# Pesquisa Operacional

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

# Unidade V: INTRODUÇÃO À TEORIA DAS FILAS

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

# OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Estudar as origens e a evolução da teoria das filas.
- Compreender a definição e importância do Modelo de Filas no contexto empresarial.
- Entender as características do sistema de filas.
- Abordar o modelo de filas e suas derivações.
- Analisar os vários sistemas de atendimento a clientes da organização, externos ou internos, de forma a identificar situações de congestionamento.

# OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Modelar e resolver os problemas de congestionamento com o uso de técnicas de Teoria das Filas.
- Desenvolver sistemas de atendimento a clientes que busquem minimizar o custo total.

# PLANO DE ESTUDO

- Princípios de Estatística.
- Origens e definições da Teoria das Filas.
- Características dos sistemas de Filas.
- Modelo de Filas.
- Minimização do Custo Total em um Sistema de Filas.

- Definições e importância da teoria das filas

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

# DEFINIÇÕES E ORIGEM

## Sistema com fila

É qualquer processo em que usuários de uma determinada população chegam para receber um serviço e precisam esperar, saindo do sistema assim que são atendidos. (Fogliatti e Mattos, 2007).

A espera ocorre quando a demanda é maior do que a capacidade de atendimento do sistema.

## Origem

O primeiro estudo realizado em relação à Teoria das Filas foi executado pelo matemático A.K. Erlang em 1909 para tratar do problema de congestionamento das linhas telefônicas da Dinamarca.

A.K.Erlang é considerado o pai da Teoria das Filas.

## Algumas aplicações

- Atendimento em hospitais e correios.
- Operações de caixas (supermercados e lotéricas).
- Almoxarifados.
- Postos de gasolina.
- Programação do tráfego aéreo dos aeroportos.
- Sincronização de semáforos.
- Descarregamento de navios em portos.

## Importância da aplicação da Teoria das Filas

- As filas podem gerar desconforto ao cliente e também custos tanto para o cliente, quanto para a empresa.
- A existência de fila em um equipamento industrial, pode aumentar o ciclo de produção da fábrica, ocasionando aumento de custos e atrasos de entrega.
- O dimensionamento do sistema para que não hajam filas geralmente é inviável.

## Importância da aplicação da Teoria das Filas

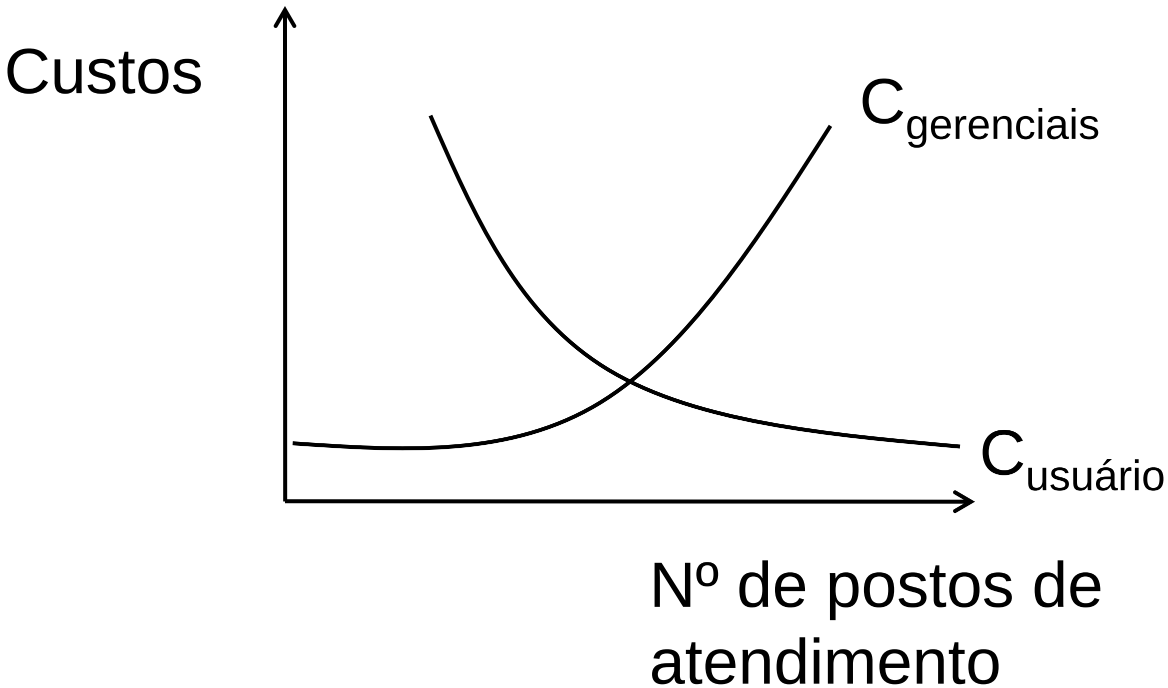



Figura 1 – Custos do usuário e da gerência em função do número de postos de atendimento. Fonte: Adaptado de Fogliatti e Mattos, 2007.

## Importância da aplicação da Teoria das Filas

O custo total do sistema é dado por:

$$C_T = aC_g + bC_u$$

O ponto de equilíbrio ocorre com a minimização da função custo total.

## Importância da aplicação da Teoria das Filas

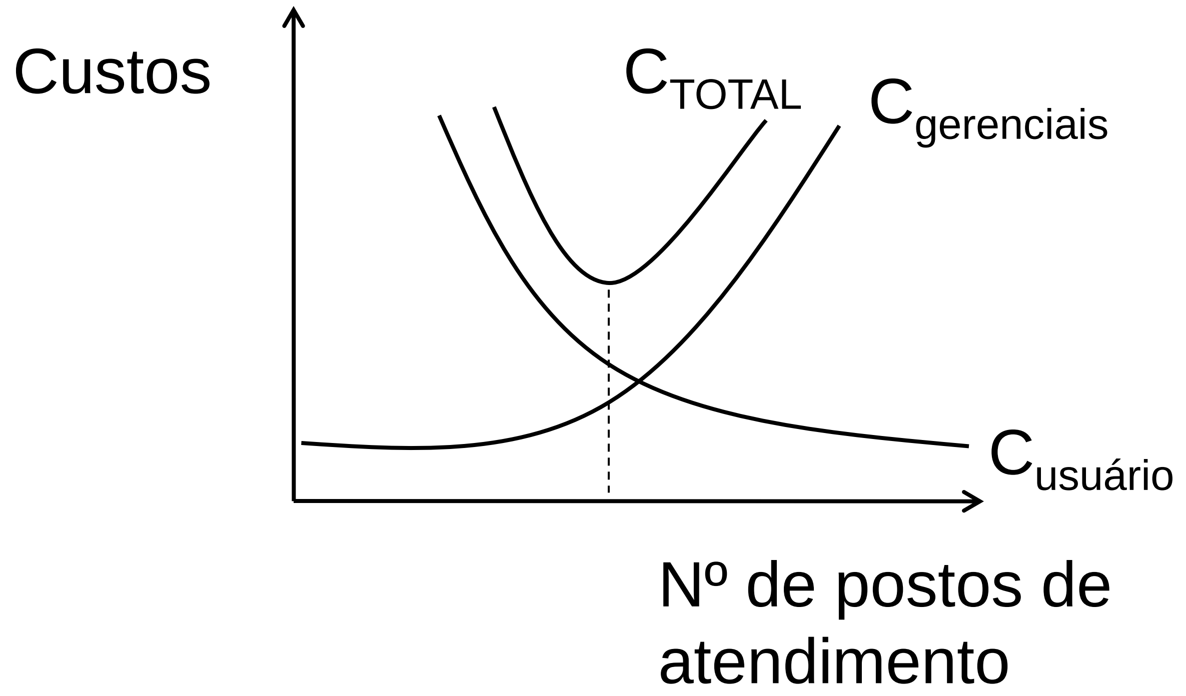



Figura 2 – Função de custo total. Fonte: Adaptado de Fogliatti e Mattos, 2007.

## Importância da aplicação da Teoria das Filas

A Teoria das Filas contribui para o projeto e a operação de sistemas a fim de encontrar o equilíbrio entre os custos ofertar o serviço (custo de produção) e os gastos dos atrasos para o cliente.

- Definições e importância da teoria das filas

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

- Características dos sistemas de filas

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

## Sistema com fila

É qualquer processo em que usuários de uma determinada população chegam para receber um serviço e precisam esperar, saindo do sistema assim que são atendidos. (Fogliatti e Mattos, 2007).

O sistema de filas é formado pelos usuários, pelos canais ou postos de serviço (atendimento) e um espaço designado para espera.

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

## Sistema com fila

Os usuários chegam ao sistema segundo um determinado comportamento que caracteriza o processo de chegadas, para serem atendidos nos postos de atendimento, que também apresentam seu comportamento de atendimento. Se todos os postos estão ocupados, os usuários esperam na fila dentro do espaço designado para isso. Depois de completado o serviço, o usuário é liberado.

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

## Sistema com fila

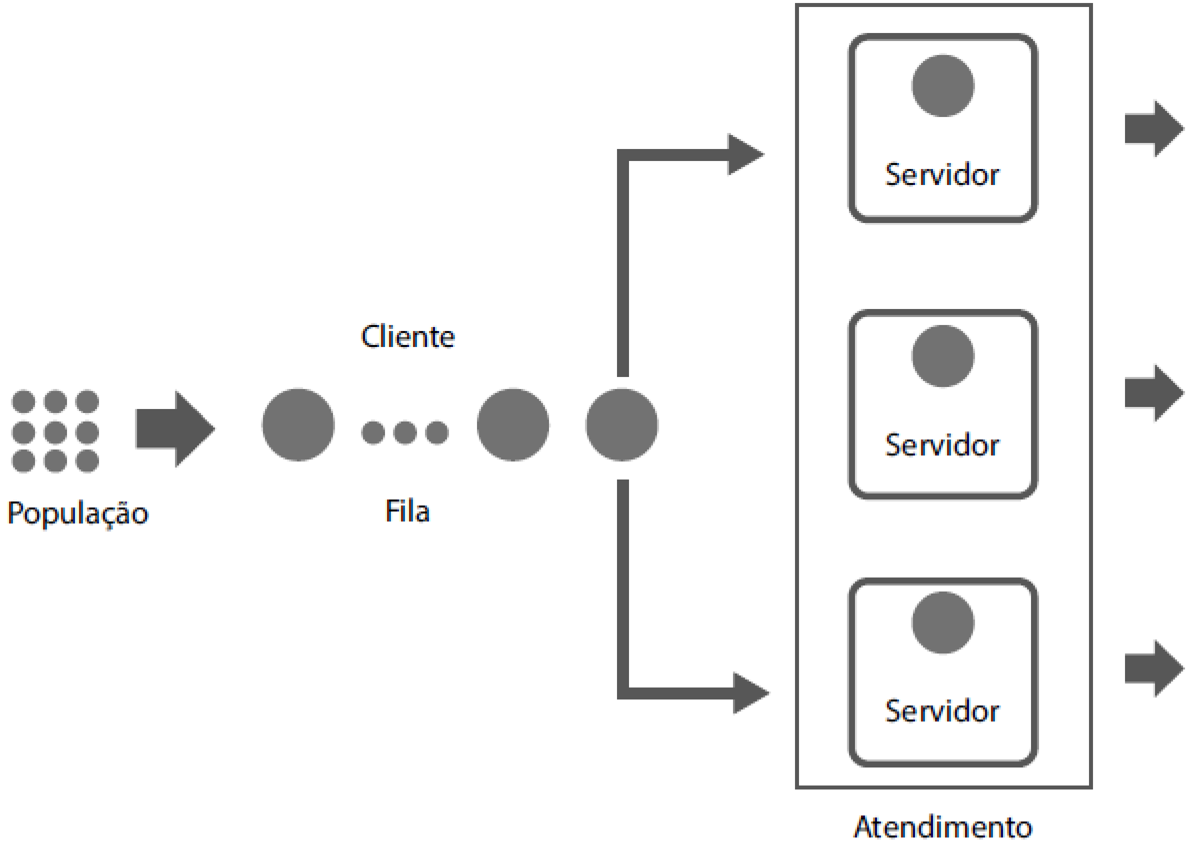



Figura 3 – Estrutura de um modelo de filas. Fonte: Costa, 2015.

## Sistema com fila

As filas podem se subdividir em 4 categorias.

I) Fila única e um servidor.
II) Fila única e múltiplos servidores em paralelo.
III) Múltiplas filas e múltiplos servidores em paralelo.
IV) Fila única e múltiplos servidores em série.

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

## Sistema com fila

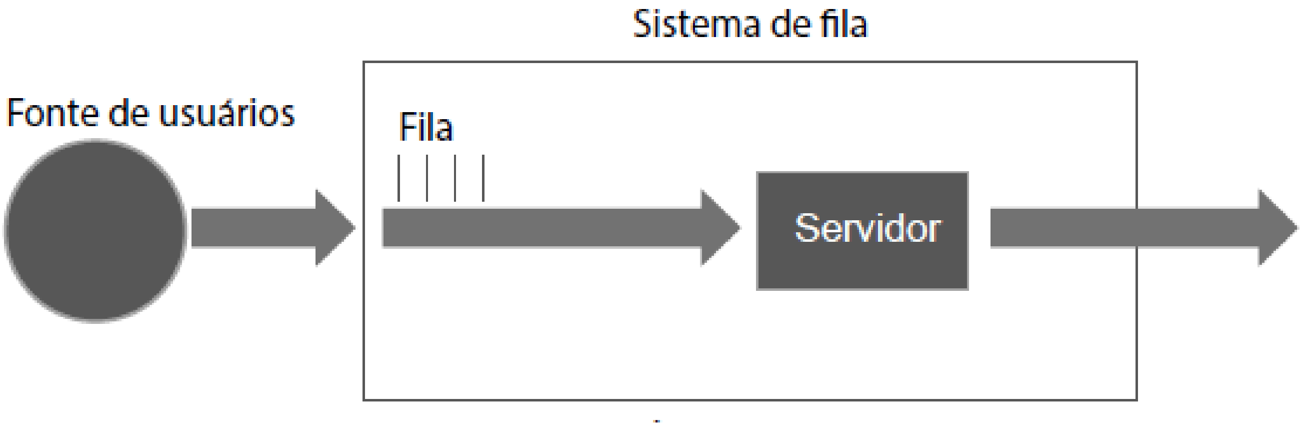



Figura 4 – Fila única e um servidor (I). Fonte: Costa, 2015.

## Sistema com fila

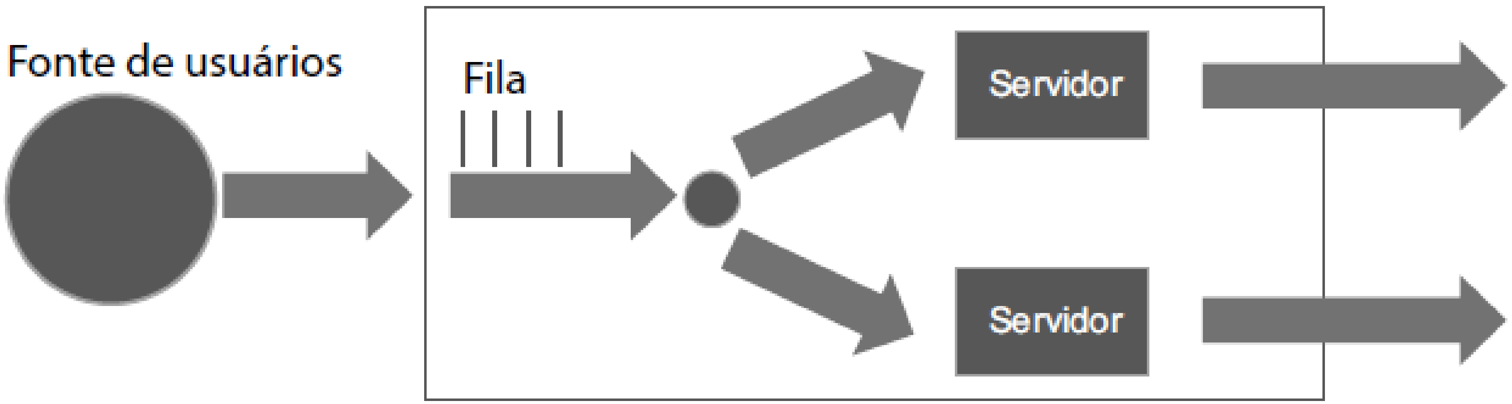



Figura 5 – Fila única e múltiplos servidores em paralelo (II).
Fonte: Costa, 2015.

## Sistema com fila

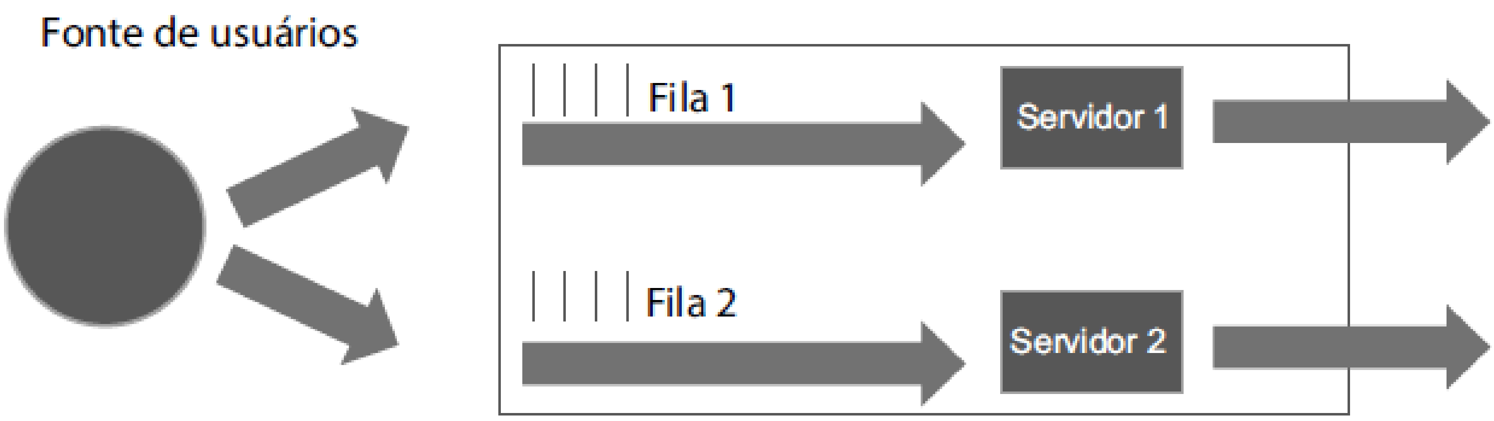



Figura 6 – Múltiplas filas e múltiplos servidores em paralelo (III). Fonte: Costa, 2015.

## Sistema com fila

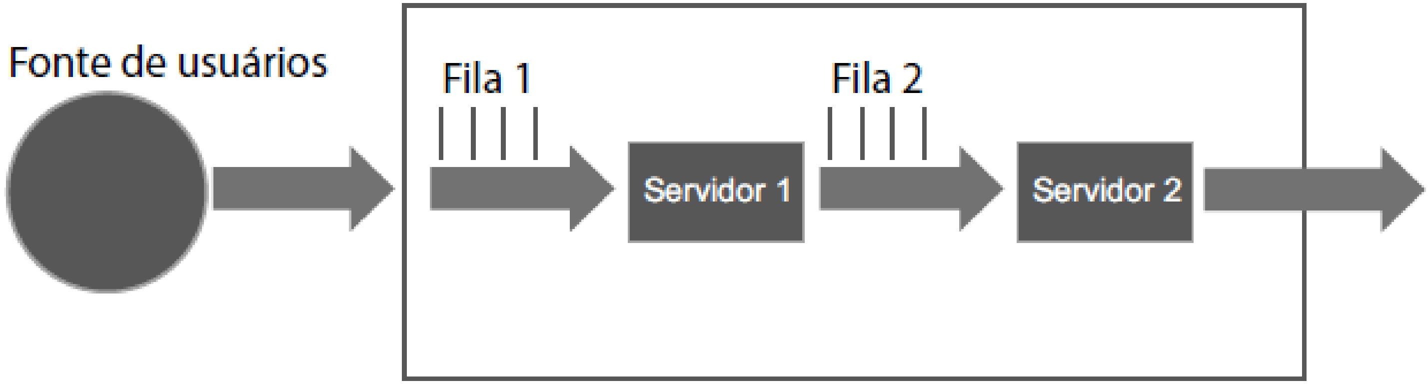



Figura 7 – Fila única e múltiplos servidores em série (IV).
Fonte: Costa, 2015.

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

## Elementos para caracterização do sistema

a) Processo de Chegada de Usuários.
b) Processo de Atendimento.
c) Canais ou Postos de Serviço/Atendimento.
d) Capacidade do Sistema.
e) Disciplina de Atendimento.

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

## Elementos para caracterização do sistema

a) Processo de Chegada de Usuários.

É especificado pelo comportamento do fluxo de chegada. Se o número de chegadas e o tempo em que ocorrem forem conhecidos, têm-se um processos determinístico. Caso contrário, o comportamento é aleatório e o processo é estocástico, sendo caracterizado por uma distribuição de probabilidade e se trabalha com a taxa de chegadas.

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

## Elementos para caracterização do sistema

b) Processo de Atendimento.

É especificado pelo comportamento do fluxo de Usuários atendidos. Sua caracterização é semelhante à do Processo de Chegada.

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

## Elementos para caracterização do sistema

c) Canais ou Postos de Atendimento.

Representam os locais de atendimento aos usuários, podendo ser finito (guichês de um posto de pedágio) ou infinitos (self-service, o cliente e o servidor são a mesma pessoa).

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

## Elementos para caracterização do sistema

d) Capacidade do Sistema.

Representa o número máximo de usuários que o sistema comporta, incluindo a fila e o atendimento. A capacidade pode ser finita (posto de vistoria de carros, admite um nº máximo que carros que podem ficar aguardando serem atendidos) ou infinita (descarregamento de navios, pois os navios podem aguardar no mar).

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

## Elementos para caracterização do sistema

e) Disciplina de Atendimento.

Representa o critério de atendimento que é definido pela gerência. São 4 as disciplinas mais utilizadas.

I) FIFO (First in – First out).
II) LIFO (Last in – First out).
III) PRI (priority service).
IV) SIRO (service in random order).

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

Elementos para caracterização do sistema

e) Disciplina de Atendimento.

I) FIFO (First in – First out)

O atendimento ocorre por ordem de chegada, é a disciplina de atendimento mais utilizada. Ex: venda de ingressos, atendimento bancário e descarregamento de navios.

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

Elementos para caracterização do sistema

e) Disciplina de Atendimento.

II) LIFO (Last in – First out)

O primeiro a ser atendido é o último que chega, como por exemplo a utilização de estoques verticais ou horizontais para carregamento de contêineres em navios.

# CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS

Elementos para caracterização do sistema

e) Disciplina de Atendimento.

III) PRI (priority service)

O atendimento aos usuários segue alguma prioridade estabelecida pela gerência do sistema, como por exemplo, a internação hospitalar, cirurgias ou a exploração de poços petrolíferos.

Elementos para caracterização do sistema

e) Disciplina de Atendimento.

IV) SIRO (service in random order)

O atendimento aos usuários ocorrem de forma aleatória, como por exemplo, a contemplação em consórcios.

- Características dos sistemas de filas

- Modelo de Filas – MM/1/∞/FIFO

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

O modelo MM/1/∞/FIFO é representativo de um sistema de filas estocástico, ou seja, quando a quantidade de usuários que chegam ao sistema é aleatória.

Esse processo estocástico pode ser chamado de processo markoviano quando as informações do passado não afetam as previsões do futuro.

MM/1/∞/FIFO

MM representa a forma de chegada e atendimento, significando que o sistema é markoviano para a chegada e para o atendimento, sendo que o ritmo médio de chegada ($\lambda$) e o ritmo médio de atendimento ($\mu$) seguem a **distribuição de probabilidade de Poison**, que é uma exponencial negativa. As letras M referem-se ao termo *memoryless*, ou seja, sem memória, indicando que os eventos passados não afetam a previsão dos eventos futuros.

MM/1/∞/FIFO

A função de probabilidade de Poison é uma equação exponencial negativa.

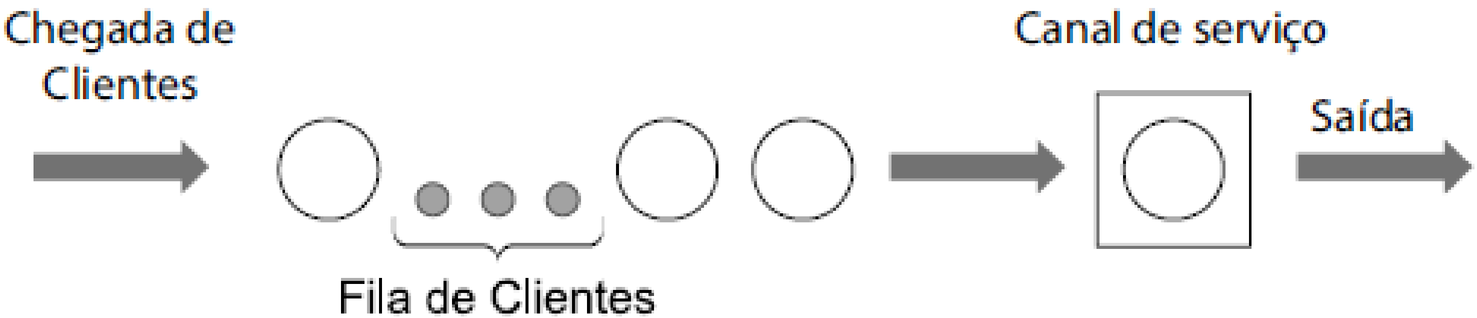
$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k}}{k!}$$

Sendo P(X=k) a probabilidade ou freqüência de ocorrerem “k” chegadas de clientes por unidade de tempo.

## MM/1/∞/FIFO

O número 1 representa um canal de atendimento, o número de clientes é grande o suficiente para que a população seja classificada como infinita (∞) e a disciplina de atendimento é do tipo, primeiro que entra – primeiro que sai (FIFO).

## MM/1/∞/FIFO




.

Figura 1 – Representação do modelo MM/1/∞/FIFO. Fonte: Costa, 2015.

MM/1/∞/FIFO

Para este sistema de filas, são válidas as seguintes variáveis aleatórias.

Para o sistema

NS = nº médio de clientes no sistema.

TS = tempo médio de permanência no sistema.

Para a fila

NF = nº médio de clientes na fila.

TF = tempo médio de permanência na fila.

## MM/1/∞/FIFO

**Para o processo de chegada**

$\lambda$ = ritmo médio de chegada.

IC = intervalo médio de clientes no sistema

Por definição: $IC=1/\lambda$.

**Para o processo de atendimento**

$\mu$ = tempo médio de atendimento de cada atendente.

TA = tempo médio de atendimento ou de serviço.

Por definição: $TA = 1/\mu$.

# MODELO DE FILAS

## MM/1/∞/FIFO

A distribuição de probabilidade do número de clientes (n) do sistema é representada pela seguinte equação.

$$P(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \bullet \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu}\right)$$

A taxa de ocupação/utilização do sistema ($\rho$) pode ser dada pela equação apresentada a seguir.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

## MM/1/∞/FIFO

A taxa de ociosidade do sistema (n=0) pode ser dada pela equação a seguir.

$$P(n) = \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu}\right)$$

Conhecendo as probabilidades do número de usuários do sistema (n), pode-se determinar as equações para os demais parâmetros do sistema, como apresentados na Tabela 1.

# MM/1/∞/FIFO

Tabela 1 – Fórmulas das principais variáveis randômicas.

| Nome | Descrição | Fórmula |
|---|---|---|
| NF | nº médio de clientes na fila | $NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$ |
| NS | nº médio de clientes no sistema | $NS = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ |
| TF | Tempo médio dos clientes na fila | $TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ |
| TS | Tempo médio dos clientes no sistema | $TS = \frac{1}{\mu-\lambda}$ |
| $P_n$ | Probabilidade de haver n clientes no sistema | $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \bullet \left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)$ |

## MM/1/∞/FIFO

Algumas relações podem ser estabelecidas.

$$NF = \lambda \bullet TF$$

$$NS = \lambda \bullet TS$$

$$TF = TS - \frac{1}{\mu}$$

## Exemplo (Fogliatti e Mattos, 2007)

Os clientes chegam a uma pequena agência bancária, seguindo um processo de Poison com uma taxa $\lambda$=0,3 clientes por minuto. A agência acomoda confortavelmente até 5 pessoas. O atendimento é prestado por 1 caixa, por ordem de chegada em um tempo igualmente distribuído com média igual a 2min.

a) Avaliar o desempenho da agência
b) Supor aumento de 50% da demanda e comprar com a)

## Exemplo (Fogliatti e Mattos, 2007)

a) De acordo com o enunciado, o comportamento da agência pode ser representado por um modelo MM/1/∞/FIFO, com λ=0,3 clientes/min. e μ=0,5 clientes/min. (TA = 2min.). Pode-se então, determinar os parâmetros do sistema.

- Taxa de ocupação (ρ)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,3}{0,5} = 0,60$$

## Exemplo (Fogliatti e Mattos, 2007)

- Nº médio de clientes no sistema (NS)

$$NS = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0,3}{0,5 - 0,3} = 1,5 \ clientes$$

- Nº médio de clientes na fila (NF)

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{0,3^2}{0,5(0,5 - 0,3)} = 0,9 \ clientes$$

## Exemplo (Fogliatti e Mattos, 2007)

- Probabilidade do sistema estar vazio ($P_0$)

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}60 = 0{,}40$$

- Tempo médio de espera na fila (TF)

$$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{0{,}3}{0{,}5(0{,}5 - 0{,}3)} = 3 \text{ minutos}$$

# MODELO DE FILAS

## Exemplo (Fogliatti e Mattos, 2007)

- Tempo médio de permanência no sistema (TS)

$$TS = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{0{,}5 - 0{,}3} = 5 \text{ minutos}$$

Portanto

$\rho = 0{,}60$ NS = 1,5 clientes NF = 0,9 clientes

$P_0 = 0{,}40$ TS = 5 minutos TF = 3 minutos

Como $\rho<1$, o sistema tem capacidade de absorver aumento da demanda.

## Exemplo (Fogliatti e Mattos, 2007)

b) O problema continua com o comportamento da agência sendo representado por um modelo MM/1/∞/FIFO, com $\lambda$=0,45 (aumento e 50% sobre 0,3) clientes/min. e $\mu$=0,5 clientes/min. (TA = 2min.). Pode-se então, determinar os parâmetros do sistema.

- Taxa de ocupação ($\rho$)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,45}{0,5} = 0,90$$

## Exemplo (Fogliatti e Mattos, 2007)

- Nº médio de clientes no sistema (NS)

$$NS = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0,45}{0,5 - 0,45} = 9 \ clientes$$

- Nº médio de clientes na fila (NF)

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{0,45^2}{0,5(0,5 - 0,45)} = 8,1 \ clientes$$

## Exemplo (Fogliatti e Mattos, 2007)

- Probabilidade do sistema estar vazio ($P_0$)

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}90 = 0{,}10$$

- Tempo médio de espera na fila (TF)

$$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{0{,}45}{0{,}5(0{,}5 - 0{,}45)} = 18 \text{ minutos}$$

## Exemplo (Fogliatti e Mattos, 2007)

- Tempo médio de permanência no sistema (TS)

$$TS = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{0{,}5 - 0{,}45} = 20\,\text{minutos}$$

Portanto

$\rho = 0{,}90$ NS = 9 clientes NF = 8,1 clientes

$P_0 = 0{,}10$ TS = 18 minutos TF = 20 minutos

Observa-se que há melhor utilização da agência do ponto de vista gerencial, mas o tempo na fila e no sistema aumentou.

- Modelo de Filas – MM/1/∞/FIFO

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

- Minimização do Custo Total do Sistema

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

# MODELO DE REDUÇÃO DE CUSTOS

O modelo de custo é um modelo de decisão de filas útil para determinar o nível adequado de serviço para o sistema de filas.

Este modelo visa equilibrar dois custos conflitantes, o custo de oferecer o serviço (CA, custo de atendimento) e o custo da demora na oferta do serviço (CE, custo de permanência do cliente no sistema).

O custo total (CT) será dado então pela equação abaixo.

$$CT = CE + CA$$

Sendo CE

$$CE = CE_{unit} \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

E CA

$$CA = CA_{unit} \cdot \mu$$

Assim CT ficaria

$$CT = CE_{unit} \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} + CA_{unit} \cdot \mu$$

# MODELO DE REDUÇÃO DE CUSTOS

Associado ao custo total (CT) existe uma taxa de serviço ótima, que permite minimizar esse custo. Essa taxa de serviço ótima ($\mu^*$) é dada por

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda \cdot CE_{unit}}{CA_{unit}}}$$

# MODELO DE FILAS

## Exemplo 1

Uma empresa deseja contratar um mecânico para manutenção de suas máquinas, que apresentam um ritmo de 3 falhas/h. Há duas opções, um reparador lento com capacidade de reparar em média 4 falhas/h com salário de R$30,00/h e um reparador rápido com capacidade de reparar em média 6 falhas/h e com salário de R$50,00/h. Qual contratação renderia menor custo para a empresa, sabendo que uma máquina parada custa R$50,00/h.

## Exemplo

Neste caso, o sistema é a manutenção. Então o número de máquinas em manutenção será NS, ou seja, número de clientes no sistema (manutenção).

O número de falhas representa a taxa média de entrada de máquinas no sistema ($\lambda$=3) e a capacidade de conserto dos mecânicos é a taxa média de saída de máquinas do sistema ($\mu_{lento}$ = 4 e $\mu_{rápido}$ = 6)

## Exemplo

Aplicando os parâmetros à equação de NS.

Mecânico Lento

$$NS = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4-3} = 3\ máquinas$$

Custo da máquina parada = 3·R$50,00 = R$150,00

Custo do operador = R$30,00

Custo total = R$180,00

## Exemplo

Aplicando os parâmetros à equação de NS.

Mecânico Rápido

$$NS = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{6-3} = 1\ máquina$$

Custo da máquina parada = 1·R$50,00 = R$50,00

Custo do operador = R$50,00

Custo total = R$100,00

## Exemplo

Comparando os valores.

Custo total mecânico lento → R$180,00
Custo total mecânico rápido → R$100,00

Portanto, a alternativa que oferece menor custo é a contratação do mecânico mais rápido, mesmo que ele tenha um salário maior.

# MODELO DE FILAS

## Exemplo 2

Uma indústria tem um depósito de ferramentas que fornece ferramentas especiais para os operários do processo executarem tarefas específicas. O ritmo de chegada de operários requisitando ferramentas é de 1 operário/min, e o ritmo de atendimento pelo almoxarife é de 1,2 atendimentos/min, seguindo o modelo markoviano MM/1. A indústria paga R$11,00/h para o almoxarife e R$23,00/h ao operário.

## Exemplo 2

a) Determine o custo total horário do sistema.

b) Determine a fração do dia em que o almoxarife não trabalha.

Resposta:

a)

$$CT = CE_{unit} \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} + CA_{unit} \cdot \mu$$

## Exemplo 2

Resposta:

a)

$$CT = 23 \cdot \frac{1}{1{,}2 - 1} + 11 \cdot 1{,}2 = 115 + 13{,}2 = 128{,}2$$

Portanto, o custo total por hora é de R$128,20.

## Exemplo 2

Resposta:

b) $$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{1}{1,2} = 0,17$$

Ou seja, em uma hora, 17% do tempo o almoxarife não atende os operários.

- Minimização do Custo Total do Sistema

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

# Unidade V: INTRODUÇÃO À TEORIA DAS FILAS

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro

# Pesquisa Operacional

Prof. Me. Fernando Pereira Calderaro