Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Алтайский государственный университет

П. Н. Уланов, В. И. Иордан, И. А. Шмаков

Моделирование динамических систем

Методические указания к выполнению лабораторных работ

Барнаул

Издательство
Алтайского государственного
университета
2019

Рецензент:
к.ф-.м.н. Волков Николай Викторович

П. Н. Уланов, В. И. Иордан, И. А. Шмаков

Моделирование динамических систем [Текст] : Методические указания к выполнению лабораторных работ. — Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2019. — 24 с.

Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу *«Математическое моделирование»* по теме *Моделирование динамических систем* для студентов, обучающихся по направлению *«09.04.01 — Информатика и вычислительная техника»*.

Оформлено с помощью системы компьютерной вёрстки TEX и набор макрорасширений LATEX из дистрибутива TeX Live.

Оглавление

1. Лабораторная работа №1

1.1. Порядок выполнения работы

1. Узнать номер варианта у преподавателя.
2. Изучить и преобразовать полученное уравнение аналитически:
   (a) обезразмерить уравнение,
   (b) преобразовать уравнение второго порядка в систему уравнений первого порядка,
   (c) найти особые точки, описывающие поведение системы,
   (d) привести описание типа особых точек.
3. Смоделировать систему численно с помощью программной реализации метода Рунге-Кутты четвертого порядка:
   (a) построить графики поведения системы вблизи каждой особой точки,
   (b) доказать, что особая точка имеет тип, найденный ранее в аналитической части: продемонстрировать характерное поведение фазовых кривых,
   (c) к описанию каждой особой точки добавить графики зависимости координат от времени,
   (d) привести график поведения фазовых траекторий системы в макрообласти вокруг особых точек.

1.2. Теоретическая справка:

Исследование нелинейного дифференциального уравнения модели

Допустим, математическая модель исходного объекта (системы) задана в виде нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + \varphi(x) = 0. \tag{1}$$

Часто модели разных явлений могут быть представлены в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x,y); \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x,y). \end{cases} \tag{2}$$

Система вида (2) получается из уравнения (1) подстановкой $y = \frac{dx}{dt}$. После подстановки получается система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\alpha y - \varphi(x). \end{cases} \tag{3}$$

Фазовым портретом такой системы называется совокупность графиков зависимости $y(x)$ для всевозможных начальных условий (начальных значений функций x и y при t=0). Пример фазового портрета системы можно увидеть на рисунке 3.

Функция $y(x)$ может быть найдена при решении уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}. \tag{4}$$

Это уравнение получается делением левой и правой частей второго уравнения системы (2) на левую и правую части первого уравнения этой системы соответственно. При этом существуют точки, в которых значение $\frac{dy}{dx}$ не определено, в них $f_1(x,y) = 0$; $f_2(x,y) = 0$. ***Такие точки называются «особыми»***. В них система находится в положении равновесия. Равновесие может быть как устойчивым (система будет стараться вернуться к состоянию в особой точке), так и неустойчивым (система будет стремиться от состояния в особой точке).

В зависимости от типа поведения системы вблизи особой точки выделяют четыре их типа:

- седло,
- центр,
- узел: устойчивый и неустойчивый,
- фокус: устойчивый и неустойчивый.

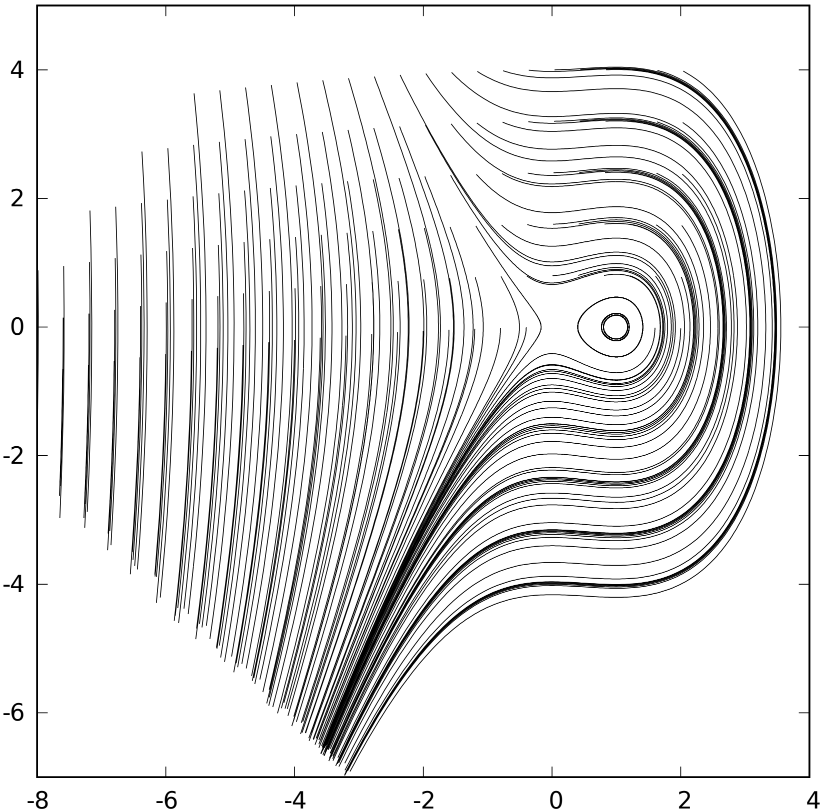

Рис. 1: Пример фазового портрета

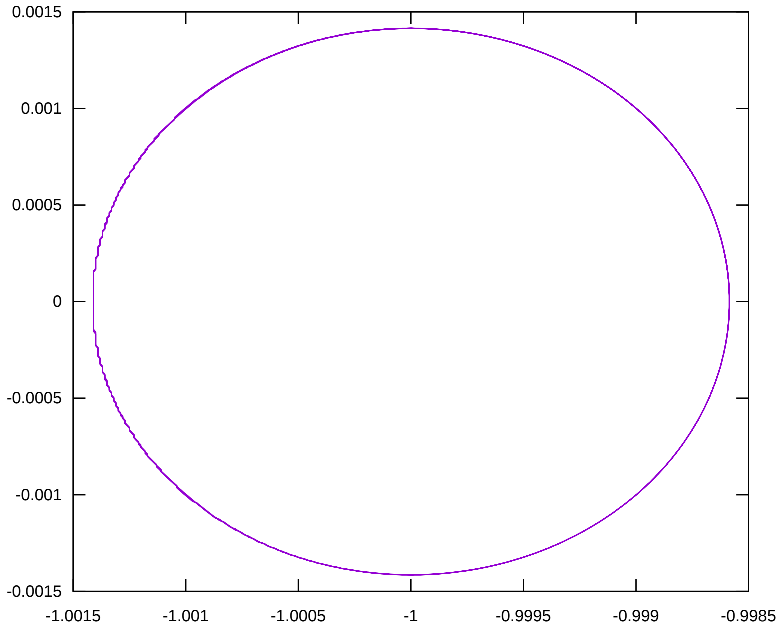

Рис. 2: Пример фазовой траектории для особой точки типа «центр»

Фазовые траектории вокруг особых точек принимают форму гиперболы (седло), эллипса(центр), параболы (узел) и спирали (фокус).

Решение системы уравнений 2 в окрестности особых точек

Для упрощения рассмотрения уравнения системы линеаризуются вблизи особых точек.

$$f_1(x_0,y_0) = 0;$$
$$f_2(x_0,y_0) = 0;$$
$$f_1(x,y) = f_1(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} (y - y_0) + p(x,y);$$
$$f_2(x,y) = f_2(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} (y - y_0) + q(x,y). \quad (5)$$

Таким образом, система принимает вид

$$\begin{cases} f_1(x,y) = a(x - x_0) + b(y - y_0); \\ f_2(x,y) = c(x - x_0) + d(y - y_0). \end{cases} \quad (6)$$

В случае нахождения системы вблизи особой точки нелинейными членами разложений в ряд Тейлора, содержащимися в $p(x,y), \quad q(x,y)$, можно пренебречь. В случае сдвига центра кординат фазовой плоскости в особую точку система принимает вид

$$\begin{cases} f_1(x,y) = ax' + by'; \\ f_2(x,y) = cx' + dy'. \end{cases} \quad (7)$$

Ее решения записываются в виде $x' = Ae^{\lambda t}; \quad y' = Be^{\lambda t}$. После подстановки

$$\begin{cases} \lambda A = aA + bB; \\ \lambda B = cA + dB. \end{cases} \quad (8)$$

Полученная система уравнений однородна, она имеет решение только в случае, когда ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0. \quad (9)$$

Решения уравнений имеют вид

$$\lambda_{1,2}\frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - ad + bc}. \tag{10}$$

Вид корней определяет тип особой точки.

- $ad - bc < 0$ — «седло», гиперболы, $\lambda_{1,2}$ — действительные, разных знаков.

- $ad - bc > 0$; $a + d = 0$ — центр, эллипсы, $\lambda_{1,2}$ — мнимые, комплексно сопряженные.

- $\frac{(a+d)^2}{4} - ad + bc > 0$; $a + d > 0$ — неустойчивый узел, параболы, $\lambda_{1,2}$ — вещественные, положительные.

- $\frac{(a+d)^2}{4} - ad + bc > 0$; $a + d < 0$ — устойчивый узел, параболы, $\lambda_{1,2}$ — вещественные, отрицательные.

- $\frac{(a+d)^2}{4} - ad + bc < 0$; $a + d > 0$ — неустойчивый фокус, спирали, $\lambda_{1,2}$ — комплексно сопряженные, вещественная часть положительна.

- $\frac{(a+d)^2}{4} - ad + bc < 0$; $a + d < 0$ — устойчивый фокус, спирали, $\lambda_{1,2}$ — комплексно сопряженные, вещественная часть отрицательна.

1.3. Варианты заданий

1. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(x) = 0.$$

2. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega_0^2 \sin(x) = 0.$$

3. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\sin(x) = 0.$$

4. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\sin(x) = 0.$$

5. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} - \omega_0^2\sin(x) = 0.$$

6. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma\frac{dx}{dt} - \omega_0^2\sin(x) = 0.$$

7. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\cos(x) = 0.$$

8. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega_0^2\cos(x) = 0.$$

9. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cos(x) = 0.$$

10. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cos(x) = 0.$$

11. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} - \omega_0^2 \cos(x) = 0.$$

12. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma \frac{dx}{dt} - \omega_0^2 \cos(x) = 0.$$

13. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma \frac{dx}{dt} + \alpha x^2 + \beta x = 0.$$

14. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma \frac{dx}{dt} + \alpha x^2 - \beta x = 0.$$

15. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma\frac{dx}{dt} - \alpha x^2 + \beta x = 0.$$

16. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma\frac{dx}{dt} - \alpha x^2 - \beta x = 0.$$

17. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \alpha x^2 + \beta x = 0.$$

18. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \alpha x^2 - \beta x = 0.$$

19. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} - \alpha x^2 + \beta x = 0.$$

20. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} - \alpha x^2 - \beta x = 0.$$

21. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x^2 + \beta x = 0.$$

22. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x^2 - \beta x = 0.$$

23. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha x^2 + \beta x = 0.$$

24. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha x^2 - \beta x = 0.$$

25. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma\frac{dx}{dt} + \alpha x^3 + \beta x = 0.$$

26. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma\frac{dx}{dt} + \alpha x^3 - \beta x = 0.$$

27. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma\frac{dx}{dt} - \alpha x^3 + \beta x = 0.$$

28. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma\frac{dx}{dt} - \alpha x^3 - \beta x = 0.$$

29. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \alpha x^3 + \beta x = 0.$$

30. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \alpha x^3 - \beta x = 0.$$

31. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} - \alpha x^3 + \beta x = 0.$$

32. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} - \alpha x^3 - \beta x = 0.$$

33. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x^3 + \beta x = 0.$$

34. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x^3 - \beta x = 0.$$

35. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha x^3 + \beta x = 0.$$

36. Определить на фазовой плоскости особые точки динамической системы, заданной дифференциальной моделью 2-го порядка, и их характер

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha x^3 - \beta x = 0.$$

2. Лабораторная работа №2 Модель Ватор

Модель Ва-Тор (от англ. Wa-Tor), предложенная Дьюдни в 1984 году, является клеточным автоматом, моделирующим сосуществование двух биологических видов — «хищников» и «жертв». В этой модели жизненное пространство представляет собой клетчатую доску с тороидальными граничными условиями, то есть соседями справа у клеток крайнего правого столбца являются клетки крайнего левого столбца, а соседями сверху у клеток первой строки являются клетки последней строки. Это пространство заселено акулами и рыбами. При этом каждый экземпляр помещается не в клетку, а в узел сетки, так что соседей всего четыре – сверху, снизу, справа и слева (узлы по диагонали соседями не считаются).

Вариант 1: «Моделирование взаимодействия двух биологических видов: хищники и жертвы» Клеточный автомат задается следующим набором правил:

- Начальное количество рыб и акул помещается случайным образом в узлы прямоугольной сетки. Всем рыбам и акулам приписывается случайный возраст.

- На очередном временном шаге рассматривается по очереди каждая рыба. Определяется число ближайших незанятых соседних узлов и рыба передвигается в один из незанятых узлов случайным образом. Если все узлы заняты, рыба не перемещается.

- На очередном временном шаге рассматривается по очереди каждая акула. Если все ближайшие к акуле соседние узлы свободны, она перемещается в один из них случайным образом. Если хоть в одном из них находится рыба, акула перемещается в такой узел случайным образом и съедает рыбу.

- Если за N_a шагов акула ничего не съедает, то она погибает. Если акула выживает в течение M_a шагов, у нее появляется потомок. Новая акула помещается в предыдущую позицию родителя.

- Если рыба выживает в течение M_p шагов, у нее появляется потомок. Новая рыба помещается в предыдущую позицию родителя.

Задание:

1. Написать программу, реализующую модель Ва-Тор. Программа должна предусматривать возможность сохранения в файл количества рыб и акул на каждом шаге.

2. Выполнить исследование поведения популяций рыб и акул в зависимости от условий, заданных преподавателем.

3. По результатам исследования составляется отчет, в который входят характерные графики численности рыб и акул в зависимости от времени, результаты исследования и их анализ.

Вариант 2: «Моделирование взаимодействия двух биологических видов с одной кормовой базой»

Цель — создать клеточный автомат, моделирующий динамику численности двух биологических видов, питающихся одним кормом. Жизненное пространство представляет собой клетчатую доску с тороидальными граничными условиями, то есть соседями справа у клеток крайнего правого столбца являются клетки крайнего левого столбца, а соседями сверху у клеток первой строки являются клетки последней строки. Это пространство заселено двумя биологическими видами. При этом каждый экземпляр помещается не в клетку, а в узел сетки, так что соседей всего четыре – сверху, снизу, справа и слева (узлы по диагонали соседями не считаются).

Правила клеточного автомата.

1. Корм воспроизводится в клетках каждые $N_{\texttt{корм}}$ шагов.

2. Существуют два биологических вида, которые характеризуются двумя параметрами каждый: скоростью воспроизводства ($N_{\texttt{воспр}}$) и временем жизни ($N_{\texttt{жиз}}$), определяющим максимальное число шагов до следующего принятия пищи.

3. Начальное количество особей каждого вида помещается случайным образом в узлы прямоугольной тороидальной сетки. Всем особям приписывается случайный возраст.

4. Если за $N_{\text{жиз}}$ шагов особь ничего не съедает, то она погибает. Если особь выживает в течение $N_{\text{воспр}}$ шагов, у нее появляется потомок. Новая особь помещается в предыдущую позицию родителя.

5. Каждый из видов использует собственную стратегию поведения.

Возможные стратегии поведения:

1. «Блуждание».
   (a) Если корма в соседних клетках нет, то переместиться в случайном направлении.
   (b) Если корм в соседних клетках есть, переместиться в одну из них и съесть корм.

2. «Уничтожение».
   (a) Если корма в соседних клетках нет, то переместиться в случайном направлении.
   (b) Если корм в соседних клетках есть, то оставаться на месте, пока не будет съеден весь корм в соседних клетках, после этого переместиться в. случайном направлении

Задание:

1. Написать программу, реализующую этот клеточный автомат. Программа должна предусматривать возможность сохранения в файл количества особей каждого вида на каждом шаге.

2. Выполнить исследование поведения популяций в зависимости от условий, заданных преподавателем.

3. По результатам исследования составляется отчет, в который входят характерные графики численности популяций в зависимости от времени, результаты исследования и их анализ.

2.1. Модификации

Модель Ва-тор при правильной реализации позволяет легко вносить изменения, такие как разные времена до размножения особей, времена до смерти от голода, новые модификаторы, такие

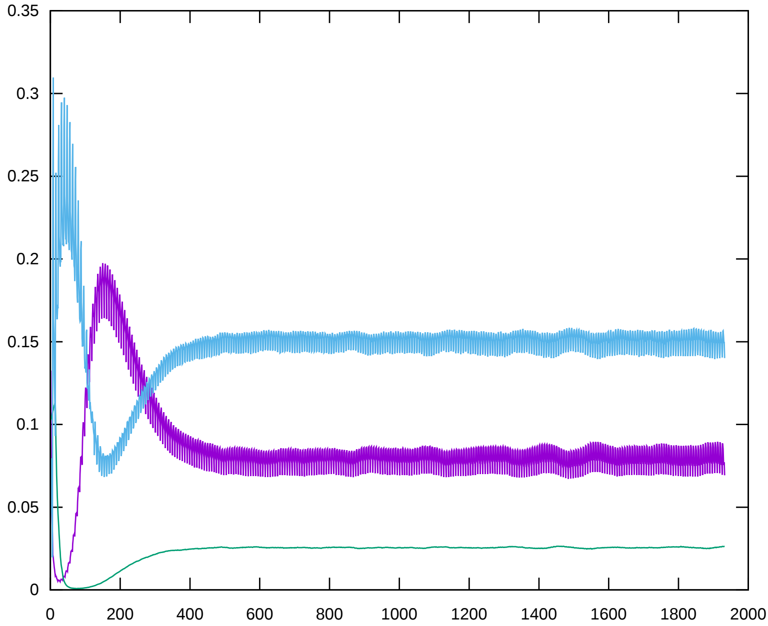

Рис. 3: Пример зависимости численностей рыб, акул и корма для рыб от времени в модифицированной системе

как смерть от старости, а также новые виды со своими правилами, например, можно скрестить оба варианта и сделать «жертв» из первого варианта общей кормовой базой двух конкурирующих видов хищников, ввести корм для нехищных рыб (водоросли).

Подобные модификации существенно влияют на сложность системы, но моделируются при этом не сложнее.

Система в модели Ва-тор обладает недостатками, например, численность видов может меняться скачком существенно вследствие синхронного размножения потомков одной особи. Подобные вещи можно исправить внесением случайности во время размножения отдельных особей.

3. Лабораторная работа №3 Игра «Жизнь»

Клеточные автоматы. ***Игра «Жизнь»***.

Существует класс моделей, называемый ***«клеточные автоматы»***. Особенностью клеточных автоматов является то, сто пространство и время в таких моделях дискретны. Пространство представляет собой регулярную решетку, клетки (ячейки) которой могут находится в конечном числе состояний. Состояние клетки определяется ее окружением. Состояния всех клеток меняются одновременно. В 1970 г. Джон Х. Конуэй предложил клеточный автомат, который на сегодняшний день стал, вероятно, самым известным. Этот автомат получил название игра «Жизнь», так как возникающие ситуации очень похожи на реальные процессы, происходящие при зарождении, развитии и гибели колонии живых организмов. Клеточный автомат задается следующими правилами. Клетки на квадратной доске могут находиться в двух состояниях: «живое» и «мертвое». «Живая» клетка выживает на очередном временном шаге, если имеет только 2 или 3 живых соседа. Если соседей меньше двух, клетка умирает из-за обособленности, а если больше трех, то из-за скученности (перенаселения). «Мертвая» оживает на очередном шаге только в том случае, если имеет 3 живых соседа. У каждой клетки 8 соседей: клетки, имеющие с ней общие стороны или вершины. Изменение состояния всех клеток происходит одновременно. В игре «Жизнь» встречаются самые разнообразные конфигурации «живых» клеток:

- конфигурации, которые вымирают за конечное число шагов;
- устойчивые или стационарные конфигурации, то есть конфигурации, которые в точности воспроизводятся на каждом временном шаге;
- периодически меняющиеся конфигурации, то есть те, которые претерпев ряд изменений, через несколько шагов возвращаются в исходное состояние, после чего процесс повторяется вновь;
- движущиеся конфигурации;
- генераторы – конфигурации, порождающие новые конфигурации.

3.1. Задание

1. Реализовать программу, моделирующую игру «Жизнь»;

2. Задать центральную часть поля случайной конфигурацией. Размеры случайной области от 3x3 до 10x10;

3. Многократными запусками программы найти начальные конфигурации, приводящие к:

   - вымиранию,
   - стабильной конфигурации,
   - периодической конфигурации,
   - конфигурации, развивающийся не менее 100 поколений.

4. Сохранить начальные конфигурации файл с возможностью задания затем из него начальной конфигурации моделирования для демонстрации правильности подбора.

Подписано в печать 30.05.2019. Формат 60x84/16
Усл.-печ. л. 1,40 Тираж 50 экз. Заказ № 150.
Типография Алтайского государственного университета:
656099, Барнаул, ул. Димитрова, 66