (lineare) di massa della barra} \quad [\rho] = \frac{[massa]}{[lunghezza]}$$

$$q = \text{flusso di calore} \quad [q] = \frac{[cal]}{[tempo]}$$

$$e = \text{energia interna per unità di massa} \quad [e] = \frac{[cal]}{[massa]}$$

Il primo passo nella derivazione dell'equazione del calore consiste nell'applicare la *Legge di Bilancio*:

isolata una porzione $[x_0, x_0 + h]$ della barra, il tasso di variazione dell'energia interna eguaglia il flusso agli estremi; nel caso di sorgente, il tasso di variazione del calore erogato sarà sommato al flusso agli estremi.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+h} e(t, x) \rho dx}_{\text{Variazione dell'energia rispetto al tempo}} = \overbrace{q(t, x_0) - q(t, x_0 + h)}^{\text{Flusso entrante}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} r(t, x) \rho dx}_{\text{Flusso della sorgente}}$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

$$q(t, x_0) - q(t, x_0 + h) = - \int_{x_0}^{x_0+h} q_x(t, x) dx$$

dove q_x indica $\frac{dq}{dx}$.

Considerando che l'espressione

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+h} e(t, x) \rho dx = - \int_{x_0}^{x_0+h} q_x(t, x) dx + \int_{x_0}^{x_0+h} r(t, x) \rho dx$$

deve essere valida per x_0 e $x_0 + h$ e che, data la continuità dell'energia è possibile portare la derivata all'interno del segno di integrale, si ottiene la Legge di Bilancio in forma locale

$$\frac{\partial}{\partial t} e(t, x) \rho = - \frac{\partial}{\partial x} q(t, x) + \rho r(t, x)$$

È ora necessario applicare le leggi costitutive, che risultano essere delle leggi sperimentali.

La prima, che prende il nome di *Legge di Fourier*, indica che il flusso di calore (q) è direttamente proporzionale alla derivata spaziale della temperatura secondo la legge

$$q = -k u_x$$

con $u = u(t, x)$ e $k > 0$. Il segno negativo indica che si ha il flusso positivo passando dalla zona più calda a quella più fredda.

$$[k] = \frac{[cal]}{[tempo]} \frac{[lunghezza]}{[grado]}$$

La seconda lega invece l'energia alla temperatura

$$e = c_l u$$

dove c_l indica il calore specifico ed è > 0

$$[c_l] = \frac{[cal]}{[massa][grado]}$$

Operando la sostituzione si ottiene

$$\rho c_l \frac{\partial}{\partial t} u = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \rho r$$

che riordinata

$$u_t = \underbrace{D}_{\text{Risposta termica}} u_{xx} + f$$

dove $D = k/c_l \rho$ e $f = r/c_l$.

$$[D] = \frac{[cal][lunghezza]}{[tempo][grado]} \frac{[massa][grado]}{[cal]} \frac{[lunghezza]}{[massa]} = \frac{[lunghezza]^2}{[tempo]}$$

L'equazione caratteristica risulta quindi essere, considerata l'equazione differenziale omogenea e sostituendo due variabili algebriche alle due variabili derivate

$$u_t = D u_{xx} \Rightarrow T = DX^2$$

Si noti che è l'equazione di una parabola.

2.2 Problemi “Ben Posti”

Si considerino i cosiddetti “problemi ben posti”, essi saranno del tipo

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ u(0, x) = g(x) & \text{Temperatura Iniziale} \\ u(t, 0) = \alpha(t), u(t, L) = \beta(t) & \text{Condizioni di Dirichlet agli estremi} \\ u_x(t, 0) = \alpha(t), u_x(t, L) = \beta(t) & \text{Condizioni di Neumann agli estremi} \end{cases}$$

Le condizioni di Dirichlet corrispondono a fissare la temperatura sui capi della sbarra, mentre con Neumann si fissa il flusso (condizioni di Neumann nulle significano che la barra è isolata agli estremi). Non sono state poste condizioni per $t = T$ per la causalità del sistema in esame.

2.3 Unicità e dipendenza continua dai dati

Si inizia con il considerare la temperatura sulla barra

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2(t, x) dx$$

e la si deriva rispetto al tempo

$$E'(t) = \frac{1}{2} \int_0^L 2u(t, x)u_t(t, x) dx$$

Nel passaggio precedente ci si è posti nella condizione in cui la derivata della somma equivale alla somma delle derivate.

Considerando ora $u_t = Du_{xx}$ si ottiene

$$E'(t) = D \int_0^L u(t, x)u_{xx}(t, x) dx$$

Ora, utilizzando l'integrazione per parti

$$D [u(t, x)u_x(t, x)]_0^L - D \int_0^L \underbrace{u_x(t, x)u_x(t, x)}_{u_x^2(t, x)} dx$$

Nel caso di condizioni agli estremi nulle si ha $u(t, 0) = u(t, L) = 0$, perciò il termine $D [u(t, x)u_x(t, x)]_0^L = 0$ e quindi

$$E'(t) = -D \int_0^L u_x^2(t, x) dx \leq 0$$

La derivata negativa indica che $E(t) \leq E(0)$, segue che

$$\int_0^L u^2(t, x) dx \leq \int_0^L g^2(x) dx$$

Perciò, considerato il sistema privo di ingressi e quindi l'equazione omogenea, l'energia non aumenta.

Si consideri nuovamente l'equazione $u_t = Du_{xx}$; essa è lineare, perciò se u_1 e u_2 sono soluzioni e C_1, C_2 costanti, anche $u = C_1u_1 + C_2u_2$ è soluzione.

Se

$$\begin{array}{c} u_1 \text{ è soluzione con temperatura iniziale } g_1 \\ u_2 \text{ è soluzione con temperatura iniziale } g_2 \\ \hline \downarrow \end{array}$$

$u_1 - u_2$ è soluzione con temperatura iniziale $g_1 - g_2$

e applicato alla disuguaglianza precedente

$$\int_0^L (u_1(t, x) - u_2(t, x))^2 dx \leq \int_0^L (g_1(x) - g_2(x))^2 dx$$

che garantisce:

Unicità: Se $g_1 = g_2$ si ottiene

$$\int_0^L \underbrace{(u_1(t, x) - u_2(t, x))^2}_{\text{sempre positivo o nullo}} dx \leq 0$$

essendo la somma di quadrati sempre positiva

$$\int_0^L (u_1(t, x) - u_2(t, x))^2 dx = 0$$

e quindi $u_1(t, x) = u_2(t, x)$ Perciò con le stesse condizioni iniziali si ottiene la stessa soluzione.

Dipendenza continua della soluzione dai dati:

Una differenza infinitesima nelle condizioni iniziali comporta una differenza infinitesima nella soluzione, garantendo la continuità dai dati (non diverge).

2.4 Problema di Cauchy globale

Riprendendo il problema di Dirichlet con condizioni nulle agli estremi

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(0, x) = g(x) \\ u(t, 0) = 0, u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Svincoliamo ora la soluzione da $g(x)$ (sarà ripreso successivamente)

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(t, 0) = 0, u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Procediamo poi utilizzando la tecnica della separazione delle variabili.

Si consideri $u(t, x) = v(t)w(x)$, perciò

$$\begin{cases} v'(t)w(x) = Dv(t)w''(x) \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases}$$

dividendo per $v(t)w(x)$ si ottiene

$$\begin{cases} \frac{v'(t)}{v(t)} = D \frac{w''(x)}{w(x)} \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases}$$

Essendo le variabili di integrazione diverse, equivale a dire

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = K = D \frac{w''(x)}{w(x)}$$

con K una costante. Perciò si posso spezzare in due equazioni

$$\begin{cases} Dw''(x) - Kw(x) = 0 \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad v'(t) = Kv(t)$$

Procediamo con il risolvere l'equazione differenziale di secondo grado; infatti essa imporrà dei vincoli su K .

$$D\lambda^2 - K = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{K}{D}$$

Si distinguono ora i vari casi:

- $K > 0$
- $K = 0$
- $K < 0$

Se $K > 0$:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{K}{D}}$$

$$w(x) = C_1 e^{x\sqrt{\frac{K}{D}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{K}{D}}}$$

applicando le condizioni al contorno ($w(0) = 0$ $w(L) = 0$)

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{L\sqrt{\frac{K}{D}}} + C_2 e^{-L\sqrt{\frac{K}{D}}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Perciò l'insieme delle soluzioni con $K > 0$ verrà scartato.

Se $K = 0$:

$$w'' = 0 \Rightarrow w(x) = C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} w(x) = C_1 x + C_2 \\ w(0) = 0, w(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Anche la soluzione con $K = 0$ sarà scartata.

Se $K < 0$:

Poniamo $-\omega^2 = K/D \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2$ e $\lambda = \pm i\omega$

$$\begin{cases} w(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \\ w(0) = 0, w(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin(\omega L) = 0 \end{cases}$$

$$\sin(\omega L) = 0 \Rightarrow \omega L = n\pi \Rightarrow \omega_n = \omega = n\frac{\pi}{L}, \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Ora, considerata la soluzione n-esima di $w(x)$

$$w_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

dove la costante C_2 sarà considerata successivamente, al momento della scomposizione con Fourier.

Considerato ora

$$K_n = -\omega_n^2 D = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D$$

procediamo con il risolvere l'equazione differenziale di primo grado

$$v'(t) = Kv(t)$$

$$v_n(t) = e^{Kt} = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt}$$

Riprendendo $u_n(t, x) = w_n(x)v_n(t)$ si ottengono le infinite soluzioni di base del problema di Dirichlet iniziale

$$u_n(t, x) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

A questo punto Fourier considera la possibilità di scomporre qualsiasi soluzione come serie di sinusoidi, quindi

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(t, n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

dove i vari b_n rappresenterebbero i precedenti $C_{2(n)}$.

A questo punto è possibile definire anche le condizioni con $t = 0$ attraverso la scomposizione in **serie di Fourier**, infatti $u(0, x) = g(x)$, perciò

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

con $0 \leq x \leq L$.

Bisogna quindi trovare un modo per poter esprimere la funzione $g(x)$ come serie di sinusoidi.

Verifichiamo prima di tutto la convergenza.

Si prenda una sequenza limitata dei coefficienti b_n , cioè che $|b_n| \leq C$ per qualsiasi n , data C una costante. Allora se $t \geq t_0 > 0$ e $0 \leq x \leq L$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \leq C \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt}}_{\text{Serie convergente}}$$

Siccome ogni addendo è soluzione dell'equazione, se risulta possibile derivare all'interno della serie, anch'essa è soluzione. Questo può essere effettuato nel caso in cui la somma della serie converga.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| b_n \frac{n\pi}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt}$$

In questo caso e^{-n^2} tende a zero molto rapidamente, rendendo la serie convergente. Successivamente anche la derivata seconda converge (in realtà è una funzione liscia, cioè $u(t, x) \in C^\infty$, per $t > 0$ e $0 \leq x \leq L$). Qualunque sia $g(x)$, passato

l'istante $t = 0$, la funzione diventa immediatamente continua. La diffusione ha quindi un effetto regolarizzante.

È quindi possibile derivare all'interno della sommatoria.

Si tratta ora di costruire il prolungamento dispari con periodo $2L$ (fig. 2.2)

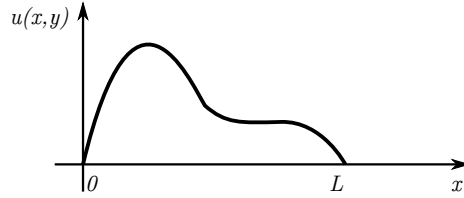


Figura 2.1: Funzione $g(x)$

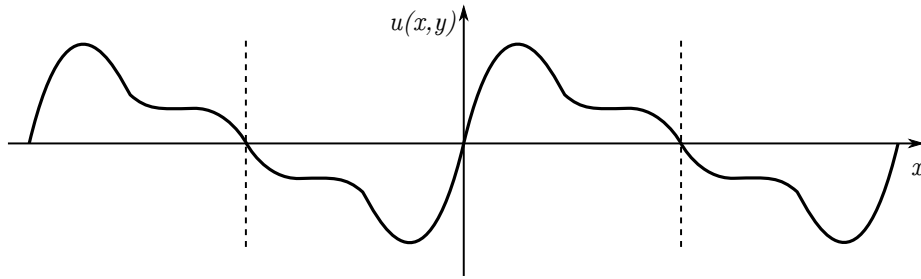


Figura 2.2: Prolungamento periodico dispari

Si è operato con un prolungamento dispari in modo da ottenere una serie composta da sole sinusoidi. Si noti che nella parte di interesse, cioè tra 0 e L , rappresenta effettivamente la funzione $g(x)$.

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad \text{con} \quad \omega = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$$

Ricavati i b_n è possibile ottenere la funzione $u(x, t)$.

Il coefficiente di scala è dato da D/L^2 ; questo consente di scalare le dimensioni variando opportunamente il materiale, rendendo possibile l'uso di modellini equivalenti (scalati).

$$\frac{D_1}{L_1^2} = \frac{D_2}{L_2^2}$$

2.4.1 Esercizio: Condizioni agli estremi non nulle

$$\begin{cases} u_t = D u_{xx} \\ u(0, x) = g(x) \\ u(t, 0) = \theta_1 \\ u(t, L) = \theta_2 \end{cases}$$

con $\theta_1 \neq \theta_2$.

Si inizia con il considerare una soluzione stazionaria del problema, cioè indipen-

dente dal tempo

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(0, x) = g(x) \\ u^S(t, 0) = \theta_1 \\ u^S(t, L) = \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Du_{xx}^S = 0 \\ u(0, x) = g(x) \\ u^S(0) = \theta_1 \\ u^S(L) = \theta_2 \end{cases}$$

$$(u^S)''(x) = 0 \Rightarrow u^S(x) = ax + b$$

$$u^S(0) = \theta_1 \Rightarrow b = \theta_1$$

$$u^S(L) = \theta_2 \Rightarrow aL + \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow a = \frac{\theta_2 - \theta_1}{L}$$

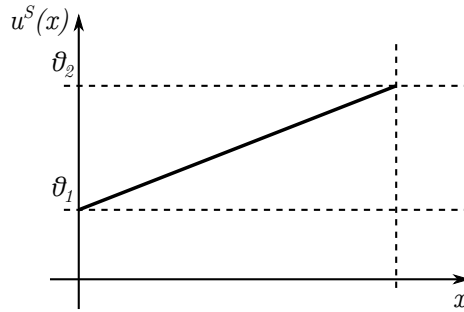


Figura 2.3: Soluzione stazionaria

La soluzione è composta quindi dalla soluzione stazionaria e dalla soluzione con condizioni agli estremi nulle.

$$u(t, x) = \underbrace{v(t, x)}_{\text{Transitorio}} + u^S(x)$$

$$\text{con } u(0, x) = v(0, x) + u^S(x) \Rightarrow v(0, x) = g(x) - u^S(x)$$

$$\begin{cases} v_t = Dv_{xx} \\ v(0, x) = g(x) - u^S(x) \\ v(t, 0) = 0 \\ v(t, L) = 0 \end{cases}$$

2.4.2 Esercizio: Barra isolata agli estremi

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(0, x) = g(x) \\ u_x(t, 0) = 0 \\ u_x(t, L) = 0 \end{cases}$$

Si ottiene che la soluzione è composta da una serie di soli coseni a valor medio non nullo

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Dt} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) dx$$

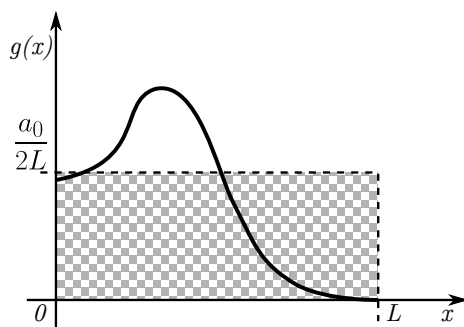


Figura 2.4: Valor medio di $g(x)$ con barra isolata

Capitolo 3

Equazione di Laplace (Ellittiche)

Capitolo 4

Equazione delle Onde (Iperboliche)

Elenco delle figure

2.1	Funzione $g(x)$	11
2.2	Prolungamento periodico dispari	11
2.3	Soluzione stazionaria	12
2.4	Valor medio di $g(x)$ con barra isolata	13