

Versuchsprotokoll M1

Pendel

19.11.2014



Alexander Schlüter, Josh Wewers

Gruppe 15/mi

`alx.schlueter@gmail.com`

`joshw@muenster.de`

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Versuch: Federpendel	2
3	Versuch: Mathematisches Pendel	3
4	Diskussion	4
4.1	Versuch: Elastische Biegung	4
4.2	Torsionsschwingung mit Scheibe	6
4.3	Torsionsschwingung mit Hantel	6

1 Einführung

Ein **Federpendel** besteht aus einer Feder mit Federkonstante D , an der eine Waagschale mit einer aufgelegten Masse m hängt. Wird diese aus der Ruheposition um x ausgelenkt, so wirkt eine Rückstellkraft F der Auslenkung entgegen. Nach dem **Hookeschen Gesetz** ist der Zusammenhang linear:

$$m\ddot{x} = F = -Dx \quad (1.1)$$

Da die Feder mit der Waagschale eine Eigenmasse m_F besitzt, ist folgender Ansatz realistischer:

$$(m + m_F/3)\ddot{x} = -Dx \quad (1.2)$$

Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ lautet die Lösung der Bewegungsgleichung

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m + m_F/3}} \cdot t\right). \quad (1.3)$$

Die Feder führt also harmonische Schwingungen aus. Aus der Periodendauer T kann die Federkonstante bestimmt werden:

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} \left(m + \frac{m_F}{3}\right) \quad (1.4)$$

Ein **Mathematisches Pendel** ist ein Fadenpendel der Länge l , wobei angenommen wird, dass der Faden masselos ist, die gesamte Masse im Schwerpunkt vereinigt ist und die Bewegung reibungsfrei abläuft. Als Rückstellkraft bei einer Auslenkung um einen Winkel φ wirkt die Schwerkraft $F_\varphi = -mg \sin \varphi \approx -mg\varphi$. Die Bewegungsgleichung und Lösung lauten dann:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (1.5)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad (1.6)$$

Die Erdbeschleunigung g lässt sich aus der Periodendauer T einer Schwingung ermitteln:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad (1.7)$$

2 Versuch: Federpendel

Ziel des Versuches ist die Bestimmung der Federkonstante D auf zwei verschiedene Arten: Zuerst statisch und anschließend aus der Periodendauer einer Schwingung.

Die Feder ist vertikal vor einem Maßstab aufgehängt. Ein schwarzes Plättchen an der Feder zeigt die Höhe auf dem Maßstab an. Die Feder so wird justiert, dass bei angehängter Waagschale das Plättchen auf 0 zeigt. Drei Gewichte stehen zur Verfügung und werden mit einer Waage gewogen. Genauso wird die Masse von Feder und Waagschale bestimmt: $m_F = (70,47 \pm 0,01) \text{ g}$.

Die Gewichte werden nacheinander in die Waagschale gelegt und die Auslenkung abgelesen. Dabei wird ein Spiegel zum parallaxenfreien Ablesen neben die Skala gehalten. Wir erwarten aus Gleichung (1.1) einen linearen Zusammenhang.

Masse m	$(49,86 \pm 0,01) \text{ g}$	$(99,71 \pm 0,01) \text{ g}$	$(199,46 \pm 0,01) \text{ g}$
Auslenkung x	$(3,7 \pm 0,2) \text{ cm}$	$(7,5 \pm 0,2) \text{ cm}$	$(15,2 \pm 0,2) \text{ cm}$
Federkonst. D	$(13,2 \pm 0,7) \text{ N/m}$	$(13,0 \pm 0,4) \text{ N/m}$	$(12,9 \pm 0,2) \text{ N/m}$

Tabelle 1: Federkonstante bestimmt aus der Auslenkung

Das Ergebnis der statischen Bestimmung ergibt sich also als

$$D_{\text{stat}} = (13,0 \pm 0,3) \text{ N/m} \quad (2.1)$$

Nun wird die Feder mit angehängter Masse zusätzlich mit der Hand ausgelenkt und die Periodendauer $50T$ für 50 Schwingungen mit einer Stoppuhr gemessen. Die Federkonstante wird mithilfe von Gleichung (1.4) berechnet. Aus derselben Gleichung wird erwartet, dass die Schwingungsdauer mit der Wurzel der Masse steigt.

Masse m	$(49,86 \pm 0,01) \text{ g}$	$(99,71 \pm 0,01) \text{ g}$	$(199,46 \pm 0,01) \text{ g}$
50 Perioden $50T$	$(26,12 \pm 0,50) \text{ s}$	$(32,66 \pm 0,50) \text{ s}$	$(43,41 \pm 0,50) \text{ s}$
Federkonst. D	$(10,61 \pm 0,41) \text{ N/m}$	$(11,40 \pm 0,35) \text{ N/m}$	$(11,68 \pm 0,27) \text{ N/m}$

Tabelle 2: Federkonstante bestimmt aus Schwingungsperioden

Die dynamisch bestimmte Federkonstante lautet also

$$D_{\text{dyn}} = (11,23 \pm 0,20) \text{ N/m.} \quad (2.2)$$

3 Versuch: Mathematisches Pendel

Ziel des Versuches ist die Bestimmung der Erdbeschleunigung g aus der Schwingungsdauer eines Fadenpendels.

Ein Faden ist an einem Ende an einer Halterung befestigt, am anderen Ende hängt eine metallische Kugel unbekannter Masse. Mit einem Maßstab wird die Pendellänge l gemessen und für 3 verschiedene Pendellängen wird das Gewicht mit der Hand ausgelenkt, sodass es zur Schwingung kommt. Die Dauer von 50 Schwingungen wird mit der Stoppuhr gemessen und anschließend die Erdbeschleunigung g über Gleichung (1.7) berechnet.

Länge l	$(33,0 \pm 0,3) \text{ cm}$	$(53,0 \pm 0,3) \text{ cm}$	$(81,7 \pm 0,3) \text{ cm}$
50 Perioden $50T$	$(57,06 \pm 0,50) \text{ s}$	$(72,75 \pm 0,50) \text{ s}$	$(90,53 \pm 0,50) \text{ s}$
Erdbeschl. g	$(10,0 \pm 0,2) \text{ m/s}^2$	$(9,88 \pm 0,15) \text{ m/s}^2$	$(9,84 \pm 0,11) \text{ m/s}^2$

Tabelle 3: Messergebnis zum Fadenpendel

Aus dem Mittelwert ergibt sich:

$$g = (9,91 \pm 0,09) \text{ m/s}^2 \quad (3.1)$$

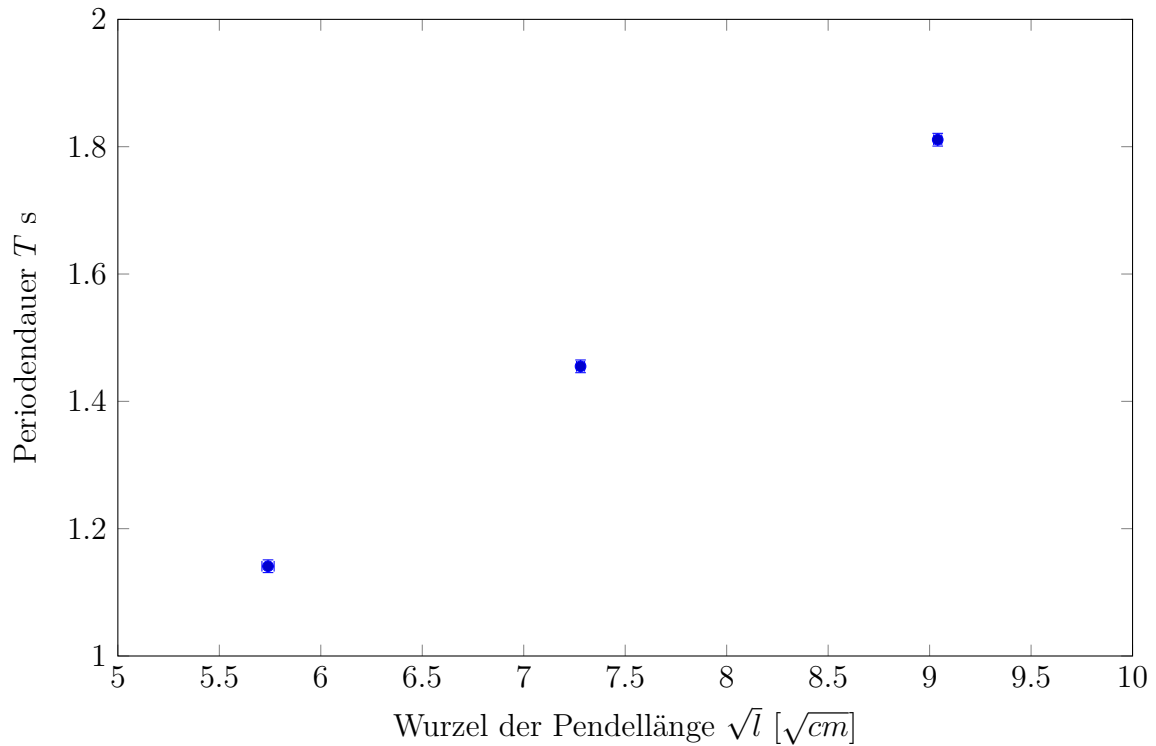


Abbildung 1: Messergebnis zur Erdbeschleunigung

4 Diskussion

4.1 Versuch: Elastische Biegung

Da es sich beim Elastizitätsmodul um eine Materialgröße handelt, sollte diese unabhängig von der Art des Einspannens sein. Dies hat sich in unserer Messung nicht bestätigt:

$$E_{1,\text{flach}} - E_{1,\text{hoch}} = (2,2 \pm 0,8) \cdot 10^1 \text{ kN/mm}^2 \quad (4.1)$$

Grund dafür ist, dass die Methode zur Ablesung der Durchbiegung nur eine signifikante Stelle geliefert hat, denn mit dem Auge sind Längenunterschiede $< 1 \text{ mm}$ schlecht zu erkennen. Dieser Unterschied liegt außerhalb des berechneten Fehlers, weil wie die Unsicherheiten der Eingabedaten für den *gnuplot*-Fit nicht fortpflanzen können (der von *gnuplot* ausgegebene Fehler bezieht sich nur auf die Ungenauigkeit des Algorithmus, aber die Eingabedaten werden als exakt angenommen). Sinnvoll ausgesagt werden kann, dass der gefühlt leichteste Stab 3 einen deutlich geringeren Elastizitätsmodul hat als der

schwerste Stab 4:

$$\Delta E_{34} = 200 \text{ kN/mm}^2 - 80 \text{ kN/mm}^2 = 120 \text{ kN/mm}^2 \quad (4.2)$$

Laut¹ ist der Elastizitätsmodul für verschiedene Werkstoffe:

Stoff	Elastizitätsmodul [kN/mm ²]
Nickellegierungen	150 ... 222
Gusseisen	66 ... 172
Kupfer	100 ... 130
Bronze	105 ... 124
Messing	78 ... 123
Aluminiumlegierungen	68 ... 82
Magnesiumlegierungen	42 ... 47

Tabelle 4: Literaturwerte für Elastizitätsmodul

Stab 1 liegt im Bereich von Messing, während Stab 3 im Bereich von Aluminiumlegierungen liegt. Beides deckt sich mit der Farbe. Bei Stab 2 und 4 ist der Fehler zu hoch, als dass die Werte sinnvoll verglichen werden könnten, allerdings legt die sehr ähnliche Farbe nahe, dass Stab 2 genauso wie Stab 1 aus Messing besteht, während Gewicht und Aussehen von Stab 4 auf Gusseisen hindeuten. Dadurch dass sämtlichen Stäben ein Material, welches zu den übrigen Erscheinungsmerkmalen passt, zugeordnet werden konnte, kann man davon ausgehen, dass trotz der teilweise ungenauen Messung, Auslenkung eines Stabes, die Messung gelungen ist.

4.2 Torsionsschwingung mit Scheibe

Laut² ist der Schubmodul von verschiedenen Werkstoffen:

¹ingenieurwissen.

²elektrotechnik.

Stoff	Schubmodul G_M [$10^4 MPa$]
Magnesium	1,7
Aluminium	2,6
Titan	4,5
Kupfer	4,6
Nickel	7,6
Stahl	8,3
Wolfram	16,0

Tabelle 5: Literaturwerte für Schubmodul

Leider wurde durch unsere Messung ein Schubmodul von $G = 0,547 \cdot 10^4 MPa$ bestimmt. Dieser Wert liegt außerhalb der angegebenen Tabelle und liegt eher im Bereich von Plastiken. Da der Stab jedoch aus einem glänzendem Metall bestand, ist es anzunehmen, dass im Laufe der Bestimmung eine 10er-Potenz verloren gegangen ist. Der richtige Wert sollte eher bei $G_{soll} = 5,47 \cdot 10^4 MPa$ liegen, was dann für einen Draht aus Nickel oder ähnlichem Metall spräche.

4.3 Torsionsschwingung mit Hantel

Bei der Bestimmung der Trägheitsmomente J_1 und J_2 wurden zwei unterschiedliche Verfahren gewählt, die beim der Bestimmung von J_1 , dem Trägheitsmoment der Stange, noch vergleichbare Ergebnisse geliefert haben. So liegt ΔJ_1 bei nur $0,97 gm^2$, dies entspricht gerade mal einem 0,08% relativem Fehler, was ein gutes Ergebnis ist. Bei der Bestimmung von J_2 ist die absolute Differenz ähnlich klein, $\Delta J_2 = 0,089 g^2$, dies ist entspricht aber einem relativen Fehler von über 200%, deutlich zu groß ist. Bei der Bestimmung ist der Methode über das Fitten, die sehr kleinen Werte des Trägheitsmomentes der Hantelscheiben zum Verhängnis geworden.