Aufgabe 14

(a) **Voraussetzung:** Gegeben sei $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$. Definiere

$$\mathcal{O}_1(g) \coloneqq \{\, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N}_0 : f(n) \leq c \cdot g(n) \,\}$$
$$\mathcal{O}_2(g) \coloneqq \{\, f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n) \,\}$$

Behauptung: Es gilt $\mathcal{O}_1(g) = \mathcal{O}_2(g)$.
Beweis: Sei $f \in \mathcal{O}_1(g)$. Dann existiert $c \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $f(n) \leq c \cdot g(n)$. Setze $n_0 \coloneqq 0$. Dann ist offensichtlich die Bedingung für $\mathcal{O}_1(g)$ erfüllt und $f \in \mathcal{O}_2(g)$.

Sei nun $f \in \mathcal{O}_2(g)$. Seien c, n_0 entsprechend der Bedingung in $\mathcal{O}_2(g)$ gegeben. Da g nur positive Werte annimmt können wir definieren

$$c' \coloneqq \max\left(\{\, c \,\} \cup \left\{ \frac{f(n)}{g(n)} \,\middle|\, n < n_0 \right\}\right) .$$

Wegen $c' \geq c$ und $g > 0$ ist die Bedingung $f(n) \leq c \cdot g(n) \leq c' g(n)$ für alle $n \geq n_0$ erfüllt. Ist $n < n_0$, so gilt nach Definition von c'

$$\frac{f(n)}{g(n)} \leq c' \implies f(n) \leq c' \cdot g(n)$$

und insgesamt folgt $f \in \mathcal{O}_1(g)$.

(b) **Voraussetzung:** $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Behauptung: $f \in \mathcal{O}(g)$
Beweis: Nach Definition des Limes existiert für $\epsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \epsilon = 1 \quad \text{d.h.} \quad f(n) < g(n)$$

Also ist die Bedingung der zweiten Definition aus 14(a) erfüllt und $f \in \mathcal{O}(g)$.

(c)

$(1/3)^n$	6	$\log_2 n$ $\ln n$	$\log^2 n$	$n^{1/3} + \log_2 n$	$\sqrt{n}$	$n/\log_2 n$	n	$n \log_2 n$	n^2 $n^2 + \log_2 n$

n^3	$n - n^3 + 7n^5$	$(3/2)^n$	2^n	$n!$