Pesquisa Operacional

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

Unidade II: Programação Linear

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Noções gerais sobre modelagem.
- Tipos de modelos em PO.
- Estudar as origens e a evolução da PL.
- Compreender a importância da PL no processo de tomada de decisão.
- Identificar as etapas de PL.
- Formular um modelo geral de PL.
- Modelar problemas reais de PL.
- Resolver problemas de PL utilizando o método simplex.

PLANO DE ESTUDO

- Noções gerais sobre modelagem.
- Tipos de modelos em PO.
- Origens e definição da PL.
- Formulação matemática de um modelo geral de PL.
- Modelagem de problemas reais de PL.
- Resolução da PL via método simplex.

- Noções gerais sobre modelagem matemática e tipos de modelos em PO

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

MODELO

- São representações ideais de algo. Ex: Modelos de veículos, retratos, globos terrestres e mapas geográficos.

- Nas ciências: Modelo atômico, estrutura genética, equações de leis físicas e reações químicas.

- Essas idealizações se baseiam em leis da natureza ou experimentação.

MODELO

- Modelos teóricos – Leis da natureza.
  - Ex: $F = m \cdot a$; $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

- Modelos empíricos – Resultados experimentais.
  - Ex: Curva de calibração.

- Modelos mistos – Utilizam as leis da natureza para a construção do modelo e os dados empíricos para estimar parâmetros.
  - Ex: Equações quânticas.

UniCesumar

COMPLEXIDADE DO MODELO

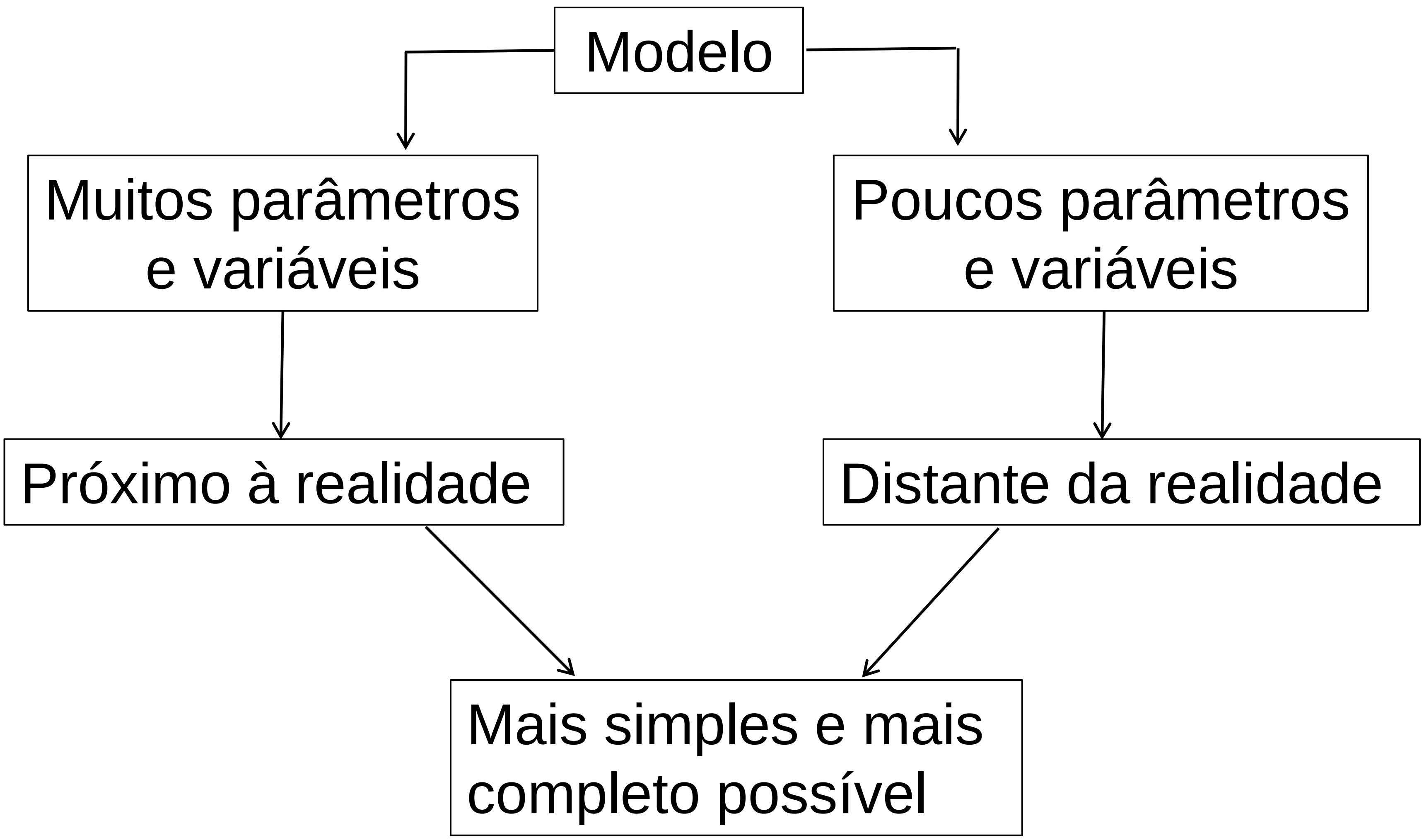

Figura 1 – Complexidade dos modelos. Fonte: O autor.

PRINCÍPIOS PARA MODELAGEM DE PROBLEMAS

Longaray, 2013, apresenta alguns princípios do processo de modelagem.

- Não faça um modelo complicado se um simples é suficiente.
- O modelo não depende da técnica, mas a técnica a ser aplicada depende do tipo do modelo.
- Os parâmetros e as variáveis do modelo devem ter alguma relação com o cenário analisado.
- O modelo deve ser validado antes de ser utilizado.

PRINCÍPIOS PARA MODELAGEM DE PROBLEMAS

- O modelo não é soberano, a realidade é.
- Os modelos na maioria das vezes são específicos para uma situação.
- O processo de desenvolvimento de um modelo gera conhecimento adquirido para que o faz.
- Modelos não podem substituir os tomadores de decisão.

TIPOS DE MODELOS EM PO

Pode-se dividir os modelos em dois grupos principais (Longaray, 2013).

Modelos de otimização

Modelos de simulação

TIPOS DE MODELOS EM PO

Modelos de otimização

- Representação matemática para obter o melhor resultado possível.
- Utiliza uma função-objetivo (maximização e minimização).
- Trabalha com restrições.
- Ex: Programação Linear, Programação Não-Linear, Programação Inteira e Programação Dinâmica.

TIPOS DE MODELOS EM PO

Modelos de simulação

- Representação matemática de um sistema físico.
- Utilizado para verificar o comportamento ao alterar as variáveis do modelo.
- Gera um conjunto de alternativas.
- Utiliza ferramentas estatísticas
- Ex: Teoria das Filas e Simulação de Monte Carlo.

- Noções gerais sobre modelagem matemática e tipos de modelos em PO

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

- Formulação matemática de um modelo geral de programação linear (PL)

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

ORIGEM

- Origem da otimização de funções lineares com restrições lineares: Fourier (1826).

- Em 1939 Kantorovich fez notar a importância prática destes problemas: otimização de fluxos de carga.

- Em 1947 Dantzig cria o algoritmo simplex para solução de problemas de programação linear.

DEFINIÇÃO

- A PL é uma ferramenta da matemática aplicada.
- Mostra a forma mais eficiente de utilizar recursos para atingir os objetivos da empresa.
- A PL utiliza um modelo matemático para descrever o problema.

$$\underset{}{Modelo} = \underset{(Equação\ linear)}{Função\ objetivo} + \underset{(Inequações\ lineares)}{restrições\ técnicas}$$

Exemplo (Silva, et al., 1998):

- Função objetivo: $Lucro = 2x_1 + 3x_2$

Restrições:

técnicas

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 6x_1 - x_2 \geq 20 \end{cases}$$

não-negatividade

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- x_1 e x_2: variáveis controladas ou de decisão

DEFINIÇÃO

- A PL pode ser dividida em 3 etapas:
  - Identificação das variáveis de decisão.
  - Identificação da função objetivo.
  - Definição das restrições do sistema.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

- Variáveis de decisão: x_1, x_2,...,x_n.
  - Quantidade a ser produzida.
  - Quantidade de $ a ser investido.
  - Número de máquinas em operação.

- Função Objetivo: $Max\,(ou\,Min)\,Z: f_0(x_1; x_2;...; x_n)$
  - Geralmente lucro ou custo.

- Restrições técnicas: $c_1x_1 + c_2x_2 \geq a \quad ; \quad x_1 \geq 0$

$$c_3x_1 + c_4x_2 \leq b \quad ; \quad x_2 \geq 0$$

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Hillier e Lieberman (2006) apresentam algumas definições.

- Solução: Qualquer especificação de valores para as variáveis de decisão, independente de ser desejável ou permissível.
- Solução Viável: Todas as restrições são satisfeitas.
- Solução Ótima: Solução viável que tem o valor mais favorável da função objetivo.

Hipóteses da programação linear (Longaray, 2013)

- Proporcionalidade: O valor da função objetivo e a contribuição de cada função de restrição são diretamente proporcionais aos níveis de cada variável de decisão.

$$Z \propto (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \geq a \quad ; \quad \propto (x_1, x_2)$$

$$c_3 x_1 + c_4 x_2 \leq b \quad ; \quad \propto (x_1, x_2)$$

Hipóteses da programação linear (Longaray, 2013)

- Aditividade: Toda função em um modelo de PL é a soma das contribuições individuais das atividades – garante a linearidade do modelo.

- Divisibilidade: As variáveis de restrição podem assumir valores fracionários, desde que satisfaçam as restrições funcionais e de não-negatividade.

Hipóteses da programação linear (Longaray, 2013)

- Certeza: Assume-se que os valores admitidos para os parâmetros do modelo são constantes conhecidas.
  - Na realidade, os parâmetros são estimados considerando condições futuras, o que acarreta um grau de incerteza.

Exemplo 1 (Ex. 6, pg. 19, Silva et al., 1998)

Uma empresa realizou um estudo de racionalização da produção e ficou com disponibilidade de 3 recursos, R_1, R_2 e R_3, para fabricar 2 produtos, P_1 e P_2. Verificou-se que P_1 daria um lucro de R$120,00/unidade e P_2 de R$150,00/unidade. O departamento de produção forneceu a tabela de uso de recursos.

EXEMPLO

Tabela 1 – Recursos utilizados por produto.

Produto	R_1 por unidade	R_2 por unidade	R_3 por unidade
P_1	2	3	5
P_2	4	2	3
Disponibilidade por mês	100	90	120

Qual produção mensal de P_1 e P_2 traz o maior lucro para a empresa?

EXEMPLO

Etapa 1: Identificar as variáveis de decisão

quantidade mensal a ser produzida de P_1 => x_1

quantidade mensal a ser produzida de P_2 => x_2

Etapa 2: Identificar o objetivo da empresa

Maximizar o lucro

Lucro de $P_1 = 120 \cdot x_1$

Lucro de P2 $= 150 \cdot x_2$

Lucro Total $= 120 \cdot x_1 + 150 \cdot x_2$

Objetivo = maximizar (L) $= 120 \cdot x_1 + 150 \cdot x_2$

UniCesumar

EXEMPLO

Etapa 3: Identificar as restrições do sistema

Recurso 1: $2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$

Recurso 2: $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$

Recurso 3: $5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$

Restrição 1: $2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 100$

Restrição 2: $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 90$

Restrição 3: $5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 120$

EXEMPLO

Etapa 4: Resumo do modelo

$$\text{Max}(L) = 120 \cdot x_1 + 150 \cdot x_2$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 100 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 90 \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 120 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

EXEMPLO

Exemplo 2 (Ex. 6, pg. 32, Lachtermacher, 2007)

Um agricultor tem uma fazenda com 200km^2 e quer plantar trigo, arroz e milho. Ele sabe que a produção esperada é de 1800kg/m^2 para o trigo, 2100kg/m^2 para o arroz e 2900 kg/m^2 para o milho. Sua capacidade de armazenamento é de 700000kg de qualquer dos produtos e o lucro por produto é de R$1,20/kg de trigo, R$0,60/kg de arroz e R$0,28/kg de milho. Quantos km^2 devem ser plantados para maximizar o lucro?

EXEMPLO

Etapa 1: Identificar as variáveis de decisão

área plantada de trigo (km^2) => x_1

área plantada de arroz (km^2) => x_2

área plantada de milho (km^2) => x_3

Etapa 2: Identificar o objetivo da empresa

Maximizar o lucro

Lucro do trigo por km^2 = $1{,}20 \cdot 1800 \cdot x_1$

Lucro do arroz por km^2 = $0{,}60 \cdot 2100 \cdot x_2$

Lucro do milho por km^2 = $0{,}28 \cdot 2900 \cdot x_3$

Lucro Total = $2160 \cdot x_1 + 1260 \cdot x_2 + 812 \cdot x_3$

EXEMPLO

Objetivo = maximizar (L) = $2160 \cdot x_1 + 1260 \cdot x_2 + 812 \cdot x_3$

Etapa 3: Identificar as restrições do sistema

Área da fazenda: $x_1 + x_2 + x_3$

Capacidade de armazenamento:

$1800 \cdot x_1 + 2100 \cdot x_2 + 2900 \cdot x_3$

Restrição 1: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 200$

Restrição 2: $1800 \cdot x_1 + 2100 \cdot x_2 + 2900 \cdot x_3 \leq 700000$

EXEMPLO

Etapa 4: Resumo do modelo

$$Max(L) = 2160 \cdot x_1 + 1260 \cdot x_2 + 812 \cdot x_3$$

$$s.a \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 200 \\ 1800 \cdot x_1 + 2100 \cdot x_2 + 2900 \cdot x_3 \leq 700000 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Formulação matemática de um modelo geral de programação linear (PL)

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

- Noções sobre espaço vetorial

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

Conjunto

R – Conjunto dos números reais.

R^2 – Conjunto dos pares ordenados de números reais (x,y) ; (2,3); (5,8).

R^3 – Conjunto das ternas ordenadas de números reais ordenados (1,3,8); (7,2,9).

Operações com conjuntos

Adição

$$(x_1,x_2,\ldots x_n) + (y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$$

$$(2,7) + (5,9) = (2+5,\ 7+9) = (7,16)$$

$$(5,8,7) + (3,9,1) = (5+3,8+9,7+1) = (8,17,8)$$

Operações com conjuntos

Multiplicação

$$K \cdot (x_1, x_2, \ldots x_n) = (Kx_1,\ Kx_2, \ldots, Kx_n)$$

$$8 \cdot (2,7) = (8 \cdot 2,\ 8 \cdot 7) = (16,56)$$

$$-3 \cdot (3,9,1) = ((-3) \cdot 3, (-3) \cdot 9, (-3) \cdot 1) = (-9,-27,-3)$$

Vetores

São elementos dos espaços vetoriais

$$(5,9) - Vetor\ \ linha\ \ de\ \ R^2$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - Vetor\ \ coluna\ \ de\ \ R^2$$

$$(7,5,8) - Vetor\ \ linha\ \ de\ \ R^3$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} - Vetor\ \ coluna\ \ de\ \ R^3$$

Combinação linear de vetores

É um vetor resultante da operação entre dois ou mais vetores. Pode-se multiplicar os vetores por algum número e em seguida somá-los.

$$5 \cdot (2,5) + 3 \cdot (9,8) = (10,25) + (27,24) = (37,49)$$

$$-2 \cdot (2,5,8) + 1 \cdot (7,9,3) = (-4,-10,-16) + (7,9,3) = (3,-1,-13)$$

Exemplo (Silva, *et al* 1998)

Mostre que o vetor (11,18) pode ser escrito como uma combinação linear entre os vetores (3,4) e (1,2).

Representação da combinação linear

$$x_1 \cdot (3,4) + x_2 \cdot (1,2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 18 \end{pmatrix}$$

NOÇÕES SOBRE ESPAÇO VETORIAL

Exemplo (Silva, *et al* 1998)

$$\begin{pmatrix} 3x_1 \\ 4x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 1x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -12x_1 - 4x_2 = -44 \\ \quad 12x_1 + 6x_2 = \quad 54 \end{cases} \Rightarrow somando \Rightarrow 2x_2 = 10,\ x_2 = 5$$

Exemplo (Silva, *et al* 1998)

Substituindo $x_2 = 5$ na primeira equação

$$3x_1 + 5 = 11 \Rightarrow 3x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 2$$

Conclusão: O vetor (11,18) pode ser escrito como uma combinação linear entre os vetores (3,4) e (1,2) utilizando os coeficientes x_1=2 e x_2=5.

$$2\cdot(3,4) + 5\cdot(1,2) = (11,18)$$

- Noções sobre espaço vetorial

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

- Método Simplex na forma tabular para resolução de PL

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

MÉTODO SIMPLEX

- Desenvolvido em 1947 por George Dantzig.
- Método de otimização.
- Procedimento algébrico com conceitos geométricos.
- Otimiza realizando iterações (repetições do algoritmo).
- Precisa de uma resposta inicial (geralmente (0,0,..).

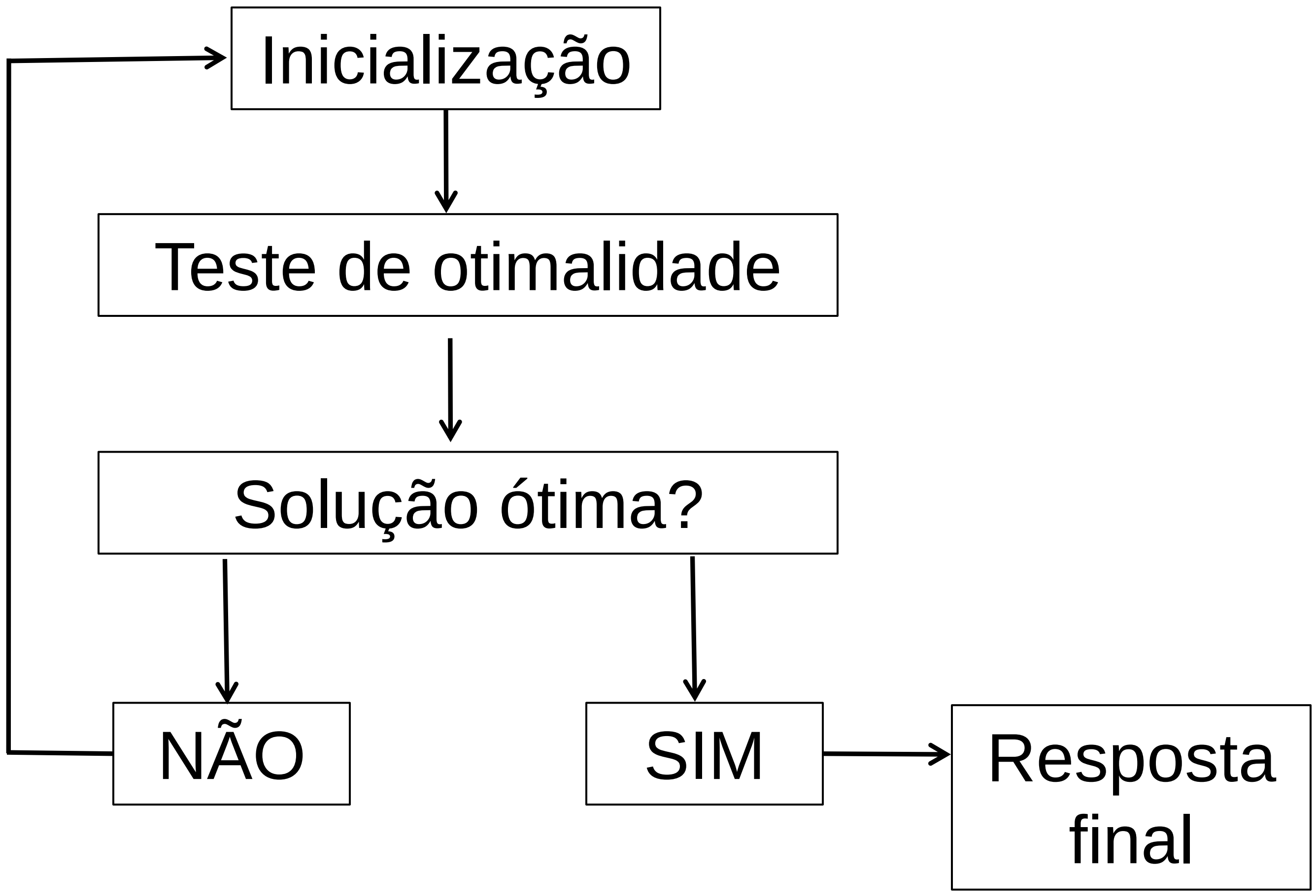

Figura 2 – Algoritmo simplificado do Simplex. Fonte: O autor.

CONFIGURANDO O SIMPLEX

Modelos de PO

- Equação = Função objetivo
- Inequações = Restrições

Exigência do Simplex

- Equações = Função objetivo e restrições -> forma canônica.

$$\text{maximizar } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \ldots; x_n \geq 0$$

CONFIGURANDO O SIMPLEX

Inequações

- Relação entre determinado recurso e sua utilização.

$$\text{Utilização do recurso} \leq \text{disponibilidade de recurso}$$

$$\text{Utilização do recurso} \geq \text{disponibilidade de recurso}$$

1ª Etapa: Transformando inequações em equações

- Utilização da variável de folga.

Variáveis de Folga

Artifício utilizado para promover o equilíbrio entre os dois lados da inequação, transformando-a em uma equação.

O número de variáveis de folga é igual ao número de restrições (que não sejam as de não negatividade).

CONFIGURANDO O SIMPLEX

Variáveis de Folga

$$\text{Utilização} + \text{Variável de folga} = \text{disponibilidade de recurso}$$

$$(\text{Utilização do recurso} \leq \text{disponibilidade de recurso})$$

$$\text{Utilização} - \text{Variável de folga} = \text{disponibilidade de recurso}$$

$$(\text{Utilização do recurso} \geq \text{disponibilidade de recurso})$$

CONFIGURANDO O SIMPLEX

Exemplo de modelo (Longaray, 2013)

$$\text{Max}(Z) = 15 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \leq 16 \\ 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Transformar inequações em igualdades -> Variáveis de folga.

Exemplo de modelo (Longaray, 2013)

$\text{Max}(Z) = 15 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2$

2 restrições (excluindo as de não negatividade) = 2 variáveis de folga.

$4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + xF_1 = 16$

$6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + xF_2 = 12$

Função objetivo transformada na forma correta

$Z - 15 \cdot x_1 - 20 \cdot x_2 = 0$

2ª Etapa: Construção do quadro Simplex

- Colocar todas as equações do modelo linear em um quadro.
- Cada linha representa uma equação.
- Cada coluna indica um parâmetro.

Equações para o quadro

$$Z - 15 \cdot x_1 - 20 \cdot x_2 = 0$$

$$4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + xF_1 = 16$$

$$6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + xF_2 = 12$$

QUADRO DO SIMPLEX

Tabela 1 – Construção do Quadro do Simplex

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
F.O.	1	-15	-20	0	0	0
1ª R	0	4	8	1	0	16
2ª R	0	6	4	0	1	12

$$Z - 15 \cdot x_1 - 20 \cdot x_2 = 0$$

$$4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + xF_1 = 16$$

$$6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + xF_2 = 12$$

3ª Etapa: Determinação da solução básica inicial

- São 4 variáveis: x_1, x_2, xF_1 e xF_2.
- Inicialmente considera-se $x_1 = x_2 = 0$ (representando variáveis não básicas).
- Com isso, $xF_1 = 16$ e $xF_2 = 12$ (representando as variáveis básicas).

Portanto, a solução básica inicial é (0,0,16,12), válida para Z=0.

- A busca pela solução ótima consiste em se determinar novas soluções, que levem ao melhor resultado de Z.

4ª Etapa: Variável que entra e sai da base

- Consiste na permuta entre variáveis básicas e não básicas.
- O processo ocorre com a manipulação algébrica dos dados do quadro do simplex.
- O processo tem por objetivo encontrar a melhor solução viável.

RESOLVENDO O SIMPLEX

4ª Etapa: Variável que entra e sai da base

- Critério para determinação da variável que entra na base.

A variável que entra na base é aquela não-básica que, na linha da função objetivo transformada, apresentar o coeficiente negativo de maior valor.

RESOLVENDO O SIMPLEX

4ª Etapa: Variável que entra e sai da base

- Critério para determinação da variável que sai da base.

A variável que sai da base é dado pelo menor dos quocientes resultantes da divisão do termo independente de uma restrição pelo coeficiente da variável que entra daquela restrição.

4ª Etapa: Variável que entra e sai da base

Variável que entra na base

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
F.O.	1	-15	-20	0	0	0
1ª R	0	4	8	1	0	16
2ª R	0	6	4	0	1	12

4ª Etapa: Variável que entra e sai da base

Variável que entra na base

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
F.O.	1	-15	-20	0	0	0
1ª R	0	4	8	1	0	16
2ª R	0	6	4	0	1	12

16/8 = 2 para 2ª linha (1ª restrição)
12/4 = 3 para 3ª linha (2ª restrição)

4ª Etapa: Variável que entra e sai da base

Variável que entra na base

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
F.O.	1	-15	-20	0	0	0
1ª R	0	4	8	1	0	16
2ª R	0	6	4	0	1	12

Variável que sai da base

xF_1 sai da base e x_2 entra na base

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

Após a definição das variáveis que entram e saem, deve-se calcular os novos valores de Z e das variáveis do modelo.

São 3 passos: definição do elemento pivô, cálculo da nova linha pivô e cálculo das demais linhas do quadro.

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

Elemento pivô: Intersecção entre a coluna da variável que entra na base e da linha da variável que sai da base.

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
F.O.	1	-15	-20	0	0	0
1ª R	0	4	8	1	0	16
2ª R	0	6	4	0	1	12

Pivô = 8

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

Nova linha pivô: Divisão da linha da variável que sai pelo elemento pivô

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
2ª linha	0	4	8	1	0	16
			$\div 8$			
Nova 2ª linha	0	1/2	1	1/8	0	2

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

Cálculo das demais linhas: Toma por base os valores da nova linha pivô. Multiplicar cada termo da linha pivô pelo coeficiente com sinal invertido da variável que entra na linha analisada.

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
2ª linha	0	4	8	1	0	16
			$\div 8$			
Nova 2ª linha	0	1/2	1	1/8	0	2

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

1ª linha

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
F.O. (1ª linha)	1	-15	-20	0	0	0

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
Linha pivô	0	1/2	1	1/8	0	2
x(20)	0	10	20	5/2	0	40
+ 1ª linha	1	-15	-20	0	0	0
Nova 1ª linha	1	-5	0	5/2	0	40

RESOLVENDO O SIMPLEX

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

3ª linha

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
2ª R (3ª linha)	0	6	4	0	1	12

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
Linha pivô	0	1/2	1	1/8	0	2
x(-4)	0	-2	-4	-1/2	0	-8
+ 3ª linha	0	6	4	0	1	12
Nova 3ª linha	0	4	0	-1/2	1	4

RESOLVENDO O SIMPLEX

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

Novas linhas

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
Nova 1ª linha	1	-5	0	5/2	0	40
Nova 2ª linha	0	1/2	1	1/8	0	2
Nova 3ª linha	0	4	0	-1/2	1	4

$Z = 40$

Variáveis não básicas:

$x_1 = 0$

$xF_1 = 0$

Variáveis básicas:

$x_2 = 2$

$xF_2 = 4$

6ª Etapa: Teste da nova solução

Deve-se analisar a linha da F.O. (1ª linha), a solução será a ótima quando os coeficientes das variáveis não básicas (de decisão) da F.O. transformada (x_1 e x_2) forem iguais a zero ou positivos.

Neste exemplo, o coeficiente de x_1 é -5 e o coeficiente de x_2 é 0, portanto, o procedimento de resolução do simplex, deve ser repetido a partir da 4ª etapa, até se obter os novos valores das variáveis não básicas.

RESOLVENDO O SIMPLEX

4ª Etapa: Variável que entra e sai da base

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1ª linha	1	-5	0	5/2	0	40
2ª linha	0	1/2	1	1/8	0	2
3ª linha	0	4	0	-1/2	1	4

Variáveis não básicas: x_1 e xF_1

2/(1/2) = 4 para 2ª linha

4/4 = 1 para 3ª linha

x_1 entra na base e xF_2 sai da base.

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

Elemento pivô: Intersecção entre a coluna da variável que entra na base e da linha da variável que sai da base.

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1ª linha	1	-5	0	5/2	0	40
2ª linha	0	1/2	1	1/8	0	2
3ª linha	0	4	0	-1/2	1	4

Pivô = 4

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

Nova linha pivô: Divisão da linha da variável que sai pelo elemento pivô

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
3ª linha	0	4	0	-1/2	1	4
			$\div$ 4			
Nova 3ª linha	0	1	0	-1/8	1/4	1

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

1ª linha

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1ª linha	1	-5	0	5/2	0	40

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
Linha pivô	0	1	0	-1/8	1/4	1
x(5)	0	5	0	-5/8	5/4	5
+ 1ª linha	1	-5	0	5/2	0	40
Nova 1ª linha	1	0	0	15/8	5/4	45

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

2ª linha

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
2ª linha	0	1/2	1	1/8	0	2

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
Linha pivô	0	1	0	-1/8	1/4	1
x(-1/2)	0	-1/2	0	1/16	-1/8	-1/2
+ 2ª linha	0	1/2	1	1/8	0	2
Nova 2ª linha	0	0	1	3/16	-1/8	3/2

5ª Etapa: Determinação da nova solução básica

Novas linhas

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
Nova 1ª linha	1	0	0	15/8	5/4	45
Nova 2ª linha	0	0	1	3/16	-1/8	3/2
Nova 3ª linha	0	1	0	-1/8	1/4	1

$Z = 45$

Variáveis não básicas:

$xF_1 = 0$

$xF_2 = 0$

Variáveis básicas:

$x_1 = 1$

$x_2 = 3/2$

6ª Etapa: Teste da nova solução

Agora, o coeficiente de x_1 é 0 e o coeficiente de x_2 também é 0, portanto, o procedimento de resolução do simplex, encontrou a solução ótima.

- Método Simplex na forma tabular para resolução de PL

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

- Casos Especiais do Método Simplex
  Problema da Solução Básica Inicial

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

MINIMIZAÇÃO

O método simplex se aplica a problemas de MAXIMIZAÇÃO.

Para converter um problema de minimização em maximização, basta multiplicar os coeficientes da função objetivo por (-1).

Por exemplo:

$Min(Z) = 3x_1 + 5x_3 \Rightarrow Max(-Z) = -3x_1 - 5x_3$

MINIMIZAÇÃO

Deve-se resolver o problema da mesma forma apresentada para maximização.

Ao final da otimização, o valor de Z encontrado deve ser multiplicado por (-1) para encontrar o verdadeiro Z do problema de minimização.

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Restrições de limite superior ($\leq$) => Uso das variáveis de folga.

Quando as restrições do problema são de limite inferior ($\geq$) ou de igualdade (=) => Uso das variáveis de folga e artificiais.

Ex: $12x_1 + 24x_2 \geq 30$

$12x_1 + 24x_2 - xF_1 = 30$

Ao arbitrar $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ => $xF_1 = -30$, fere o princípio da não-negatividade.

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Para resolver este problema deve-se utilizar a variável artificial (S).

$12x_1 + 24x_2 – xF_1 + S_1 = 30$, assim, arbitrando

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $xF_1 = 0 \Rightarrow S_1 = 30$ (OK)

Ex: $3x_1 + 2x_2 = 10$

Ao arbitrar $x_1 = 0$ e $x_2 = 0 \Rightarrow 0 = 10$, o que é matematicamente inaceitável.

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Para resolver este problema deve-se utilizar a variável artificial (S).

$3x_1 + 2x_2 + S_2 = 10$, assim, arbitrando

$x_1 = 0$ e $x_2 = 0 \Rightarrow S_2 = 10$ (OK)

A utilização da variável artificial (S) cria um novo passo para resolução do simplex, sendo necessário inicialmente eliminar as variáveis artificiais que foram colocadas nas equações do problema.

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Um dos métodos de eliminação das variáveis articiais é chamado de método do M grande, que se baseia na hipótese de que, as variáveis artificiais (S) devem assumir valor igual a “0” na função objetivo ótima.

O método trabalha com a inserção de um coeficiente M_i para a variável artificial S_i na função objetivo do modelo.

A variável que entra na base é escolhida para que a variável que sai da base seja e variável artificial.

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Ex:

$$\text{Min } (Z) = 5x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.a} \begin{cases} 12x_1 + 24x_2 \geq 30 \\ 3x_1 + 2x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Primeiro deve-se modificar a minimização para maximização e então, acrescentar as variáveis de folga e artificiais.

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

$$\text{Max (W)} = -5x_1 - 10x_2$$

s.a

$$12x_1 + 24x_2 - xF_1 + S_1 = 30$$

$$3x_1 + 2x_2 + s_2 = 10$$

Nestas condições, a solução básica inicial é formada por $S_1 = 30$ e $S_2 = 10$, como S_1 e S_2 não fazem parte do modelo original, devem ser removidas para que se possa continuar a otimização. Para isto, utiliza-se o método do M grande. Portanto, a nova função objetivo fica na forma:

$$\text{Max (W)} = -5x_1 - 10x_2 - M_1S_1 - M_2S_2$$

Com estas condições pode-se montar o quadro simplex:

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
1ª linha	1	5	10	0	M_1	M_2	0
2ª linha	0	12	24	-1	1	0	30
3ª linha	0	3	2	0	0	1	10

$$W = 0$$

Variáveis não básicas:

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$xF_1 = 0$

Variáveis básicas:

$S_1 = 30$

$S_2 = 10$

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Tomando x_1 como a variável de entrada.

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
1ª linha	1	5	10	0	M_1	M_2	0
2ª linha	0	12	24	-1	1	0	30
3ª linha	0	3	2	0	0	1	10

30/12 = 2,5 para 2ª linha
10/3 = 3,33 para 3ª linha

S_1 é a variável que sai

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

O elemento pivô então será o número 12.

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
1ª linha	1	5	10	0	M_1	M_2	0
2ª linha	0	12	24	-1	1	0	30
3ª linha	0	3	2	0	0	1	10

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Determinação das novas linhas do quadro Simplex.

Linha Pivô

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
2ª linha	0	12	24	-1	1	0	30
				÷12			
Nova 2ª linha	0	1	2	-1/12	1/12	0	5/2

Cálculo da nova 1ª linha.

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
Linha pivô	0	1	2	-1/12	1/12	0	5/2
(x -5)	0	-5	-10	5/12	-5/12	0	-25/2
+1ª linha	1	5	10	0	M_1	M_2	0
Nova 1ª linha	1	0	0	5/12	M_1	M_2	-25/2

Qualquer valor somado a M_i resulta em M_i.

Cálculo da nova 3ª linha.

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
Linha pivô	0	1	2	-1/12	1/12	0	5/2
(x -3)	0	-3	-6	3/12	-3/12	0	-15/2
+3ª linha	0	3	2	0	0	1	10
Nova 3ª linha	0	0	-4	3/12	-3/12	1	5/2

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Novo quadro Simplex

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
Nova 1ª linha	1	0	0	5/12	M_1	M_2	-25/2
Nova 2ª linha	0	1	2	-1/12	1/12	0	5/2
Nova 3ª linha	0	0	-4	3/12	-3/12	1	5/2

$$W = -25/2$$

Variáveis não básicas:

$S_1 = 0$

$x_2 = 0$

$xF_1 = 0$

Variáveis básicas:

$x_1 = 5/2$

$S_2 = 5/2$

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Tomando xF_1 como a variável de entrada.

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
Nova 1ª linha	1	0	0	5/12	M_1	M_2	-25/2
Nova 2ª linha	0	1	2	-1/12	1/12	0	5/2
Nova 3ª linha	0	0	-4	3/12	-3/12	1	5/2

(5/2)/(-1/12) = -30 para 2ª linha
(5/2)/(3/12) = 10 para 3ª linha – Linha que apresenta S_2

S_2 é a variável que sai

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

O elemento pivô então será o número 3/12.

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
Nova 1ª linha	1	0	0	5/12	M_1	M_2	-25/2
Nova 2ª linha	0	1	2	-1/12	1/12	0	5/2
Nova 3ª linha	0	0	-4	3/12	-3/12	1	5/2

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Determinação das novas linhas do quadro Simplex.

Linha Pivô

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
3ª linha	0	0	-4	3/12	-3/12	1	5/2
				÷3/12			
Nova 3ª linha	0	0	-48/3	1	-1	12/3	10

Cálculo da nova 1ª linha.

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
Linha pivô	0	0	-48/3	1	-1	12/3	10
(x -5/12)	0	0	20/3	-5/12	5/12	-15/9	-25/6
+1ª linha	1	0	0	5/12	M_1	M_2	-25/2
Nova 1ª linha	1	0	20/3	0	M_1	M_2	-50/3

Assim como anteriormente, qualquer valor somado a M_i resulta em M_i.

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Cálculo da nova 2ª linha.

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
Linha pivô	0	0	-48/3	1	-1	12/3	10
(x 1/12)	0	0	-12/9	1/12	-1/12	1/3	5/6
+2ª linha	0	1	2	-1/12	1/12	0	5/2
Nova 2ª linha	0	1	2/3	0	0	1/3	10/3

Novo quadro Simplex

	W	x_1	x_2	xF_1	S_1	S_2	b
Nova 1ª linha	1	0	20/3	0	M_1	M_2	-50/3
Nova 2ª linha	0	1	2/3	0	0	1/3	10/3
Nova 3ª linha	0	0	-48/3	1	-1	12/3	10

$W = -50/3$

Variáveis não básicas:

$S_1 = 0$

$S_2 = 0$

$x_2 = 0$

Variáveis básicas:

$x_1 = 10/3$

$xF_1 = 10$

Neste ponto, pode-se excluir as variáveis S_1 e S_2 do Modelo. Portanto, o novo quadro Simplex fica na forma:

	W	x_1	x_2	xF_1	b
Nova 1ª linha	1	0	20/3	0	-50/3
Nova 2ª linha	0	1	2/3	0	10/3
Nova 3ª linha	0	0	-48/3	1	10

$$W = -50/3$$

Variáveis não básicas:

$x_2 = 0$

Variáveis básicas:

$x_1 = 10/3$

$xF_1 = 10$

PROBLEMA DA SOLUÇÃO BÁSICA INICIAL

Após a eliminação das variáveis artificiais S_1 e S_2, o procedimento de otimização do Simplex pode ser aplicado normalmente.

Neste caso, como o Simplex não apresenta nenhum coeficiente negativo na função-objetivo transformada, a solução encontrada é a melhor possível. Portanto:

$W = -Z \Rightarrow -50/3 = -Z \Rightarrow Z = 50/3$

Sendo, $x_1 = 10/3$, $x_2 = 0$ e $xF_1 = 10$.

- Casos Especiais do Método Simplex Problema da Solução Básica Inicial

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

- Outros Casos Especiais do Método Simplex

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

EMPATE NA VARIÁVEL DE ENTRADA

Quando mais de uma variável tem condições de entrar na base, esta deve ser escolhida arbitrariamente.

Ex: Max $Z = 5x_1 + 5x_2$, a primeira linha do quadro Simplex fica:

	Z	x_1	x_2	b
1ª linha	1	-5	-5	0

Portanto, x_1 e x_2 possuem o mesmo coeficiente (-5), podendo ser escolhido um ou outro.

EMPATE NA VARIÁVEL DE SAÍDA

Quando houver empate entre as linhas da variável que sai da base, deve-se escolher aleatoriamente qualquer dessas linhas.

Nestas condições, o problema resulta sempre em uma variável básica com valor 0.

Esse tipo de problema recebe o nome de problema da degeneração.

Também acontecer de, a partir de uma dada interação, o valor de Z não mudar mais, mesmo obtendo-se novo quadro Simplex. Nesta situação diz-se que o problema entrou em looping ou circuito fechado.

PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE

Se alguma variável for livre, ou seja, não atender à condição de não negatividade deve-se reescrever esta variável como a diferença entre duas variáveis positivas, Supondo:

$$\text{Max }(Z) = 3x_1 + 2x_2$$

s.a

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 = \text{livre}$$

$$x_2 \geq 0$$

PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE

Como x_1 é uma variável livre, deve ser substituída por $(x_3 - x_4)$:

$$x_1 = (x_3 - x_4), \quad \text{com } x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0$$

O modelo fica então na forma:

$$\text{Max } (Z) = 3(x_3 - x_4) + 2x_2$$

s.a

$$4(x_3 - x_4) + 3x_2 \leq 12$$

$$1(x_3 - x_4) + 2x_2 \leq 8$$

com

$$x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0$$

PROBLEMA DA VARIÁVEL LIVRE

O modelo pode ser resolvido normalmente e ao final, a diferença (x_3-x_4) fornecerá o valor de x_2.

MÚLTIPLAS SOLUÇÕES

Quando a linha da função objetivo transformada apresentar uma variável não básica com coeficiente nulo, o problema admite múltiplas soluções.

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1ª linha	1	0	0	0	5	45
2ª linha	0	1	0	1	3	5
3ª linha	0	0	1	1	3	10

$Z = 45$

Variáveis não básicas:

$xF_1 = 0$

$xF_2 = 0$

Variáveis básicas:

$x_1 = 5$

$x_2 = 10$

MÚLTIPLAS SOLUÇÕES

Ao resolver o quadro Simplex, o valor de Z continua 45 e ao menos uma das variáveis não básicas continua assumindo o valor 0.

Neste caso, o modelo apresenta mais de uma solução.

SOLUÇÕES ILIMITADAS

Ocorre quando não há possibilidade de se determinar a variável que sai da base no quadro Simplex. Isso se observa quando os coeficientes da coluna da variável que entra na base possuem sinal negativo.

	Z	x_1	x_2	xF_1	xF_2	b
1ª linha	1	0	-3	2	0	100
2ª linha	0	1	-4	4	0	17
3ª linha	0	0	-1	1	1	25

Nesta situação, interrompe-se o cálculo do método Simplex e o último valor de Z encontrado passa a ser a solução ótima.

- Outros Casos Especiais do Método Simplex

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

- Análise do Dual e do Primal

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

A DUALIDADE

"A dualidade é a possibilidade de existência matemática de um algoritmo simétrico (dual) para todo modelo original (primal) de programação linear que conduz a uma mesma solução" (Longaray, 2013).

O dual pode ser utilizado para reduzir a quantidade de cálculos que se faria no primal.

Matematicamente, o dual é a matriz transposta do primal, ou seja, ao escrever o primal como uma matriz de coeficientes, para se obter a matriz do dual, basta transformar as colunas da matriz primal em linhas e as linhas da matriz primal em colunas.

A DUALIDADE

A variável dual é representada pela letra y_n, e n é o número de restrições do primal, ou seja, o número de variáveis duais será igual ao número de restrições do primal.

O número de restrições do dual será igual ao número de variáveis x_n do primal.

A função objetivo do dual é o oposto do primal. Se no primal há maximização, no dual haverá minimização.

Considere o exemplo (Longaray, 2013).

$$\min Z = 20x_1 + 30x_2$$

$$x_1 + 6x_2 \geq 18$$
$$30x_1 + 15x_2 \geq 90$$
$$3x_1 + 6x_2 \geq 30$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Os coeficientes da função objetivo serão formados pelos coeficientes independentes do primal.

$$\min Z = 20x_1 + 30x_2$$

$$x_1 + 6x_2 \geq 18$$

$$30x_1 + 15x_2 \geq 90$$

$$3x_1 + 6x_2 \geq 30$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Primal

$$\max D = 18y_1 + 90y_2 + 30y_3$$

Dual

As restrições do dual apresentarão sinal inverso das do primal. As restrições 1 e 2 serão formada pelos coeficientes da coluna x_1 e x_2, respectivamente.

$$\min Z = 20x_1 + 30x_2 \qquad \max D = 18y_1 + 90y_2 + 30y_3$$

$$x_1 + 6x_2 \geq 18$$
$$30x_1 + 15x_2 \geq 90$$
$$3x_1 + 6x_2 \geq 30$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Primal

$$1y_1 + 30y_2 + 3y_3 \leq 20$$
$$6y_1 + 15y_2 + 6y_3 \leq 30$$
$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0$$

Dual

Após a transformação, basta resolver o sistema linear encontrado, utilizando o simplex.

$$\min Z = 20x_1 + 30x_2$$

$$x_1 + 6x_2 \geq 18$$
$$30x_1 + 15x_2 \geq 90$$
$$3x_1 + 6x_2 \geq 30$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Primal

$$\max D = 18y_1 + 90y_2 + 30y_3$$

$$1y_1 + 30y_2 + 3y_3 \leq 20$$
$$6y_1 + 15y_2 + 6y_3 \leq 30$$
$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0$$

Dual

- Análise do Dual e do Primal

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

Unidade II: Programação Linear

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

Pesquisa Operacional

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro