

Laborator 3 - Simulare. Metode de tip Monte Carlo.

I. Estimarea ariilor și a volumelor

RStudio. Nu uitați să va setați directorul de lucru: **Session** → **Set Working Directory** → **Choose Directory**.

Exercițiu rezolvat. Aria discului unitate este π . Acoperim discul cu un pătrat de dimensiuni 2 pe 2 și estimăm numărul π folosind 10000, 50000 și 100000 valori uniforme aleatoare. Comparăm apoi rezultatele cu valoarea cunoscută a lui $\pi = 3.14159265358\dots$

Discul unitate este inclus în $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Următoarea funcție estimează π utilizând N numere aleatoare.

```
disc_area = function(N) {  
  N_C = 0;  
  for(i in 1:N) {  
    x = runif(1, -1, 1);  
    y = runif(1, -1, 1);  
    if(x*x + y*y <= 1)  
      N_C = N_C + 1;  
  }  
  return(4*N_C/N);  
}
```

Dacă am estimat o valoare α_{actual} prin metoda Monte Carlo și obținem α_{MC} , putem măsura eroarea făcută (aceea de a folosi α_{MC} în loc de α_{actual}) în cel puțin două moduri:

- **Eroarea absolută:** $\epsilon_{abs} = |\alpha_{MC} - \alpha_{actual}|$.
- **Eroarea relativă:** $\epsilon_{rel} = \frac{|\alpha_{MC} - \alpha_{actual}|}{|\alpha_{actual}|}$. Această avaloare poate fi scrisă și procentual, obținând **eroarea procentuală:** $\epsilon_{per} = \epsilon_{rel} \cdot 100\%$.

Exerciții propuse.

- I.1. Estimați volumul sferei unitate (care este $4\pi/3$) folosind eșantioane de numere aleatoare de dimensiuni diferite și apoi calculați erorile (absolută și relativă) corespunzătoare.
- I.2. Estimați aria dintre parabola de ecuație $y = -2x^2 + 5x - 2$ și axa Ox (abscisă) - folosind 10000 valori uniforme. Determinați aria exactă prin integrare și calculați eroarea relativă.

Indicație: parabola intersectează axa Ox în punctele $(1/2, 0)$ și $(2, 0)$ și are vârful în $(5/4, 9/8)$. Un domeniu rectangular din planul real care acoperă această arie poate fi $[0, 2] \times [0, 2]$.

II. Integrarea Monte Carlo

Exercițiu rezolvat. Estimați valoarea următoarei integrale folosind 20000 și apoi 50000 de valori aleatoare uniforme (determinați 30 astfel de aproximări pentru fiecare din cele două dimensiuni și calculați câte o medie și câte o deviație standard).

$$\int_0^{10} e^{-u^2/2} du.$$

Următoarea funcție oferă o estimare pentru un eșantion de dimensiune N

```
MC_integration = function(N) {
  sum = 0;
  for(i in 1:N) {
    u = runif(1, 0, 10);
    sum = sum + exp(-u*u/2);
  }
  return(10*sum/N);
}
```

Putem calcula o medie pentru $k = 30$ astfel de aproximări și și deviația standard corespunzătoare folosind următoarea funcție.

```
MC_integr_average= function(k, N) {
  for(i in 1:k)
    estimates[i] = MC_integration(N);
  print(mean(estimates));
  print(sd(estimates));
}
```

În urma execuției acestei funcții obținem

```
> MC_integr_average(30, 20000)
[1] 1.249768
[1] 0.02327472
> MC_integr_average(30, 50000)
[1] 1.253072
[1] 0.01373724
```

Exercițiu rezolvat. Estimați valoarea următoarei integrale folosind 20000 și apoi 50000 de valori aleatoare uniforme (determinați 30 astfel de aproximări pentru fiecare din cele două dimensiuni și calculați câte o medie și câte o deviație standard), utilizând metoda MC îmbunătățită, anume cu distribuția exponențială ($\lambda = 1$)

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

(Valoarea exactă acestei integrale este $\sqrt{\pi}/2 \approx 0.8862269$.)

Mai întâi, următoarea funcție oferă o estimare pentru un eșantion de dimensiune N

```
MC_improved_integration = function(N) {
  sum = 0;
  for(i in 1:N) {
    u = rexp(1, 1);
    sum = sum + exp(-u*u)/exp(-u);
  }
  return(sum/N);
}
```

Putem calcula o medie pentru $k = 30$ astfel de aproximări și și deviația standard corespunzătoare folosind următoarea funcție.

```
MC_imprvd_integr_average= function(k, N) {
  estimates = 0;
  for(i in 1:k)
    estimates[i] = MC_improved_integration(N);
  print(mean(estimates));
  print(sd(estimates));
}
```

În urma execuției acestei funcții obținem

```
> MC_imprvd_integr_average(30, 20000)
[1] 0.8858024
[1] 0.002743676
> MC_imprvd_integr_average(30, 50000)
[1] 0.8861285
[1] 0.00213069
```

Exerciții propuse.

- II.1. ((a) sau (b) și (c) sau (d)) Estimați valorile următoarelor integrale (comparând estimarea cu valoarea exactă) și calculați erorile absolute și relative corespunzătoare:

$$(a) \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}; (b) \int_1^4 e^x \, dx = 51.87987$$

$$(c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}; (d) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{4x^2-1} = \ln 3/4.$$

- II.2 Estimați valoarea următoarei integrale utilizând metoda MC îmbunătățită, cu distribuția exponențială ($\lambda = 3, N = 50000$)

$$\int_0^{+\infty} e^{-2u^2} \, du = \sqrt{\pi/8}.$$

Comparați rezultatul cu valoarea exactă, și calculați erorile absolute și relative corespunzătoare. Determinați apoi 30 astfel de aproximări și calculați o medie și o deviație standard. (Vezi exercițiul rezolvat.)

III. Estimarea mediilor

Exercițiu rezolvat. Modelul stochastic pentru numărul de erori (bug-uri) găsite într-un nou produs software se poate descrie după cum urmează. Zilnic cei care testează produsul software testers determină un număr aleator de erori care sunt apoi corectate. Numărul de erori găsite în ziua i urmează o distribuție Poisson(λ_i) al cărei parametru este cel mai mic număr de erori din cele două zile anterioare:

$$\lambda_i = \min \{X_{i-2}, X_{i-1}\}.$$

Care este numărul mediu de zile în care sunt detectate toate erorile? (Presupunem că în primele două zile sunt găsite 31 și 27 erori, respectiv.) Folosiți $N = 10000$ de simulări ("runs") pentru estimatorul Monte Carlo.

Generăm un număr de erori pentru fiecare zi, până când acest număr este 0. Următoarea funcție oferă numărul de zile până când nu mai apar erori (pentru o singură simulare - "run").

```

Nr_days = function() {
  nr_days = 1;
  last_errors = c(27, 31);
  nr_errors = 27;
  while(nr_errors > 0) {
    lambda = min(last_errors);
    nr_errors = rpois(1, lambda);
    last_errors = c(nr_errors, last_errors[1]) ;
    nr_days = nr_days + 1;
  }
  return(nr_days);
}

```

Executăm această funcție de $N = 10000$ de ori și returnăm media obținută

```

MC_nr_days = function(N) {
  s = 0;
  for(i in 1:N)
    s = s + Nr_days();
  return(s/N);
}

```

Rezultatul este 28.0686, astfel, în aproximativ 4 săptămâni toate erorile vor fi găsite.

Exerciții propuse.

- III.1 Rezolvați din nou exercițiul anterior considerând că λ_i este media numărului de erori din cele trei zile anterioare (În primele trei zile numărul de erori găsite a fost de 9, 15 și 13, respectiv).
- III.2 Doi mecanici schimbă filtrele de ulei pentru autoturisme într-un service. Timpul de servire este exponențial cu parametrul $\lambda = 4 \text{ hrs}^{-1}$ în cazul primului mecanic și $\lambda = 12 \text{ hrs}^{-1}$ în cazul celui de al doilea. Deoarece al doilea mecanic este mai rapid, el servește de 3 ori mai mulți clienți decât partenerul său. Astfel când un client ajunge la rând, probabilitatea de a fi servit de primul mecanic este $3/4$. Fie X timpul de servire pentru un mecanic. Generați valori pentru X și estimați media lui X .

IV. Estimarea probabilităților

Exercițiu rezolvat. Modelul stochastic pentru numărul de erori (bug-uri) ăsite într-un nou produs software se poate descrie după cum urmează. Zilnic cei care testează produsul software testers determină un număr aleator de erori care sunt apoi corectate. Numărul de erori găsite în ziua i urmează o distribuție $\text{Poisson}(\lambda_i)$ al cărei parametru este cel mai mic număr de erori din cele trei zile anterioare:

$$\lambda_i = \min \{X_{i-3}, X_{i-2}, X_{i-1}\}.$$

- (a) Estimați probabilitatea de a mai avea încă erori după 21 de zile de teste folosind 500 de simulări MC. (În primele trei zile numărul de erori găsite este 28, 22 și 18, respectiv.).
- (b) Estimați această probabilitate, cu o eroare de cel mult ± 0.01 cu probabilitate 0.95.

(a) Utilizăm $N = 5000$ simulări ("runs") Monte Carlo; în fiecare simulare generăm un număr de erori găsite în fiecare zi până când acest număr devine 0. Următoarea funcție returnează numărul de zile până când nu mai există erori (la o singură simulare).

```

Nr_days = function() {
  nr_days = 2;
  last_errors = c(18, 22, 28);
  nr_errors = 18;
  while(nr_errors > 0) {
    lambda = min(last_errors);
    nr_errors = rpois(1, lambda);
    last_errors = c(nr_errors, last_errors[1:2]) ;
    nr_days = nr_days + 1;
  }
  return(nr_days);
}

```

Aplicăm această funcție de $N = 5000$ ori și returnăm proporția valorilor care depășesc (strict) 21 de zile.

```

MC_nr_days_21 = function(N) {
  s = 0;
  for(i in 1:N) {
    if(Nr_days() > 21) ;
      s = s + 1;
  }
  return(s/N);
}

```

Proporția calculată, 0.246, este o estimare a probabilității de a mai avea erori nedetectate și după 21 de zile de testare.

(b) Vom estima probabilitatea în două moduri.

Mai întâi, folosim o valoare "prezumată", $p^* = 0.246$, și $N \geq p^*(1 - p^*) \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\epsilon} \right)^2$:

```

> alfa = 1 - 0.95
> z = qnorm(alfa/2)
> epsilon = 0.01
> p = 0.246
> N_min = p(1 - p)*(z/epsilon)^2
> N_min
[1] 7125.291
> MC_nr_days_21(N_min + 1)
[1] 0.2547264

```

Obținem $N \geq 7125.291$ și putem aplica $MC_nr_days(N_min + 1)$

A doua metodă utilizează minorantul $N \geq \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{2\epsilon} \right)^2$:

```

> alfa = 1 - 0.95
> z = qnorm(alfa/2)
> epsilon = 0.01
> p = 0.246
> N_min = (1/4)*(z/epsilon)^2
> N_min
[1] 9603.647
> MC_nr_days(N_min + 1)
[1] 0.2496968

```

Obținem $N \geq 9603.647$ și putem aplica $\text{MC_nr_days}(N_{\min} + 1)$. De obicei, cu a cea de-a doua metodă numărul de simulări ("runs") este mai mare.

Exerciții propuse.

- IV.1 Estimați probabilitatea $P(X < Y^2)$, unde X și Y sunt variabile repartizate geometric, independente, cu parametrii 0.3 și 0.5, respectiv. Apoi estimați aceeași probabilitate cu o eroare care să nu depășească ± 0.005 cu probabilitate 0.95. Care ar trebui să fie numărul de simulări ("runs")?
- IV.2 Patruzeci de computere sunt conectate printr-un LAN. Unul dintre ele este infectat de un anumit virus. În fiecare zi, acest virus ajunge de la un computer infectat la unul "curat" cu probabilitate 0.2. De asemenea, în fiecare zi (începând din a doua zi), administratorul de sistem alege la întâmplare zece computere infectate (sau pe toate dacă sunt infectate mai puțin de 10) și îndepărtează virusul.
- (a) Estimați probabilitatea ca într-o anumită zi toate computerele să fie infectate.
 - (b) Estimați probabilitatea ca într-o anumită zi cel puțin 15 computere să fie infectate.
 - (c) Estimați această ultimă probabilitate cu o eroare de ± 0.01 cu probabilitatea 0.95.