Семинар 8. Субдифференциал, субградиент.

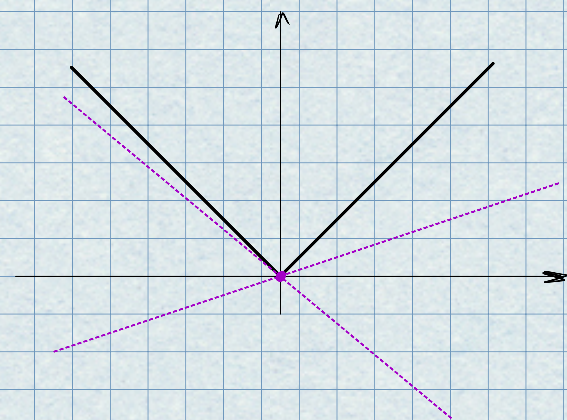
<u>Опр.</u> Субградиентом функции f в точке $x \in Q$ называется любой вектор $u \in \mathbb{R}^d$, такой что

$$\forall y \in Q: \quad f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle$$

<u>Опр.</u> Субдифференциалом функции f в точке $x \in Q$ называется множество всех субградиентов.

<u>Пример.</u> $f(x) = |x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\}, & x > 0 \\ \{-1\}, & x < 0 \\ [-1, 1], & x = 0 \end{cases}$$



<u>Свойства:</u>

1) $\partial f(x)$ — выпуклое множество.
2) Если $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ дифференцируема в т. x, то $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.
3) Пусть $f: Q \to \mathbb{R}$. Точка $x^* \in Q$ является глобальным минимумом тогда и только тогда, когда $0 \in \partial f(\hat{x})$.
4) (Теорема Моро-Рокафеллара) Пусть $f_1, f_2 : Q \to \mathbb{R}$ — собственные (т.е. нигде $\neq -\infty$, хотя бы в одной точке $< +\infty$) выпуклые функции и хотя бы одна из них непрерывна в т. $x \in Q$. Тогда

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) \underbrace{+}_{\text{сумма Минковского}} \partial f_2(x)$$

5) (Теорема Дубовицкого-Милютина). Пусть $f(x) = \max\limits_{i=1,\dots,n} (f_1(x), \dots, f_n(x))$, где $f_1 \dots f_n$ — собственные выпуклые функции.

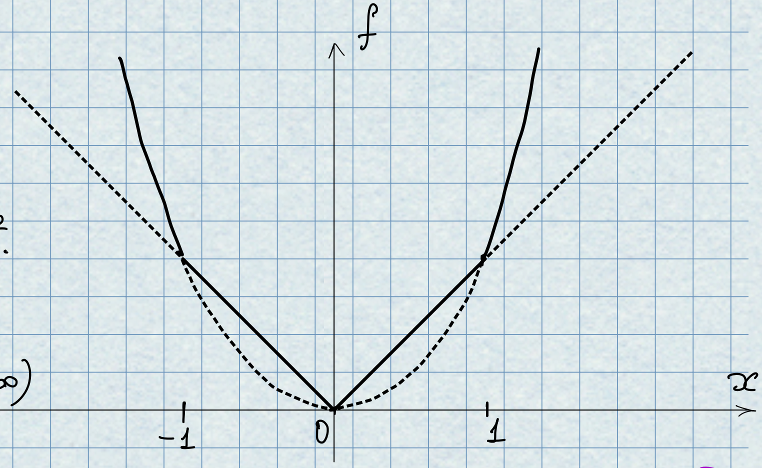
Обозначим $I(x) = \{ i = 1 \dots n : f_i(x) = f(x) \}$ — множество индексов, на которых достигается max. Тогда, е $f_1 \dots f_n$ непрерывны в $x \in Q$, то

$$\partial f(x) = \mathrm{conv}\Big(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x) \Big)$$

Задачи

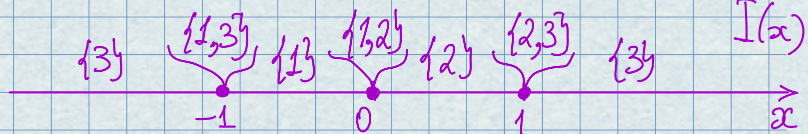
① $f(x) = \max(-x, x, x^2)$

Обозначим $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$.



По свойству 2:

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{f_3'(x)\} = \{2x\}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \{f_1'(x)\} = \{-1\}, & x \in (-1, 0) \\ \{f_2'(x)\} = \{1\}, & x \in (0, 1) \end{cases}$$



Пользуемся теоремой Дубовицкого-Милютина.

$$\partial f(-1) = \operatorname{conv}(\{f_3'(-1), f_1'(-1)\}) = [-2, -1]$$
$$\partial f(0) = \operatorname{conv}(\{f_1'(0), f_2'(0)\}) = [-1, 1]$$
$$\partial f(1) = \operatorname{conv}(\{f_3'(1), f_2'(1)\}) = [1, 2]$$

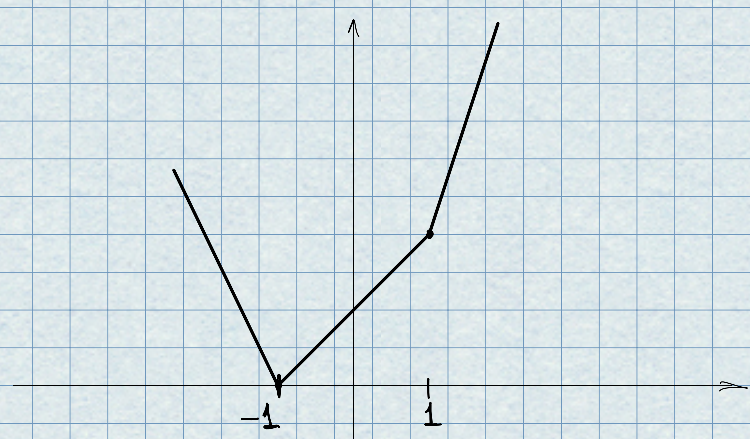
② $f(x) = |x-1| + 2|x+1| - 2$

Для модуля мы уже знаем: $\partial|x-1| = \begin{cases} \operatorname{sign}(x-1), & x \neq 1 \\ [-1, 1], & x = 1 \end{cases}$

$$\partial(2|x+1|) = \begin{cases} 2\operatorname{sign}(x+1), & x \neq -1 \\ [-2, 2], & x = -1 \end{cases}$$

По теореме Моро-Рокафеллара:

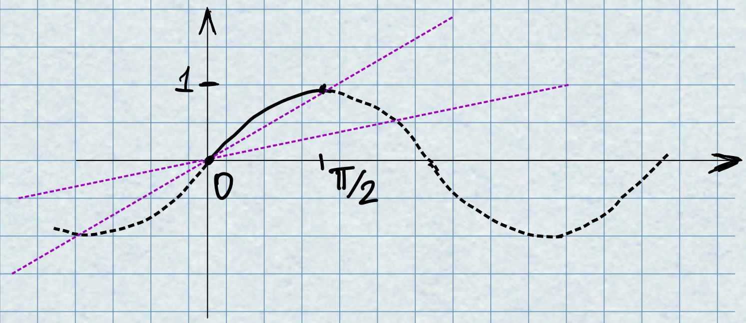
$$\partial f(x) = \begin{cases} -3, & x < -1 \\ [-3, 1], & x = -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ [1, 3], & x = 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$$



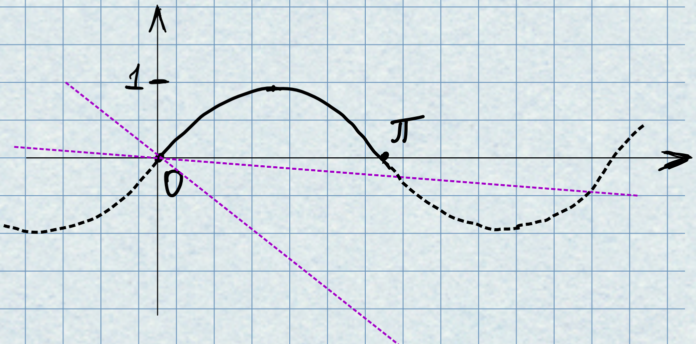
Наблюдения.

① Субградиент зависит от множества Q.

Пусть $f(x) = \sin x$



1) $Q = [0, \frac{\pi}{2}]$. $\partial f(0) = (-\infty, \frac{2}{\pi})$



2) $Q = [0, \pi]$. $\partial f(0) = (-\infty, 0)$

② Может случиться, что f дифф. в т. $x \in Q$, но $\partial f(x) = \varnothing$, если f — невыпуклая. Например, $f(x) = \sin x$, $Q = [0, \pi]$, $x = \frac{3\pi}{4}$.