Материалы к экзамену

Именные теоремы

Бэр (о полном метрическом пространстве): Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде счетного объединения своих нигде не плотных множеств.

Хаусдорф (о пополнении): Для любого неполного метрического пространства существует его пополнение.

Александер (о предбазе):

Тихонов (о компактности декартова произведения компактных ТП):

Критерий Фреше (топологическая компактность в МП): (X, ρ) — МП, подмножество $S \subset X$. Следующие 3 свойства эквивалентны:
1) S — компактное множество; 2) S — вполне ограниченное множество и (S, ρ) — полное метрическое пространство; 3) S — секвенциально компактное множество.

Арцела, Асколи: (K, ρ) — компактное МП, $C(K)$ — пространство непрерывных на компакте K функций, $S \subset C(K)$. Множество S является вполне ограниченным множеством тогда и только тогда, когда:
1) S — ограниченное множество;
2) S — равностепенно непрерывное множество.

Рисс, Колмогоров:

Рисс (лемма о почти перпендикуляре): $(X, \|\cdot\|_X)$ — ЛНП, $L \subset X$ — собственное замкнутое подпространство. Тогда

$$\forall \varepsilon in (0,1) \ \ \exists z_\varepsilon : \|z_\varepsilon\|_X = 1, \rho(z_\varepsilon, L) > 1 - \varepsilon.$$

Рисс (о некомпактности сферы): В бесконечномерном ЛНП единичная сфера не является компактным множеством. [простое следствие леммы о почти перпендикуляре]

Банах (об открытом отображении): $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ — банаховы пространства, $A \in L(X, Y)$ — сюръективный оператор. Тогда A является открытым отображением.

Банах (об обратном операторе): $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ — банаховы пространства, $A \in L(X, Y)$. Оператор A непрерывно обратим $A^{-1} \in L(Y, X)$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} KerA = \{0\} \\ ImA = Y \end{cases}$.

Хан, Банах (реально это частный случай более общего утверждения): $(X, \|\cdot\|_X)$ — комплексное ЛНП, $L \subset X$ — подпространство, $f : L \to \mathbb{C}$ — линейный непрерывный функционал на L. Тогда существует линейный непрерывный функционал $g : X \to \mathbb{C}$ на X такой, что:
1) $f\Big|_L = g\Big|_L$;
2) $\|f\| = \|g\|$.
4 следствия теоремы Хана-Банаха:

Рисс (о проекции): H — ГП, $S \subset H$ — выпуклое замкнутое множество. Тогда для любого элемента ГП существует и единствена метрическая проекция этого элемента на множество S :

$$\forall x \in H \quad \exists! y \in S : \rho(x, S) = \|x - y\|.$$

Рисс (об ортогональном дополнении): H — ГП, $L \subset H$ — замкнутое подпространство. Тогда

$$H = L \oplus L^{\perp}.$$

Рисс, Фреше: H — ГП, $f \in H^*$ — линейный непрервный функционал на H. Тогда существует и единственен $z_f \in H$ такой, что:
1) $\forall x \in H : f(x) = (x, z_f)$;
2) $\|f\| = \|z_f\|_H$.
Отображение $z : H^* \to H$ является взаимооднозначным, изометричным и сопряженно-линейным.
Следствием этой теоремы является **рефлексивность произвольного ГП**.

Шур В пространстве $(l_1, \|\cdot\|_1)$ всякая слабо сходящаяся последовательность сходится сильно.

Мазур: $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Пусть $A \subset X$ — выпуклое множество. Тогда мн-во A слабо замкнуто тогда и только тогда, когда оно сильно замкнуто.

Банах, Алаоглу: $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ является сепарабельным пространством. Тогда любой замкнутый шар в сопряженном пространстве $\forall R > 0 \quad B_R^*(0) \subset X^*$ является слабо* компакнтым.

Банах, Тихонов: (является следствием теоремы Банаха, Алаоглу) $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ является сепарабельным и рефлексивным пространством. Тогда любая ограниченная последовательность в пространстве $(X, \|\cdot\|)$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.

Банах, Штейнгауз: $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП, причем $(X, \|\cdot\|_X)$ банахово пространство. Пусть последовательность линейных непрерывных операторов $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ является поточечно ограниченной: $\forall x \in X \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\|_Y < +\infty$. Тогда она является ограниченной в пространстве $L(X,Y) : \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$.
Следствием этой теоремы служит ограниченность слабо и слабо* сходящихся последовательностей.

Фредгольм: $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП, $A \in L(X,Y)$. Тогда

$$KerA =^{\perp} (ImA^*), KerA^* = (ImA)^{\perp}.$$

Следствие: $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП, $A \in L(X,Y)$. Тогда

$$(KerA)^{\perp} = (^{\perp}(ImA^*))^{\perp} \supset [ImA^*],^{\perp}(KerA^*) =^{\perp} ((ImA)^{\perp}) = [ImA].$$

Если X — рефлексивно, то

$$(KerA)^{\perp} = (^{\perp}(ImA^*))^{\perp} = [ImA^*].$$

Гельфанд, Мазур: A — банахова алгебра, в которой каждый ненулевой элемент обратим. Тогда A изометрически изоморфна полю комплексных чисел.

Хелингер, Теплиц: H — ГП, A — линейный симметричный оператор на всем H. Тогда A является непрерывным, а следовательно самосопряженным оператором.

Гильберт, Шмидт:

Спектральная теорема:

Основные определения

Топологическое пространство

Метрическое пространство

Нормированное пространство

Гильбертово пространство

Компактность

Виды операторов

Ограниченный оператор:

Норма оператора:

Ограниченный снизу оператор:

Обратный оператор:

Компактный оператор:

Сопряженный оператор:

Нормальный оператор:

Унитарный оператор:

Оператор проекции:

Симметричный оператор:

Самосопряженный оператор:

Неотрицательный оператор:

Спектр

Спектр:

Резольвентное множество:

Резольвента:

Спектральный радиус:

Точечный спектр оператора:

Непрерывный спектр оператора:

Остаточный спектр оператора:

Важные теоремы

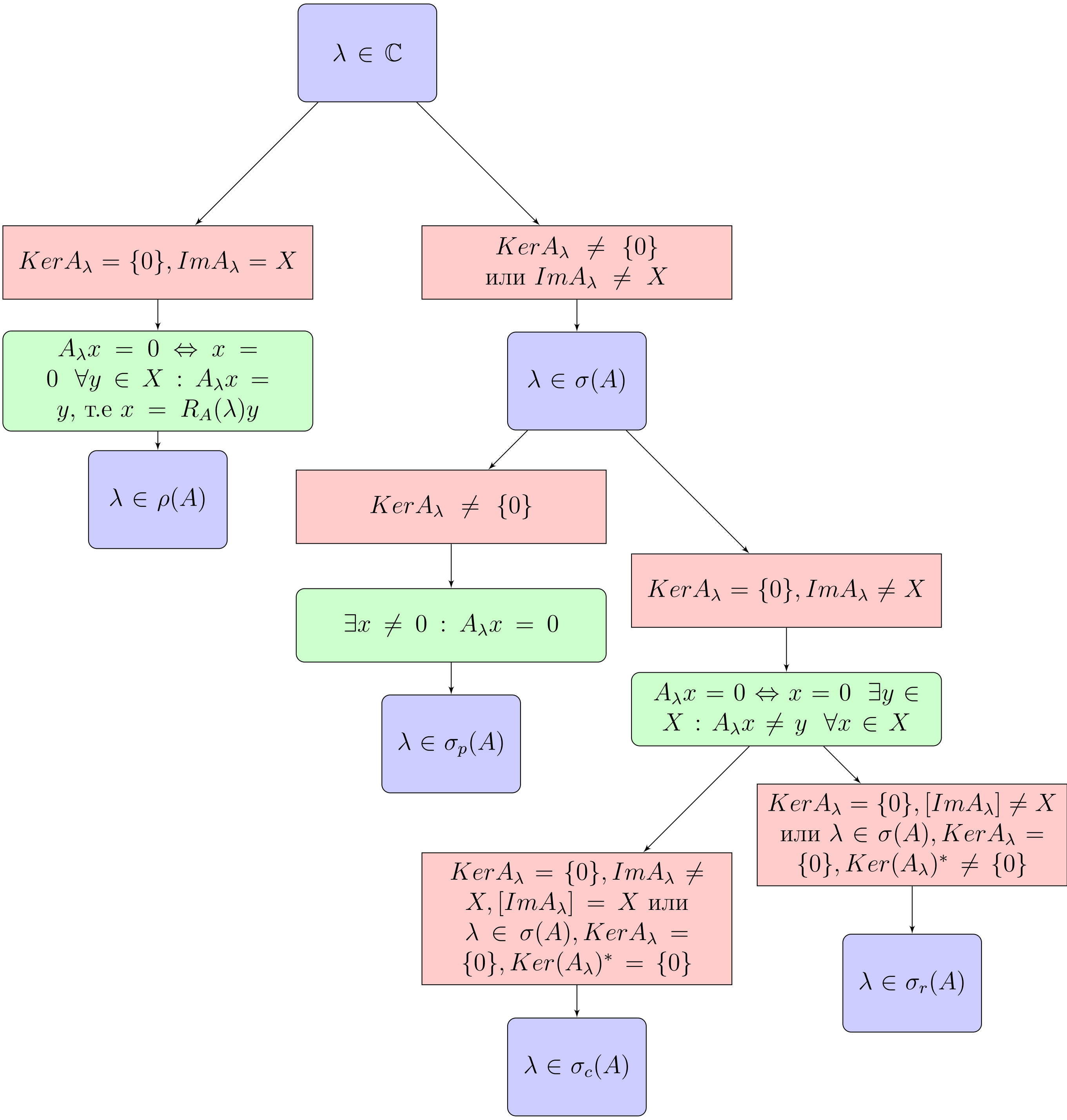
Критерий базы ТП X — множество. Семейство β подмножеств множества X является базой некоторой топологии τ в X тогда и только тогда, когда:
1) $\forall x \in X : \exists V \in \beta : x \in V,$ то есть $X = \bigcup\limits_{V \in \beta} V;$
2) $\forall V_1, V_2 \in \beta \;\; \forall x \in V_1 \cap V_2 \;\; \exists W \in \beta : x \in W \subset V_1 \cap V_2.$

Критерий несепарабельности МП Метрическое пространство является несепарабельным тогда и только тогда, когда в нем существует более чем счетное $\varepsilon_0 > 0$ - дырявое множество.

Принцип вложенных шаров Метрическое пространство является полным тогда и только тогда, когда произвольная последовательность замкнутых вложенных шаров, чьи радиусы стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.
Контрпример. Полное МП и последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых не стремятся к нулю, имеет пустое пересечение.

Теорема о полноте пространства операторов $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП, причем $(Y, \|\cdot\|_X)$ банахово пространство. Тогда $(L(X, Y), \|\cdot\|_A)$ является банаховым пространством.
Тривиальным следствием этого факта является банаховость произвольного сопряженного пространства, так как $X^* = L(X, \mathbb{C})$.

Схема определения частей спектра линейного непрерывного оператора



Известные операторы