Laboratório de Computação e Visualização Científica

2020/2021

Trabalho do módulo 4: *Modelação matemática e controlo ótimo*

Parte I: Modelação matemática

- Considere um modelo matemático, definido por um sistema de equações diferenciais ordinárias, que descreva a dinâmica de transmissão de uma determinada doença infeciosa numa população.
- Explique o significado de cada uma das variáveis do sistema de equações diferencais (compartimentos do modelo) e dos parâmetros.
- Represente, através de simulações numéricas, diferentes cenários que o modelo pode descrever, considerando diferentes valores para os parâmetros do modelo.

Nota: se tiver dificuldade na escolha do modelo, pode considerar um dos modelos propostos na aula teórica ou o seguinte modelo $SEIR$. Assumimos o caso em que a população total é constante e dividida em quatro compartimentos relevantes para o estudo da epidemia:

- suscetível (S) - indivíduos que são vulneráveis (ou susceptíveis) de serem infetados;
- expostos (E) - indivíduos que estão infetados mas que não apresentam sintomas (assintomáticos) e que não transmitem a doença;
- infetados/infeciosos (I) - indivíduos infetados que transmitem a infeção e propagam a doença;
- recuperados (ou imunes pela vacinaçao) (R) - indivíduos que recuperarm e que permanecem imunes.

Sejam $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, e $R(t)$ variáveis que representam a classe de indivíduos suscetíveis, expostos, in the susceptible, exposed, infetados e recuperados, em cada instante de tempo t, respetivamente. A população total, no instante t, é representada por $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$.

Parâmetros do modelo:

- β - coeficiente de transmissão;
- γ - taxa de infeçao;
- μ - taxa de recuperaço.

Considere o modelo $SEIR$ descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(t) = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dE}{dt}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma E(t) \\ \frac{dI}{dt}(t) = \gamma E(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR}{dt}(t) = \mu I(t)\,. \end{cases} \tag{1}$$

Condições iniciais:

$$S(0) = 0.88 \quad E(0) = 0.07, \quad I(0) = 0.05, \quad R(0) = 0\,.$$

Valores dos parâmetros: $\beta = 0.3$; $\gamma = 0.1887$; $\mu = 0.1$.
Tempo inicial: $T = 0$, tempo final $T = 20$.

Parte II: propor e resolver numericamente um problema de controlo ótimo com o objetivo de erradicar ou pelo menos controlar a transmissão da doença.

Para isso devem:

- considerar o modelo que escolheram na Parte I e introduzir uma (ou mais) função controlo $u(t)$, $t \in [0, T]$, no sistema de equações diferenciais. Explicar o significado do(s) controlo(s) (é muito importante explicar o que representa o controlo de um ponto de vista prático e num contexto de epidemia/transmissão de doença, vírus, bactérias, etc);
- definir os valores que o controlo pode assumir (exemplo: $0 \leq u(\cdot) \leq 1$) no contexto do problema;
- definir uma funcional custo e objetivo: maximizar ou minimizar (explicar o significado da funcional objetivo no contexto da epidemia/em termos práticos);
- depois de definir o problema de controlo ótimo escrever a discretização do problema num ficheiro AMPL e resolvê-lo usando o *solver* IPOPT (usar `https://neos-server.org/neos/solvers/nco:Ipopt/AMPL.html`);

- representar graficamente através de figuras as soluções do problema, comparando as soluções do problema de controlo ótimo com as soluções do modelo sem controlo (use, por exemplo, MATLAB);
- escreva algumas conclusões sobre o efeito do(s) controlo(s) no comportamento do modelo/controlo da epidemia.

Nota importante: os ficheiros AMPL e MATLAB devem ser anexados ao relatório.

Os relatórios dos trabalhos devem ser enviados para o e-mail: **cjoaosilva@ua.pt** até ao dia 26 de junho de 2021.

18 de maio, 2021
Cristiana João Soares da Silva