Marta
9 agosto 2020

Temas

Calcula las derivadas de las funciones

Calcula mediante la fórmula de la derivada de una potencia

Calcula mediante la fórmula de la derivada de una raíz

Deriva las funciones exponenciales

Calcula la derivada de las funciones logarítmicas

Como sabemos, existen 2 formas esenciales para resolver derivadas, la primera es a través del limite con la formula:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Y la segunda es a través de formulas definidas para cada uno de los diferentes casos, en estos ejercicios usaremos la segunda opción.

Calcula las derivadas de las funciones

1 $f(x) = 5$

2 $f(x) = -2x$

3 $f(x) = -2x + 2$

4 $f(x) = -2x^2 - 5$

5 $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 4$

6 $f(x) = \frac{x^3 + 2}{3}$

7 $f(x) = \frac{1}{3x^2}$

8 $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$

9 $f(x) = (5x^2 - 3) \cdot (x^2 + x + 4)$

Solución

Calcula las derivadas de las funciones

1 $f(x) = 5$

En este caso, utilizamos la fórmula $\frac{d}{dx}\, a = 0$, que significa que la derivada de cualquier constante siempre es 'cero'.

$$f'(x) = 0$$

2 $f(x) = -2x$

En este caso, utilizamos la fórmula $\frac{d}{dx}\, a \cdot x = a$, que significa que cuando tengamos una constante multiplicando a una variable, la derivada será la constante.

$$f'(x) = -2$$

3 $f(x) = -2x + 2$

En este caso, utilizamos la regla $\frac{d}{dx}(u+v-w)=u'+v'-w'$, que significa que cuando se tenga una suma o diferencia de funciones (o términos algebraicos), la derivada será equivalente a la suma y/o diferencia de las derivadas de cada función (o términos algebraicos).

$$f'(x)=-2$$

4 $f(x)=-2x^2-5$

En este caso, derivamos cada término algebraico. Para el primero usamos la fórmula $\frac{d}{dx}x^n=n\cdot x^{n-1}$.

$$f'(x)=-4x$$

5 $f(x)=2x^4+x^3-x^2+4$

En este caso, derivamos cada término algebraico:

$$f'(x)=8x^3+3x^2-2x$$

6 $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{3}$

En este caso, podemos reescribir la función como:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(x^3 + 2\right)$$

Por lo que la derivada será $\dfrac{1}{3}$ multiplicado por la derivada de la función $x^3 + 2$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(3x^2\right)$$

$$f'(x) = 3x^2$$

7 $f(x) = \dfrac{1}{3x^2}$

Para este tipo de funciones, en las que la variable se encuentra en el denominador, podemos aplicar la propiedad de las potencias:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-2}$$

Para derivar, podemos aplicar la fórmula $\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$

Por lo que tenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(-2x^{-3}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3x^3}$$

8 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Para derivar un cociente usamos la formula:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

Por lo que la derivada nos queda:

$$f'(x) = \frac{(x-1)\cdot(1)-(x+1)\cdot(1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

9 $f(x) = (5x^2-3)\cdot(x^2+x+4)$

Para derivar un producto, aplicamos la formula:

$$\frac{d}{dx}(u\cdot v) = u\cdot v' + v\cdot u'$$

Por lo que la derivada quedaría:

$$f'(x) = (5x^2-3)\cdot(2x+1)+(x^2+x+4)\cdot(10x)$$

$$f'(x) = 10x^3+5x^2-6x-3+10x^3+10x^2+40x$$

$$f'(x) = 20x^3+15x^2+34x-3$$

Calcula mediante la fórmula de la derivada de una potencia

1 $f(x) = \frac{5}{x^5}$

2 $f(x) = \frac{5}{x^5} + \frac{3}{x^2}$

3 $f(x) = \sqrt{x}$

4 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

5 $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$

6 $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$

7 $f(x) = (x^2 + 3x - 2)^4$

Solución

Calcula mediante la fórmula de la derivada de una potencia

Recuerda que la formula para derivar una potencia es:

$$\frac{d}{dx}\, x^n = n \cdot x^{n-1}$$

Esta formula la utilizaremos en todos los ejercicios de esta sección

1 $f(x) = \frac{5}{x^5}$

Utilizando las propiedades de las potencias, podemos reescribir la función como:

$$f(x) = 5x^{-5}$$

Aplicando la formula para derivar una potencia:

$$f'(x) = -25x^{-6}$$

$$f'(x) = -\frac{25}{x^6}$$

2 $f(x) = \frac{5}{x^5} + \frac{3}{x^2}$

Utilizando las propiedades de las potencias, podemos reescribir la función como:

$$f(x) = 5x^{-5} + 3x^{-2}$$

Aplicando la formula para derivar una potencia:

$$f'(x) = -25x^{-6} - 6x^{-3}$$

$$f'(x) = -\frac{25}{x^6} - \frac{6}{x^3}$$

3 $f(x) = \sqrt{x}$

Utilizando las propiedades de las potencias, podemos reescribir la función como:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando la formula para derivar una potencia:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Utilizando las propiedades de las potencias, podemos reescribir la función como:

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

Aplicando la formula para derivar una potencia:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$$

5 $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$

Utilizando las propiedades de las potencias, podemos reescribir la función como:

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$$

Aplicando la formula para derivar una potencia:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\, x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

6 $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$

Utilizando las propiedades de las potencias, podemos reescribir la función como:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando la formula para derivar una potencia:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

7 $f(x) = (x^2 + 3x - 2)^4$

En este caso, tenemos una función elevada a una potencia, por lo que podemos emplear la formula:

$$\frac{d}{dx}\,u^n = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$f'(x) = 4(x^2 + 3x - 2)^3 \cdot (2x + 3)$$

$$f'(x) = (8x + 12)(x^2 + 3x - 2)^2$$

Calcula mediante la fórmula de la derivada de una raíz

1 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

2 $f(x) = \sqrt[4]{x^5 - x^3 - 2}$

3 $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

Solución

Calcula mediante la fórmula de la derivada de una raíz

Para derivar funciones que contienen raíces, podemos convertirlas a potencia (como en el apartado anterior), o bien, utilizar las siguientes formulas para derivar raíces:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \qquad \frac{d}{dx}\sqrt[k]{u} = \frac{u'}{k \cdot \sqrt[k]{u^{k-1}}}$$

1 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

Al ser raíz cuadrada podemos utilizar la primer formula

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}}$$

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$$

2 $f(x) = \sqrt[4]{x^5-x^3-2}$

Al ser raíz cuarta, utilizamos la segunda formula

$$f'(x) = \frac{5x^4-3x^2}{4\cdot\sqrt[4]{(x^5-x^3-2)^3}}$$

3 $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

Al ser una raíz cúbica, comenzamos a derivar usando la segunda fórmula.

La función dentro de la raíz se deriva con la fórmula de cociente

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{(x^2-1)(2x)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-1)^2}}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-4x}{(x^2-1)^2}}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{3(x^2-1)^2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 (x^2-6)^6}}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2+1)^2(x^2-1)^4}}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^4-1)^2(x^2-1)^2}}$$

Deriva las funciones exponenciales

1 $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$

2 $f(x) = e^{3-x^2}$

3 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

4 $f(x) = 3^{2x^2} \cdot \sqrt{x}$

5 $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

Solución

Deriva las funciones exponenciales

En esta sección, las formulas que ocuparemos son las siguientes:

$$\frac{d}{dx}\, a^u = a^u \ln a \cdot u' \qquad \frac{d}{dx}\, e^u = e^u \cdot u'$$

1 $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$

Aplicamos la primer formula y obtenemos:

$$f'(x) = 10^{\sqrt{x}} \ln 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{10^{\sqrt{x}} \cdot \ln 10}{2\sqrt{x}}$$

2 $f(x) = e^{3-x^2}$

Aplicamos la segunda formula y obtenemos:

$$f(x) = e^{3-x^2} \cdot (-2x)$$

$$f(x) = -2x \cdot e^{3-x^2}$$

3 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

4 $f(x) = 3^{2x^2} \cdot \sqrt{x}$

Comenzamos aplicando la fórmula de producto

$$\frac{d}{dx}\left(u \cdot v\right) = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$f'(x) = 3^{2x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot 3^{2x^2} \cdot \ln 3 \cdot 4x$$

$$f'(x) = 3^{2x^2} \cdot \left(4x \cdot \sqrt{x} \cdot \ln 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

5 $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

Comenzamos aplicando la fórmula del cociente

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 \cdot e^{2x} \cdot 2 - e^{2x} \cdot 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^{2x} \cdot (x-1)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot (x-1)}{x^3}$$

Calcula la derivada de las funciones logarítmicas

1 $f(x) = \ln(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x)$

2 $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$

3 $f(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

4 $f(x) = \ln \sqrt{x(1-x)}$

5 $f(x) = \ln \sqrt[3]{\dfrac{3x}{x+2}}$

Solución

Calcula la derivada de las funciones logarítmicas

Para esta sección, ocuparemos las siguientes fórmulas:

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{u'}{u} \qquad \frac{d}{dx}\log u = \frac{\log e}{u} \cdot u'$$

Además, podemos aplicar las propiedades de los logaritmos para reescribir la función en una forma más sencilla de derivar

1 $f(x) = \ln(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x)$

Aplicamos la fórmula para derivar logaritmos neperianos

$$f'(x) = \frac{8x^3 - 3x^2 + 6x - 3}{2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x}$$

2 $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$

Aplicando la propiedad de los logaritmos $\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B$ obtenemos:

$$f(x) = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x - 1)$$

Derivamos cada término aplicando la fórmula para derivar logaritmos neperianos

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)(e^x - 1)}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$$

3 $f(x) = \log\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

Aplicando las propiedades de los logaritmos $\log \sqrt[n]{A^m} = \frac{m}{n} \cdot \log A$ y $\log \dfrac{A}{B} = \log A - \log B$ obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{2}[\log(1+x) - \log(1-x)]$$

Aplicando la fórmula para derivar logaritmo obtenemos

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\log e}{1+x} - \frac{-\log e}{1-x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \log e \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \log e \left(\frac{1-x+1+x}{1-x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{\log e}{1-x^2}$$

4 $f(x) = \ln \sqrt{x(1-x)}$

Aplicando las propiedades de los logaritmos $\log \sqrt[n]{A^m} = \frac{m}{n} \cdot \log A$ y $\log(A \cdot B) = \log A + \log B$ obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{2}[\ln x + \ln(1-x)]$$

Aplicando la fórmula para derivar logaritmos neperianos obtenemos

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{1-x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x-x}{x \cdot (1-x)}$$

$$f'(x) = \frac{1-2x}{2x \cdot (1-x)}$$

5 $f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{3x}{x+2}}$

Aplicando las propiedades de los logaritmos $\log \sqrt[n]{A^m} = \frac{m}{n} \cdot \log A$ y $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$ obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{3}[\ln 3x - \ln(x+2)]$$

Aplicando la fórmula para derivar logaritmos neperianos obtenemos

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x+2-x}{x(x+2)}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3x(x+2)}$$

¿Las derivadas siguen difíciles de entender después de haber leído nuestras páginas de explicaciones? Encuentra clases de matematicas con un profesor particular quien se podrá adaptar a tu nivel.

¿Te ha gustado el artículo?

Marta

➗ Licenciada en Químicas da clase de Matemáticas, Física y Química -> Comparto aquí mi pasión por las matemáticas ➗

Resumen

Resumen de derivadas

Máximos, mínimos y puntos de inflexión

Rolle, Lagrande, Cauchy y Regla de L'Hôpital

Teoría

Teorema de Bolzano

Tasa de variacion media

Concepto de derivada

Interpretación física de la derivada

Función derivada

Derivadas laterales

Derivabilidad y continuidad

Derivadas inmediatas

Derivadas de sumas, productos y cocientes

Derivada de las funciones trigonometricas

Derivacion de una composicion de funciones

Derivada de la función potencial-exponencial

Derivadas sucesivas

Ecuacion de la recta tangente

Extremos relativos o locales

¿Qué son los Puntos de inflexion?

Teorema de Rolle: Explicación

Teorema de Lagrange o del valor medio

Teorema del valor medio generalizado – Cauchy

Derivabilidad

Estudio de intervalos de crecimiento y decrecimiento

Ejemplos de derivadas de la funcion exponencial

Derivadas de las funciones trigonometricas inversas

Ecuacion de la recta normal

¿Cuales son las aplicaciones fisicas de la derivada?

¿Como derivar la funcion inversa?

Interpretacion geometrica de la derivada

¿Que son la concavidad y la convexidad?

Derivar una funcion logaritmica

¿Que es la diferencial de una funcion?

Derivacion implicita

Fórmulas

Derivada de una suma

Derivada de un producto

Interpretación de la derivada

Derivada de una constante

Recta normal

Derivada de una potencia

Derivada del arcocotangente

Tabla de derivadas

Derivadas logarítmicas

Derivada de la cosecante

Derivada de x: Calculo

Optimización

Derivada del seno

Derivada de la cotangente

Derivada

Derivación implícita

Derivada del arcotangente

Regla de la cadena

Regla de la cadena

Derivada primera, segunda, ..., enésima

Derivacion logaritmica

Derivada de una raíz

Derivada de la secante

Máximos y mínimos

Derivada del arcoseno

Derivada de la tangente

Derivada de un cociente

Derivada del arcosecante

Derivada del arcocosecante

Derivada del arcocoseno

Diferencial de una función

Recta tangente

Derivada del coseno

Estudio de intervalos de crecimiento y decrecimiento

Derivadas de funciones

Derivada de la funcion exponencial

Otros ejercicios

Ejercicios de derivadas y continuidad I

Ejercicios de derivadas y continuidad II

Ejercicios de la definicion de derivada

Ejercicios de derivadas

Ejercicios de derivadas II

Ejercicios de aplicaciones de la derivada I

Ejercicios de aplicaciones de la derivada III

Ejercicios de aplicaciones fisicas de la derivada

Ejercicios de aplicaciones de la derivada IV

Ejercicios de aplicaciones de la derivada II

Ejercicios del teorema de Rolle, de Bolzano, y del valor medio

Ejercicios: Teoremas de Rolle, Lagrange y Regla de L'Hôpital

Ejercicios de derivabilidad y continuidad