

# Modelo de un gravastar con complejidad nula

---

**Autor:** Alexander Sarango

**Tutor:** MSc. Julio Andrade

**Fecha:** 07 de mayo de 2025

**Institución:** Escuela Superior Politécnica de Chimborazo



# Tabla de Contenidos

1. Motivación
2. Objetivos
3. Marco teórico
4. Metodología
5. Resultados
6. Conclusiones y recomendaciones
7. Bibliografía



# 1. Motivación

---

# Agujeros negros

Predicho en 1915 por la teoría de la relatividad general de A. Einstein, un **agujero negro** es una región del espacio donde el campo gravitacional es tan fuerte que nada, incluso la luz, puede escapar de él.

**Figura 1:** Sombra del agujero negro Sagittarius A\* por el equipo de EHT.

Hasta ahora, es la teoría (clásica) más aceptada. Sin embargo, tiene algunas inconsistencias como la **singularidad** y la **pérdida de información**.



# Gravastars

Propuesta en 2001 por Pawel Mazur y Emil Mottola, una *estrella de vacío gravitacional*, es decir, **gravastar**, es un modelo teórico presentado como una solución para **resolver** algunos problemas asociados a los agujeros negros.

Las características más importantes de este modelo son:

- Introduce fenómenos cuánticos.
- Interior ocupado por un condesado de Bose-Einstein (BEC).
- Interior descrito por un espacio-tiempo de Sitter ( $\Lambda > 0$ ).
- Describe una envoltura delgada alrededor de la estrella.



# Gravastars

Propuesta en 2001 por Pawel Mazur y Emil Mottola, una *estrella de vacío gravitacional*, es decir, **gravastar**, es un modelo teórico presentado como una solución para **resolver** algunos problemas asociados a los agujeros negros.

Las características más importantes de este modelo son:

- Introduce fenómenos cuánticos.
- Interior ocupado por un condesado de Bose-Einstein (BEC).
- Interior descrito por un espacio-tiempo de Sitter ( $\Lambda > 0$ ).
- Describe una envoltura delgada alrededor de la estrella.

**Nota:** es común ver en algunos artículos de científicos que los gravastars también reciben el nombre de estrellas ultracompactas o estrellas de Schwarzschild ultracompactas.



# Investigaciones recientes

En **trabajos recientes** nuevas soluciones de gravastars se han encontrado en el marco del desacople gravitacional (Ovalle 2008) bajo el enfoque de deformación geométrica mínima (MGD).

- Ovalle, J., Posada, C. y Stuchlík, Z. (2019). *Anisotropic ultracompact Schwarzschild star by gravitational decoupling.*
- Carrasco-Hidalgo, M. y Contreras, E. (2021). *Ultracompact stars with polynomial complexity by gravitational decoupling.*



# Investigaciones recientes

En **trabajos recientes** nuevas soluciones de gravastars se han encontrado en el marco del desacople gravitacional (Ovalle 2008) bajo el enfoque de deformación geométrica mínima (MGD).

- Ovalle, J., Posada, C. y Stuchlík, Z. (2019). *Anisotropic ultracompact Schwarzschild star by gravitational decoupling.*
- Carrasco-Hidalgo, M. y Contreras, E. (2021). *Ultracompact stars with polynomial complexity by gravitational decoupling.*
- Ovalle, J. (2019). *Docoupling gravitational sources in general relativity: the extended case.*
- Contreras, E. y Stuchlík, Z. (2022). *A simple protocol to construct solutions with vanishing complexity by Gravitational Decoupling.*



# Investigaciones recientes

En **trabajos recientes** nuevas soluciones de gravastars se han encontrado en el marco del desacople gravitacional (Ovalle 2008) bajo el enfoque de deformación geométrica mínima (MGD).

- Ovalle, J., Posada, C. y Stuchlík, Z. (2019). *Anisotropic ultracompact Schwarzschild star by gravitational decoupling.*
- Carrasco-Hidalgo, M. y Contreras, E. (2021). *Ultracompact stars with polynomial complexity by gravitational decoupling.*
- Ovalle, J. (2019). *Docoupling gravitational sources in general relativity: the extended case.*
- Contreras, E. y Stuchlík, Z. (2022). *A simple protocol to construct solutions with vanishing complexity by Gravitational Decoupling.*

**¿Es posible modelar un gravastar construyendo una solución interior con complejidad nula utilizando el método de desacople gravitacional bajo el enfoque de deformación geométrica mínima extendida, y que además sea físicamente aceptable?**



## **2. Objetivos**

---

# Objetivos

Objetivo general:

- **Modelar un gravastar** construyendo una solución interior con **complejidad nula**.

Objetivo específicos:

- Utilizar el método de desacople gravitacional mediante la **deformación geométrica mínima extendida** para un sistema autogravitante con complejidad nula.
- Comprobar que la solución obtenida satisface las condiciones necesarias para considerarse una **solución interior físicamente aceptable**.



### **3. Marco teórico**

---

# Ecuaciones de campo de Einstein (EFE)

En relatividad general, las EFE describen cómo se comporta el espacio-tiempo en presencia de materia:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (1)$$

donde  $k = 8\pi G/c^4$ . En 1916, K. Schwarzschild encontró la solución exacta de un agujero negro esféricamente simétrico y estático, conocida como solución **exterior** ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) de Schwarzschild, está dado por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2(\theta)d\phi^2, \quad (2)$$

donde  $r_S = 2GM/c^2$  es el radio de Schwarzschild. Para estudiar el **interior** del agujero negro en presencia de materia se requiere que  $T_{\mu\nu} \neq 0$ .



# Ecuaciones de campo de Einstein (EFE)

En relatividad general, las EFE describen cómo se comporta el espacio-tiempo en presencia de materia:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \quad (1)$$

donde  $k = 8\pi G/c^4$ . En 1916, K. Schwarzschild encontró la solución exacta de un agujero negro esféricamente simétrico y estático, conocida como solución **exterior** ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) de Schwarzschild, está dado por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2(\theta)d\phi^2, \quad (2)$$

donde  $r_S = 2GM/c^2$  es el radio de Schwarzschild. Para estudiar el **interior** del agujero negro en presencia de materia se requiere que  $T_{\mu\nu} \neq 0$ .



# Formalismo de un gravastar

Partiendo de la solución interior de un agujero negro de Schwarzschild

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{-\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (3)$$

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p_r, -p_t, -p_t). \quad (4)$$

y considerando el interior como un **fluido perfecto**, además de una contracción adiabática cuasiestacionaria (Pawel O Mazur y Mottola 2015), obtenemos las funciones correspondientes a la solución interior de Schwarzschild en el límite ultracompacto ( $R = r_S$ ):

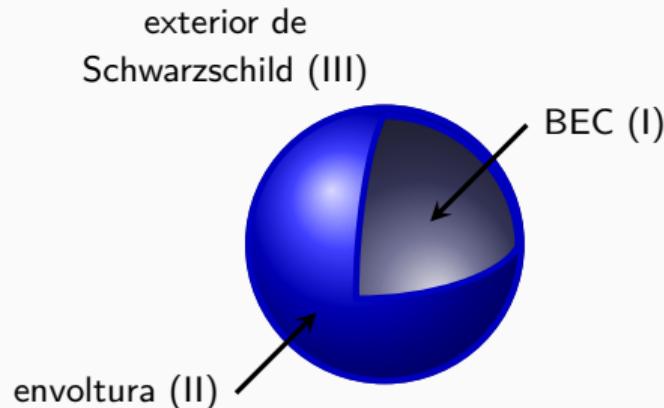
$$e^{\nu(r)} = \frac{1}{4}(1 - H^2 r^2), \quad (5)$$

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - H^2 r^2. \quad (6)$$

El factor  $1/4$  indica que el tiempo pasa más lento en el interior y  $H$  es la constante de Hubble.



# Formalismo de un gravastar



- I.  $0 \leq r < r_1, p = -\rho_0,$
  - II.  $r_1 < r < r_2, p = \rho,$
  - III.  $r_2 < r, p = \rho = 0.$
- (7)

**Figura 2:** Representación gráfica de la estructura de un gravastar.

# Factor de complejidad

El **factor de complejidad** ( $Y_{TF}$ ) es una función escalar capaz de cuantificar la complejidad del sistema autogravitante con simetría esférica (Herrera 2021):

$$Y_{TF} = 8\pi\Pi - \frac{4\pi}{r^3} \int_0^r \tilde{r}^3 \rho' d\tilde{r}. \quad (8)$$

En el caso más simple,  $Y_{TF} = 0$ , se conoce como **complejidad nula**. Así, de la ecuación (8), se tiene:

$$\Pi = \frac{1}{2r^3} \int_0^r \tilde{r}^3 \rho' d\tilde{r}, \quad (9)$$

obteniendo como resultado una ecuación de estado no local la cual se utiliza como **condición extra** al momento de resolver las EFE.



# Desacople gravitacional (GD)

Desacoplando  $T_{\mu\nu}$  en 2 fuentes gravitacionales es posible generar soluciones interiores anisótropas a partir de soluciones isótropas, es decir

$$T_{\mu\nu} = \textcolor{orange}{T}_{\mu\nu}^{(s)} + \alpha \theta_{\mu\nu}, \quad (10)$$

Llegando a un sistema de 3 ecuaciones acopladas con 5 incógnitas  $\{\nu, \lambda, \rho, p_r, p_t\}$

$$\kappa\rho = \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right), \quad (11)$$

$$\kappa p_r = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (12)$$

$$\kappa p_t = \frac{1}{4} e^{-\lambda} \left( 2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right), \quad (13)$$

donde

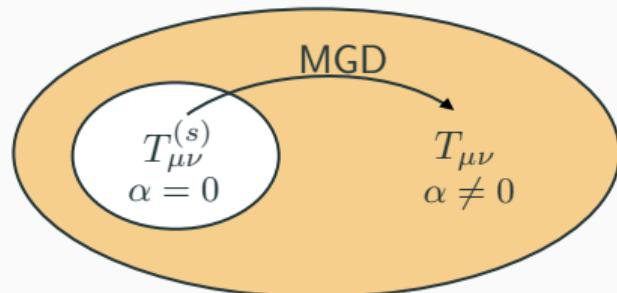
$$\rho = \rho^{(s)} + \alpha \theta_0^0; \quad p_r = p_r^{(s)} - \alpha \theta_1^1; \quad p_t = p_t^{(s)} - \alpha \theta_2^2. \quad (14)$$



# Deformación geométrica mínima extendida (MGDe)

Introducimos una modificación del espacio-tiempo de la solución conocida  $T_{\mu\nu}^{(s)}$

$$ds^2 = e^{\xi(r)}dt^2 - e^{-\mu(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta)d\phi^2. \quad (15)$$



**Modificación geométrica:**

$$\xi \mapsto \nu = \xi + \alpha g, \quad (16)$$

$$e^{-\mu} \mapsto e^{-\lambda} = e^{-\mu} + \alpha f. \quad (17)$$

**Figura 3:** MGD como una extensión de la Relatividad General.

La configuración  $\{g = 0, f \neq 0\}$  se la conoce como MGD, mientras que  $\{g \neq 0, f \neq 0\}$  se la conoce como **MGD extendida**.



# Deformación geométrica mínima extendida (MGDe)

Aplicando MGDe en las ecuaciones (11)-(13) obtenemos el sistema de ecuaciones respecto al sector  $T_{\mu\nu}^{(s)}$  dado por

$$\kappa\rho^{(s)} = \frac{1}{r^2} + e^{-\mu} \left( \frac{\mu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right), \quad (18)$$

$$\kappa p_r^{(s)} = -\frac{1}{r^2} + e^{-\mu} \left( \frac{\xi'}{r} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (19)$$

$$\kappa p_t^{(s)} = \frac{1}{4}e^{-\mu} \left( 2\xi'' + \xi'^2 - \xi'\mu' + 2\frac{\xi' - \mu'}{r} \right). \quad (20)$$



# Deformación geométrica mínima extendida (MGDe)

Aplicando MGDe en las ecuaciones (11)-(13) obtenemos el sistema de ecuaciones respecto al sector  $\theta_{\mu\nu}$  dado por

$$\kappa\theta_0^0 = -\frac{\alpha f}{r^2} - \frac{\alpha f'}{r}, \quad (21)$$

$$\kappa\theta_1^1 + \alpha Z_1 = -\alpha f \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (22)$$

$$\kappa\theta_2^2 + \alpha Z_2 = -\frac{\alpha f}{4} \left( 2\nu'' + \nu'^2 + 2\frac{\nu'}{r} \right) - \frac{\alpha f}{4} \left( \nu' + \frac{2}{r} \right), \quad (23)$$

donde  $Z_1$  y  $Z_2$  están definidos como

$$Z_1 = \frac{e^{-\mu} g'}{r}, \quad (24)$$

$$Z_2 = \frac{e^{-\mu}}{4} \left( 2g'' + \alpha g'^2 + \frac{2g'}{r} + 2\xi' g' - \mu' g' \right). \quad (25)$$



## 4. Metodología

---

# Funciones de acoplamiento

Bajo el enfoque MGDe, las componentes de la métrica (15) en función de  $\{\xi, \mu\}$  pasan a ser

$$e^{\xi(r)} = \frac{1}{4}(1 - H^2 r^2), \quad (26)$$

$$e^{-\mu(r)} = 1 - H^2 r^2. \quad (27)$$

La solución interior del gravastar en términos de la deformación geométrica toma la forma

$$\nu(r) = \ln \left[ \frac{1}{4}(1 - H^2 r^2) \right] + \alpha g(r), \quad (28)$$

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - H^2 r^2 + \alpha f(r), \quad (29)$$



# Funciones de acoplamiento

Bajo el enfoque MGDe, las componentes de la métrica (15) en función de  $\{\xi, \mu\}$  pasan a ser

$$e^{\xi(r)} = \frac{1}{4}(1 - H^2 r^2), \quad (26)$$

$$e^{-\mu(r)} = 1 - H^2 r^2. \quad (27)$$

La solución interior del gravastar en términos de la deformación geométrica toma la forma

$$\nu(r) = \ln \left[ \frac{1}{4}(1 - H^2 r^2) \right] + \alpha g(r), \quad (28)$$

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - H^2 r^2 + \alpha f(r), \quad (29)$$

**Objetivo:** obtener las **funciones de acoplamiento**  $g(r)$  y  $f(r)$ .



# Función de acoplamiento $f(r)$

En el contexto de GD por MGDe es frecuente utilizar restricciones en la fuente  $\theta_{\mu\nu}$  que facilitan la obtención de  $f(r)$ . En este caso, la **restricción en la densidad** está dada por

$$\kappa\theta_0^0 = -\frac{\alpha f}{r^2} - \frac{\alpha f'}{r} = \eta\rho, \quad (30)$$

donde  $\eta$  es una constante. Por lo que,  $f(r)$  puede obtenerse fácilmente dando como resultado

$$f(r) = -\frac{H^2 r^2 \eta}{\alpha}, \quad (31)$$

donde la constante de integración es excluida para evitar divergencias en el interior. Reemplazando la ecuación (31) en (29) resulta

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - H^2 r^2 (1 + \eta). \quad (32)$$



# Función de acoplamiento $g(r)$

Para obtener  $g(r)$  utilizamos el concepto de complejidad donde  $Y_{TF}$  puede escribirse como

$$Y_{TF} = \frac{e^{-\lambda}}{4r} [\nu'(2 + r\lambda' - r\nu') - 2r\nu''] . \quad (33)$$

Para un sistema con **complejidad nula** ( $Y_{TF} = 0$ ), reemplazamos (28) y (32) en (33) para obtener

$$g(r) = \frac{1}{\alpha} \left( 2 \ln \left[ \frac{\cos(C_1) - \sqrt{\frac{1}{\eta}(1 - H^2r^2(1 + \eta))} \cdot \sin(C_1)}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta}(1 - H^2r^2(1 + \eta))}} \right] + C_2 \right) . \quad (34)$$

Reemplazando la ecuación (34) en (28) resulta

$$e^{\nu(r)} = \frac{(1 - H^2r^2)\eta C_2 \left( \cos(C_1) - \sqrt{\frac{1}{\eta}(1 - H^2r^2(1 + \eta))} \cdot \sin(C_1) \right)^2}{4(\eta - 1 + H^2r^2(1 + \eta))} . \quad (35)$$



# Sector material

El **sector material** de la nueva solución interior de gravastar está dada por la **densidad efectiva**

$$\kappa\rho = 3H^2\epsilon, \quad (36)$$

la **presión radial efectiva**

$$\begin{aligned} \kappa p_r = & -\frac{1}{r^2} - \frac{B(r) (\eta - 1 - H^4 r^4 \epsilon + 2H^2 r^2 (1 - 2\eta)) \cos(C_1)}{r^2 (1 - H^2 r^2) (\eta - A(r)) (\cos(C_1) - B(r) \sin(C_1))} \\ & - \frac{\sin(C_1)}{\eta A(r) r^2 (1 - H^2 r^2) (\eta - A(r)) (\cos(C_1) - B(r) \sin(C_1))} \left( \eta - 1 \right. \\ & \left. + 3H^6 r^6 \epsilon^2 + H^2 r^2 (5 - 4\eta - 3\eta^2) - H^4 r^4 (7 + 3\eta - 4\eta^2) \right), \end{aligned} \quad (37)$$



# Sector material

y la presión tangencial efectiva

$$\begin{aligned}\kappa p_t = & \frac{H^2}{\eta B(r) (1 - H^2 r^2)^2 (\eta - A(r))^2 (A(r) \sin(C_1) - \cos(C_1))} \left[ \eta B(r) \left( 1 - 5\eta \right. \right. \\ & + H^8 r^8 \epsilon^3 - 2H^6 r^6 \epsilon^2 (2 + \eta) + \eta^2 \epsilon (3 + \eta^2) - 2H^2 r^2 (2 - 3\eta + 3\eta^3) \Big) \cos(C_1) \\ & - A(r) \left( 3 + 2H^6 r^6 (\eta - 6) \epsilon^2 + 3H^8 r^8 \epsilon^3 - \eta (7 - \eta - 3\eta^2) + 2H^4 r^4 \epsilon (9 \quad (38) \right. \\ & \left. \left. - 4\eta - \eta^2 \right) - 2H^2 r^2 (6 - \eta (5 + 4\eta - 5\eta^2) \right) \right) \sin(C_1) \right],\end{aligned}$$



## Sector material

donde definimos los siguientes parámetros

$$\epsilon = 1 + \eta, \quad (39)$$

$$A(r) = 1 - H^2 r^2 \epsilon, \quad (40)$$

$$B(r) = \sqrt{\frac{A(r)}{\eta}}. \quad (41)$$

Como complemento, obtenemos la función de anisotropía  $\Pi = p_t - p_r$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{2H^2 r^2}{\kappa \eta B(r) (1 - H^2 r^2)^2 (\eta - A(r))^2 (\cos(C_1) - B(r) \sin(C_1))} \left[ \eta B(r) \left( 3 \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\eta + \eta^2 + 3H^4 r^4 \epsilon^2 - H^2 r^2 (3 + 4\eta + \eta^2) \right) \cos(C_1) - \left( 1 + 2\eta + 3\eta^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - H^6 r^6 \epsilon^3 + H^4 r^4 \epsilon^2 (3 + 2\eta) - H^2 r^2 (3 + 7\eta + 7\eta^2 + 3\eta^3) \right) \sin(C_1) \right]. \end{aligned} \quad (42)$$



# Condiciones de frontera

Para comprobar que la nueva solución interior de gravastar es **compatible** con una solución exterior, es necesario que la nueva solución cumpla con **3 condiciones de continuidad** en la frontera

$$e^{\nu(r)} \Big|_{\Sigma^-} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Big|_{\Sigma^+}, \quad (43)$$

$$e^{-\lambda(r)} \Big|_{\Sigma^-} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Big|_{\Sigma^+}, \quad (44)$$

$$p_r(r) \Big|_{\Sigma^-} = p_r(r) \Big|_{\Sigma^+}. \quad (45)$$



# Solución exterior

Definimos la solución exterior que emplearemos la cual fue obtenida bajo el enfoque MGD (Ovalle, Posada y Stuchlík 2019)

$$e^\nu = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (46)$$

$$e^{-\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\ell}{2r - 3M}\right), \quad (47)$$

$$\kappa\rho = -\frac{\ell M}{r^2(3M - 2r)^2}, \quad (48)$$

$$\kappa p_r = -\frac{\ell}{r^2(3M - 2r)}, \quad (49)$$

$$\kappa p_t = \frac{\ell(M - r)}{r^2(3M - 2r)^2}, \quad (50)$$

donde  $\ell$  es una constante con unidades de longitud.



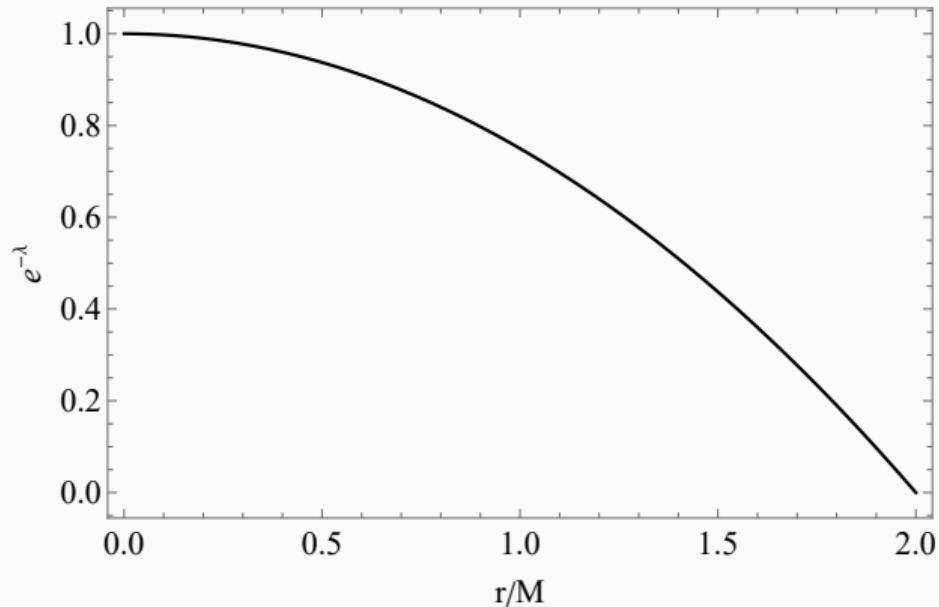
## **5. Resultados**

---

# Nueva solución de gravastar ( $e^{-\lambda}$ )

Para que  $e^{-\lambda}$  sea continua en la superficie se requiere que

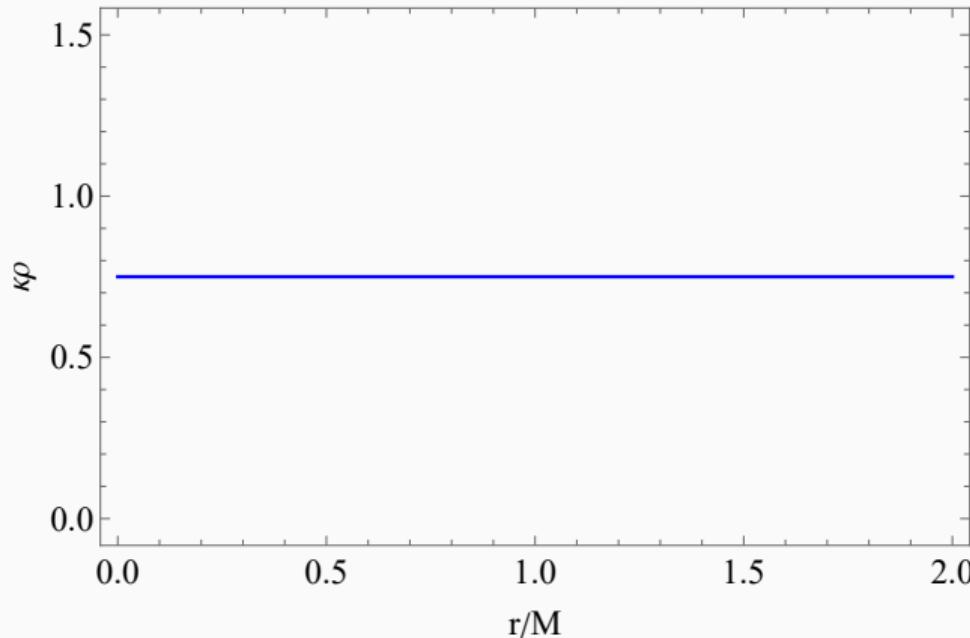
$$H = \pm \sqrt{\frac{2M}{R^3(1 + \eta)}}. \quad (51)$$



**Figura 4:** Función  $e^{-\lambda}$  de la nueva solución de gravastar con  $M = 1$ .



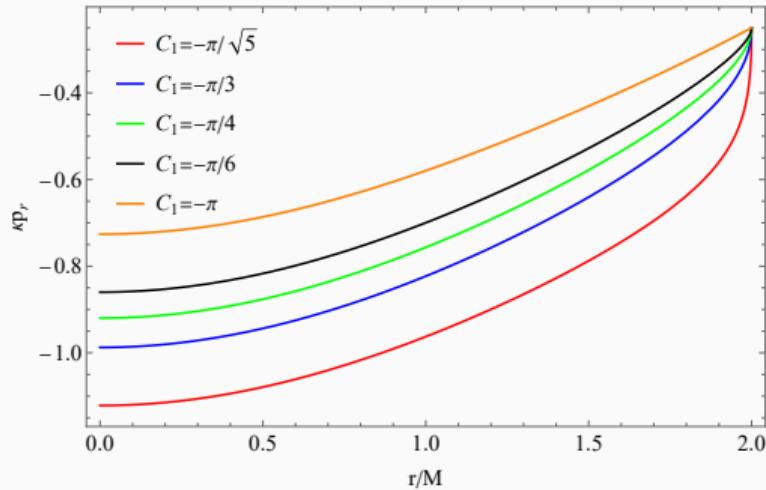
# Nueva solución de gravastar ( $\rho$ )



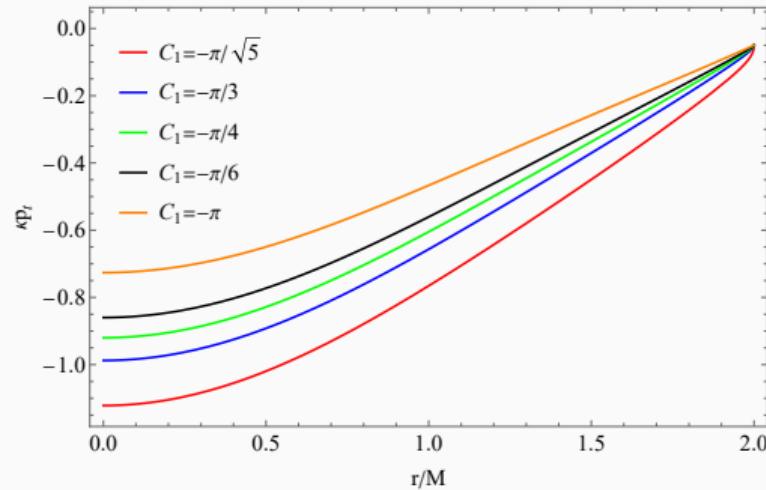
**Figura 5:** Densidad efectiva  $\rho$  de la nueva solución de gravastar con  $M = 1$ .



# Nueva solución de gravastar ( $p_r$ y $p_t$ )



(a)

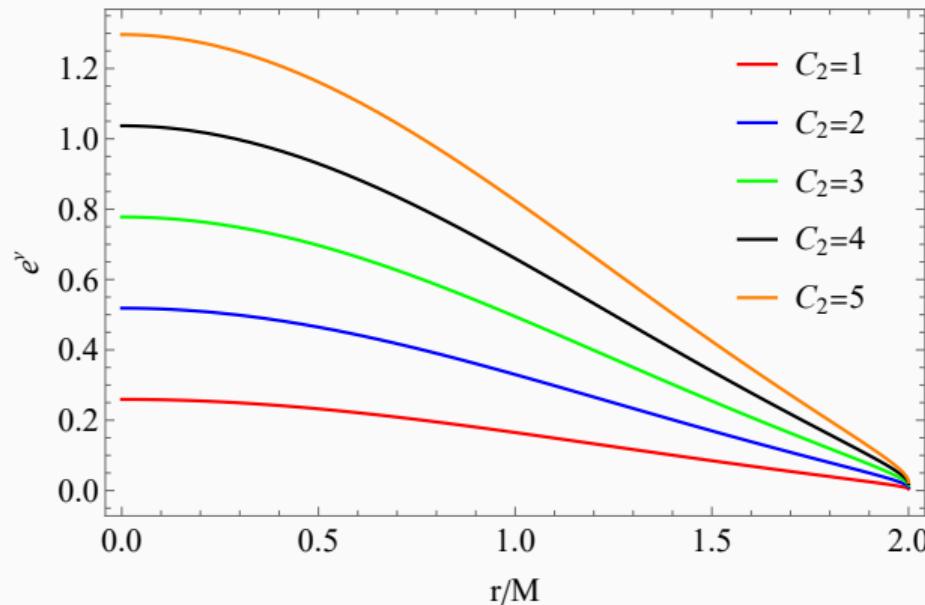


(b)

**Figura 6:** (a) Presión radial efectiva  $p_r$  y (b) presión tangencial efectiva  $p_t$  de la nueva solución de gravastar para diferentes valores de  $C_1$  con  $\eta = 5/2$ ,  $M = 1$ .



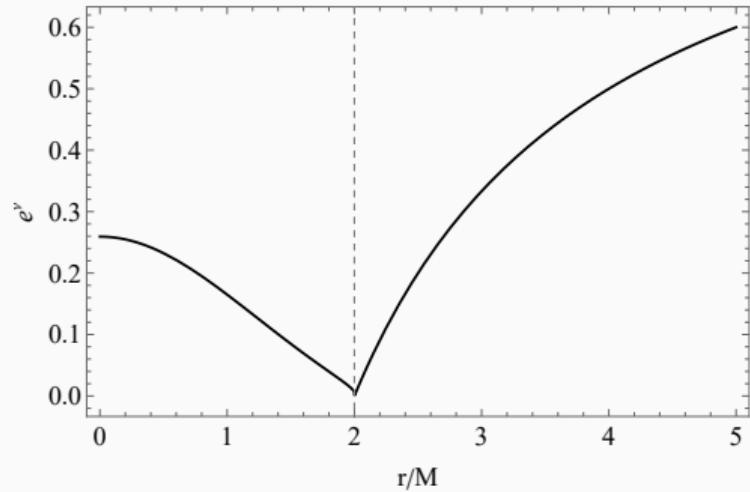
# Nueva solución de gravastar ( $e^\nu$ )



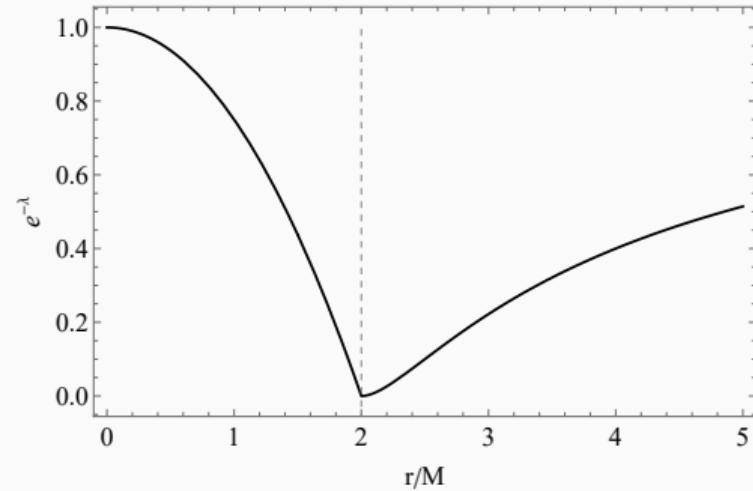
**Figura 7:** Función  $e^\nu$  de la nueva solución de gravastar para diferentes valores de  $C_2$  con  $\eta = 5/2$ ,  $C_1 = -\pi/\sqrt{5}$ ,  $M = 1$ .



# Análisis de resultados con el exterior ( $e^\nu$ y $e^{-\lambda}$ )



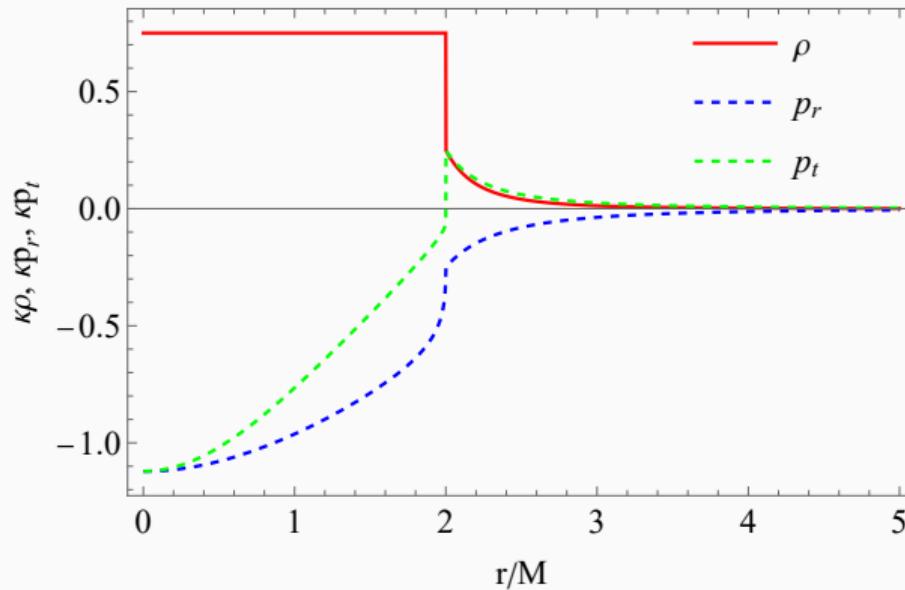
**Figura 8:** Función  $e^\nu$  de la nueva solución de gravastar con el exterior con  $\eta = 5/2$ ,  $C_1 = -\pi/\sqrt{5}$ ,  $C_2 = 1$ ,  $M = 1$ .



**Figura 9:** Función  $e^{-\lambda}$  de la nueva solución de gravastar con el exterior con  $\ell = -1$ ,  $M = 1$ .



# Análisis de resultados con el exterior (sector material)



**Figura 10:** Densidad efectiva  $\rho$ , presión radial efectiva  $p_r$  y presión tangencial efectiva  $p_t$  de la nueva solución de gravastar con el exterior con  $\eta = 5/2$ ,  $C_1 = -\pi/\sqrt{5}$ ,  $\ell = -1$ ,  $M = 1$ .



# Análisis de resultados

Cabe destacar 4 aspectos importantes en base a los resultados:

## 1. **¿Por qué $H$ ?**

Utilizamos  $H$  para asegurar la continuidad en la componente radial alegando ligeros efectos en la densidad la cual recordamos que es constante.

## 2. **Sistema (casi) completo**

Tomando en cuenta las constantes dentro del sistema, llegamos a obtener un sector material bastante favorable el cual podría ser perfectamente ajustado.

## 3. **Continuidad sin condición**

En el caso de la componente temporal y la presión radial se logró conectar con el exterior simplemente haciendo un uso correcto de las constantes.

## 4. **¿MDG $\neq$ MGDe?**

¿Se debería analizar el modelo con un exterior obtenido bajo el mismo enfoque?



## **6. Conclusiones y recomendaciones**

---

# Conclusiones

- Se logró **modelar** la solución interior de un gravastar con complejidad nula.
- Se **empleó** el método de desacople gravitacional bajo el enfoque de deformación geométrica mínima extendida para modelar un gravastar con complejidad nula.
- Se comprobó que la nueva solución de gravastar por complejidad nula **satisface** las condiciones necesarias para ser considerada como físicamente aceptable.



# Recomendaciones

- Se **recomienda** realizar un estudio exhaustivo de la teoría de gravastars, previo al desarrollo de la investigación, para abordar de forma eficiente tanto los problemas teóricos como dentro del formalismo matemático.
- En base a los resultados obtenidos, se **recomienda** emplear más a menudo el enfoque por deformación geométrica mínima extendida con la finalidad de obtener nuevas soluciones de modelos que presenten limitaciones en un inicio.
- Para contribuir con la investigación de este trabajo, se **recomienda** estudiar la viabilidad de obtener una nueva solución exterior utilizando el mismo enfoque para analizar las ventajas y desafíos del modelo.



## 7. Bibliografía

---

# Bibliografía i

-  Carrasco-Hidalgo, M. y E. Contreras (2021). «**Ultracompact stars with polynomial complexity by gravitational decoupling**». En: *The European Physical Journal C* 81.8. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09557-z.
-  Casadio, R., J. Ovalle y Roldão da Rocha (2015). «**The minimal geometric deformation approach extended**». En: *Classical and Quantum Gravity* 32.21, 215020, pág. 215020. DOI: 10.1088/0264-9381/32/21/215020. arXiv: 1503.02873 [gr-qc].
-  Contreras, E. y Z. Stuchlik (2022). «**A simple protocol to construct solutions with vanishing complexity by Gravitational Decoupling**». En: *The European Physical Journal C* 82.8, pág. 706. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10684-4.
-  Herrera, Luis (2021). «**Complexity of Self-Gravitating Systems**». En: *Entropy* 23.7. ISSN: 1099-4300. DOI: 10.3390/e23070802.

# Bibliografía ii

-  Mazur, Pawel O y Emil Mottola (2015). «**Surface tension and negative pressure interior of a non-singular 'black hole'**». En: *Classical and Quantum Gravity* 32.21, pág. 215024. DOI: 10.1088/0264-9381/32/21/215024.
-  — (2001). «**Gravitational Condensate Stars: An Alternative to Black Holes**». En: *gr-qc/0109035*.
-  Ovalle, J. (2008). «**Searching Exact Solutions for Compact Stars in Braneworld: a Conjecture**». En: *Modern Physics Letters A* 23.38, págs. 3247-3263. DOI: 10.1142/S0217732308027011. arXiv: gr-qc / 0703095 [gr-qc].
-  — (2019). «**Decoupling gravitational sources in general relativity: The extended case**». En: *Physics Letters B* 788, págs. 213-218. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.11.029>.
-  Ovalle, J., C. Posada y Z. Stuchlík (2019). «**Anisotropic ultracompact Schwarzschild star by gravitational decoupling**». En: *Classical and Quantum Gravity* 36.20, pág. 205010. DOI: 10.1088/1361-6382/ab4461.

¡MUCHAS GRACIAS POR SU ATENCIÓN! 😊