

# Laboratório de Computação e Visualização Científica

2021/2022

## Trabalho do módulo 3: *Modelação matemática e controlo ótimo*

### Parte I: Modelação matemática

- Considere um modelo matemático, definido por um sistema de equações diferenciais ordinárias, que descreva a dinâmica de transmissão de uma determinada doença infecciosa numa população.
- Explique o significado de cada uma das variáveis do sistema de equações diferenciais (compartimentos do modelo) e dos parâmetros.
- Represente, através de simulações numéricas, diferentes cenários que o modelo pode descrever, considerando diferentes valores para os parâmetros do modelo.

Nota: se tiver dificuldade na escolha do modelo, pode considerar um dos modelos propostos nas aulas ou o seguinte modelo *SEIR*. Assumimos o caso em que a população total é constante e dividida em quatro compartimentos relevantes para o estudo da epidemia:

- suscetível ( $S$ ) - indivíduos que são vulneráveis (ou susceptíveis) de serem infetados;
- expostos ( $E$ ) - indivíduos que estão infetados mas que não apresentam sintomas (assintomáticos) e que não transmitem a doença;
- infetados/infeciosos ( $I$ ) - indivíduos infetados que transmitem a infeção e propagam a doença;
- recuperados (ou imunes pela vacinação) ( $R$ ) - indivíduos que recuperaram e que permanecem imunes.

Sejam  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ , e  $R(t)$  variáveis que representam a classe de indivíduos suscetíveis, expostos, infetados e recuperados, em cada instante de tempo  $t$ , respetivamente. A população total, no instante  $t$ , é representada por  $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ .

Parâmetros do modelo:

- $\beta$  - coeficiente de transmissão;
- $\gamma$  - taxa de infeçao;
- $\mu$  - taxa de recuperaço.

Considere o modelo *SEIR* descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(t) = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dE}{dt}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma E(t) \\ \frac{dI}{dt}(t) = \gamma E(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR}{dt}(t) = \mu I(t) . \end{cases} \quad (1)$$

Condições iniciais:

$$S(0) = 0.88 \quad E(0) = 0.07, \quad I(0) = 0.05, \quad R(0) = 0 .$$

Valores dos parâmetros:  $\beta = 0.3$ ;  $\gamma = 0.1887$ ;  $\mu = 0.1$ .

Tempo inicial:  $T = 0$ , tempo final  $T = 20$ .

## **Parte II: propor e resolver numericamente um problema de controlo ótimo com o objetivo de erradicar ou pelo menos controlar a transmissão da doença.**

Para isso devem:

- considerar o modelo que escolheram na Parte I e introduzir uma (ou mais) função controlo  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , no sistema de equações diferenciais. Explicar o significado do(s) controlo(s) (é muito importante explicar o que representa o controlo de um ponto de vista prático e num contexto de epidemia/transmissão de doença, vírus, bactérias, etc);
- definir os valores que o controlo pode assumir (exemplo:  $0 \leq u(\cdot) \leq 1$ ) no contexto do problema;
- definir uma funcional custo e objetivo: maximizar ou minimizar (explicar o significado da funcional objetivo no contexto da epidemia/em termos práticos);
- depois de definir o problema de controlo ótimo escrever a discretização do problema num ficheiro AMPL e resolvê-lo usando o *solver* IPOPT (usar <https://neos-server.org/neos/solvers/nco:Ipoprt/AMPL.html>);

- representar graficamente através de figuras as soluções do problema, comparando as soluções do problema de controlo ótimo com as soluções do modelo sem controlo (use, por exemplo, MATLAB);
- escreva algumas conclusões sobre o efeito do(s) controlo(s) no comportamento do modelo/controlo da epidemia.

Nota importante: os ficheiros AMPL e MATLAB devem ser anexados ao relatório.

Os relatórios dos trabalhos e os ficheiros necessários para correr as simulações numéricas devem ser enviados para o e-mail: **cjoaosilva@ua.pt** até às 15h00 do dia 16 de maio de 2022.

02 de maio, 2022

Cristiana João Soares da Silva