

## 1. Теоретический минимум

1. Дайте определение ошибки первого и второго рода, критической области.
2. Укажите формулу доверительного интервала с уровнем доверия  $(1 - \alpha)$  для вероятности успеха, построенного по случайной выборке большого размера из распределения Бернулли  $Bin(1, p)$ .

Для следующего блока вопросов предполагается, что величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  независимы и нормальны  $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ . Укажите формулу для статистики:

3. Статистика, проверяющая гипотезу о математическом ожидании при известной дисперсии  $\sigma^2$ , и её распределение при справедливости основной гипотезы  $H_0: \mu = \mu_0$ .
4. Статистика, проверяющая гипотезу о математическом ожидании при неизвестной дисперсии  $\sigma^2$ , и её распределение при справедливости основной гипотезы  $H_0: \mu = \mu_0$ .

Для следующего блока вопросов предполагается, что есть две независимые случайные выборки: выборка  $X_1, X_2, \dots$  размера  $n_x$  из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu_x; \sigma_x^2)$  и выборка  $Y_1, Y_2, \dots$  размера  $n_y$  из нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu_y; \sigma_y^2)$ .

Укажите формулу для статистики или границ доверительного интервала:

5. Доверительный интервал для разницы математических ожиданий, когда дисперсии известны;
6. Доверительный интервал для разницы математических ожиданий, когда дисперсии не известны, но равны;
7. Статистика, проверяющая гипотезу о разнице математических ожиданий при известных дисперсиях, и её распределение при справедливости основной гипотезы  $H_0: \mu_x - \mu_y = \Delta_0$ ;
8. Статистика, проверяющая гипотезу о разнице математических ожиданий при неизвестных, но равных дисперсиях, и её распределение при справедливости основной гипотезы  $H_0: \mu_x - \mu_y = \Delta_0$ ;
9. Статистика, проверяющая гипотезу о равенстве дисперсий, и её распределение при справедливости основной гипотезы  $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ .

## 2. Задачный минимум

1. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2 = 4$ . Используя реализацию случайной выборки,  $x_1 = -1.11$ ,  $x_2 = -6.10$ ,  $x_3 = 2.42$ , постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $\mu$ .
2. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ . Используя реализацию случайной выборки,  $x_1 = -1.11$ ,  $x_2 = -6.10$ ,  $x_3 = 2.42$ , постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $\mu$ .
3. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ . Используя реализацию случайной выборки,  $x_1 = 1.07$ ,  $x_2 = 3.66$ ,  $x_3 = -4.51$ , постройте 80%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $\sigma^2$ .

4. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами  $(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, причем  $\sigma_X^2 = 2$  и  $\sigma_Y^2 = 1$ . Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42, y_1 = -2.29, y_2 = -2.91,$$

постройте 95%-ый доверительный интервал для разности математических ожиданий  $\mu_X - \mu_Y$ .

5. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами  $(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно. Известно, что  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ . Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = 1.53, x_2 = 2.83, x_3 = -1.25, y_1 = -0.8, y_2 = 0.06,$$

постройте 95%-ый доверительный интервал для разности математических ожиданий  $\mu_X - \mu_Y$ .

6. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром  $p$ . Используя реализацию случайной выборки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , в которой 55 нулей и 45 единиц, постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $p$ .

7. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  — независимые случайные выборки из распределения Бернулли с параметрами  $p_X \in (0; 1)$  и  $p_Y \in (0; 1)$  соответственно. Известно, что  $n = 100$ ,  $\bar{x}_n = 0.6$ ,  $m = 200$ ,  $\bar{y}_m = 0.4$ . Постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для отношения разности вероятностей успеха  $p_X - p_Y$ .

8. Дядя Вова (Владимир Николаевич) и Скрипач (Гедеван) зарабатывают на Плюке чатлы, чтобы купить гравиапу. Число заработанных за  $i$ -ый день чатлов имеет распределение Пуассона с неизвестным параметром  $\lambda$ . Заработки в различные дни независимы. За прошедшие 100 дней они заработали 250 чатлов.

С помощью метода максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра  $\lambda$ .

9. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из показательного (экспоненциального) распределения с плотностью распределения

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

где  $\lambda > 0$  — неизвестный параметр распределения. Известно, что  $n = 100$  и  $\bar{x}_n = 0.52$ .

С помощью метода максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для параметра  $\lambda$ .

10. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием  $\mu$  и известной дисперсией  $\sigma^2 = 4$ . Объем выборки  $n = 16$ . Для тестирования основной гипотезы  $H_0 : \mu = 0$  против альтернативной гипотезы  $H_1 : \mu = 2$  вы используете критерий: если  $\bar{X} \leq 1$ , то вы не отвергаете гипотезу  $H_0$ , в противном случае вы отвергаете гипотезу  $H_0$  в пользу гипотезы  $H_1$ . Найдите

- а) вероятность ошибки 1-го рода;
- б) вероятность ошибки 2-го рода;
- в) мощность критерия;

11. На основе случайной выборки, содержащей одно наблюдение  $X_1$ , тестируется гипотеза  $H_0 : X_1 \sim U[-0.7; 0.3]$  против альтернативной гипотезы  $H_1 : X_1 \sim U[-0.3; 0.7]$ . Рассматривается критерий вида: если  $X_1 > c$ , то гипотеза  $H_0$  отвергается в пользу гипотезы  $H_1$ . Выберите константу  $c$  так, чтобы уровень значимости этого критерия составлял 0.1.
12. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2 = 4$ . Уровень значимости  $\alpha = 0.1$ . Используя реализацию случайной выборки  $x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42$ , проверьте следующую гипотезу: 
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0, \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$$
13. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из нормального распределения с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ . Уровень значимости  $\alpha = 0.1$ . Используя реализацию случайной выборки  $x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42$ , проверьте следующую гипотезу: 
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0, \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$$
14. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами  $(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно, причем  $\sigma_X^2 = 2$  и  $\sigma_Y^2 = 1$ . Уровень значимости  $\alpha = 0.05$ . Используя реализации случайных выборок  $x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42, y_1 = -2.29, y_2 = -2.91$ , проверьте следующую гипотезу: 
$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y, \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$$
15. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами  $(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно. Известно, что  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ . Уровень значимости  $\alpha = 0.05$ . Используя реализации случайных выборок  $x_1 = 1.53, x_2 = 2.83, x_3 = -1.25, y_1 = -0.8, y_2 = 0.06$ , проверьте следующую гипотезу: 
$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y, \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$$
16. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами  $(\mu_X, \sigma_X^2)$  и  $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  соответственно. Уровень значимости  $\alpha = 0.05$ . Используя реализации случайных выборок  $x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42, y_1 = -2.29, y_2 = -2.91$ , проверьте следующую гипотезу: 
$$\begin{cases} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \\ H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \end{cases}$$
17. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  — случайная выборка из распределения Бернулли с неизвестным параметром  $p \in (0; 1)$ . Имеется следующая информация о реализации случайной выборки, содержащей  $n = 100$  наблюдений:  $\sum_{i=1}^n x_i = 60$ . На уровне значимости  $\alpha = 0.05$  требуется протестировать следующую гипотезу: 
$$\begin{cases} H_0 : p = 0.5, \\ H_1 : p > 0.5 \end{cases}$$
18. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и  $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$  — две независимые случайные выборки из распределения Бернулли с неизвестными параметрами  $p_X \in (0; 1)$  и  $p_Y \in (0; 1)$ . Имеется следующая информация

о реализациях этих случайных выборок:  $n = 100, \sum_{i=1}^n x_i = 60, m = 150, \sum_{j=1}^m y_j = 50$ . На уровне значимости  $\alpha = 0.05$  требуется протестировать следующую гипотезу:  $\begin{cases} H_0 : p_X = p_Y, \\ H_1 : p_X \neq p_Y \end{cases}$

19. Вася Сидоров утверждает, что ходит в кино в два раза чаще, чем в спортзал, а в спортзал в два раза чаще, чем в театр. За последние полгода он 10 раз был в театре, 17 раз – в спортзале и 39 раз в кино. На уровне значимости 5% проверьте утверждение Васи.
20. Вася очень любит тестировать статистические гипотезы. В этот раз Вася собирается проверить утверждение о том, что его друг Пётр звонит Васе исключительно в то время, когда Вася ест. Для этого Вася трудился целый год и провел серию из 365 испытаний. Результаты приведены в таблице ниже.

	Пётр звонит	Пётр не звонит
Вася ест	200	40
Вася не ест	25	100

На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что Пётр звонит Васе независимо от момента приема пищи Васей.

21. Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием  $\mu \in \mathbb{R}$  и дисперсией  $v > 0$ , где  $\mu$  и  $v$  – неизвестные параметры. Известно, что выборка состоит из  $n = 100$  наблюдений,  $\sum_{i=1}^n x_i = 30, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 146$ . При помощи теста отношения правдоподобия протестируйте гипотезу  $H_0 : v = 1$  на уровне значимости 5%.

### 3. Ответы

- $\left[-1.6 - 1.65 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}; -1.6 + 1.65 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$
- $\left[-1.6 - 2.92 \cdot \sqrt{\frac{18.33}{3}}; -1.6 + 2.92 \cdot \sqrt{\frac{18.33}{3}}\right]$
- $\left[\frac{17.43 \cdot 2}{4.61}; \frac{17.43 \cdot 2}{0.21}\right]$
- $\left[-1.6 - (-2.6) - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}; -1.6 - (-2.6) + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}\right]$
- $\left[1.04 - (-0.37) - 3.18 \cdot \sqrt{3.02} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}; 1.04 - (-0.37) + 3.18 \cdot \sqrt{3.02} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}\right]$
- $\left[0.45 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{100}}; 0.45 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{100}}\right]$
- $\left[0.6 - 0.4 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{100} + \frac{0.4 \cdot 0.6}{200}}; 0.6 - 0.4 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{100} + \frac{0.4 \cdot 0.6}{200}}\right]$
- $\left[2.5 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{40}}; 2.5 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{40}}\right]$
- $\left[\frac{1}{0.52} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{100 \cdot 0.52^2}}; \frac{1}{0.52} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{100 \cdot 0.52^2}}\right]$

10.    а)  $\approx 0.02$   
      б)  $\approx 0.02$   
      в)  $\approx 0.98$
11. 0.2
12.  $z_{obs} \approx -1.39, z_{crit} = 1.28$ , нет оснований отвергать  $H_0$ .
13.  $t_{obs} \approx -0.65, t_{crit} = 1.89$ , нет оснований отвергать  $H_0$ .
14.  $z_{obs} \approx 0.93, z_{crit} = -1.65$ , нет оснований отвергать  $H_0$ .
15.  $t_{obs} \approx 0.89, t_{crit} = -2.35$ , нет оснований отвергать  $H_0$ .
16.  $F_{obs} \approx 95.37, F_{crit} = 199.5$ , нет оснований отвергать  $H_0$ .
17.  $z_{obs} \approx 2.04, z_{crit} = 1.65$ , основная гипотеза отвергается.
18.  $z_{obs} \approx 4.16, z_{crit} = 1.96$ , основная гипотеза отвергается.
19.  $\gamma_{obs} \approx 0.26, \gamma_{crit} = 5.99$ , нет оснований отвергать  $H_0$ .
20.  $\gamma_{obs} \approx 139.4, \gamma_{crit} = 3.84$ , основная гипотеза отвергается.
21.  $LR_{obs} \approx 5.5, LR_{crit} = 3.84$ , основная гипотеза отвергается.