

APPUNTI DI

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI LM

Prof. Massimo Cicognani

E Dio disse...

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

e la luce fu.

Alex Pacini

Cesena, 5 gennaio 2013

“THE BEER-WARE LICENSE” (Revision 42):  
<alexpacini90@gmail.com> wrote this file. As long as you retain this notice you  
can do whatever you want with this stuff. If we meet some day, and you think  
this stuff is worth it, you can buy me a beer in return.  
Alex Pacini

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
1.1	Classificazione delle Equazioni di II ordine in due variabili $(t, x)$	4
<b>2</b>	<b>Equazione della Diffusione (Paraboliche)</b>	<b>6</b>
2.1	Derivazione dell'equazione del calore	6
2.2	Problemi "Ben Posti"	8
2.3	Unicità e dipendenza continua dai dati	8
2.4	Problema di Cauchy globale	9
2.4.1	Esercizio: Condizioni agli estremi non nulle	12
2.4.2	Esercizio: Barra isolata agli estremi	13
2.5	Barra con lunghezza infinita	14
2.5.1	Soluzione fondamentale	14
2.5.2	Trasformazioni invarianti	16
2.6	Soluzione fondamentale senza l'uso della trasformata di Fourier	17
2.7	Considerazioni sulla soluzione fondamentale	22
2.8	Problema di Cauchy omogeneo	22
2.9	Problema di Cauchy non omogeneo	23
2.9.1	Esercizio: Dimostrare che $u(0, x) \in L^2$ , allora $u(t, x) \in L^2$	24
<b>3</b>	<b>Equazione di Laplace (Ellittiche)</b>	<b>26</b>
3.1	Introduzione	26
3.2	Formule di Gauss-Green ed applicazioni al Laplaciano	28
3.3	Problemi ben posti	31
3.4	Unicità	31
3.5	Proprietà di media	32
3.5.1	Formule di media	33
3.5.2	Principi di massimo	34
3.6	Unicità e dipendenza continua dai dati	36
3.7	Esistenza della soluzione	36
3.7.1	Laplaciano in coordinate polari	37
3.7.2	Formula di Poisson	37
3.7.3	Le funzioni con proprietà di media sono armoniche e $\in C^\infty$	41
3.7.4	L'equazione di Poisson	42
<b>4</b>	<b>Equazione delle Onde (Iperboliche)</b>	<b>45</b>
4.1	Derivazione del modello	45
4.2	Problemi ben posti	48
4.2.1	Energia	49

<i>INDICE</i>	3
4.2.2 Unicità tramite l'energia . . . . .	50
4.2.3 Esistenza e regolarità della soluzione . . . . .	51
4.2.4 Dipendenza continua dai dati . . . . .	54
<b>Elenco delle figure</b>	<b>54</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Partendo dalle leggi generali (conservazione, bilancio di massa, energia, ecc) e dalle leggi costitutive si andranno a definire i vari modelli matematici composti dall'equazione (o sistema di equazioni) alle derivate parziali che governano i vari fenomeni fisici associati. Attraverso l'imposizione di condizioni iniziali e/o condizioni al contorno si dimostra l'esistenza, l'unicità della soluzione e la dipendenza continua dai dati iniziali.

### 1.1 Classificazione delle Equazioni di II ordine in due variabili $(t, x)$

La forma completa di un'equazioni di II ordine in due variabili può essere espressa come segue

$$\underbrace{au_{tt} + 2bu_{xt} + cu_{xx}}_{\text{parte principale}} + du_t + eu_x + hu = f$$

con  $a > 0$ . Considerando quindi la parte principale e sostituendo la derivata rispetto a  $t$  con la variabile simbolica  $p$  mentre la derivata rispetto a  $x$  con  $q$ , si può scrivere

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = tr(AH)$$

dove  $A$  è la matrice associata all'equazione differenziale e  $H$  è la matrice Hessiana di  $u$ .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} \partial_{tt} & \partial_{tx} \\ \partial_{xt} & \partial_{xx} \end{pmatrix}$$

È ora possibile classificare le equazioni differenziali in base alla matrice  $A$ .

$A$  indefinita  $\Rightarrow$  iperbolica

$A$  semidefinita positiva  $\Rightarrow$  parabolica

$A$  definita positiva  $\Rightarrow$  ellittica

Infatti, definito  $\Delta = b^2 - 4ac$ , se

$\Delta > 0 \Rightarrow tr(AH) = 1$  indica un iperbole

$\Delta = 0 \Rightarrow tr(AH) = 1$  indica una parabola

$\Delta < 0 \Rightarrow tr(AH) = 1$  indica un'ellisse

La classificazione si estende in maniera naturale ad equazioni in  $n > 2$  variabili.

**Esempi noti**

$$\begin{array}{ll} u_t - Du_{xx} = f & \text{eq. della diffusione: parabolica} \\ u_{tt} + u_{xx} = f & \text{eq. di Laplace: ellittica} \\ u_{tt} - c^2 u_{xx} = f & \text{eq. delle onde: iperbolica} \end{array}$$

Un'equazione può anche essere di tutti e tre i tipi, ne è un esempio l'equazione di Eulero-Tricomi ( $u_{tt} - tu_{xx} = f$ ), che per  $t > 0$  è iperbolica, per  $t = 0$  parabolica e per  $t < 0$  ellittica.

## Capitolo 2

# Equazione della Diffusione (Paraboliche)

### 2.1 Derivazione dell'equazione del calore

Definiamo innanzitutto le variabili in gioco:

$t$  = tempo,  $x$  = posizione,  $u(t, x)$  = temperatura nella posizione  $x$  e al tempo  $t$ .

Nel definire il modello si farà uso di:

$$r = \text{tasso di calore per unità di massa dall'esterno} \quad [r] = \frac{[cal]}{[tempo][massa]}$$

$$\rho = \text{densità (lineare) di massa della barra} \quad [\rho] = \frac{[massa]}{[lunghezza]}$$

$$q = \text{flusso di calore} \quad [q] = \frac{[cal]}{[tempo]}$$

$$e = \text{energia interna per unità di massa} \quad [e] = \frac{[cal]}{[massa]}$$

Il primo passo nella derivazione dell'equazione del calore consiste nell'applicare la *Legge di Bilancio*:

isolata una porzione  $[x_0, x_0 + h]$  della barra, il tasso di variazione dell'energia interna eguaglia il flusso agli estremi; nel caso di sorgente, il tasso di variazione del calore erogato sarà sommato al flusso agli estremi.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+h} e(t, x) \rho dx}_{\text{Variazione dell'energia rispetto al tempo}} = \overbrace{q(t, x_0) - q(t, x_0 + h)}^{\text{Flusso entrante}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} r(t, x) \rho dx}_{\text{Flusso della sorgente}}$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

$$q(t, x_0) - q(t, x_0 + h) = - \int_{x_0}^{x_0+h} q_x(t, x) dx$$

dove  $q_x$  indica  $\frac{dq}{dx}$ .

Considerando che l'espressione

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+h} e(t, x) \rho dx = - \int_{x_0}^{x_0+h} q_x(t, x) dx + \int_{x_0}^{x_0+h} r(t, x) \rho dx$$

deve essere valida per  $x_0$  e  $x_0 + h$  e che, data la continuità dell'energia è possibile portare la derivata all'interno del segno di integrale, si ottiene la Legge di Bilancio in forma locale

$$\frac{\partial}{\partial t} e(t, x) \rho = - \frac{\partial}{\partial x} q(t, x) + \rho r(t, x)$$

È ora necessario applicare le leggi costitutive, che risultano essere delle leggi sperimentali.

La prima, che prende il nome di *Legge di Fourier*, indica che il flusso di calore ( $q$ ) è direttamente proporzionale alla derivata spaziale della temperatura secondo la legge

$$q = -k u_x$$

con  $u = u(t, x)$  e  $k > 0$ . Il segno negativo indica che si ha il flusso positivo passando dalla zona più calda a quella più fredda.

$$[k] = \frac{[cal]}{[tempo]} \frac{[lunghezza]}{[grado]}$$

La seconda lega invece l'energia alla temperatura

$$e = c_l u$$

dove  $c_l$  indica il calore specifico ed è  $> 0$

$$[c_l] = \frac{[cal]}{[massa][grado]}$$

Operando la sostituzione si ottiene

$$\rho c_l \frac{\partial}{\partial t} u = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \rho r$$

che riordinata

$$u_t = \underbrace{D}_{\text{Risposta termica}} u_{xx} + f$$

dove  $D = k/c_l \rho$  e  $f = r/c_l$ .

$$[D] = \frac{[cal][lunghezza]}{[tempo][grado]} \frac{[massa][grado]}{[cal]} \frac{[lunghezza]}{[massa]} = \frac{[lunghezza]^2}{[tempo]}$$

L'equazione caratteristica risulta quindi essere, considerata l'equazione differenziale omogenea e sostituendo due variabili algebriche alle due variabili derivate

$$u_t = D u_{xx} \Rightarrow T = DX^2$$

Si noti che è l'equazione di una parabola.



## 2.2 Problemi “Ben Posti”

Si considerino i cosiddetti “problemi ben posti”, essi saranno del tipo

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T \\ u(0, x) = g(x) & \text{Temperatura Iniziale} \\ u(t, 0) = \alpha(t), u(t, L) = \beta(t) & \text{Condizioni di Dirichlet agli estremi} \\ u_x(t, 0) = \alpha(t), u_x(t, L) = \beta(t) & \text{Condizioni di Neumann agli estremi} \end{cases}$$

Le condizioni di Dirichlet corrispondono a fissare la temperatura sui capi della sbarra, mentre con Neumann si fissa il flusso (condizioni di Neumann nulle significano che la barra è isolata agli estremi). Non sono state poste condizioni per  $t = T$  per la causalità del sistema in esame.

## 2.3 Unicità e dipendenza continua dai dati

Si inizia con il considerare la temperatura sulla barra

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2(t, x) dx$$

e la si deriva rispetto al tempo

$$E'(t) = \frac{1}{2} \int_0^L 2u(t, x)u_t(t, x) dx$$

Nel passaggio precedente ci si è posti nella condizione in cui la derivata della somma equivale alla somma delle derivate.

Considerando ora  $u_t = Du_{xx}$  si ottiene

$$E'(t) = D \int_0^L u(t, x)u_{xx}(t, x) dx$$

Ora, utilizzando l'integrazione per parti

$$D [u(t, x)u_x(t, x)]_0^L - D \int_0^L \underbrace{u_x(t, x)u_x(t, x)}_{u_x^2(t, x)} dx$$

Nel caso di condizioni agli estremi nulle si ha  $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ , perciò il termine  $D [u(t, x)u_x(t, x)]_0^L = 0$  e quindi

$$E'(t) = -D \int_0^L u_x^2(t, x) dx \leq 0$$

La derivata negativa indica che  $E(t) \leq E(0)$ , segue che

$$\int_0^L u^2(t, x) dx \leq \int_0^L g^2(x) dx$$

Perciò, considerato il sistema privo di ingressi e quindi l'equazione omogenea,  $E(t)$  non aumenta.

Si consideri nuovamente l'equazione  $u_t = Du_{xx}$ ; essa è lineare, perciò se  $u_1$  e  $u_2$  sono soluzioni e  $C_1, C_2$  costanti, anche  $u = C_1u_1 + C_2u_2$  è soluzione.

Se

$$\begin{array}{c} u_1 \text{ è soluzione con temperatura iniziale } g_1 \\ u_2 \text{ è soluzione con temperatura iniziale } g_2 \\ \hline \downarrow \end{array}$$

$$u_1 - u_2 \text{ è soluzione con temperatura iniziale } g_1 - g_2$$

e applicato alla disuguaglianza precedente

$$\int_0^L (u_1(t, x) - u_2(t, x))^2 dx \leq \int_0^L (g_1(x) - g_2(x))^2 dx$$

che garantisce:

**Unicità:** Se  $g_1 = g_2$  si ottiene

$$\int_0^L \underbrace{(u_1(t, x) - u_2(t, x))^2}_{\text{sempre positivo o nullo}} dx \leq 0$$

essendo la somma di quadrati sempre positiva

$$\int_0^L (u_1(t, x) - u_2(t, x))^2 dx = 0$$

e quindi  $u_1(t, x) = u_2(t, x)$ . Perciò con le stesse condizioni iniziali si ottiene la stessa soluzione.

**Dipendenza continua della soluzione dai dati:**

Una differenza infinitesima nelle condizioni iniziali comporta una differenza infinitesima nella soluzione, garantendo la continuità dai dati (non diverge).

## 2.4 Problema di Cauchy globale

Riprendendo il problema di Dirichlet con condizioni nulle agli estremi

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(0, x) = g(x) \\ u(t, 0) = 0, u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Svincoliamo ora la soluzione da  $g(x)$  (sarà ripreso successivamente)

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(t, 0) = 0, u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Procediamo poi utilizzando la tecnica della separazione delle variabili.

Si consideri  $u(t, x) = v(t)w(x)$ , perciò

$$\begin{cases} v'(t)w(x) = Dv(t)w''(x) \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases}$$

dividendo per  $v(t)w(x)$  si ottiene

$$\begin{cases} \frac{v'(t)}{v(t)} = D \frac{w''(x)}{w(x)} \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases}$$

Essendo le variabili di integrazione diverse, equivale a dire

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = K = D \frac{w''(x)}{w(x)}$$

con  $K$  una costante. Perciò si posso spezzare in due equazioni

$$\begin{cases} Dw''(x) - Kw(x) = 0 \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad v'(t) = Kv(t)$$

Procediamo con il risolvere l'equazione differenziale di secondo grado; infatti essa imporrà dei vincoli su  $K$ .

$$D\lambda^2 - K = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{K}{D}$$

Si distinguono ora i vari casi:

- $K > 0$
- $K = 0$
- $K < 0$

**Se**  $K > 0$ :

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{K}{D}}$$

$$w(x) = C_1 e^{x\sqrt{\frac{K}{D}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{K}{D}}}$$

applicando le condizioni al contorno ( $w(0) = 0$   $w(L) = 0$ )

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{L\sqrt{\frac{K}{D}}} + C_2 e^{-L\sqrt{\frac{K}{D}}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Perciò l'insieme delle soluzioni con  $K > 0$  verrà scartato.

**Se**  $K = 0$ :

$$w'' = 0 \Rightarrow w(x) = C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} w(x) = C_1 x + C_2 \\ w(0) = 0, w(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Anche la soluzione con  $K = 0$  sarà scartata.

**Se**  $K < 0$ :

Poniamo  $-\omega^2 = K/D \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2$  e  $\lambda = \pm i\omega$

$$\begin{cases} w(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \\ w(0) = 0, w(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin(\omega L) = 0 \end{cases}$$

$$\sin(\omega L) = 0 \Rightarrow \omega L = n\pi \Rightarrow \omega_n = \omega = n\frac{\pi}{L}, \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Ora, considerata la soluzione n-esima di  $w(x)$

$$w_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

dove la costante  $C_2$  sarà considerata successivamente, al momento della scomposizione con Fourier.

Considerato ora

$$K_n = -\omega_n^2 D = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D$$

procediamo con il risolvere l'equazione differenziale di primo grado

$$v'(t) = Kv(t)$$

$$v_n(t) = e^{Kt} = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt}$$

Riprendendo  $u_n(t, x) = w_n(x)v_n(t)$  si ottengono le infinite soluzioni di base del problema di Dirichlet iniziale

$$u_n(t, x) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

A questo punto Fourier considera la possibilità di scomporre qualsiasi soluzione come serie di sinusoidi, quindi

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(t, n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

dove i vari  $b_n$  rappresenterebbero i precedenti  $C_{2(n)}$ .

A questo punto è possibile definire anche le condizioni con  $t = 0$  attraverso la scomposizione in *serie di Fourier*, infatti  $u(0, x) = g(x)$ , perciò

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

con  $0 \leq x \leq L$ .

Bisogna quindi trovare un modo per poter esprimere la funzione  $g(x)$  come serie di sinusoidi.

Verifichiamo prima di tutto la convergenza.

Si prenda una sequenza limitata dei coefficienti  $b_n$ , cioè che  $|b_n| \leq C$  per qualsiasi  $n$ , data  $C$  una costante. Allora se  $t \geq t_0 > 0$  e  $0 \leq x \leq L$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \leq C \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt}}_{\text{Serie convergente}}$$

Siccome ogni addendo è soluzione dell'equazione, se risulta possibile derivare all'interno della serie, anch'essa è soluzione. Questo può essere effettuato nel caso in cui la somma della serie converga.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| b_n \frac{n\pi}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt}$$

In questo caso  $e^{-n^2}$  tende a zero molto rapidamente, rendendo la serie convergente. Successivamente anche la derivata seconda converge (in realtà è una funzione liscia, cioè  $u(t, x) \in C^\infty$ , per  $t > 0$  e  $0 \leq x \leq L$ ). Qualunque sia  $g(x)$ , passato

l'istante  $t = 0$ , la funzione diventa immediatamente continua. La diffusione ha quindi un effetto regolarizzante.

È quindi possibile derivare all'interno della sommatoria.

Si tratta ora di costruire il prolungamento dispari con periodo  $2L$  (fig. 2.2)

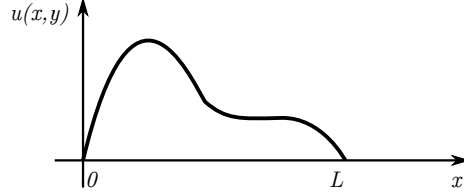


Figura 2.1: Funzione  $g(x)$ .

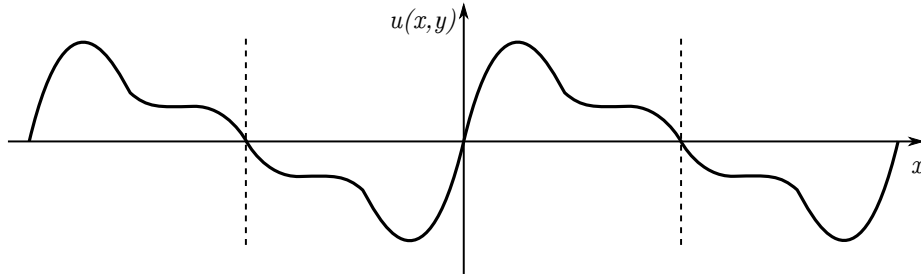


Figura 2.2: Prolungamento periodico dispari.

Si è operato con un prolungamento dispari in modo da ottenere una serie composta da sole sinusoidi. Si noti che nella parte di interesse, cioè tra 0 e  $L$ , rappresenta effettivamente la funzione  $g(x)$ .

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad \text{con} \quad \omega = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$$

Ricavati i  $b_n$  è possibile ottenere la funzione  $u(x, t)$ .

Il coefficiente di scala è dato da  $D/L^2$ ; questo consente di scalare le dimensioni variando opportunamente il materiale, rendendo possibile l'uso di modellini equivalenti (scalati).

$$\frac{D_1}{L_1^2} = \frac{D_2}{L_2^2}$$

#### 2.4.1 Esercizio: Condizioni agli estremi non nulle

$$\begin{cases} u_t = D u_{xx} \\ u(0, x) = g(x) \\ u(t, 0) = \theta_1 \\ u(t, L) = \theta_2 \end{cases}$$

con  $\theta_1 \neq \theta_2$ .

Si inizia con il considerare una soluzione stazionaria del problema, cioè indipen-

dente dal tempo

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(0, x) = g(x) \\ u^S(t, 0) = \theta_1 \\ u^S(t, L) = \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Du_{xx}^S = 0 \\ u(0, x) = g(x) \\ u^S(0) = \theta_1 \\ u^S(L) = \theta_2 \end{cases}$$

$$(u^S)''(x) = 0 \Rightarrow u^S(x) = ax + b$$

$$u^S(0) = \theta_1 \Rightarrow b = \theta_1$$

$$u^S(L) = \theta_2 \Rightarrow aL + \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow a = \frac{\theta_2 - \theta_1}{L}$$

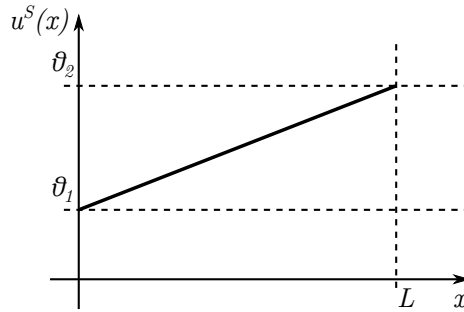


Figura 2.3: Soluzione stazionaria.

La soluzione è composta quindi dalla soluzione stazionaria e dalla soluzione con condizioni agli estremi nulle.

$$u(t, x) = \underbrace{v(t, x)}_{\text{Transitorio}} + u^S(x)$$

$$\text{con } u(0, x) = v(0, x) + u^S(x) \Rightarrow v(0, x) = g(x) - u^S(x)$$

$$\begin{cases} v_t = Dv_{xx} \\ v(0, x) = g(x) - u^S(x) \\ v(t, 0) = 0 \\ v(t, L) = 0 \end{cases}$$

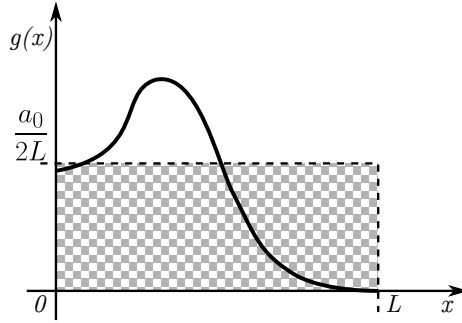
#### 2.4.2 Esercizio: Barra isolata agli estremi

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(0, x) = g(x) \\ u_x(t, 0) = 0 \\ u_x(t, L) = 0 \end{cases}$$

Si ottiene che la soluzione è composta da una serie di soli coseni a valor medio non nullo

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} Dt} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) dx$$

Figura 2.4: Valor medio di  $g(x)$  con barra isolata.

## 2.5 Barra con lunghezza infinita

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(0, x) = g(x) \end{cases} \quad -\infty < x < \infty$$

Il comportamento agli estremi ( $-\infty < x < \infty$ ) è inglobato nella definizione dello spazio al quale deve appartenere la soluzione.

### 2.5.1 Soluzione fondamentale

La soluzione fondamentale descrive la diffusione per  $t > 0$  di una massa unitaria concentrata in  $x = 0$  al tempo  $t = 0$ . Questo significa

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx}, & t > 0 \\ u(0, x) = \delta(x) \end{cases}$$

si utilizza la trasformata di Fourier rispetto ad  $x$  di  $u(x, t)$  definita da

$$v(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} u(t, x) dx$$

nel caso che  $u(t, x)$  sia sommabile da  $-\infty$  a  $+\infty$  in  $dx$  per  $t > 0$ . Ricordiamo che la trasformata si estende a distribuzioni di Schwartz di cui anche  $\delta(x)$  fa parte, con trasformata pari a 1. Allora è equivalente a

$$\begin{cases} v_t = D(i\lambda)^2 v = -D\lambda^2 v \\ v(0, \lambda) = 1 \end{cases}$$

con  $\hat{\delta} = 1$  e  $\partial_x \Leftrightarrow i\lambda$ .

L'integrale generale dell'equazione vale

$$v(t, \lambda) = C(\lambda) e^{-D\lambda^2 t}$$

che fissate le condizioni agli estremi

$$v(0, t) = 1 \quad \Rightarrow \quad c(\lambda) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$v(t, \lambda) = e^{-D\lambda^2 t}$$

Si tratta di una trasformata notevole

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Questa è l'unica soluzione di

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx}, & t > 0 \\ u(0, x) = \delta(x) \end{cases}$$

tale che  $u(t, \bullet) \in \mathcal{S}'$ ,  $t \geq 0$ .

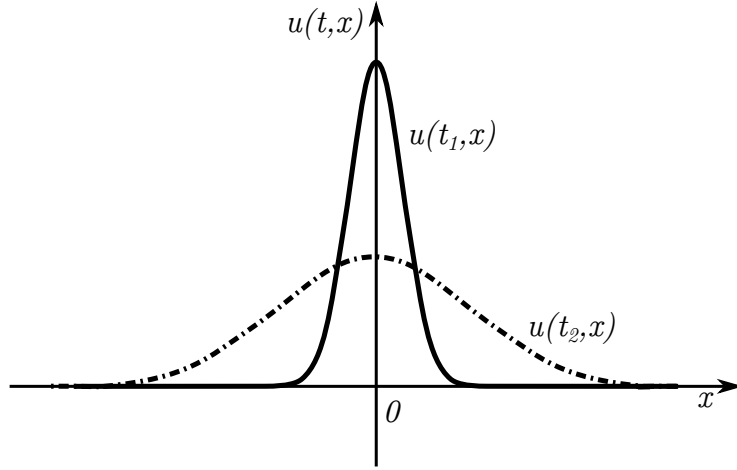


Figura 2.5:  $u(t, x)$  con  $t_1, t_2$  fissati tali che  $t_2 > t_1 > 0$ .

Il fatto che,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx$$

operando le sostituzioni,

$$\frac{x}{\sqrt{4Dt}} = y \quad \text{e} \quad \frac{dx}{\sqrt{4Dt}} = dy$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1$$

esprime la conservazione della massa totale ad ogni tempo  $t > 0$ . La massa unitaria inizialmente centrata nel punto  $x = 0$  si diffonde con densità gaussiana di scarto quadratico  $4Dt$  al tempo  $t$  (fig. 2.5).



### 2.5.2 Trasformazioni invarianti

#### Traslazione temporale

Consideriamo una soluzione  $u(t, x)$  di

$$u_t = Du_{xx} \quad 0 < t < T, \quad -\infty < x < +\infty$$

La funzione

$$v(t, x) = u(T - t, x)$$

è tale che

$$v_t(t, x) = -u_t(T - t, x)$$

$$v_{xx}(t, x) = u_{xx}(T - t, x)$$

quindi risolve l'equazione

$$v_t = -Dv_{xx}$$

La non invarianza dell'equazione rispetto alla trasformazione  $t \Rightarrow T - t$  riflette la non reversibilità temporale dei fenomeni di diffusione. Il problema di Cauchy globale è ben posto con condizione iniziale al tempo  $t = 0$  e nessuna condizione può essere posta al tempo finale  $t = T$ , in quanto il comportamento nel futuro è completamente determinato dalla storia passata (principio di causalità). Il problema

$$v_t = -Dv_{xx}$$

è ben posto con la condizione al tempo  $t = T$  e nessuna condizione può essere posta al tempo  $t = 0$

#### Invarianti di scala

La trasformazione

$$t \Rightarrow at, \quad x \Rightarrow bx, \quad u \Rightarrow cu, \quad \text{con } a, b, c > 0$$

è un cambio di scala (omotetia) per il grafico di  $u$ .

Vediamo sotto quali condizioni la funzione

$$v(t, x) = cu(at, bx)$$

è ancora soluzione.

$$\begin{aligned} v_t &= acu_t \\ v_{xx} &= b^2 cu_{xx} \\ v_t &= Dv_{xx} \\ (u_t &= Du_{xx}) \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$acu_t = Db^2 cu_{xx} \quad \Rightarrow \quad a = b^2$$

Per ottenere il coefficiente  $c$ , prendiamo in esame la conservazione della massa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = m = 1$$

perciò

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t, x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} cu(at, \sqrt{a}x) dx = \frac{c}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(at, y)$$

sostituendo

$$y = \sqrt{a}x, \quad dx = \frac{1}{\sqrt{a}} dy$$

si ottiene

$$\frac{c}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(at, y) dy = \frac{c}{\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{a}} = 1 \Rightarrow c = \sqrt{a}$$

In conclusione

$$v(t, x) = \sqrt{a}u(at, \sqrt{a}x)$$

è ancora una soluzione con la stessa massa totale conservata ad ogni  $t > 0$ .

Le trasformazioni del tipo

$$t \Rightarrow at, \quad x = \sqrt{a}x$$

si chiamano dilatazioni paraboliche, in quanto lasciano invariati i rapporti

$$\frac{x^2}{t}, \quad \frac{x}{\sqrt{t}}$$

## 2.6 Soluzione fondamentale senza l'uso della trasformata di Fourier

Prendo formalmente  $a = 1/t$  nelle dilatazioni paraboliche e cerchiamo una soluzione

$$u^*(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} u\left(1, \frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} U(r)$$

a variabili separate, come prodotto della funzione di solo tempo  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  e della funzione  $U(r)$ , da determinarsi, della sola variabile  $r = \frac{x}{\sqrt{t}}$

$$u_t^* = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}U(r) + t^{-\frac{1}{2}}U'(r)x\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}(U(r) + rU'(r))$$

$$u_x^* = t^{-\frac{1}{2}}U'(r)t^{-\frac{1}{2}} = t^{-1}U'(r)$$

$$u_{xx}^* = t^{-1}U''(r)t^{\frac{1}{2}} = t^{-\frac{3}{2}}U''(r)$$

Considerando quindi

$$u_t^* = Du_{xx}^*$$

ottengo

$$-\frac{1}{2}U(r) - \frac{1}{2}rU'(r) = DU''(r)$$

$$2DU''(r) + rU'(r) + U(r) = 0$$

che risulta essere una equazione differenziale a coefficienti non costanti. I polinomi di grado finito non possono risolvere l'equazione, ma serve una serie. Cerchiamo le soluzioni come serie di potenze

$$\begin{aligned}
 U(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \\
 U'(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n r^{n-1} \\
 rU'(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n r^n \\
 U''(r) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n r^{n-2}
 \end{aligned}$$

sostituendo con la variabile d'appoggio  $m = n - 2$

$$U''(r) = \sum_{m=2}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} r^m$$

quindi richiamando l'indice  $n$

$$U''(r) = \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} r^n$$

Sostituendo nell'equazione ed eguagliando a zero il coefficiente di  $r^n$  per ogni  $k \geq$ , si ha

$$\begin{aligned}
 2D(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n &= 0 \\
 2D(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n &= 0
 \end{aligned}$$

con  $n+1 \neq 0$ , ma  $n$  parte da zero, perciò è sempre positivo.

La formula ricorsiva

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{2D(n+2)}$$

fornisce tutti i coefficienti di indice pari, assegnato  $a_0$ , e tutti quelli dispari assegnato  $a_1$ . Del resto sappiamo che l'integrale generale dipende da due costanti arbitrarie. Se siamo alla ricerca di una soluzione che descriva la diffusione di una massa inizialmente concentrata in  $x = 0$ , è naturale assumere la densità abbia simmetria pari per  $t > 0$ , perciò  $a_1 = 0$  e quindi tutti gli  $a$  con indice dispari sono nulli. Stabiliti  $a_0$  e  $a_1$  si è stabilita tutta la serie, con  $n \rightarrow \infty$ . Per quanto

riguarda i coefficienti pari

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \dots \\
 a_2 &= -\frac{1}{4D}a_0 \\
 a_4 &= -\frac{1}{4D \cdot 2}a_2 = \left(-\frac{1}{4D}\right)^2 \frac{1}{2}a_0 \\
 a_6 &= -\frac{1}{4D \cdot 3}a_4 = \left(-\frac{1}{4D}\right)^3 \frac{1}{3 \cdot 2}a_0 \\
 a_{2(m+1)} &= \left(-\frac{1}{4D}\right)^{m+1} \frac{1}{(m+1)!}a_0 \\
 &\text{sostituendo } m \rightarrow m+1 \\
 a_{2m} &= \left(-\frac{1}{4D}\right)^m \frac{1}{m!}a_0
 \end{aligned}$$

Questa comprende anche  $a_0$ , infatti  $a_0 = 1 \cdot 1/1 \cdot a_0 = a_0$   
 Riprendendo  $U(r)$

$$U(r) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{1}{4D}\right)^m r^{2m} = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{r^2}{4D}\right)^m = a_0 e^{-(r^2/4D)}$$

dove si è usata la definizione attraverso la serie di potenze dell'esponenziale

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$$

Si sono quindi ottenute le soluzioni

$$u^*(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} U(r) = \frac{a_0}{\sqrt{t}} e^{-(r^2/4D)} = \frac{a_0}{\sqrt{t}} e^{-(x^2/4Dt)}$$

Imponendo che la massa conservata sia  $m = 1$ , si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^*(t, x) dx = \frac{a_0}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2/4Dt)} dx$$

ponendo  $x = \sqrt{4Dt}y$  e  $dx = \sqrt{4Dt}dy$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

perciò

$$\begin{aligned}
 \frac{a_0}{\sqrt{t}} \sqrt{4Dt} \sqrt{\pi} &= a_0 \sqrt{4D\pi} = 1 \\
 a_0 &= \frac{1}{\sqrt{4D\pi}} \\
 u^*(t, x) &= u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} e^{-(x^2/4Dt)} = \Gamma_D(t, x)
 \end{aligned}$$

con  $t > 0$ . L'effetto è quindi quello già indicato in fig. 2.5. L'andamento di  $\Gamma_D(t, x)$  per  $t \rightarrow 0$  è uno dei fenomeni che ha portato alla definizione della *Delta di Dirac*. Se lo scarto quadratico  $4Dt \rightarrow 0$ , la massa totale  $m = 1$  tende a concentrarsi nel valor medio  $x = 0$ .

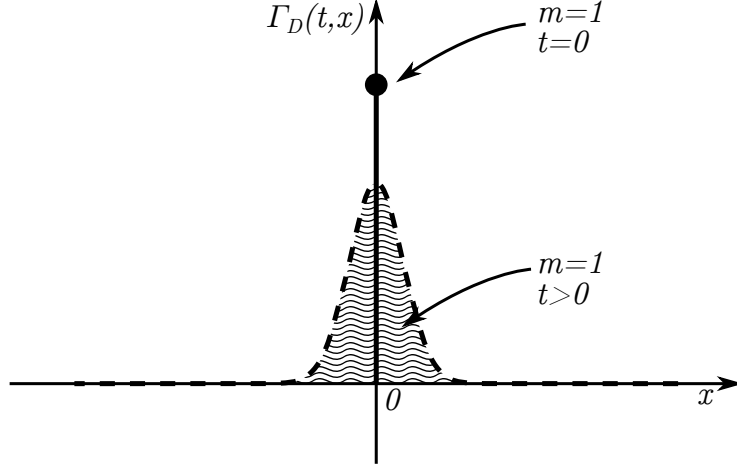


Figura 2.6: La massa resta costante al variare di  $t$ .

La funzione limite puntuale vale però

$$\Gamma_D(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$

che perde l'informazione essenziale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_D(t, x) dx = 1$$

Infatti l'integrale della funzione nulla ovunque tranne che per  $x = 0$ , dove vale  $\infty$ , si riduce all'area della semiretta  $x = 0$ ,  $y \geq 0$ , che vale 0. Il limite puntuale non è dunque il modello matematico corretto. Se invece prendiamo delle funzioni test  $\varphi(x)$  che siano regolari ( $C^\infty$ ) e nulle fuori da un intervallo limitato,  $\Gamma_D(t, x)$ , come ogni altra funzione localmente sommabile, è identificabile attraverso i campionamenti

$$\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_D(t, x) \varphi(x) dx$$

Si ha così un funzionale lineare

$$\varphi \mapsto \langle \Gamma_D(t, x), \varphi \rangle$$

dallo spazio delle funzioni di test a  $\mathbb{C}$  (si vogliono considerare anche le funzioni a valori complessi: ad esempio la trasformata di Fourier di una funzione anche reale è in generale complessa).

Mandando  $t \rightarrow 0$ , si ha

$$\langle \Gamma_D, \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-x^2/4Dt)} \varphi(x) dx$$

con la sostituzione  $x = y\sqrt{4Dt}$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \varphi(y\sqrt{4Dt}) dy \xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi(0) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \varphi(0)$$

Il modello matematico di una massa unitaria centrata in  $x = 0$  è dunque il funzionale

$$\varphi \mapsto \varphi(0)$$

che si indica con  $\delta$ , dunque

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

ed è detta *Delta di Dirac*. Non corrisponde ad una funzione, perché non esiste alcuna funzione  $u(x)$  tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

Per ogni funzione test  $\varphi$ .

Questi funzionali lineari, muniti di una opportuna nozione di continuità rispetto a  $\varphi$ , si chiamano distribuzioni. Le distribuzioni sono derivabili di ogni ordine definendo una opportuna nozione di derivata, detta anche derivata debole (o nel senso delle distribuzioni). Ripartendo dal funzionale di campionamento della funzione  $u'(x)$ , derivata localmente sommabile di una funzione continua  $u(x)$ , si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x) \varphi(x) dx = \left[ u(x) \varphi(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \varphi'(x) dx$$

Il termine  $[u(x) \varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty}$  è nullo perché  $\varphi$  è una funzione test, nulla fuori di un intervallo limitato.

Perciò

$$\langle u', \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle$$

Se ora  $u$  è una distribuzione qualunque, ciò porta a definire la distribuzione  $u'$  proprio attraverso

$$\langle u', \varphi \rangle \stackrel{\text{DEF}}{=} - \langle u, \varphi' \rangle$$

Secondo questa definizione,  $\delta$  è la derivata del gradino unitario  $H$

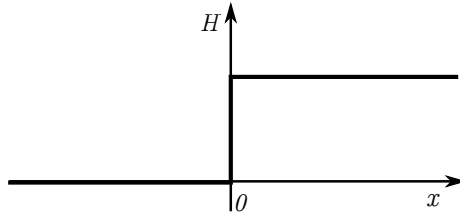


Figura 2.7: Gradino unitario.

Infatti

$$\langle H', \varphi \rangle = - \langle H, \varphi' \rangle = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = - [\varphi(x)]_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

cioè

$$H' = \delta$$

nel senso delle distribuzioni. Si noti che la derivata di  $H$  nel senso usuale è la funzione nulla definita per  $x \neq 0$ .

## 2.7 Considerazioni sulla soluzione fondamentale

Torniamo a considerare la soluzione fondamentale

$$\Gamma_D(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} e^{-(x^2/4Dt)}$$

che descrive l'evoluzione per  $t > 0$  della densità lineare di una massa totale  $m = 1$  inizialmente concentrata in  $x = 0$  al tempo  $t = 0$ . Se la massa è realizzata attraverso un grande numero  $N$  di particelle poste in  $x = 0$  per  $t = 0$ , l'integrale di densità normale (gaussiana)

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_a^b e^{-(x^2/4Dt)} dx$$

descrive la probabilità che una di queste particelle si trovi al tempo  $t$  nell'intervallo  $[a, b]$ , quindi la percentuale di particelle presenti in  $[a, b]$  al tempo  $t$ .

Il dato iniziale

$$\Gamma_D(0, x) = \delta$$

è altamente singolare: non è nemmeno descrivibile attraverso una funzione per singolare che la si voglia pensare. Eppure per ogni  $t > 0$  la soluzione è estremamente regolare: ha derivate (usuali) di ogni ordine e va rapidamente a 0 per  $x \rightarrow \pm\infty$  assieme a tutte le proprie derivate. Il processo di diffusione è quindi **regolarizzante**. Infine, istantaneamente ad un qualunque  $t > 0$  si ha  $\Gamma_D(0, x) > 0$  per ogni  $x$ . Ciò significa che la massa si diffonde istantaneamente dal singolo punto  $x = 0$  e tutto l'asse reale con **velocità di propagazione infinita**. Questo a volte è un limite nell'applicazione del modello anche se  $\Gamma_D(0, x)$  è quasi nulla al di fuori dell'intervallo  $[-2D, 2D]$  per  $t \ll 1$  e l'integrale in  $dx$  su tale intervallo vale l'intera massa  $m = 1$  per gli stessi tempi "piccoli".

## 2.8 Problema di Cauchy omogeneo

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(0, x) = g(x) \end{cases} \quad \mathcal{F} \Rightarrow \quad \begin{cases} v_t = -D\lambda v \\ v(0, \lambda) = \hat{g}(\lambda) \end{cases}$$

$$v(t, \lambda) = c(\lambda) e^{-D\lambda^2 t}$$

$$v(0, t) = \hat{g}(\lambda)$$

$\Downarrow$

$$c(\lambda) = \hat{g}(\lambda)$$

Trovando l'unica soluzione per  $v$

$$v(t, \lambda) = \hat{g}(\lambda) e^{-D\lambda^2 t}$$

e antitrasformando ( $\mathcal{F}^{-1}$ )

$$u(t, x) = g(x) \otimes \Gamma_D(t, x)$$

Dato che

$$\Gamma_D(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} e^{-(x^2/4Dt)}$$

risultava essere la soluzione fondamentale, cioè con  $g(x) = \delta(x)$ , la soluzione generica è composta dalla somma di tutti gli effetti elementari

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2/4Dt} g(y) dy$$

## 2.9 Problema di Cauchy non omogeneo

Risolveremo il problema tramite la trasformata di Fourier. Tale procedimento fornisce anche un risultato di unicità della soluzione: se la trasformata è univocamente determinata, tale è anche la soluzione.

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} + f & \text{con } f = f(t, x) \\ u(0, x) = g(x) \end{cases}$$

trasformando con Fourier

$$v(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} u(t, x) dx$$

$$\begin{cases} v_t = -D\lambda^2 v + \hat{f} \\ v(0, \lambda) = \hat{g}(\lambda) \end{cases}$$

Consideriamo quindi

$$v_t + D\lambda^2 v = \hat{f}$$

da cui, moltiplicando per il fattore integrante  $e^{D\lambda^2 t}$

$$e^{D\lambda^2 t} v_t + e^{D\lambda^2 t} D\lambda^2 v = e^{D\lambda^2 t} \hat{f}$$

$$\frac{d}{dt} (e^{D\lambda^2 t} v) = e^{D\lambda^2 t} \hat{f}$$

$$e^{D\lambda^2 t} v = \int e^{D\lambda^2 t} \hat{f}(t, \lambda) dt + \underbrace{C(\lambda)}_{\text{Costanti rispetto a } t}$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} (e^{D\lambda^2 \tau} v(\tau, \lambda)) d\tau = e^{D\lambda^2 t} v(t, \lambda) - e^{D\lambda^2 0} v(0, \lambda)$$

quindi si può scrivere

$$\int_0^t e^{D\lambda^2 \tau} \hat{f}(\tau, \lambda) d\tau = e^{D\lambda^2 t} v(t, \lambda) - e^{D\lambda^2 0} v(0, \lambda) = e^{D\lambda^2 t} v(t, \lambda) - v(0, \lambda)$$



$$\int_0^t e^{D\lambda^2\tau} \hat{f}(\tau, \lambda) d\tau + \hat{g}(\lambda) = e^{D\lambda^2 t} v(t, \lambda)$$

$$v(t, \lambda) = e^{-D\lambda^2 t} + \hat{g}(\lambda) + \int_0^t e^{-D\lambda^2(t-\tau)} \hat{f}(\tau, \lambda) d\tau$$

Antitrasformando, tenuto conto che

$$\hat{\Gamma}_D(t, \lambda) = e^{-D\lambda^2 t},$$

si ottiene

$$u(t, x) = \underbrace{\Gamma_D(t, x) \otimes g(x)}_{u_1} + \underbrace{\int_0^t \Gamma_D(t - \tau, x) \otimes f(\tau, x) d\tau}_{u_2}$$

perciò

$$u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x)$$

Analizzando le varie parti della soluzione, si nota che  $u_1$  risolve il problema omogeneo senza sorgente facendosi carico della situazione iniziale; in particolare risolve il problema

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} \\ u(0, x) = g(x) \end{cases}$$

Per quanto riguarda  $u_2$ , il termine

$$\Gamma_D(t - \tau, x) \otimes f(\tau, x)$$

è uguale all'evoluzione al tempo  $t$ , dopo un tempo trascorso dall'istante  $\tau$  all'istante  $t$  pari a  $t - \tau$ , di una densità  $f(\tau, x)$  immessa sul sistema al tempo  $\tau$ . Si noti che la convoluzione contrassegnata con  $\otimes$  è rispetto alla variabile spaziale e non al tempo.

La soluzione  $u_2$  risolve

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} + f \\ u(0, x) = 0 \end{cases}$$

### 2.9.1 Esercizio: Dimostrare che $u(0, x) \in L^2$ , allora $u(t, x) \in L^2$

Dato il problema

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & t > 0 \\ u(0, x) = g(x) \end{cases}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x)|^2 dx$$

Utilizzando il teorema di Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t, \lambda)|^2 d\lambda$$

Si noti che è stato considerato  $u$  reale, perciò  $u^2 = |u|^2$ .

Si è mostrato in precedenza che la soluzione  $v(t, \lambda)$  (cioè la trasformata di  $u$ ) è

$$v(t, \lambda) = e^{-D\lambda^2 t} \hat{g}(\lambda)$$

quindi

$$|v(t, \lambda)|^2 = e^{-2D\lambda^2 t} |\hat{g}(\lambda)|^2$$

e immediatamente si osserva che al crescere del tempo  $t$  la funzione decresce.

Riprendendo Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x)|^2 dx = \frac{e^{-2D\lambda^2 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\lambda)|^2 d\lambda$$

in  $t = 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\lambda)|^2 d\lambda &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |u(0, x)|^2 dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x)|^2 dx &= e^{-2D\lambda^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(0, x)|^2 dx \end{aligned}$$

e per qualsiasi  $t \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx$$

In conclusione

$$E(t) \leq E(0)$$

Sfruttando il risultato appena illustrato si possono ottenere le stesse conclusioni del caso finito, cioè l'unicità e la dipendenza continua dai dati secondo la norma  $L^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_1 - u_2|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g_1 - g_2|^2 dx$$

## Capitolo 3

# Equazione di Laplace (Ellittiche)

### 3.1 Introduzione

L'equazione di diffusione in un corpo bidimensionale è

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy} + f)$$

mentre in un corpo a tre dimensioni (solido) è

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f$$

L'operatore

$$\Delta = \partial_{x_1 x_1} + \dots + \partial_{x_n x_n}$$

in ogni dimensione  $n$  è detto *Laplaciano*. Con questa notazione l'equazione di diffusione si scrive

$$u_t = D\Delta u + f$$

Nel caso di sorgenti  $f$  non dipendenti dal tempo, è ragionevole cercare soluzioni stazionarie, cioè anch'esse indipendenti da  $t$ . Si giunge così all'*equazione di Poisson*

$$\Delta u = -f/D$$

Nel caso omogeneo  $f = 0$ , l'equazione

$$\Delta u = 0$$

si dice *equazione di Laplace* e le soluzioni si dicono *funzioni armoniche*. Anche le soluzioni stazionarie dell'equazione

$$u_{tt}c^2\Delta u$$

sono funzioni armoniche. In dimensione di spazio  $n = 2$ , questa equazione descrive lo spostamento di una membrana elastica dalla posizione di riposo. Una posizione stazionaria (equilibrio) è quindi descritta da una funzione armonica.

Se  $F = (f_1, f_2, f_3) = f_1 \hat{i} + f_2 \hat{j} + f_3 \hat{k}$  è un campo vettoriale nello spazio, la divergenza di  $F$  è lo scalare

$$\operatorname{div} F = \partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3$$

Se esiste una funzione scalare  $u$  tale che

$$\nabla u = F$$

(potenziale), allora

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div} \nabla u = \operatorname{div} (u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}) = \Delta u$$

L'equazione di Laplace/Poisson è quindi fondamentale nello studio dei campi conservativi. Se  $E$  è un campo elettrostatico in una regione  $\Omega$  di spazio, allora si ha

$$\operatorname{div} E = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

con  $\rho$  densità di carica ed  $\varepsilon$  costante dielettrica. Se

$$\Delta u = -E$$

il potenziale soddisfa l'equazione di Poisson

$$\Delta u = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

Nel caso  $\rho = 0$ , cariche fuori di  $\Omega$ , la funzione  $u$  è armonica. In dimensione  $n = 2$ , le funzioni armoniche intervengono anche nello studio di funzioni di variabile complessa. Se  $f = u + iv$  è derivabile in senso complesso, vale l'equazione di Cauchy- Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

che si scrive anche

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

Dunque

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

La parte reale  $u$  e la parte immaginaria  $v$  di  $f$  sono funzioni armoniche. Viceversa, se  $u$  è una funzione armonica, è possibile risolvere le equazioni di Cauchy-Riemann rispetto a  $v$  in ogni parte semplicemente connessa del dominio in modo che

$$f = u + iv$$

sia una funzione derivabile in senso complesso. Tale funzione è in realtà derivabile infinite volte perché si può espandere localmente in serie di potenze. Ne segue che  $u$  (e  $v$ ) è derivabile infinite volte in  $dx, dy$ . Abbiamo così che una funzione armonica nel piano è derivabile infinite cioè di classe  $C^\infty$ .

### 3.2 Formule di Gauss-Green ed applicazioni al Laplaciano

Se  $\gamma$  è una curva chiusa nel piano, orientata in senso antiorario, regolare (a tratti) con parametrizzazione

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

Il versore tangente a  $\gamma$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}(x', y') = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}\hat{\mathbf{j}}$$

Ora, per ottenere il versore normale  $\mathbf{N}$ , bisogna calcolare il versore ortogonale a  $\mathbf{T}$ ; ciò è ottenuto con

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}(y', -x') = \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}\hat{\mathbf{j}}$$

che rappresenta la normale esterna a  $\gamma$ ; la normale interna è invece

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}(-y', x') = -\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}\hat{\mathbf{j}}$$

Dato un campo vettoriale  $F = f_1\hat{\mathbf{i}} + f_2\hat{\mathbf{j}}$ , gli integrali curvilinei

$$\int_{\gamma} F \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b [f_1(x(t), y(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

$$\int_{\gamma} F \cdot \mathbf{N} ds = \int_a^b [f_1(x(t), y(t))y'(t) - f_2(x(t), y(t))x'(t)] dt$$

rappresentano, rispettivamente, il lavoro di  $F$  su  $\gamma$  ed il flusso uscente di  $F$  da  $\Omega$ . Si è fatto uso dello spostamento infinitesimo

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

Le formule di Gauss-Green collegano gli integrali curvilinei su  $\gamma$  ad integrali in  $dxdy$  su  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \partial_x f(x, y) dxdy = \int_{\gamma} f\hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{T} ds$$

$$\int_{\Omega} \partial_y f(x, y) dxdy = - \int_{\gamma} f\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{T} ds$$

Tali formule sono di facile dimostrazione su domini normali. Ad esempio preso  $\Omega$  come in fig. 3.1

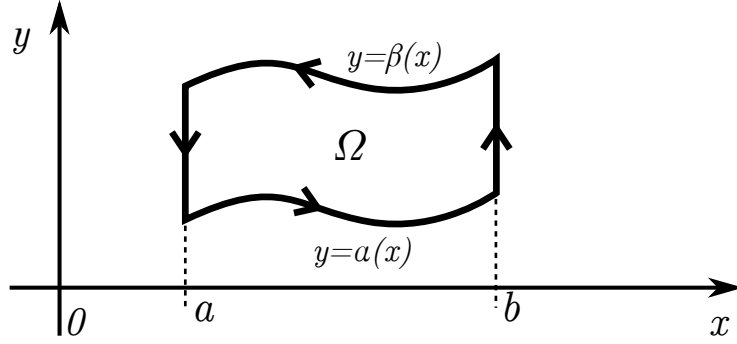


Figura 3.1: Dominio normale per la dimostrazione delle formule di Green

si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_y f(x, y) dx dy &= \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_y f(x, y) dx dy = \int_a^b [f(x, y)]_{y=\alpha(x)}^{y=\beta(x)} dx \\ &= \int_a^b [f(x, \beta(x)) - f(x, \alpha(x))] dx \end{aligned}$$

Per il tratto di frontiera

$$\begin{cases} x = x & x \in [a, b] \\ y = \alpha(x) \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha')^2}} (1, \alpha') \\ ds &= \sqrt{1 + (\alpha')^2} dx \\ \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{i}} ds &= dx \end{aligned}$$

perciò

$$\int_{\gamma[a, b]} f(x, y) \hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b f(x, \alpha(x)) dx$$

Per il tratto orientato in senso contrario

$$\begin{cases} x = x & x \in [b, a] \\ y = \beta(x) \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -\frac{1}{\sqrt{1 + (\beta')^2}} (1, \beta') \\ ds &= \sqrt{1 + (\beta')^2} dx \\ \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{i}} ds &= -dx \end{aligned}$$

perciò

$$\int_{\gamma[b, a]} f(x, y) \hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{T} ds = \int_b^a f(x, \beta(x)) dx = - \int_a^b f(x, \beta(x)) dx$$

Nei due tratti verticali si ha  $\mathbf{T} = \pm \hat{\mathbf{j}}$ , quindi  $\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$ .

Per concludere

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x, y) \hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{T} ds &= \int_a^b f(x, \alpha(x)) dx - \int_a^b f(x, \beta(x)) dx = \\ &= - \int_a^b [f(x, \beta(x)) - f(x, \alpha(x))] dx \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\gamma} f(x, y) \hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{T} ds = - \int_{\Omega} \partial_y f(x, y) dx dy =$$

Il teorema diventa estendibile anche a domini non normali, data la possibilità di scomporre un dominio qualsiasi in domini normali.

Analoga dimostrazione può essere fatta per la formula restante, in questo caso utilizzando un dominio perpendicolare all'asse  $y$ .

Per un campo  $F = f_1 \hat{\mathbf{i}} + f_2 \hat{\mathbf{j}}$  si ottiene

$$\int_{\gamma} F \cdot \mathbf{T} ds = \int_{\gamma} f_1 \hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{T} ds + \int_{\gamma} f_2 \hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{T} ds = \int_{\Omega} (\partial_x f_2 - \partial_y f_1) dx dy$$

cioè la formula di Stokes

$$\int_{\gamma} F \cdot \mathbf{T} ds = \int_{\Omega} (\partial_x f_2 - \partial_y f_1) dx dy$$

nel piano. L'integrale doppio può essere visto come il flusso attraverso la superficie piana  $\Omega$  di  $\text{rot} F$  pensando ad  $F = f_1 \hat{\mathbf{i}} + f_2 \hat{\mathbf{j}} + 0 \hat{\mathbf{k}}$  nello spazio.

Inoltre, ricordando che

$$\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{j}} = -\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{i}}$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot \mathbf{N} ds &= \int_{\gamma} f_1 \hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{N} ds + \int_{\gamma} f_2 \hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{N} ds = \int_{\gamma} f_1 \hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{T} ds - \int_{\gamma} f_2 \hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{T} ds = \\ &= \int_{\Omega} (\partial_x f_1 + \partial_y f_2) dx dy \end{aligned}$$

che è il teorema della divergenza nel piano

$$\int_{\gamma} F \cdot \mathbf{N} ds = \int_{\Omega} \text{div} F dx dy$$

Le formule di Gauss-Green e le loro conseguenze forniscono importanti applicazioni al Laplaciano.

Per  $F = \nabla u$ , il teorema della divergenza diventa

$$\int_{\Omega} \Delta u dx dy = \int_{\gamma} \nabla u \cdot \mathbf{N} ds = \int_{\gamma} \partial_{\mathbf{N}} u ds$$

in quanto  $\nabla u \cdot \mathbf{N}$  coincide con la derivata  $\partial_{\mathbf{N}} u$  lungo la normale esterna.

Applicando poi il teorema della divergenza al campo

$$vF = v f_1 \hat{\mathbf{i}} + v f_2 \hat{\mathbf{j}}$$

si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(vF) &= v_x f_1 + v_y f_2 + v \left( \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 \right) \\ &= \nabla v \cdot F + v \operatorname{div} F \end{aligned}$$

perciò

$$\int_{\gamma} vF \cdot \mathbf{N} ds = \int_{\Omega} \operatorname{div}(vF) \, dxdy = \int_{\Omega} \nabla v \cdot F \, dxdy + \int_{\Omega} v \operatorname{div} F \, dxdy$$

Questa, con  $F = \nabla u$ , si riduce a

$$\int_{\gamma} v \partial_{\mathbf{N}} u \, ds = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dxdy + \int_{\Omega} v \Delta u \, dxdy$$

che conviene mettere nella forma di integrale per parti per il Laplaciano

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dxdy = \int_{\gamma} v \partial_{\mathbf{N}} u \, ds - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dxdy$$

### 3.3 Problemi ben posti

Sia  $\Omega$  un dominio limitato di  $\mathbb{R}^2$  con frontiera  $\gamma$  curva chiusa regolare a tratti orientata in senso positivo. I problemi ben posti per l'equazione  $\Delta u = f$  in  $\Omega$  sono quelli visti per la diffusione, senza dato iniziale mancando la variabile tempo.

Per il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \gamma \end{cases}$$

Per il problema di Neumann:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \partial_{\mathbf{N}} u = h & \text{in } \gamma \end{cases}$$

La formula

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dxdy = \int_{\gamma} \partial_{\mathbf{N}} u \, ds$$

fornisce una condizione di compatibilità tra la sorgente  $f$  ed il flusso uscente  $h$  nel problema di Neumann. La condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni è

$$\int_{\Omega} f \, dxdy = \int_{\gamma} h \, ds$$

### 3.4 Unicità

Si mostra che i problemi con dati iniziali coincidenti hanno la stessa soluzione. Se  $u_1, u_2$  sono due soluzioni allora

$$w = u_1 - u_2$$



risolve

$$\Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega$$

con condizioni al contorno

$$\begin{aligned} w &= 0 & \text{in } \gamma & \text{Dirichlet} \\ \partial_{\mathbf{N}} w &= 0 & \text{in } \gamma & \text{Neumann} \end{aligned}$$

Sostituendo  $u = v = w$  nella formula dell'integrale per parti (equivalente ad usare il campo  $\operatorname{div}(ww) = \operatorname{div} w^2$ )

$$\int_{\Omega} w \Delta w \, dxdy = - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w \, dxdy + \int_{\gamma} w \partial_{\mathbf{N}} w \, ds$$

il termine

$$\int_{\gamma} w \partial_{\mathbf{N}} w \, ds$$

è nullo sia con condizioni di Neumann nulle ( $\partial_{\mathbf{N}} w = 0$ ) sia con le condizioni di Dirichlet nulle ( $w = 0$ ). Perciò, data la definizione  $\Delta w = 0$ ,

$$0 = - \int_{\Omega} \|\nabla w\|^2 \, dxdy + 0$$

$$\int_{\Omega} \|\nabla w\|^2 \, dxdy = 0$$

L'unica soluzione, essendo somma di quadrati, è

$$\nabla w = 0$$

in  $\Omega$ . Quindi

$$w = C \quad \text{in } \Omega$$

Questo pone l'unicità a meno di costanti nel caso di Neumann.

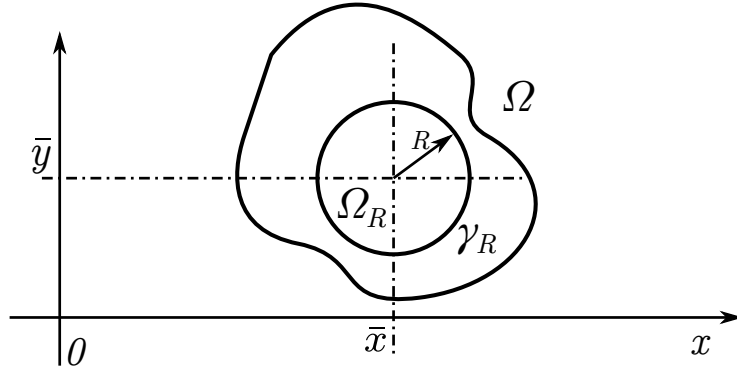
Per Dirichlet deve essere  $w = c = 0$  in  $\gamma$  (o almeno  $\gamma_0$ ), quindi  $w = 0$  ovunque nella chiusura  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \gamma$  di  $\Omega$ .

### 3.5 Proprietà di media

Sia  $u(x, y)$  armonica in  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

Denotiamo con  $\Omega_R(x, y)$  un generico cerchio di centro  $(x, y)$  e raggio  $R$  contenuto in  $\Omega$  e con  $\gamma_R(x, y)$  la circonferenza di frontiera orientata positivamente.

Figura 3.2: Circonferenza di frontiera  $\gamma_R$ 

### 3.5.1 Formule di media

In tale dominio circolare valgono le formule di media

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{\Omega_R} u(x, y) \, dx dy$$

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\gamma_R} u \, ds$$

con  $ds$  l'elemento di lunghezza sulla circonferenza.

#### Dimostrazione

Iniziamo dalla seconda. Per  $0 < r < R$  poniamo

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma_r} u \, ds = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(\bar{x} + r \cos \theta, \bar{y} + r \sin \theta) r \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\bar{x} + r \cos \theta, \bar{y} + r \sin \theta) \, d\theta \end{aligned}$$

dove si è usata la parametrizzazione di  $\gamma_r(x, y)$

$$\begin{cases} x = \bar{x} + r \cos \theta \\ y = \bar{y} + r \sin \theta \end{cases}$$

con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Dove  $x' = -r \sin \theta$ ,  $y' = r \cos \theta$ ,  $ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = r \, d\theta$ .

Derivando  $g(r)$  abbiamo

$$g'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) \, d\theta = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma_r} \nabla u \cdot \mathbf{N} \, ds$$

dove si è usato

$$\mathbf{N} = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}, \quad d\theta = \frac{ds}{r}$$

Per il teorema della divergenza

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma_r} \nabla u \cdot \mathbf{N} ds = \int_{\Omega_r} \operatorname{div}(\nabla u) dx dy = \int_{\Omega_r} \Delta u dx dy = 0$$

cioè  $g(r)$  costante.

Poiché

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} g(r) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\bar{x} + r \cos \theta, \bar{y} + r \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\bar{x}, \bar{y}) d\theta \\ &= u(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

abbiamo

$$g(r) = u(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{per ogni } r \in (0, R]$$

il che prova la formula di media voluta.

Da questa si ottiene anche l'altra. Infatti da

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\bar{x} + r \cos \theta, \bar{y} + r \sin \theta) d\theta$$

moltiplicando per  $r$  ed integrando in  $dr$  tra 0 e  $R$ , segue

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, \bar{y}) \int_0^R r dr &= \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} u(\bar{x} + r \cos \theta, \bar{y} + r \sin \theta) r d\theta dr \\ u(\bar{x}, \bar{y}) \frac{R^2}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_R} u(x, y) dx dy \end{aligned}$$

con  $r dr d\theta = dx dy$ .

Da cui

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{\Omega_R} u(x, y) dx dy$$

Queste ci dicono che i valori delle funzioni armoniche sono molto rigide. Per calcolare la  $u$  nel centro, sapendo che è armonica, basta avere i valori sul bordo (del cerchio!).

Vedremo che, viceversa, una funzione che soddisfa la proprietà di media è armonica. Da questa equivalenza seguirà poi che ogni funzione armonica è  $C^\infty$ .

### 3.5.2 Principi di massimo

Una funzione che soddisfa la proprietà di media in  $\Omega$  che non sia una funzione costante non può avere massimi o minimi globali interni ad  $\Omega$ . Per vedere questo, basta vedere che se  $u(x, y)$  in  $\Omega$  assume valore minimo (massimo) assoluto in  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ad  $\Omega$ , allora è costante in ogni cerchio  $\Omega_R(\bar{x}, \bar{y}) \subset \Omega$ . Se vale questo, infatti, tutti i punti di  $\Omega_R(\bar{x}, \bar{y})$  diventano di minimo (massimo) assoluto. Il centro  $(\bar{x}, \bar{y})$  può essere sostituito dai punti arbitrariamente vicini al bordo di  $\Omega_R(\bar{x}, \bar{y})$  e la regione dove  $u$  è costante può essere allargata. Con questo procedimento si giunge a far vedere che  $u$  è costante su tutto l'aperto e connesso  $\Omega$ .

**Teorema**

La funzione  $u$  soddisfa le proprietà di media in  $\Omega$ . Se  $u(\bar{x}, \bar{y}) = m$  è minimo assoluto allora  $u(x, y) = m$  in tutti i punti di  $\Omega_R(\bar{x}, \bar{y}) \subset \Omega$ .

**Dimostrazione**

Supponiamo che  $u(x, y) \geq m_1 > m$  in  $\Omega_r(x_0, y_0) \subset \Omega_R(\bar{x}, \bar{y})$ . Allora

$$\begin{aligned}
 m = u(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{\Omega_R} u(x, y) dx dy \\
 &= \frac{1}{\pi R^2} \left\{ \int_{\Omega_R(\bar{x}, \bar{y}) - \Omega_r(x_0, y_0)} u(x, y) dx dy + \int_{\Omega_r(x_0, y_0)} u(x, y) dx dy \right\} \\
 &\geq \frac{1}{\pi R^2} \left\{ \int_{\Omega_R(\bar{x}, \bar{y}) - \Omega_r(x_0, y_0)} m dx dy + \int_{\Omega_r(x_0, y_0)} m_1 dx dy \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi R^2} \{ m \cdot \text{Area}(\Omega_R(\bar{x}, \bar{y}) - \Omega_r(x_0, y_0)) + m_1 \cdot \text{Area}(\Omega_r(x_0, y_0)) \} \\
 &= \frac{1}{\pi R^2} \{ m(\pi R^2 - \pi r^2) + m_1 \pi r^2 \} \\
 &> \frac{1}{\pi R^2} \{ m(\pi R^2 - \pi r^2) + m \pi r^2 \} = \frac{1}{\pi R^2} m \pi R^2 = m
 \end{aligned}$$

Siamo all'assurdo

$$m > m$$

La funzione  $u$  non può assumere valori  $m_1 > m$  all'interno di  $\Omega_R(\bar{x}, \bar{y})$ . Analogamente vale per i punti di massimo.

**Teorema**

La funzione  $u$  soddisfa la proprietà di media nell'aperto connesso  $\Omega$ . Se  $u$  ha minimo o massimo assoluti interni ad  $\Omega$ , allora  $u$  è costante in  $\Omega$ .

**Lemma**

Se  $\Omega$  è limitato ed  $u$  è continua nella chiusura  $\bar{\Omega}$ , allora ha certamente massimo e minimo assoluti in  $\bar{\Omega}$  per il teorema di Weierstrass. Questi valori non possono essere assunti nei punti interni, a meno che non sia costante, quindi sono assunti sulla frontiera.

**Teorema**

Se  $u$  è continua in  $\bar{\Omega}$  con  $\Omega$  aperto, connesso e limitato e soddisfa la proprietà di media in  $\Omega$ , allora

$$\begin{aligned}
 \max_{\bar{\Omega}} u &= \max_{\gamma} u, & \min_{\bar{\Omega}} u &= \min_{\gamma} u \\
 &\Downarrow
 \end{aligned}$$

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\gamma} |u|$$

con  $\gamma$  la frontiera di  $\Omega$ .

Qualitativamente, l'unico punto in cui l'eventuale  $u(\bar{x}, \bar{y})$  può essere massimo o minimo è sulla frontiera, dove  $\gamma_r$  ha diametro infinitesimo e il valore all'interno di  $\gamma_r$  può essere considerato costante. In tutti gli altri casi deve essere sulla frontiera di  $\gamma_r$ ; perciò preso il dominio  $\bar{\Omega}$ , i minimi e massimi possono essere solo sulla frontiera.

### 3.6 Unicità e dipendenza continua dai dati

Preso una funzione armonica, essa soddisfa la proprietà di media. Attraverso di essa possiamo dedurre un risultato di unicità e dipendenza continua dai dati per il problema di Dirichlet, senza ipotesi di regolarità sulla frontiera ed assumendo che  $u$  sia solo continua in  $\Omega$ .

#### Teorema

Sia  $\Omega$  aperto, connesso e limitato in  $\mathbb{R}^2$  e sia  $g$  continua nella frontiera  $\gamma$  di  $\Omega$ . Il problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{in } \gamma \end{aligned}$$

ha al più una soluzione  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Inoltre, se  $u_g$  indica la soluzione corrispondente al dato  $g$ , si ha

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_{g_1} - u_{g_2}| = \max_{\gamma} |g_1 - g_2|$$

#### Dimostrazione

La funzione  $u_{g_1} - u_{g_2}$  è armonica in  $\Omega$  e continua in  $\bar{\Omega}$ .

$|u_{g_1} - u_{g_2}|$  ha massimo in  $\bar{\Omega}$ , assunto sulla frontiera  $\gamma$ .

Dunque

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_{g_1} - u_{g_2}| = \max_{\gamma} |u_{g_1} - u_{g_2}| = \max_{\gamma} |g_1 - g_2|$$

poiché  $u_g$  in  $\gamma$  è uguale a  $g$ .

Il risultato precedente dimostra la dipendenza continua dai dati. Ora se  $g_1 = g_2$  allora da questo segue  $g_1 = g_2$  in  $\bar{\Omega}$ , cioè l'unicità della soluzione.

### 3.7 Esistenza della soluzione

I teoremi di esistenza sono più difficili di quelli di unicità. Il caso più semplice è quello di  $\Omega$  cerchio nel piano dove si possono utilizzare le coordinate polari. È quindi necessario procurarsi l'espressione di  $\Delta$  in queste coordinate.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Vedi anche [http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/corsi/archivio\\_pdf/laplaciano.pdf](http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/corsi/archivio_pdf/laplaciano.pdf)

### 3.7.1 Laplaciano in coordinate polari

Per  $u(r(x, y), \theta(x, y))$ , ricordando che

$$\partial_x r = \partial_x \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta$$

$$\partial_y r = \partial_y \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta$$

$$\partial_x \theta = \partial_x \arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left( -\frac{y}{x^2} \right)$$

$$\partial_y \theta = \partial_y \arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x}$$

si ha

$$\partial_x u = \cos \theta \partial_r u - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta u$$

$$\partial_y u = \sin \theta \partial_r u + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta u$$

Calcolando

$$\partial_x^2 u = \partial_x (\partial_x u) = \left( \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \right) \left( \cos \theta \partial_r u - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta u \right)$$

ed eseguendo tutte le derivate e sommando si arriva a

$$\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 u$$

### 3.7.2 Formula di Poisson

Risolviamo quindi il problema di Dirichlet nel cerchio

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_R(\bar{x}, \bar{y}) \\ u = g & \text{in } \gamma_R(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

Col metodo della *separazione delle variabili* in coordinate polari

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + r \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y &= \bar{y} + r \sin \theta & 0 \leq r \leq R \end{aligned}$$

poniamo

$$u = v(r)w(\theta)$$

dove  $w(\theta)$  deve essere periodica di periodo  $2\pi$ .

$$\Delta u = 0$$

$\Downarrow$

$$v''(r)w(\theta) + \frac{1}{r^2}v(r)w''(\theta) + \frac{1}{r}v'(r)w(\theta) = 0$$

da cui, dividendo per  $u = v(r)w(\theta)$  e moltiplicando per  $r^2$

$$r^2 \frac{v''(r)}{v(r)} + r \frac{v'(r)}{v(r)} = - \frac{w''(\theta)}{w(\theta)}$$

Le due funzioni possono coincidere solo se costanti

$$- \frac{w''(\theta)}{w(\theta)} = k = r^2 \frac{v''(r)}{v(r)} + r \frac{v'(r)}{v(r)}$$

Inizialmente

$$w''(\theta) + kw(\theta) = 0$$

$$\lambda^2 + k = 0, \Rightarrow \lambda^2 = -k$$

che ha soluzioni periodiche solo se  $k > 0$ . In questo caso

$$\lambda = \pm i\sqrt{k}$$

e

$$w = A\cos(\sqrt{k}\theta) + B\sin(\sqrt{k}\theta)$$

Essa deve necessariamente avere periodo  $2\pi$ , cioè equivalente al periodo del cerchio che delimita il dominio (effettivamente dopo un giro è sempre la stessa soluzione). Il periodo indicato si ha solo per  $\sqrt{k} = 0, 1, 2, \dots$ , quindi  $k = 0, 1, 4, \dots$  in particolare  $k = m^2$  con  $m \in \mathbb{N} + \{0\}$ . Abbiamo ottenuto le soluzioni

$$w_m = A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$w_0 = A_0/2 = \text{costante} \quad (m = 0)$$

Risolviamo ora

$$r^2 v''(r) + r v'(r) - m^2 v(r) = 0$$

Si tratta di una *Equazione di Eulero* (l'esponente eguaglia il grado della derivata) e si riduce ad una a coefficienti costanti ponendo

$$v(r) = y(\ln r), \quad v'(r) = \frac{1}{r} y'(\ln r)$$

$$v''(r) = \frac{1}{r^2} y''(\ln r) + \left(-\frac{1}{r^2}\right) y'(\ln r)$$

Si ottiene, sostituendo  $t = \ln r$

$$y''(t) - \cancel{y'(t)} + \cancel{y'(t)} - m^2 y(t) = 0$$

$$y''(t) - m^2 y(t) = 0$$

che è effettivamente a coefficienti costanti.

L'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - m^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm m$$

porta alle soluzioni linearmente indipendenti (tenuto conto che  $m \geq 0$ )

$$y_1(t) = e^{mt}, \quad y_2(t) = e^{-mt}$$

Ora ritorno alla variabile in  $r$  con la sostituzione  $t = \ln r$

$$v_1(r) = e^{m \ln r} = r^m$$

$$v_2(r) = e^{-m \ln r} = r^{-m}$$

La soluzione  $v_2$  deve essere scartata perché in  $m = 0$  diverge. Resta quindi la sola soluzione  $v_1 = r^m$ .

Abbiamo così ottenuto la famiglia di funzioni armoniche

$$u_m = A_m r^m \cos(m\theta) + B_m r^m \sin(m\theta), \quad u_0 = A_0/2$$

Per linearità, se si può derivare sotto il segno di serie,

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m r^m \cos(m\theta) + B_m r^m \sin(m\theta)$$

è una soluzione di  $\Delta u = 0$  nel cerchio, con  $A_m, B_m$  coefficienti tali che  $u$  sia ancora soluzione di  $\Delta u = 0$  derivando termine a termine.

Per  $r = R$  deve essere  $u = g$ ; la condizione si realizza con

$$u(R, \theta) = G(\theta) = g(\bar{x} + R \cos \theta, \bar{y} + R \sin \theta)$$

si scrive la serie di Fourier di  $G$

$$G(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta)$$

dove i coefficienti sono dati da

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta) \cos(m\theta) d\theta, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta) \sin(m\theta) d\theta, \quad m = 1, 2, \dots$$

Deve essere

$$A_0 = a_0, \quad A_m = \frac{a_m}{R^m}, \quad B_m = \frac{b_m}{R^m}$$

Con questa scelta si vede che per  $g$  continua, la funzione

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m \cos(m\theta) + B_m r^m \sin(m\theta))$$

risolve

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_R(\bar{x}, \bar{y}) \\ u = g & \text{in } \gamma_R(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

Tale soluzione è in realtà  $C^\infty$  all'interno di  $\Omega_R(\bar{x}, \bar{y})$  e continua nel cerchio chiuso. Come già sappiamo, è l'unica soluzione. Vogliamo ora semplificarne l'espressione. Per evitare incomprensioni con la notazione, riscriviamo i coefficienti

$$A_m = \frac{1}{\pi R^m} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi$$



$$B_m = \frac{1}{\pi R^m} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi$$

Si ha, scambiando i simboli di serie e di integrale,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^m (\cos(m\varphi)\cos(m\theta) + \sin(m\varphi)\sin(m\theta)) \right] d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^m \cos(m(\varphi - \theta)) \right] d\varphi \end{aligned}$$

Ora

$$\cos(m(\varphi - \theta)) = \operatorname{Re}(e^{im(\varphi - \theta)})$$

quindi la serie vale, per  $r > R$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} e^{i(\varphi - \theta)} \right)^m \right) &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\varphi - \theta)}} \right) - 1 \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{R}{R - r\cos(\varphi - \theta) - i r\sin(\varphi - \theta)} \right) - 1 \end{aligned}$$

razionalizzando

$$= \operatorname{Re} \left( \frac{R^2 - Rr\cos(\varphi - \theta) + i Rr\sin(\varphi - \theta)}{(R - r\cos(\varphi - \theta))^2 + r^2\sin^2(\varphi - \theta)} \right) - 1$$

quindi

$$= \frac{R^2 - Rr\cos(\varphi - \theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)} - 1$$

La soluzione si scrive

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \left( \frac{1}{2} + \frac{Rr\cos(\varphi - \theta) - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \frac{R^2 + r^2 - \cancel{2Rr\cos(\varphi - \theta)} + \cancel{2Rr\cos(\varphi - \theta)} - 2r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)} d\varphi \\ u &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)} d\varphi \end{aligned}$$

I termini da infiniti sono diventati un termine singolo.

Torniamo alle variabili cartesiane

$$\begin{cases} x = x(r, \theta) = \bar{x} + r\cos\theta & \text{in } \Omega_R(\bar{x}, \bar{y}) \\ y = y(r, \theta) = \bar{y} + r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma = \sigma(\varphi) = \bar{x} + R\cos\varphi & \text{in } \gamma_R(\bar{x}, \bar{y}) \\ \eta = \eta(\varphi) = \bar{y} + R\sin\varphi \end{cases}$$

infatti con  $r = R \Rightarrow \theta \rightarrow \varphi$

la quantità

$$R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) = (x(r, \theta) - \sigma(\varphi))^2 + (y(r, \theta) - \eta(\varphi))^2$$

Attraverso il teorema del coseno<sup>2</sup> (o di Carnot) oppure utilizzando le espressioni di  $x(r, \theta)$ ,  $y(r, \theta)$ ,  $\sigma(\varphi)$ ,  $\eta(\varphi)$  (l'angolo opposto ad  $a$  è  $\varphi - \theta$ )

$$a^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta)$$

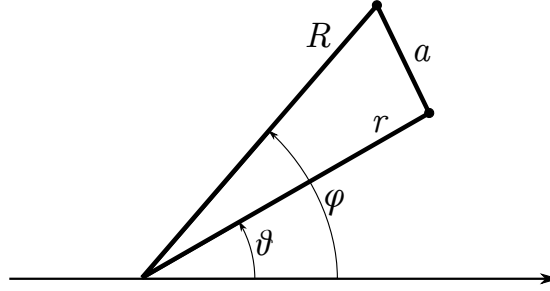


Figura 3.3: Teorema di Carnot

L'elemento di lunghezza infinitesima in  $\gamma_R(\bar{x}, \bar{y})$  è

$$ds = R d\varphi$$

quindi si ottiene l'importante formula di Poisson

$$u(x, y) = \frac{r^2 - (x - \bar{x})^2 - (y - \bar{y})^2}{2\pi R} \int_{\gamma_R} \frac{g(\sigma, \eta)}{(x - \sigma)^2 + (y - \eta)^2} ds$$

Provando con  $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$  si ottiene la prima formula di media.

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{R^2}{2\pi R} \int_{\gamma_r} \frac{g}{R^2} ds = \frac{1}{2\pi R} \int_{\gamma_r} g ds =$$

### Riassumendo

Sia  $g$  continua. L'unica soluzione  $u \in C^2(\Omega_R(\bar{x}, \bar{y})) \cap C(\bar{\Omega}_R(\bar{x}, \bar{y}))$  di

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_R(\bar{x}, \bar{y}) \\ u = g & \text{in } \gamma_R(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

è data da

$$u(x, y) = \frac{r^2 - (x - \bar{x})^2 - (y - \bar{y})^2}{2\pi R} \int_{\gamma_R} \frac{g(\sigma, \eta)}{(x - \sigma)^2 + (y - \eta)^2} ds$$

Tale soluzione è  $C^\infty$  in  $\Omega_R(\bar{x}, \bar{y})$ .

### 3.7.3 Le funzioni con proprietà di media sono armoniche

$e \in C^\infty$

Abbiamo visto che le funzioni armoniche hanno la proprietà di media. Vediamo ora che ogni funzione con proprietà di media è armonica e  $C^\infty$ .

<sup>2</sup>Vedi anche [http://wikipedia.org/wiki/Law\\_of\\_cosines](http://wikipedia.org/wiki/Law_of_cosines)

**Teorema**

Sia  $u$  continua in  $\Omega$  con la proprietà di media nei cerchi di  $\Omega$ . Allora  $u$  è armonica in  $\Omega$  e  $C^\infty$  in  $\Omega$ .

In particolare ogni funzione armonica è  $C^\infty$ .

**Dimostrazione**

Sia  $\Omega_R(\bar{x}, \bar{y})$  un cerchio in  $\Omega$  e consideriamo il problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega_R(\bar{x}, \bar{y}) \\ v = u & \text{in } \gamma_R(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

La funzione  $v$  è armonica quindi ha la proprietà di media come  $u$ . La differenza  $u - v$  ha la proprietà di media (linearità dell'integrale) quindi

$$\max_{\Omega_R(\bar{x}, \bar{y})} |u - v| = \max_{\gamma_R(\bar{x}, \bar{y})} |u - v|$$

per il principio di massimo di cui godono le funzioni con tale proprietà. Sul bordo  $\gamma_R(\bar{x}, \bar{y})$  si ha  $u - v = 0$  quindi  $u = v$  anche in  $\Omega_R(\bar{x}, \bar{y})$ . La funzione  $u$  è quindi armonica e  $C^\infty$  in quanto si rappresenta con la formula di Poisson in  $\Omega_R(\bar{x}, \bar{y})$ . Per l'arbitrarietà di  $\Omega_R(\bar{x}, \bar{y})$ , ciò rimane vero in tutto  $\Omega$ .

**3.7.4 L'equazione di Poisson**

Il metodo della separazione delle variabili si può applicare anche al problema non omogeneo

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega_R(\bar{x}, \bar{y}) \\ u = 0 & \text{in } \gamma_R(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

con  $f$  funzione continua. Passiamo nelle coordinate polari e scriviamo

$$f(r, \theta) = f(\bar{x} + r \cos \theta, \bar{y} + r \sin \theta)$$

Per ogni  $r \in (0, R)$ ,  $f(r, \theta)$  è una funzione periodica di  $\theta$  con  $T = 2\pi$ . Si può quindi scrivere in serie di Fourier.

$$f(r, \theta) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(r) \cos(m\theta) + b_m(r) \sin(m\theta)]$$

Cerchiamo ora una soluzione dello stesso tipo

$$u(r, \theta) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(r) \cos(m\theta) + B_m(r) \sin(m\theta)]$$

dove in questo caso i coefficienti sono incognite.

Imponiamo, con il Laplaciano in coordinate polari,  $\Delta u = f$  termine a termine.

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2$$

Si ottiene

$$\Delta u = \frac{A_0''(r) + \frac{1}{r}A_0'(r)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m''(r) + \frac{1}{r}A_m'(r) - \frac{m^2}{r^2}A_m(r) \right) \cos(m\theta) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left( B_m''(r) + \frac{1}{r}B_m'(r) - \frac{m^2}{r^2}B_m(r) \right) \sin(m\theta)$$

eguagliando i vari termini per la serie

$$A_m'' + \frac{1}{r}A_m' - \frac{m^2}{r^2}A_m = a_m \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ B_m'' + \frac{1}{r}B_m' - \frac{m^2}{r^2}B_m = b_m \quad m = 1, 2, \dots$$

cioè l'equazione di Eulero

$$r^2 B_m'' + r B_m' - m^2 B_m = \underbrace{r^2 b_m}_{\text{Noto}}$$

Sostituiamo  $B_m(r) = y_m(\ln r)$  quindi

$$B_m'(r) = y_m'(\ln r) \frac{1}{r} \\ B_m''(r) = y_m''(\ln r) \frac{1}{r^2} - y_m'(\ln r) \frac{1}{r^2}$$

poi  $t = \ln r \Rightarrow r = e^t$ , perciò

$$y_m''(t) - \cancel{y_m'(t)} + \cancel{y_m'(t)} - m^2 y_m(t) = e^{2t} b_m(e^t)$$

Presa l'omogenea associata

$$y_m''(t) - m^2 y_m(t) = 0 \\ \lambda^2 - m^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm m$$

quindi due basi indipendenti dell'omogenea sono  $e^{mt}$ ,  $e^{-mt}$ .

Si cerca poi una soluzione particolare dell'equazione completa  $\bar{y}_m(t)$  tale che

$$y_m(t) = C_{1m}e^{mt} + C_{2m}e^{-mt} + \bar{y}_m(t)$$

trovata ad esempio con la variazione delle costanti<sup>3</sup> o, se il secondo membro lo permette, per similitudine.

$$B_m(r) = y_m(\ln r) = C_{1m}r^m + \frac{C_{2m}}{r^m} + \bar{y}_m(\ln r)$$

Si applicano ora le condizioni;

quando  $r = R \Rightarrow B_m(R) = 0$

$$C_{1m}R^m + \frac{C_{2m}}{R^m} + \bar{y}_m(\ln R) = 0$$

poi deve essere definito  $B_m(r)$ , cioè deve convergere anche in  $r \rightarrow 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{C_{2m}}{r^m} + \bar{y}_m(\ln r) \right) \text{ FINITO}$$

Attraverso di esse si determinano quindi i  $C_{1m}$  e  $C_{2m}$ .

<sup>3</sup> Vedi anche [http://wikipedia.org/wiki/Variation\\_of\\_parameters](http://wikipedia.org/wiki/Variation_of_parameters)

**Esempio**

$$\begin{cases} \Delta u = 2xy & \text{per } x^2 + y^2 < 1 \\ u = 0 & \text{per } x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dato  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$

$$2xy = 2r^2 \cos \theta \sin \theta = r^2 \sin(2\theta)$$

Si presenta già come serie di Fourier con un unico termine

$$b_2(r) = r^2 = b(r)$$

perciò

$$\begin{aligned} u &= B(r) \sin(2\theta) \\ \Delta &= \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \\ \Delta u &= \left( B''(r) + \frac{1}{r} B'(r) - \frac{4}{r^2} B(r) \right) \sin(2\theta) \\ B''(r) + \frac{1}{r} B'(r) - \frac{4}{r^2} B(r) &= r^2 \\ r^2 B''(r) + r B'(r) - 4B(r) &= r^4 \\ B(r) &= y(\ln r) \\ B'(r) &= \frac{1}{r} y'(\ln r) \\ B''(r) &= \frac{1}{r^2} (y''(\ln r) - y'(\ln r)) \\ y'' - y' + y &= e^{4t} \\ \lambda^2 - \lambda + 1 &= 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2 \\ y_1(t) &= e^{2t} \quad y_2(t) = e^{-2t} \end{aligned}$$

Ora cerco la soluzione particolare per similitudine (cioè usando generalmente  $\bar{y} = ct^n f$ , con  $n$  in modo che non si annulli l'equazione differenziale).

$$\bar{y} = ce^{4t}$$

e messa nell'equazione

$$16ce^{4t} - 4ce^{4t} = e^{4t}$$

che porta a  $c = 1/12$

La soluzione completa è

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{12} e^{4t}$$

ritorniamo ora alla soluzione in  $r$

$$B(r) = C_1 r^2 + \frac{C_2}{r^2} + \frac{1}{12} r^4$$

Per  $r \rightarrow 0$ , si ha la convergenza se  $C_2 = 0$

Con  $r = 1$

$$B(1) = 0 \Rightarrow C_1 + \frac{1}{12} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{12}$$

$$u = \frac{1}{12} (r^4 - r^2) \sin(2\theta) = \frac{1}{12} (r^2 - 1) r^2 \sin(2\theta) = \frac{1}{6} (x^2 + y^2 - 1) xy$$

Immediatamente si vede che, con  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $u = 0$ . Inoltre  $\Delta u = 2xy$ .

## Capitolo 4

# Equazione delle Onde (Iperboliche)

### 4.1 Derivazione del modello

Consideriamo una corda di lunghezza  $L$  e densità lineare di massa  $\rho_0$  costante a riposo.

Sia  $t \geq 0$  il tempo,  $x \in [0, L]$  la posizione in orizzontale,  $u(t, x)$  lo spostamento in verticale dalla posizione di riposo durante la vibrazione della corda che pensiamo perfettamente flessibile. Lo spostamento è assunto solo verticale e con vibrazioni di piccola ampiezza rispetto ad  $L$ . Si trascurano gli attriti.

Si parte dalla conservazione della massa. Indichiamo con  $\rho(t, x)$  la densità lineare di massa al tempo  $t$  nella posizione  $x$ . L'elemento di lunghezza al tempo (fissato)  $t$  è

$$ds = \sqrt{1 + u_x^2} dx$$

visto che si ha a che fare con una curva cartesiana

$$\begin{cases} x = x \\ u = u(t, x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq L$$

nel piano  $x, u$

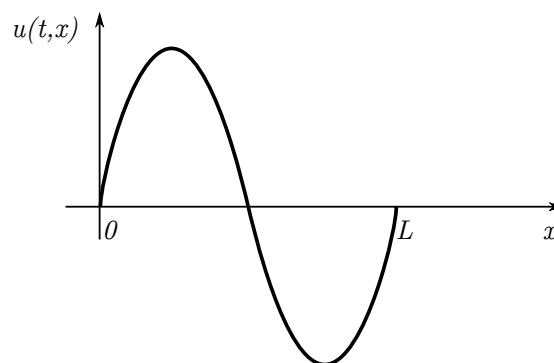


Figura 4.1:  $u(t, x)$  con  $t$  fissato.

La conservazione della massa si scrive

$$\rho ds = \rho_0 dx$$

quindi

$$\rho \sqrt{1 + u_x^2} = \rho_0$$

Ora imponiamo che le componenti orizzontali delle forze si bilancino, dato lo spostamento solo verticale. Assumiamo che l'unica forza non completamente verticale applicata nei punti della corda, sia la tensione, forza diretta tangenzialmente data la corda perfettamente flessibile. Precisamente, il vettore tensione  $\mathbf{T}(t, x)$  indica la forza che la porzione di corda a distanza dal punto  $(x, u(t, x))$  esercita sulla porzione a sinistra. Evidentemente  $-\mathbf{T}(t, x)$  è la forza che la porzione a sinistra esercita su quella a destra.

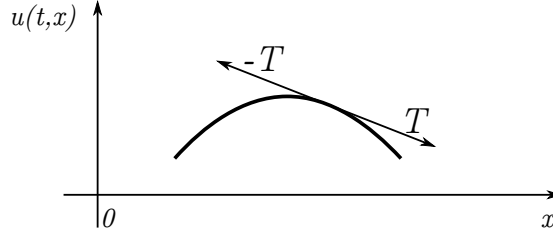


Figura 4.2: Tensione sulla corda.

Indichiamo con  $T(t, x)$  l'intensità di  $\mathbf{T}(t, x)$  e con  $\alpha = \alpha(t, x)$  l'inclinazione della corda rispetto alla posizione di riposo (asse  $x$ ).

$$\operatorname{tg} \alpha = u_x$$

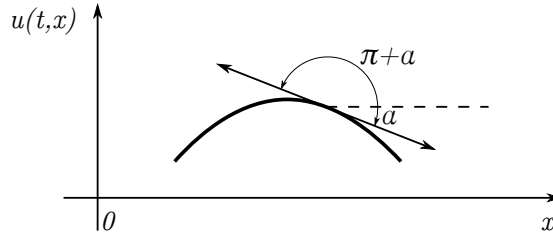
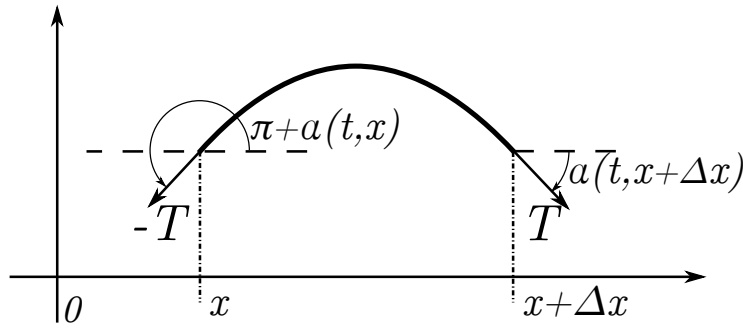


Figura 4.3: Tensione sulla corda con  $\alpha$  mostrato.

Il bilancio della componente orizzontale della tensione in un breve intervallo  $[x, x + \Delta x]$  impone

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

Figura 4.4: Tensione sulla corda tra due punti distanti  $dx$ .

$$T(t, x + \Delta x) \cos \alpha(t, x + \Delta x) - T(t, x) \cos \alpha(t, x) = 0$$

Dividendo per  $\Delta x$  e mandando  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} [T(t, x) \cos \alpha(t, x)] = 0$$

da cui

$$T(t, x) \cos \alpha(t, x) = \tau$$

con  $\tau$  indipendente da  $x$ . La componente orizzontale della tensione, detta trazione, non dipende dalla posizione. Se assumiamo che la tensione sia di intensità proporzionale alla lunghezza della porzione di corda che la esercita, allora  $\tau$  è indipendente anche da  $t$  visto che la lunghezza in orizzontale è costante  $L$ .

Calcoliamo ora la componente verticale della tensione nel tratto di corda corrispondente a  $[x, x + \Delta x]$ . Tenendo conto di  $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$  e di  $T = \tau / \cos \alpha$ , essa vale

$$\begin{aligned} T(t, x + \Delta x) \sin \alpha(t, x + \Delta x) - T(t, x) \sin \alpha(t, x) &= \\ \tau [tg \alpha(t, x + \Delta x) - tg \alpha(t, x)] &= \\ \tau [u_x \alpha(t, x + \Delta x) - u_x \alpha(t, x)] &= \tau \int_x^{x+\Delta x} u_{xx}(t, y) dy \end{aligned}$$

Essendo una trazione, essa corrisponde ad una forza.

Denotiamo ora con  $f(t, x)$  gli eventuali carichi totali per unità di massa; se il peso non è trascurabile  $f(t, x) = -g + F(t, x)$  dove  $g$  è l'accelerazione di gravità ed  $F$  corrisponde ad altri ulteriori carichi. Quindi

$$= \tau \int_x^{x+\Delta x} u_{xx}(t, y) dy + \int_x^{x+\Delta x} f(t, y) \rho(t, y) \sqrt{1 + u_x^2(t, y)} dy$$

Per il principio fondamentale della dinamica, forza = massa · accelerazione rappresenta sempre una forza

$$\underbrace{\int_x^{x+\Delta x} u_{tt}(t, y) \rho(t, y) \sqrt{1 + u_x^2(t, y)} dy}_{\text{accelerazione} \cdot \text{massa}}$$



perciò

$$\int_x^{x+\Delta x} u_{tt}(t, y) \rho(t, y) \sqrt{1 + u_x^2(t, y)} dy = \\ \tau \int_x^{x+\Delta x} u_{xx}(t, y) dy + \int_x^{x+\Delta x} f(t, y) \rho(t, y) \sqrt{1 + u_x^2(t, y)} dy$$

che può essere scritta

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho_0 u_{tt}(t, y) dy = \int_x^{x+\Delta x} \tau u_{xx}(t, y) dy + \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 f(t, y) dy \\ \int_x^{x+\Delta x} [\rho_0 u_{tt} - \tau u_{xx} - \rho_0 f] dy = 0$$

Per l'arbitrarietà del tratto  $[x, x + \Delta x]$ , deve essere

$$\rho_0 u_{tt} - \tau u_{xx} - \rho_0 f$$

Dividendo per  $\rho_0$  ed indicando  $c^2 = \tau/\rho_0$  si ha l'equazione

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f$$

La costante  $c$  ha la dimensione di una velocità.

## 4.2 Problemi ben posti

Esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati si hanno imponendo le condizioni iniziali

$$u(0, x) = g(x) \quad (\text{spostamento iniziale}) \\ u_t(0, x) = h(x) \quad (\text{velocità iniziale})$$

e selezionando uno tra i seguenti tipi di condizioni agli estremi.

### Dirichlet

$$u(t, 0) = a(t), \quad u(t, L) = b(t)$$

Si prescrive lo spostamento agli estremi. In particolare gli estremi sono fissati per  $a(t) = b(t) = 0$

### Neumann

$$\tau u_x(t, 0) = a(t), \quad -\tau u_x(t, L) = b(t)$$

Si prescrive la componente verticale della tensione agli estremi.

### 4.2.1 Energia

L'energia immagazzinata dalla corda è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. L'energia cinetica, dato

$$dL = Fdx = madx = m \frac{dv}{dt} dx = m dv \frac{dx}{dt} = m v dv \Rightarrow \int_0^t dL = m \int_0^t v dv$$

$$L = \frac{1}{2} m v^2$$

perciò

$$E_{cin}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_0 u_t^2(t, x) dx$$

L'energia potenziale vale il lavoro della trazione. Calcoliamo l'allungamento per un tratto di corda  $\Delta x$  a riposo. Vale

$$\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2} dy - \Delta x = \int_x^{x+\Delta x} (\sqrt{1+u_x^2} - 1) dy$$

L'approssimazione lineare di  $\sqrt{1+y} - 1$  è  $\frac{1}{2}y$  per  $y \rightarrow 0$ , quindi l'approssimazione al primo ordine dell'allungamento è

$$\frac{1}{2} u_x^2 \Delta x$$

e l'energia potenziale vale

$$E_{pot}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \tau u_x^2(t, x) dx$$

e l'energia totale è data da

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_0 u_t^2 + \tau u_x^2] dx$$

Calcoliamo la variazione dell'energia:

$$E'(t) = \int_0^L [\rho_0 u_t u_{tt} + \tau u_x u_{xt}] dx$$

Integriamo per parti il termine corrispondente all'energia potenziale

$$\int_0^L u_x u_{tx} dx = [u_x u_t]_0^L - \int_0^L u_t u_{xx} dx$$

avendo considerato continue le derivate e quindi lecito applicare il teorema di Schwartz per invertire l'ordine di integrazione. Quindi

$$\int_0^L u_x u_{tx} dx = \underbrace{[u_x(t, L)u_t(t, L) - u_x(t, 0)u_t(t, 0)]}_{G(t)} - \int_0^L u_t u_{xx} dx$$

Dunque

$$E'(t) = \int_0^L u_t (\rho_0 u_{tt} - \tau u_{xx}) dx + \tau G(t)$$

$$= \int_0^L u_t f dx + \tau G(t)$$

tenuto conto dell'equazione  $\rho_0 u_{tt} - \tau u_{xx} = f$ .

In particolare, per  $f = 0$  (assenza di carichi) e per  $G = 0$  si ha  $E'(t) = 0$  da cui

$$E(t) = \text{costante}$$

cioè l'energia è conservata.

$G = 0$  si realizza con gli estremi fissati

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0$$

in quanto

$$u_t(t, 0) = u_t(t, L) = 0$$

o con tensione verticale nulla agli estremi

$$u_x(t, 0) = u_x(t, L) = 0$$

L'energia conservata è quella iniziale

$$\begin{aligned} E(t) = E(0) &= \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_0 u_t^2(0, x) + \tau u_x^2(0, x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_0 h^2(x) + \tau g'^2(x)] dx \end{aligned}$$

#### 4.2.2 Unicità tramite l'energia

Siano  $u_1, u_2$  due soluzioni del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \\ u(0, x) = g(x) \\ u_t(0, x) = h(x) \\ u(t, 0) = a(t), \quad u(t, L) = b(t) \end{cases}$$

la differenza  $w = u_1 - u_2$  risolve il problema

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \\ w(0, x) = 0 \\ w_t(0, x) = 0 \\ w(t, 0) = 0, \quad w(t, L) = 0 \end{cases}$$

L'equazione per  $w$  è omogenea con dati di Dirichlet nulli, quindi l'energia si conserva e vale per ogni  $t \geq 0$  l'energia iniziale. Poiché i dati iniziali sono anch'essi nulli, l'energia iniziale è nulla. In definitiva  $E(t) = 0$  cioè

$$\int_0^L [\rho_0 w_t^2 + \tau w_x^2] = 0$$

da cui  $w_t = 0$  e  $w_x = 0$ .

La funzione  $w(t, x)$  è quindi costante in  $(t, x)$ , ed essendo  $w = 0$  per  $t = 0$ , si ha

$$w(t, x) = 0 \quad \text{per ogni } (t, x)$$

Il problema di Dirichlet ha soluzione unica.

Stesse considerazioni per il problema di Neumann.

### 4.2.3 Esistenza e regolarità della soluzione

Consideriamo la vibrazione di una corda fissata agli estremi e senza carichi

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(0, x) = g(x) \\ u_t(0, x) = h(x) \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Cominciamo nel cercare soluzioni di

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = 0 \end{cases}$$

con il metodo della separazione delle variabili imponendo

$$\begin{aligned} u(t, x) &= v(t)w(x) \\ w(0) &= w(L) = 0 \end{aligned}$$

si ha

$$v''(t)w(x) = c^2 w''(x)v(t)$$

da cui

$$\frac{1}{c^2} \frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}$$

che si può realizzare solo con

$$\frac{1}{c^2} \frac{v''(t)}{v(t)} = k = \frac{w''(x)}{w(x)}$$

con  $k$  costante.

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} w'' = kw \\ w(0) = 0, \quad w(L) = 0 \end{cases}$$

Si hanno soluzioni non banali solo per  $k = -\mu < 0$  perché per  $k > 0$  o  $k = 0$  le condizioni agli estremi portano a  $w = 0$ , essendo in tali casi

$$w = ae^{x\sqrt{k}} + be^{-x\sqrt{k}} \quad \text{o} \quad w = ax + b$$

il rispettivo integrale generale. In entrambi i casi

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Sia dunque  $k = -\mu < 0$  che porta

$$w = a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x)$$

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \sin(\mu L) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo soluzioni non nulle per

$$\mu = \mu_m = \frac{m\pi}{L} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

date da

$$w_m = b_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

Veniamo all'equazione

$$v''(t) = -\mu^2 t^2 v(t)$$

per il fattore dipendente da  $t$ . Le soluzioni sono date da

$$v = a \cos(\mu ct) + b \sin(\mu ct)$$

Abbiamo così trovato le infinite soluzioni di

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = 0 \end{cases}$$

date da

$$u_m = \underbrace{[a_m \cos(\mu ct) + b_m \sin(\mu ct)]}_{A_m(t)} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$u_m = \left[ a_m \cos\left(\frac{mc\pi}{L}t\right) + b_m \sin\left(\frac{mc\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

con  $m = 1, 2, 3, \dots$

Queste sono dette le “vibrazioni possibili” della corda fissata agli estremi. La forma della vibrazione è prescritta dalla funzione  $\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$  con ampiezza  $A_m(t)$  di segno ed intensità variabile nel tempo, ma periodica di periodo minimo

$$T_m = 2\pi \frac{L}{mc\pi} = \frac{2L}{mc}$$

e la relativa frequenza

$$\frac{1}{T_m} = m \frac{c}{2L}$$

Come si può notare in fig. 4.5, dopo un tempo  $T = \frac{2L}{c}$  si rivedono le stesse configurazioni: per  $u_1$  è la prima volta, per  $u_2$  la seconda e per  $u_3$  la terza volta che si osserva lo stesso grafico.

La sovrapposizione di vibrazioni con frequenza tutte multiple della stessa frequenza di base

$$\frac{1}{T_1} = \frac{c}{2L}$$

produce il suono armonioso della corda vibrante. La sovrapposizione

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ a_m \cos\left(\frac{mc\pi}{L}t\right) + b_m \sin\left(\frac{mc\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

è la soluzione completa.

Si definiscono quindi le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} u(0, x) &= g(x) \\ u_t(0, x) &= h(x) \end{aligned}$$

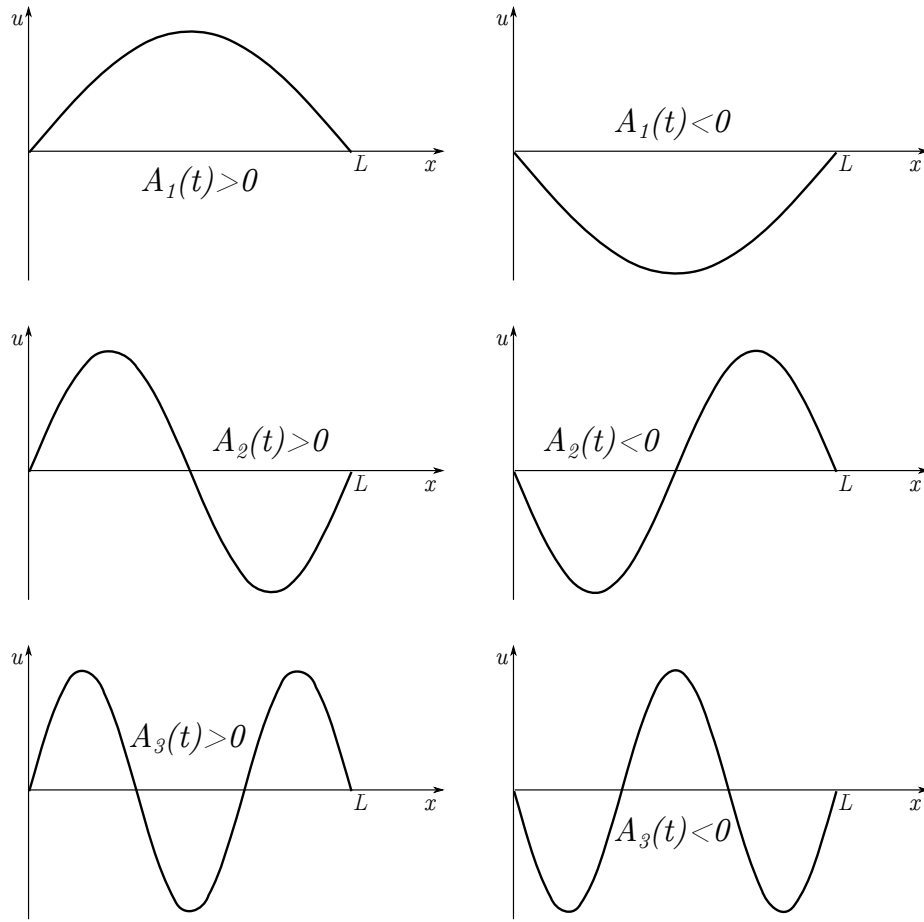


Figura 4.5: Alcune “istantanee” delle prime tre vibrazioni possibili a  $t$  fissato.

Ponendo  $t = 0$  nell'espressione di  $u$  e  $u_t$

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

e

$$h(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mc\pi}{L} b_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

Si sviluppano i dati  $g(x)$  e  $h(x)$  in serie di sole sinusoidi per  $x \in [0, L]$  effettuando il prolungamento continuo dispari all'intervallo  $[-L, L]$ .

I coefficienti sono quindi forniti da

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx$$

$$b_m = \frac{2}{mc\pi} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx$$

La funzione  $u(t, x)$  così trovata risolve il problema almeno nel senso delle distribuzioni. Affinché sia una soluzione in senso usuale occorre che si possa derivare due volte in  $dt$  ed in  $dx$  sotto il segno di serie. Questo è possibile se i coefficienti  $a_m$  e  $b_m$  decadono almeno come  $m^4$ : derivando due volte si producono addendi con coefficienti  $m_m^a$ ,  $m^2 b_m$ . La condizione

$$m^2 |a_m| \leq \frac{cost.}{m^2}, \quad m^2 |b_m| \leq \frac{cost.}{m^2}$$

è sufficiente per garantire poi la convergenza dominata della serie ottenuta derivando termine a termine.

La regolarità  $C^4$  per  $g$  e  $C^3$  per  $h$  ( $b_m$  ha già un  $m$  a denominatore) è una ipotesi sufficiente.

Osserviamo una diversità fondamentale con l'equazione della diffusione. Per questa ultima, qualunque sia la regolarità del dato iniziale, i coefficienti di Fourier della soluzione per  $t > 0$  decadono come  $e^{-m^2 \pi^2 D t / L}$  cioè come  $e^{-\alpha m^2}$  per  $m \rightarrow +\infty$ . La soluzione ha in quel caso tutte le derivate in  $dt$  e in  $dx$  per  $t > 0$ . È questo l'effetto regolarizzante della diffusione, assente per l'equazione della corda vibrante. Ora la soluzione è  $C^k$  se i dati sono  $g \in C^{k+2}$  e  $h \in C^{k+1}$ ,  $k \geq 2$ . La regolarità dei dati fornisce la regolarità della soluzione.

Non abbiamo ora soluzioni stazionarie né regime transitorio. In assenza di attrito, la corda vibra all'infinito con una sovrapposizione di vibrazioni periodiche stabilite dai dati iniziali.

#### 4.2.4 Dipendenza continua dai dati

Indichiamo con  $\|u(t, \cdot)\|_2$  la norma in  $L^2$  della soluzione al tempo  $t$  fissato

$$\|u(t, \cdot)\|_2 = \left( \int_0^L |u(t, x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Per Parseval

# Elenco delle figure

2.1	Funzione $g(x)$ .	12
2.2	Prolungamento periodico dispari.	12
2.3	Soluzione stazionaria.	13
2.4	Valor medio di $g(x)$ con barra isolata.	14
2.5	$u(t, x)$ con $t_1, t_2$ fissati tali che $t_2 > t_1 > 0$ .	15
2.6	La massa resta costante al variare di $t$ .	20
2.7	Gradino unitario.	21
3.1	Dominio normale per la dimostrazione delle formule di Green . .	29
3.2	Circonferenza di frontiera $\gamma_R$	33
3.3	Teorema di Carnot	41
4.1	$u(t, x)$ con $t$ fissato.	45
4.2	Tensione sulla corda.	46
4.3	Tensione sulla corda con $\alpha$ mostrato.	46
4.4	Tensione sulla corda tra due punti distanti $dx$ .	47
4.5	Alcune “istantanee” delle prime tre vibrazioni possibili a $t$ fissato.	53