Домашнее задание 1

Группа Б05-203

После условий задач указано количество баллов, которое можно получить за решение. Всего за задание можно получить 31 балл.

Матрично-векторное дифференцирование.

Задача 1. (3б.) Найдите градиент и гессиан следующих функций:

a) (1б.) $f(x) = \frac{\langle a,b\rangle + b}{\langle c,x\rangle + d}$ на множестве $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \langle c, x\rangle + d > 0\right\}$.

b) (1б.) $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$ на множестве $B_1(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \le 1\right\}$.

c) (1б.) $f(X) = (1 - y^\top X^{-1} y)^{1/2}$ на множестве неотрицательно определенных матриц $\mathbb{S}^n_+$.

Выпуклые множества.

Задача 2. (2б.) Дана положительно определенная матрица $A \in \mathbb{S}^n_{++}$. Покажите, что эллипсоид $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \left\langle (x - x_0), A^{-1}(x - x_0)\right\rangle \le 1\right\}$ можно эквивалентно задать в виде образа шара $B_1(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \le 1\right\}$ при аффинном отображении $h(x) = A^{1/2}x + x_0$. Степень матрицы $1/2$ определяется так: рассмотрим разложение $A = U\Lambda U^\top$, где U – ортогональная матрица, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ - диагональная с собственными числами на диагонали. Тогда $A^{1/2} = U\Lambda^{1/2}U^\top$, где $\Lambda^{1/2} = \operatorname{diag}\left(\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_d^{1/2}\right)$. Покажите, что эллипсоид – выпуклое множество.

Задача 3. (4б.) Докажите выпуклость следующих множеств.

a) (1б.) $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle + c \le 0\right\}$, где $A \in \mathbb{S}^n_+$. Обратите внимание: Q не обязательно является эллипсоидом.

b) (3б.) $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle + c \le 0\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d : \langle g, x\rangle + h = 0,\ g \ne 0\right\}$, где $A + \theta g g^\top \in \mathbb{S}^n_+$ для некоторого $g \in \mathbb{R}^d$.

Задача 4. (2б.) Пусть ξ – дискретная случайная величина, принимающая значения $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_d$. Будем рассматривать $p = (p_1 \ldots p_d)^\top$ как переменную, лежащую на единичном симплексе $Q = \left\{p \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d p_i = 1,\ p_i \ge 0\ \forall i = 1, \ldots, d\right\}$. Зафиксируем ξ. Для каждой из данных функций (как функций от p) определите, является ли сама функция выпуклой и являются ли множества $\{p \in P : f(p) \le \alpha\}$, $\{p \in P : f(p) \ge \alpha\}$ выпуклыми.

a) (0.5б.) $f(p) = \mathbb{E}\xi$.

b) (0.5б.) $f(p) = \mathbb{E}\xi^2$.

c) (0.5б.) $f(p) = \mathbb{V}\xi$.

d) (0.5б.) $f(p) = \text{quartile}_\gamma(\xi) = \inf\{q : \mathbb{P}(\xi < q) \geq \gamma\}$.

Опорные гиперплоскости.

Задача 5. (3б.) Выпишите, какой вид имеет опорная гиперплоскость в каждой точке границы следующих множеств.

a) (1б.) $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 1\right\}$.

b) (1б.) $Q = B_1^1(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq 1\right\}$.

c) (1б.) $Q = B_1^\infty(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_\infty \leq 1\right\}$.

Задача 6. (2б.) Пусть $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ – выпуклое множество. Рассмотрим точки $x_1, \ldots, x_n$, принадлежащие границе Q. Пусть опорные гиперплоскости в данных точках задаются условиями $\langle a_i, x - x_i \rangle = 0$. Определим

$$Q_{inner} = \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_n), \quad Q_{outer} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \langle a_i, x - x_i \rangle \leq 0, \ i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Покажите, что $Q_{inner} \subseteq Q \subseteq Q_{outer}$. Приведите примеры, когда левое/правое включение включение обращается в равенство.

Конусы.

Задача 7. (3б.) Покажите, что следующие множества являются конусами и постройте соответствующие двойственные конусы.

a) (1б.) $K = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1/2 \leq x_2 \leq x_1/3\right\}$.

b) (2б.) $K = \left\{x \in \mathbb{R}^d : x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_d \geq 0\right\}$. *Указание*: используйте соотношение

$$\sum_{i=1}^d x_i y_i = (x_1 - x_2) y_1 + (x_2 - x_3)(y_1 + y_2) + \ldots + (x_{n-1} - x_n)(y_1 + \ldots + y_{n-1}) \\ + x_n (y_1 + \ldots + y_n).$$

Выпуклые функции.

Задача 8. (1б.) Пусть $f(x) : Q \to R$ – всюду положительная на Q вогнутая функция. Покажите, что $\ln f(x)$ является вогнутой функцией на Q, $1/f(x)$ – выпуклой на Q.

Задача 9. (2б.) Линии уровня некоторой функции $f(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (т.е. множества вида $\{x : f(x) = \alpha\}$) имеют вид $\left\{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$, $\left\{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2\right\}$, $\left\{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3\right\}$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Обязательно ли $f(x)$ является выпуклой функцией?

Задача 10. (1б.) Покажите, что дивергенция Кульбака-Лейблера

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^d \left(x_i \ln \frac{x_i}{y_i} - x_i + y_i \right),$$

определенная при $x, y \in \mathbb{R}^n_{++}$, является выпуклой функцией относительно (x, y).

Задача 11. (2б.) Покажите, что следующие функции являются выпуклыми.
a) (1б.) $f(x) = \max_{i=1,\ldots,k} \|A_i x - b_i\|$, где $A_i \in \mathbb{R}^{n\times d}, b_i \in \mathbb{R}^n$, а $\|\cdot\|$ – некоторая норма на $\mathbb{R}^n$.
b) (1б.) $f(x) = \sum_{i=1}^{r} |x|_{[i]}$, где $|x|$ – поточечное взятие моделя от компонент x, а $|x|_{[i]}$ является i-ой по убыванию компонентой вектора $|x|$.

Сопряженные функции.
Задача 12. (6б.) Найдите сопряженную функцию для f.
a) (1б.) $f(X) = \ln\det(X^{-1}) : \mathbb{S}^n_{++} \to \mathbb{R}$.
b) (1б.) $f(x) = I_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in S \\ +\infty, & x \notin S \end{cases}$ – индикаторная функция мн-ва S.
c) (1б.) $f(x) = \max_{i=1,\ldots,d} x_i$.
d) (1б.) $f(x) = \max_{i=1,\ldots,d}(a_i x + b_i) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
e) (1б.) $f(x,t) = -\ln(t^2 - \|x\|^2) : \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},\ \|x\| < t\right\} \to \mathbb{R}$.
f) (1б.) $f(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i \ln\left(\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{d} x_i}\right) :\ \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$.