

# Домашнее задание 1

Группа Б05-203

После условий задач указано количество баллов, которое можно получить за решение. Всего за задание можно получить 31 балл.

## Матрично-векторное дифференцирование.

Задача 1. (3б.) Найдите градиент и гессиан следующих функций:

- а) (1б.)  $f(x) = \frac{\langle a, x \rangle + b}{\langle c, x \rangle + d}$  на множестве  $Q = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle c, x \rangle + d > 0\}$ .  
б) (1б.)  $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$  на множестве  $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$ .  
с) (1б.)  $f(X) = (1 - y^\top X^{-1}y)^{1/2}$  на множестве неотрицательно определенных матриц  $\mathbb{S}_+^n$ .

## Выпуклые множества.

Задача 2. (2б.) Дана положительно определенная матрица  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ . Покажите, что эллипсоид  $Q = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle (x - x_0), A^{-1}(x - x_0) \rangle \leq 1\}$  можно эквивалентно задать в виде образа шара  $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$  при аффинном отображении  $h(x) = A^{1/2}x + x_0$ . Степень матрицы  $1/2$  определяется так: рассмотрим разложение  $A = U\Lambda U^\top$ , где  $U$  – ортогональная матрица,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  – диагональная с собственными числами на диагонали. Тогда  $A^{1/2} = U\Lambda^{1/2}U^\top$ , где  $\Lambda^{1/2} = \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \dots, \lambda_d^{1/2})$ . Покажите, что эллипсоид – выпуклое множество.

Задача 3. (4б.) Докажите выпуклость следующих множеств.

- а) (1б.)  $Q = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c \leq 0\}$ , где  $A \in \mathbb{S}_+^n$ . Обратите внимание:  $Q$  не обязательно является эллипсоидом.  
б) (3б.)  $Q = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d : \langle g, x \rangle + h = 0, g \neq 0\}$ , где  $A + \theta gg^\top \in \mathbb{S}_+^n$  для некоторого  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Задача 4. (2б.) Пусть  $\xi$  – дискретная случайная величина, принимающая значения  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$  с вероятностями  $p_1, \dots, p_d$ . Будем рассматривать  $p = (p_1 \dots p_d)^\top$  как переменную, лежащую на единичном симплексе  $Q = \{p \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d p_i = 1, p_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, d\}$ . Зафиксируем  $\xi$ . Для каждой из данных функций (как функций от  $p$ ) определите, является ли сама функция выпуклой и являются ли множества  $\{p \in P : f(p) \leq \alpha\}$ ,  $\{p \in P : f(p) \geq \alpha\}$  выпуклыми.

- а) (0.5б.)  $f(p) = \mathbb{E}\xi$ .  
б) (0.5б.)  $f(p) = \mathbb{E}\xi^2$ .  
с) (0.5б.)  $f(p) = \mathbb{V}\xi$ .

d) (0.56.)  $f(p) = \text{quartile}_\gamma(\xi) = \inf \{q : \mathbb{P}(\xi < q) \geq \gamma\}$ .

### Опорные гиперплоскости.

Задача 5. (3б.) Выпишите, какой вид имеет опорная гиперплоскость в каждой точке границы следующих множеств.

a) (1б.)  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 1\}$ .

b) (1б.)  $Q = B_1^1(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq 1\}$ .

c) (1б.)  $Q = B_1^\infty(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_\infty \leq 1\}$ .

Задача 6. (2б.) Пусть  $Q \subseteq \mathbb{R}^d$  – выпуклое множество. Рассмотрим точки  $x_1, \dots, x_n$ , принадлежащие границе  $Q$ . Пусть опорные гиперплоскости в данных точках задаются условиями  $\langle a_i, x - x_i \rangle = 0$ . Определим

$$Q_{inner} = \text{conv}(x_1, \dots, x_n), \quad Q_{outer} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \langle a_i, x - x_i \rangle \leq 0, i = 1, \dots, n\right\}.$$

Покажите, что  $Q_{inner} \subseteq Q \subseteq Q_{outer}$ . Приведите примеры, когда левое/правое включение обращается в равенство.

### Конусы.

Задача 7. (3б.) Покажите, что следующие множества являются конусами и постройте соответствующие двойственные конусы.

a) (1б.)  $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1/2 \leq x_2 \leq x_1/3\}$ .

b) (2б.)  $K = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_d \geq 0\}$ . *Указание:* используйте соотношение

$$\sum_{i=1}^d x_i y_i = (x_1 - x_2)y_1 + (x_2 - x_3)(y_1 + y_2) + \dots + (x_{n-1} - x_n)(y_1 + \dots + y_{n-1}) + x_n(y_1 + \dots + y_n).$$

### Выпуклые функции.

Задача 8. (1б.) Пусть  $f(x) : Q \rightarrow \mathbb{R}$  – всюду положительная на  $Q$  вогнутая функция. Покажите, что  $\ln f(x)$  является вогнутой функцией на  $Q$ ,  $1/f(x)$  – выпуклой на  $Q$ .

Задача 9. (2б.) Линии уровня некоторой функции  $f(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (т.е. множества вида  $\{x : f(x) = \alpha\}$ ) имеют вид  $\{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ ,  $\{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2\}$ ,  $\{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3\}$  для некоторых  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Обязательно ли  $f(x)$  является выпуклой функцией?

Задача 10. (1б.) Покажите, что дивергенция Кульбака-Лейблера

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^d \left( x_i \ln \frac{x_i}{y_i} - x_i + y_i \right),$$

определенная при  $x, y \in \mathbb{R}_{++}^n$ , является выпуклой функцией относительно  $(x, y)$ .

Задача 11. (2б.) Покажите, что следующие функции являются выпуклыми.

а) (1б.)  $f(x) = \max_{i=1,\dots,k} \|A_i x - b_i\|$ , где  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^n$ , а  $\|\cdot\|$  – некоторая норма на  $\mathbb{R}^n$ .

б) (1б.)  $f(x) = \sum_{i=1}^r |x|_{[i]}$ , где  $|x|$  – поточечное взятие модуля от компонент  $x$ , а  $|x|_{[i]}$  является  $i$ -ой по убыванию компонентой вектора  $|x|$ .

**Сопряженные функции.**

Задача 12. (6б.) Найдите сопряженную функцию для  $f$ .

а) (1б.)  $f(X) = \ln \det(X^{-1}) : \mathbb{S}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

б) (1б.)  $f(x) = I_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in S \\ +\infty, & x \notin S \end{cases}$  – индикаторная функция мн-ва  $S$ .

в) (1б.)  $f(x) = \max_{i=1,\dots,d} x_i$ .

г) (1б.)  $f(x) = \max_{i=1,\dots,d} (a_i x + b_i) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

д) (1б.)  $f(x, t) = -\ln(t^2 - \|x\|^2) : \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \|x\| < t\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

е) (1б.)  $f(x) = \sum_{i=1}^d x_i \ln \left( \frac{x_i}{\sum_{i=1}^d x_i} \right) : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .