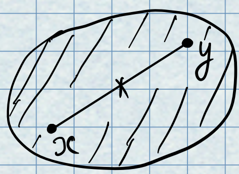
Семинар 2. Выпуклые и аффинные множества

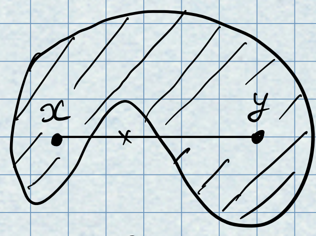
Опр. Множество $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ наз. выпуклым, если
аффинным

$$\forall x, y \in Q \quad \forall \lambda \in [0,1] \hookrightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in Q$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

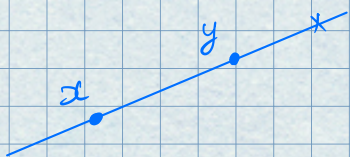


вып.



не вып.

отрезок, соединяющий x и y, лежит в Q



афф.

не афф.

прямая, проходящая через x и y, лежит в Q

Опр. Выпуклая комбинация точек $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ — это точка $\hat{x}$ вида
Аффинная

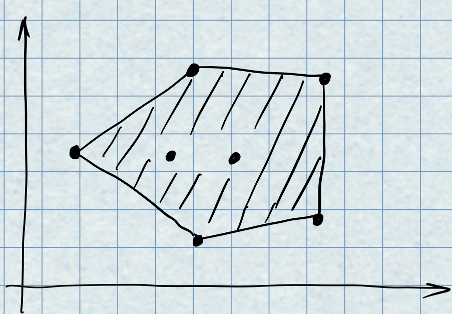
$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \text{где} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

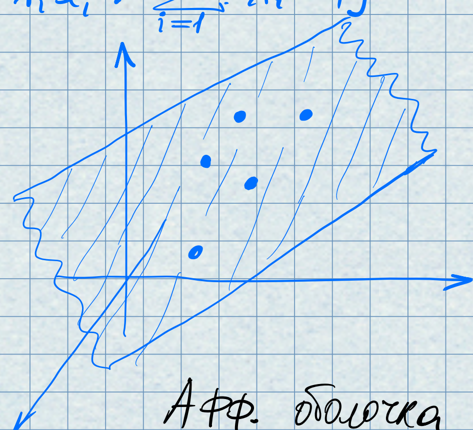
Опр. Выпуклая оболочка множества точек $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$
Аффинная
это множество всех выпуклых комбинаций данных точек.
аффинных

$$\mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \left\{ \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

$$\mathrm{aff}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \left\{ \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$



Вып. оболочка



Афф. оболочка

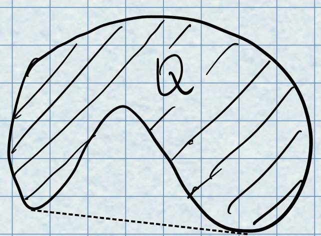
Опр. Выпуклая оболочка множества $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ — это
Аффинная
множество всевозможных выпуклых комбинаций
аффинных
точек из Q.

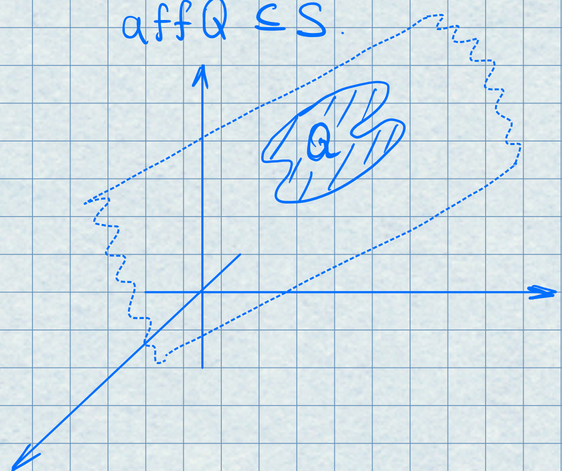
$$\mathrm{conv}(Q) = \{\mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_k\} : x_1, \dots, x_k \in Q\}$$

$$\mathrm{aff}(Q) = \{\mathrm{aff}\{x_1, \dots, x_k\} : x_1, \dots, x_k \in Q\}$$

Эквив. опр. Наименьшее по включению выпуклое множество,
аффинное
содержащее Q.

$\forall S \subseteq \mathbb{R}^d$ если $Q \subseteq S$, то $\mathrm{conv}\, Q \subseteq S$.
$\mathrm{aff}\, Q \subseteq S$.





Теорема Каратеодори. Для вычисления $\mathrm{conv}\, Q$ достаточно брать $d+1$ точку.

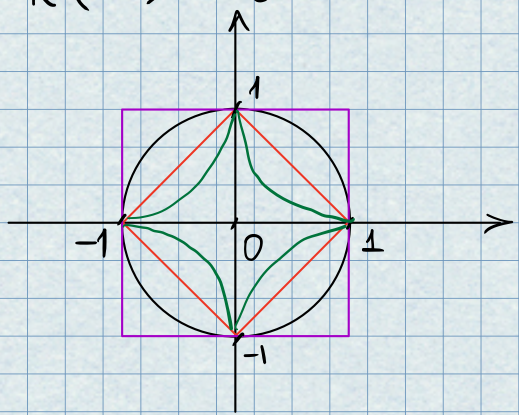
$$\forall x \in \mathrm{conv}(Q) : \exists x_1, \dots, x_{d+1} \in Q : x \in \mathrm{conv}(\{x_1, \dots, x_{d+1}\})$$
$$(Q \subseteq \mathbb{R}^d)$$

Свойства:

1) $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство вып. множеств. Тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in A} Q_\alpha$ — вып.
2) Q_1, Q_2 — вып., $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $c_1 Q_1 + c_2 Q_2$ — вып.
3) Q — вып. $\Rightarrow$ $S = \{y : y = Ax + b,\ x \in Q\}$ — вып.

Примеры вып. множеств:

(1) $B^p_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\|_p \le R\}$, $p \ge 1$.



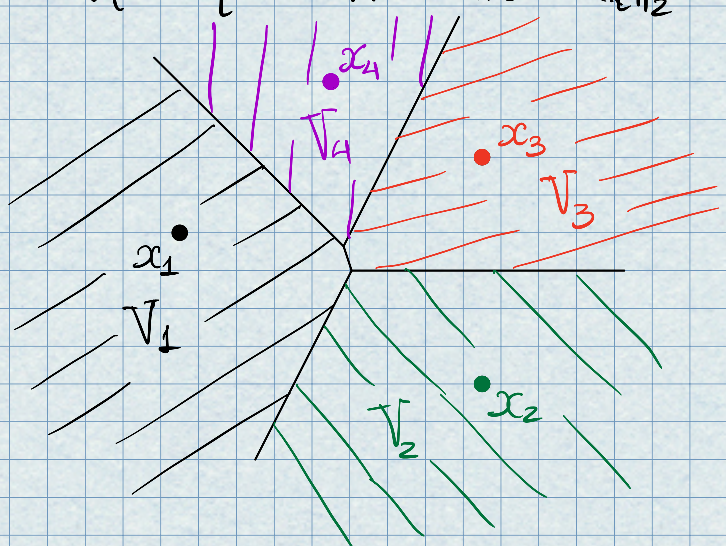
Примеры $B^p_1(0)$, $d=2$.

$p=2$ $\quad$ $p=1$ $\quad$ $p=+\infty$ $\quad$ $p=\frac{1}{2}$ (невып.)

(2) Ячейки Вороного.

Даны $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. Назовем i-ой ячейкой Вороного множество точек $\mathbb{R}^d$, которые не дальше от x_i, чем от любой другой точки из набора $\{x_1, \dots, x_n\}$.

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_i\|_2 \le \|x - x_j\| \quad \forall j = 1, \dots, n,\ j \ne i\}$$



Заметим, что V_i явл. пересечением полупр-в.

$$V_i = \bigcap_{j \ne i} U_{ij}, \text{ где } U_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_i\| \le \|x - x_j\|\}$$

$$\|x - x_i\| \le \|x - x_j\| \Leftrightarrow \|x - x_i\|^2 \le \|x - x_j\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\langle x, x_i\rangle + \|x_i\|^2 \le -2\langle x, x_j\rangle + \|x_j\|^2 \Leftrightarrow \langle x, x_j - x_i\rangle \le \frac{\|x_j\|^2 - \|x_i\|^2}{2}$$

т.е. U_{ij} — полупространство — вып. множество.

$V_i = \bigcap_{j\neq i} U_{ij}$ — вып. как пересечение вып.

(3) Множество неотрицательно опред. симметричных матриц $d\times d$.

$S_+^d = \{ X \in \mathbb{R}^{d\times d}:\ X^T = X$ и $z^T X z \geqslant 0\ \forall z \in \mathbb{R}^d \}$

Рассм. $X, Y \in S_+^d$ и $\lambda \in [0,1]$.

- $(\lambda X + (1-\lambda) Y)^T = \lambda X^T + (1-\lambda) Y^T = \lambda X + (1-\lambda) Y$
- $z^T(\lambda X + (1-\lambda) Y) z = \lambda z^T X z + (1-\lambda) z^T Y z \geqslant 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^d$.

Значит, $\lambda X + (1-\lambda) Y \in S_+^d$.

(4) Покажем, что $\underbrace{\operatorname{conv}\{xx^T:\ x \in \mathbb{R}^d,\ \|x\|_2 = 1\}}_{\text{обозн. } A} = \underbrace{\{X \in S_+^d:\ \operatorname{Tr} X = 1\}}_{\text{обозн. } B}$

1) Док., что $A \subseteq B$. Рассм. $X \in A$. Тогда

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i x_i^T, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0.$$

- $X^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i x_i^T)^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i x_i^T = X$
- $\forall z \in \mathbb{R}^d:\ z^T X z = \sum_{i=1}^n \lambda_i z^T x_i x_i^T z = \sum_{i=1}^n \lambda_i (z^T x_i)^2 \geqslant 0$
- $\operatorname{Tr} X = \langle X, I_d \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i x_i^T, I_d \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|x_i\|^2 = \sum \lambda_i = 1$

Значит, $X = X^T$, X неотр. опред. и $\operatorname{Tr} X = 1$.

2) Док., что $B \subseteq A$. Рассм. $X \in B$. Тогда воспользуемся скелетным разложением:

(*) $X = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i x_i^T$, где x_i — нормир. собств. векторы X, соотв. собств. значениям λ_i:

$$X x_i = \lambda x_i, \quad \|x_i\|_2 = 1.$$

Т.к. $\operatorname{Tr} X = \sum_{i=1}^d \lambda_i = 1$ и $\lambda_i \geqslant 0$ в силу $X \in S_+^d$, выражен. (*) явл. выпуклой комбинацией эл-тов $x_i x_i^T$, т.е. $X \in A$.

Мы показали, что $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.е. $A = B$.

(5) $Q = \{ X \in \mathbb{R}^{n\times m} : \operatorname{rank} X = k \}$, где $1 \leq k \leq \min(m, n)$ — невыпукло.

Рассм. $$X = m\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{k} & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \end{pmatrix}}^{n}\right.$$ и $Y = -X$. $\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} Y = k$,

т.е. $X, Y \in Q$.

Тогда $\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y = 0 \notin Q$.