Линейная алгебра. Справочник.

Обозначения.

$\mathbb{R}^n_+ = \{x=(x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n: \ x_i \geq 0 \ \forall i=1,\dots,n\}$ — неотрицательный ортант

$\mathbb{R}^n_{++} = \{x=(x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n: \ x_i > 0 \ \forall i=1,\dots,n\}$

$S^n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n}: \ X = X^T\}$ — множество симметр. матриц

$S^n_+ = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n}: \ X = X^T; \ \forall z \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow z^T X z \geq 0\}$ — множество неотр. опред. симметр. матриц

$S^n_{++} = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n}: \ X = X^T; \ \forall z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0 \hookrightarrow z^T X z > 0\}$ — множество полож. опред. симметр. матриц

$X \succcurlyeq 0 \Leftrightarrow X \in S^n_+$ — X неотриц. опред.

$X \succ 0 \Leftrightarrow X \in S^n_{++}$ — X полож. опред.

$\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}$ — диагональная матрица

$I_n = \mathrm{diag}(1,\dots,1)$ — единичная матрица $n\times n$

I Одноранговые матрицы

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ — векторы-столбцы

x^T, y^T — строки

1) Если $x \neq 0, y \neq 0$, то $xy^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — матрица ранга 1

$yx^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — матрица ранга 1.

2) $X = xx^T \in S^n_+$, т.к. $X^T = (xx^T)^T = (x^T)^T x^T = xx^T = X$

и $\forall z \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow z^T X z = z^T (xx^T) z = (\underbrace{x^T z}_{\text{скаляр}})^2 \geq 0$

$\mathrm{rank}\, X = 1$

Аналогично, $Y = yy^T \in S^m_+$, $\mathrm{rank}\, Y = 1$.

II Симметричные матрицы

Рассм. $A \in S^n$.

$u_1, \dots, u_n$ — ортонормированный базис из собств. векторов (ОНБ)

$Au_i = \lambda_i u_i$, $i=1,\dots,n$

$U = [u_1 \dots u_n]$, $U^T U = U U^T = I_n$

$$A = U \Lambda U^T, \text{ где } \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
разложение симм. матрицы

$$A = (u_1 \dots u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} = (u_1 \dots u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^T \\ \vdots \\ \lambda_n u_n^T \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T$$

$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T$ — скелетное разложение

Ⅲ Сингулярное разложение (SVD — singular value decomposition)

Рассм. $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. B является линейным оператором $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Линейно-алг. смысл SVD.

Для любого линейного отобр. $B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ существуют ОНБ в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$. Отобр. B имеет вид:

1) поворот в $\mathbb{R}^m$ $\quad V = [v_1 \dots v_m]$ — правый сингулярный базис
2) отобр. между базисами с растяжением $\quad \Sigma = \left(\begin{matrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{matrix} \middle| \, 0 \right)$ — сингулярные числа
3) поворот в $\mathbb{R}^n$ $\quad U = [u_1 \dots u_n]$ — левый сингулярный базис

Будем считать $n < m$.

$u_1, \dots, u_n$ — ОНБ — левый сингулярный базис.

$v_1, \dots, v_m$ — ОНБ — правый сингулярный базис.

$\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbb{R}$ — сингулярные числа.

$B v_i = \sigma_i u_i, \ i = 1, \dots, n \qquad B^T u_i = \sigma_i v_i, \ i = 1, \dots, n$

$U = [u_1 \dots u_n], \ U^T U = U U^T = I_n; \ V = [v_1 \dots v_m], \ V^T V = V V^T = I_m$

$$B = U \Sigma V^T, \text{ где } \Sigma = \left[\begin{matrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{matrix} \middle| \, 0 \right] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$
сингулярное разложение (SVD)

$$B = (u_1 \dots u_n)\left(\begin{matrix}\sigma_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n\end{matrix}\;\middle|\; 0\right)\begin{pmatrix}v_1^T\\ \vdots\\ v_m^T\end{pmatrix} = (\sigma_1 u_1 \dots \sigma_n u_n\; 0 \dots 0)\begin{pmatrix}v_1^T\\ \vdots\\ v_m^T\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T$$

$$\boxed{B = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T \text{ — скелетное разложение}}$$

IV Усечённое сингулярное разложение (Reduced SVD)

Достаточно рассм. только ненулевые сингулярные числа и соотв. им элементы базисов.

Пусть $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\operatorname{rank} B = r \le \min(n, m)$.

$u_1, \dots, u_r$ — левые сингулярные векторы (не ОНБ) $\quad \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\ne j\end{cases}$

$v_1, \dots, v_r$ — правые сингулярные векторы (не ОНБ) $\quad \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\ne j\end{cases}$

$\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \mathbb{R}$ — сингулярные числа.

$U = [u_1 \dots u_r] \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $U^T U = I_r$; $\quad \underline{UU^T \ne I_n}$

$V = [v_1 \dots v_r] \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $V^T V = I_m$; $\quad \underline{VV^T \ne I_m}$

$$\boxed{B = U\Sigma V^T, \text{ где } \Sigma = \begin{pmatrix}\sigma_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times r}}$$

усечённое SVD разложение (reduced SVD)

$$\boxed{B = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T \text{ — скелетное разложение}}$$