Домашнее задание 2

Группа Б05-203

Задача 1. Двойственные функции и двойственные задачи.
a) Выпишите двойственную к следующей задаче.

$$\min_x \max_{i=1,\dots,m} (a_i^\top x + b_i).$$

Указание. Введите дополнительную переменную $y_i = a_i^\top x_i + b_i$.
b) Та же задача, что в п. a). Перепишите задачу в виде задачи линейного программирования и постройте двойственную к ней.
c) Даны неотрицательно определенные матрицы $F_0, F_1, \dots, F_n$. Выпишите двойственную к

$$\begin{aligned} &\min_x \ c^\top x \\ &\text{s.t. } Ax = b \\ &\qquad F_0 + \sum_{i=1}^n F_i x_i \succeq 0 \end{aligned}$$

Указание. Воспользуйтесь следующим фактом: чтобы построить двойственную к задаче $[\min_x g(x) \quad \text{s.t. } x \in \mathcal{K}]$, где $\mathcal{K}$ – выпуклый замкнутый конус, нужно рассмотреть седловую задачу вида $\min_x \max_{y \in \mathcal{K}^*} [f(x) - \langle y, x \rangle]$.

Задача 2. Условия ККТ.
a) Выпишите условия ККТ для задачи

$$\begin{aligned} &\min_x \ \|Ax - b\|_2^2 \\ &\text{s.t. } Gx = h \end{aligned}$$

Выведите явные выражения для решения x^* прямой задачи и решения λ^* двойственной задачи.
b) Даны $y, s \in \mathbb{R}^n$, такие что $y^\top s = 1$. Выпишите условия ККТ для задачи

$$\begin{aligned} &\min_{X \in \mathbb{S}^n_{++}} \ \mathrm{Tr}(X) - \ln\det X \\ &\text{s.t. } Xs = y \end{aligned}$$

Покажите, что решение прямой задачи имеет вид

$$X^* = I + yy^\top - \frac{ss^\top}{s^\top s}.$$

c) Не решая задачи, докажите что точка $x^* = (1\ 1\ 1\ 1)^\top$ является решением.

$$\begin{aligned}
&\min_x \; 47x_1 + 93x_2 - 17x_3 - 93x_4 \\
&\text{s.t.} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & 12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Задача 3. Субградиент.
a) Найдите субградиент функции $f(x) = \max_{i=1,\dots,n}(a_i^\top x + b_i) + \lambda\|x\|_2^2$ во всех точках $x \in \mathbb{R}^d$.
b) Условия интерполяции. Дан набор $\{x_i, g_i, f_i\}_{i=1}^n$, где $x_i \in \mathbb{R}^d$, $g_i \in \mathbb{R}^d$, $f_i \in \mathbb{R}$. Докажите, что существует выпуклая функция f, такая что $f_i = f(x_i)$, $g_i \in \partial f(x_i)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия интерполяции:

$$f_i \ge f_j + \langle g_j, x_i - x_j \rangle \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Для доказательства достаточности возьмите функцию $f(x) = \max_{i=1,\dots,n}\left[f_i + \langle g_i, x - x_i \rangle\right]$.
c) Проксимальный оператор. Проксимальным оператором функции g называется

$$\operatorname{prox}_g(x) = \arg\min_x \left[g(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|_2^2\right].$$

Получите явное выражение для проксимального оператора функции $g(x) = \lambda\|x\|_1$.