Appunti di

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LM

Prof. Massimo Cicognani

E Dio disse...

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

e la luce fu.

Alex Pacini

Cesena, 23 dicembre 2012

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Partendo dalle leggi generali (conservazione, bilancio di massa, energia, ecc) e dalle leggi costitutive si andranno a definire i vari modelli matematici composti dall'equazione (o sistema di equazioni) alle derivate parziali che governano i vari fenomeni fisici associati. Attraverso l'imposizione di condizioni iniziali e/o condizioni al contorno si dimostra l'esistenza, l'unicità della soluzione e la dipendenza continua dai dati iniziali.

1.1 Classificazione delle Equazioni di II ordine in due variabili (t, x)

La forma completa di un' equazioni di II ordine in due variabili può essere espressa come segue

$$\underbrace{au_{tt} + 2bu_{xt} + cu_{xx}}_{\text{parte principale}} + du_t + eu_x + hu = f$$

con $a > 0$. Considerando quindi la parte principale e sostituendo la derivata rispetto a t con la variabile simbolica p mentre la derivata rispetto a x con q, si può scrivere

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = tr(AH)$$

dove A è la matrice associata all'equazione differenziale e H è la matrice Hessiana di u.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} \partial_{tt} & \partial_{tx} \\ \partial_{xt} & \partial_{xx} \end{pmatrix}$$

È ora possibile classificare le equazioni differenziali in base alla matrice A.

$$\begin{aligned} &A \text{ indefinita } \Rightarrow \text{ iperbolica} \\ &A \text{ semidefinita positiva } \Rightarrow \text{ parabolica} \\ &A \text{ definita positiva } \Rightarrow \text{ ellittica} \end{aligned}$$

Infatti, definito $\Delta = b^2 - 4ac$, se

$$\begin{aligned} &\Delta > 0 \Rightarrow tr(AH) = 1 \text{ indica un iperbole} \\ &\Delta = 0 \Rightarrow tr(AH) = 1 \text{ indica una parabola} \\ &\Delta < 0 \Rightarrow tr(AH) = 1 \text{ indica un'ellisse} \end{aligned}$$

La classificazione si estende in maniera naturale ad equazioni in $n > 2$ variabili.

Esempi noti

$u_t - Du_{xx} = f$	eq. della diffusione: parabolica
$u_{tt} + u_{xx} = f$	eq. di Laplace: ellittica
$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f$	eq. delle onde: iperbolica

Un'equazione può anche essere di tutti e tre i tipi, ne è un esempio l'equazione di Eulero-Tricomi ($u_{tt} - tu_{xx} = f$), che per $t > 0$ è iperbolica, per $t = 0$ parabolica e per $t < 0$ ellittica.

Capitolo 2

Equazione della Diffusione (Paraboliche)

2.1 Derivazione dell'equazione del calore

Definiamo innanzitutto le variabili in gioco:
t = tempo, x = posizione, $u(t,x)$ = temperatura nella posizione x e al tempo t.
Nel definire il modello si farà uso di:

$$r = \text{ tasso di calore per unità di massa dall'esterno } [r] = \frac{[cal]}{[tempo][massa]}$$

$$\rho = \text{ densità (lineare) di massa della barra } [\rho] = \frac{[massa]}{[lunghezza]}$$

$$q = \text{ flusso di calore } [q] = \frac{[cal]}{[tempo]}$$

$$e = \text{ energia interna per unità di massa } [r] = \frac{[cal]}{[massa]}$$

Il primo passo nella derivazione dell'equazione del calore consiste nell'applicare la *Legge di Bilancio*:
isolata una porzione $[x_0, x_0+h]$ della barra, il tasso di variazione dell'energia interna eguaglia il flusso agli estremi; nel caso di sorgente, il tasso di variazione del calore erogato sarà sommato al flusso agli estremi.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_0+h} e(t,x)\rho dx}_{\text{Variazione dell'energia rispetto al tempo}} = \overbrace{q(t,x_0) - q(t,x_0+h)}^{\text{Flusso entrante}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} r(t,x)\rho dx}_{\text{Flusso della sorgente}}$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

$$q(t,x_0) - q(t,x_0+h) = -\int_{x_0}^{x_0+h} q_x(t,x)dx$$

dove q_x indica $\frac{dq}{dx}$.

Considerando che l'espressione

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_0+h} e(t,x)\rho dx = -\int_{x_0}^{x_0+h} q_x(t,x)dx + \int_{x_0}^{x_0+h} r(t,x)\rho dx$$

deve essere valida per x_0 e x_0+h e che, data la continuità dell'energia è possibile portare la derivata all'interno del segno di integrale, si ottiene la Legge di Bilancio in forma locale

$$\frac{\partial}{\partial t}e(t,x)\rho = -\frac{\partial}{\partial x}q(t,x) + \rho r(t,x)$$

È ora necessario applicare le leggi costitutive, che risultano essere delle leggi sperimentali.
La prima, che prende il nome di *Legge di Fourier*, indica che il flusso di calore (q) è direttamente proporzionale alla derivata spaziale della temperatura secondo la legge

$$q = -ku_x$$

con $u = u(t,x)$ e $k > 0$. Il segno negativo indica che si ha il flusso positivo passando dalla zona più calda a quella più fredda.

$$[k] = \frac{[cal]}{[tempo]}\frac{[lunghezza]}{[grado]}$$

La seconda lega invece l'energia alla temperatura

$$e = c_l u$$

dove c_l indica il calore specifico ed è > 0

$$[c_l] = \frac{[cal]}{[massa][grado]}$$

Operando la sostituzione si ottiene

$$\rho c_l \frac{\partial}{\partial t}u = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \rho r$$

che riordinata

$$u_t = \underbrace{D}_{\text{Risposta termica}} u_{xx} + f$$

dove $D = k/c_l\rho$ e $f = r/c_l$.

$$[D] = \frac{\cancel{[cal]}[lunghezza]}{[tempo]\cancel{[grado]}}\frac{\cancel{[massa]}\cancel{[grado]}}{\cancel{[cal]}}\frac{[lunghezza]}{\cancel{[massa]}} = \frac{[lunghezza]^2}{[tempo]}$$

L'equazione caratteristica risulta quindi essere, considerata l'equazione differenziale omogenea e sostituendo due variabili algebriche alle due variabili derivate

$$u_t = Du_{xx} \quad \Rightarrow \quad T = DX^2$$

Si noti che è l'equazione di una parabola.

2.2 Problemi "Ben Posti"

Capitolo 3

Equazione di Laplace (Ellittiche)

Capitolo 4

Equazione delle Onde (Iperboliche)

Elenco delle figure