1. Теоретический минимум

1. Дайте определение ошибки первого и второго рода, критической области.
2. Укажите формулу доверительного интервала с уровнем доверия $(1-\alpha)$ для вероятности успеха, построенного по случайной выборке большого размера из распределения Бернулли $Bin(1,p)$.

Для следующего блока вопросов предполагается, что величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и нормальны $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Укажите формулу для статистики:

3. Статистика, проверяющая гипотезу о математическом ожидании при известной дисперсии σ^2, и её распределение при справедливости основной гипотезы H_0: $\mu=\mu_0$.
4. Статистика, проверяющая гипотезу о математическом ожидании при неизвестной дисперсии σ^2, и её распределение при справедливости основной гипотезы H_0: $\mu=\mu_0$.

Для следующего блока вопросов предполагается, что есть две независимые случайные выборки: выборка X_1, X_2, ... размера n_x из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu_x;\sigma_x^2)$ и выборка Y_1, Y_2, ... размера n_y из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu_y;\sigma_y^2)$.

Укажите формулу для статистики или границ доверительного интервала:

5. Доверительный интервал для разницы математических ожиданий, когда дисперсии известны;
6. Доверительный интервал для разницы математических ожиданий, когда дисперсии не известны, но равны;
7. Статистика, проверяющая гипотезу о разнице математических ожиданий при известных дисперсиях, и её распределение при справедливости основной гипотезы H_0: $\mu_x-\mu_y=\Delta_0$;
8. Статистика, проверяющая гипотезу о разнице математических ожиданий при неизвестных, но равных дисперсиях, и её распределение при справедливости основной гипотезы H_0: $\mu_x-\mu_y=\Delta_0$;
9. Статистика, проверяющая гипотезу о равенстве дисперсий, и её распределение при справедливости основной гипотезы H_0: $\sigma_x^2=\sigma_y^2$.

2. Задачный минимум

1. Пусть $X=(X_1,\ldots,X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и $\sigma^2=4$. Используя реализацию случайной выборки, $x_1=-1.11$, $x_2=-6.10$, $x_3=2.42$, постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра μ.
2. Пусть $X=(X_1,\ldots,X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами μ и σ^2. Используя реализацию случайной выборки, $x_1=-1.11$, $x_2=-6.10$, $x_3=2.42$, постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра μ.
3. Пусть $X=(X_1,\ldots,X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами μ и σ^2. Используя реализацию случайной выборки, $x_1=1.07$, $x_2=3.66$, $x_3=-4.51$, постройте 80%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра σ^2.

4. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно, причем $\sigma_X^2 = 2$ и $\sigma_Y^2 = 1$. Используя реализации случайных выборок
$$x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42, y_1 = -2.29, y_2 = -2.91,$$
постройте 95%-ый доверительный интервал для разности математических ожиданий $\mu_X - \mu_Y$.

5. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$— независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно. Известно, что $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Используя реализации случайных выборок
$$x_1 = 1.53, x_2 = 2.83, x_3 = -1.25, y_1 = -0.8, y_2 = 0.06,$$
постройте 95%-ый доверительный интервал для разности математических ожиданий $\mu_X - \mu_Y$.

6. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром p. Используя реализацию случайной выборки $x = (x_1, ..., x_n)$, в которой 55 нулей и 45 единиц, постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра p.

7. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ — независимые случайные выборки из распределения Бернулли с параметрами $p_X \in (0; 1)$ и $p_Y \in (0; 1)$ соответственно. Известно, что $n = 100$, $\bar{x}_n = 0.6$, $m = 200$, $\bar{y}_m = 0.4$. Постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для отношения разности вероятностей успеха $p_X - p_Y$.

8. Дядя Вова (Владимир Николаевич) и Скрипач (Гедеван) зарабатывают на Плюке чатлы, чтобы купить гравицапу. Число заработанных за i-ый день чатлов имеет распределение Пуассона с неизвестным параметром λ. Заработки в различные дни независимы. За прошедшие 100 дней они заработали 250 чатлов.

   С помощью метода максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра λ.

9. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из показательного (экспоненциального) распределения с плотностью распределения
$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0 \\ 0 \text{ при } x < 0 \end{cases}$$
где $\lambda > 0$ — неизвестный параметр распределения. Известно, что $n = 100$ и $\bar{x}_n = 0.52$.

   С помощью метода максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для параметра λ.

10. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием μ и известной дисперсией $\sigma^2 = 4$. Объем выборки $n = 16$. Для тестирования основной гипотезы $H_0 : \mu = 0$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \mu = 2$ вы используете критерий: если $\bar{X} \leq 1$, то вы принимаете гипотезу H_0 , в противном случае вы отвергаете гипотезу H_0 в пользу гипотезы H_1. Найдите

    а) вероятность ошибки 1-го рода;

    б) вероятность ошибки 2-го рода;

    в) мощность критерия;

11. На основе случайной выборки, содержащей одно наблюдение X_1, тестируется гипотеза $H_0 : X_1 \sim U[-0.7; 0.3]$ против альтернативной гипотезы $H_1 : X_1 \sim U[-0.3; 0.7]$. Рассматривается критерий вида: если $X_1 > c$, то гипотеза H_0 отвергается в пользу гипотезы H_1. Выберите константу c так, чтобы уровень значимости этого критерия составлял 0.1.

12. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и $\sigma^2 = 4$. Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Используя реализацию случайной выборки $x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42$, проверьте следующую гипотезу:$\begin{cases} H_0 : \mu = 0, \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$

13. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2. Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Используя реализацию случайной выборки $x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42$, проверьте следующую гипотезу:$\begin{cases} H_0 : \mu = 0, \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$

14. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно, причем $\sigma_X^2 = 2$ и $\sigma_Y^2 = 1$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок
$$x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42, y_1 = -2.29, y_2 = -2.91,$$
проверьте следующую гипотезу:$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y, \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$

15. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно. Известно, что $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок
$$x_1 = 1.53, x_2 = 2.83, x_3 = -1.25, y_1 = -0.8, y_2 = 0.06,$$
проверьте следующую гипотезу:$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y, \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$

16. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок
$$x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42, y_1 = -2.29, y_2 = -2.91,$$
проверьте следующую гипотезу:$\begin{cases} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \\ H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \end{cases}$

17. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из распределения Бернулли с неизвестным параметром $p \in (0; 1)$.Имеется следующая информация о реализации случайной выборки, содержащей $n = 100$ наблюдений: $\sum_{i=0}^{n} x_i = 60$. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ требуется протестировать следующую гипотезу:$\begin{cases} H_0 : p = 0.5, \\ H_1 : p > 0.5 \end{cases}$

18. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$-две независимые случайные выборки из распределения Бернулли с неизвестными параметрами $p_X \in (0; 1)$ и $p_Y \in (0; 1)$. Имеется следующая информация

о реализациях этих случайных выборок: $n = 100$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 60$, $m = 150$,$\sum_{j=1}^{m} y_j = 50$. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ требуется протестировать следующую гипотезу: $\begin{cases} H_0 : p_X = p_Y, \\ H_1 : p_X \neq p_Y \end{cases}$

19. Вася Сидоров утверждает, что ходит в кино в два раза чаще, чем в спортзал, а в спортзал в два раза чаще, чем в театр. За последние полгода он 10 раз был в театре, 17 раз – в спортзале и 39 раз в кино. На уровне значимости 5% проверьте утверждение Васи.

20. Вася очень любит тестировать статистические гипотезы. В этот раз Вася собирается проверить утверждение о том, что его друг Пётр звонит Васе исключительно в то время, когда Вася ест. Для этого Вася трудился целый год и провел серию из 365 испытаний. Результаты приведены в таблице ниже.

	Пётр звонит	Пётр не звонит
Вася ест	200	40
Вася не ест	25	100

На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что Пётр звонит Васе независимо от момента приема пищи Васей.

21. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием $\mu \in \mathbb{R}$ и дисперсией $v > 0$, где μ и v — неизвестные параметры. Известно, что выборка состоит из $n = 100$ наблюдений, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 30$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 146$. При помощи теста отношения правдоподобия протестируйте гипотезу $H_0 : v = 1$ на уровне значимости 5%.