

Versuchsprotokoll E1

Gleich- und Wechselstrom

03.12.2014



Alexander Schlüter, Josh Wewers, Frederik Edens

Gruppe 15/mi

`alx.schlueter@gmail.com`

`joshw@muenster.de`

`f_eden01@wwu.de`

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Versuche	3
2.1	Aufgabe 1	3
3	Aufgabe 2	7
4	Versuchsreihe 2	7
4.1	Aufgabe 4	8
4.2	Aufgabe 5	8
4.3	Aufgabe 6	11
4.4	Aufgabe 7	14
4.5	Aufgabe 8	16
5	Diskussion	18
5.1	Versuchsreihe 1	18
5.2	Versuchsreihe 2	18

1 Einführung

Eine reale Spannungsquelle wird durch das Modell des Innenwiderstandes beschrieben. Dabei wird gerechnet, als wäre ein Innenwiderstand R_i in Reihe mit der eigentlichen Spannungsquelle mit Leerlaufspannung U_0 geschaltet. Es ergibt sich bei Belastung durch einen Außenwiderstand R_a (Strom I):

$$U_0 = R_i \cdot I + R_a \cdot I \quad (1.1)$$

Die tatsächlich gemessene Spannung an der Quelle weicht von der Leerlaufspannung ab und heißt Klemmspannung U_{Kl} :

$$U_{\text{Kl}} = U_0 - R_i \cdot I = R_a \cdot I \quad (1.2)$$

Beim Kurzschluss für $R_a = 0$ fließt der endliche Strom

$$I_{\text{Ks}} = U_0 / R_i. \quad (1.3)$$

Die an den Verbraucher abgegebene Leistung beträgt

$$P = U_0^2 \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2}. \quad (1.4)$$

Wir leiten die Bedingung für maximale Leistungsabgabe her:

$$\frac{dP}{dR_a} = \frac{U_0^2}{(R_a + R_i)^2} - 2 \cdot \frac{R_a U_0^2}{(R_a + R_i)^3} = 0 \quad (1.5)$$

$$\implies (R_a + R_i) = 2R_a \implies R_a = R_i \quad (1.6)$$

Bei Wechselstrom wird keine konstante Spannung angelegt, sondern eine Periodisch veränderliche. In der Regel entspricht der Spannungsverlauf einer (Ko-)Sinusfunktion, jedoch sind auch andere Verläufe möglich.

$$U = U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi_U) \quad (1.7)$$

Die Stromstärke ist nur bei Ohmschen Widerständen direkt proportional zur Spannung. Bei Spule und Kondensator kommt es dagegen zu einer Phase $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$ zwischen

Spannung und Strom.

$$\text{Ohmscher Widerstand } R \quad U_R = RI, \varphi = 0 \quad (1.8)$$

$$\text{Spule mit Induktivität } L \quad U_L = L \frac{dI}{dt}, \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (1.9)$$

$$\text{Kondensator mit Kapazität } C \quad U_C = \frac{1}{C} \int I dt, \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (1.10)$$

Die Leistung bleibt das Produkt aus Spannung und Stromstärke. Jedoch ist meistens nur der Mittelwert von Interesse. Für Gleichstrom ergibt das

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \sin^2(\omega t) dt = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (1.11)$$

Daher Definiert man die Effektivwerte

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (1.12)$$

Im allgemeinen gilt

$$\bar{P} = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi \quad (1.13)$$

Um Wechselstrom zu messen sind Messgeräte oft zu träge. Dann erhält man den linearen Mittelwert

$$A = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A(t) dt \quad (1.14)$$

Bei Sinuswellen ist dies 0. Daher wird stattdessen der Gleichspannungsteil, bzw. der Effektivwert verwendet

$$A_{\text{=}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |A(t)| dt \quad (1.15)$$

$$A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (A(t))^2 dt} \quad (1.16)$$

Bei sinusförmigen Wechselstrom ergibt sich

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{T} \int_0^T |I_0 \sin(\omega t)| dt = I_0 \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} I_0 \quad (1.17)$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2(\omega t) dt} = \sqrt{\frac{I_0^2}{2T} \int_0^T (1 - \cos(2\omega t)) dt} = \frac{|I_0|}{\sqrt{2}} \quad (1.18)$$

Mit Widerständen rechnet man bei Wechselstrom mittels Scheinwiderständen. Zusammen mit der Phase lässt sich die Stromstärke in Abhängigkeit von der Zeit berechnen. Allgemein gilt

$$|Z| = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \quad (1.19)$$

Für ohmschen Widerstand, Spule und Kondensator sind Scheinwiderstand und Phase

$$\text{Ohmscher Widerstand } R \quad |Z|_R = R, \varphi = 0 \quad (1.20)$$

$$\text{Spule mit Induktivität } L \quad |Z|_L = \omega L, \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (1.21)$$

$$\text{Kondensator mit Kapazität } C \quad |Z|_C = \frac{1}{\omega C}, \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (1.22)$$

Da im Phasenraum Z_R senkrecht zu Z_L und Z_C ist, ist der Gesamtscheinwiderstand bei Reihenschaltung gegeben durch

$$|Z| = \sqrt{|Z|_R^2 + (|Z|_L - |Z|_C)^2}, \quad \tan \varphi = \frac{R_{W,L} - R_{W,C}}{R_{W,R}} \quad (1.23)$$

Für den Wirkwiderstand gilt

$$R_W = |Z| \cos \varphi = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \cos \varphi \quad (1.24)$$

2 Versuche

2.1 Aufgabe 1

Ziel dieses Versuches ist die Bestimmung von Leerlaufspannung U_0 und Innenwiderstand R_i von

1. einer einzelnen Akkumulatorzelle
2. drei Zellen parallel
3. drei Zellen in Reihe.

Dazu wird ein Stöpselwiderstand R_a in Reihe und ein Spannungsmessgerät zur Messung der Klemmspannung U_{Kl} parallel zu den Zellen geschaltet. Der Stöpselwiderstand fungiert als Lastwiderstand, über den der Strom I reguliert werden kann. Es werden jeweils 13 Spannungswerte nach Einstellen verschiedener Widerstände R_a abgenommen. Darunter sind auch Werte für den Kurzschlussfall ($R_a=0$) und für nicht geschlossenen Stromkreis ($R_a = \infty$).

R_a [$\pm 1 \Omega$]	U_{Kl} [$\pm 0,015 \text{ V}$]	$I = U_{\text{Kl}}/R_a$ [$\pm 0,5 \text{ mA}$]
∞	1,338	0
0	0,021	-
5	0,303	60,6
10	0,483	48,3
20	0,717	35,8
30	0,840	28,0
40	0,930	23,3
50	0,987	19,7
60	1,035	17,3
70	1,071	15,3
80	1,095	13,7
90	1,113	12,4
100	1,140	11,4

Tabelle 1: Messergebnis für eine Zelle

R_a [$\pm 1 \Omega$]	U_{Kl} [$\pm 0,05 \text{ V}$]	$I = U_{\text{Kl}}/R_a$ [$\pm 1,2 \text{ mA}$]
∞	4,00	0
0	0,10	-
5	0,40	80
10	0,70	70
20	1,15	57,5
30	1,48	49,3
40	1,73	43,3
50	1,98	39,6
60	2,12	35,3
70	2,30	32,9
80	2,40	30,0
90	2,52	28,0
100	2,61	26,1

Tabelle 2: Messergebnis für drei Zellen parallel

R_a [$\pm 1 \Omega$]	U_{Kl} [$\pm 0,015 \text{ V}$]	$I = U_{\text{Kl}}/R_a$ [$\pm 0,5 \text{ mA}$]
∞	1,323	0
0	0,030	-
5	0,327	65,4
10	0,495	49,5
20	0,717	35,9
30	0,843	28,1
40	0,930	23,3
50	0,990	19,8
60	1,023	17,1
70	1,068	15,3
80	1,095	13,7
90	1,113	12,4
100	1,137	11,4

Tabelle 3: Messergebnis für drei Zellen in Reihe

Wir beobachten bei allen drei Messungen eine Zunahme der Klemmspannung U_{Kl} und Abnahme des Stromes I bei höherem Lastwiderstand R_a . Die Werte für eine Zelle entsprechen bis auf geringe Abweichungen den Werten für drei Zellen in Reihe. Die größte Abweichung tritt für $R_a = 5\ \Omega$ auf und beträgt $\Delta U_0 = (0,327\ \text{V} - 0,303\ \text{V}) / (0,303\ \text{V}) \approx 8\ \%$.

Aus Gleichung (1.2) erwarten wir einen linearen Zusammenhang zwischen Klemmspannung und Strom. Wir fitten also mit gnuplot nach dem *least-squares*-Verfahren gegen $U_{\text{Kl}}(I) = U_0 - R_i \cdot I$. Ausgabe:

Messung	U_0 [V]	R_i [Ω]
1 Zelle	$1,33 \pm 0,01$	$17,2 \pm 0,2$
3 Zellen parallel	$3,79 \pm 0,07$	$44,9 \pm 1,6$
3 Zellen in Reihe	$1,30 \pm 0,01$	$15,6 \pm 0,4$

Tabelle 4: Klemmspannung und Innenwiderstand aus Fit

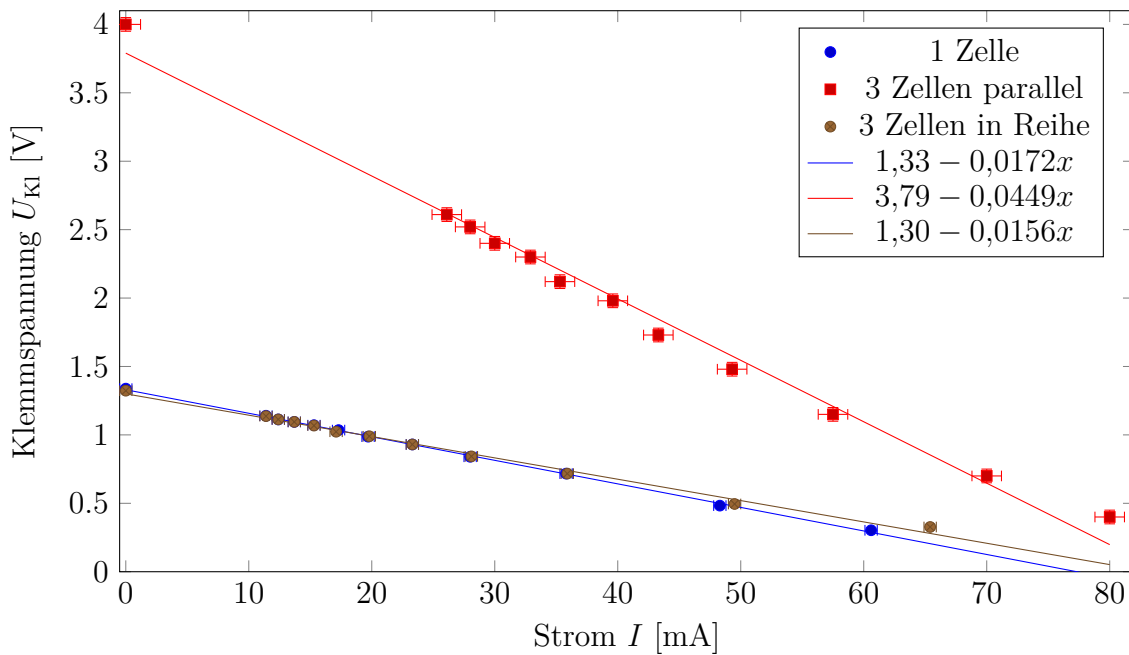


Abbildung 1: Klemmspannung U_{Kl} abhängig vom Strom I mit eingezeichnetem Fit

3 Aufgabe 2

Anhang von Gleichung (1.4) kann mithilfe der Werte für U_0 , R_i aus dem vorherigen Aufgabenteil die an den Verbraucher abgegebene Leistung P berechnet werden.

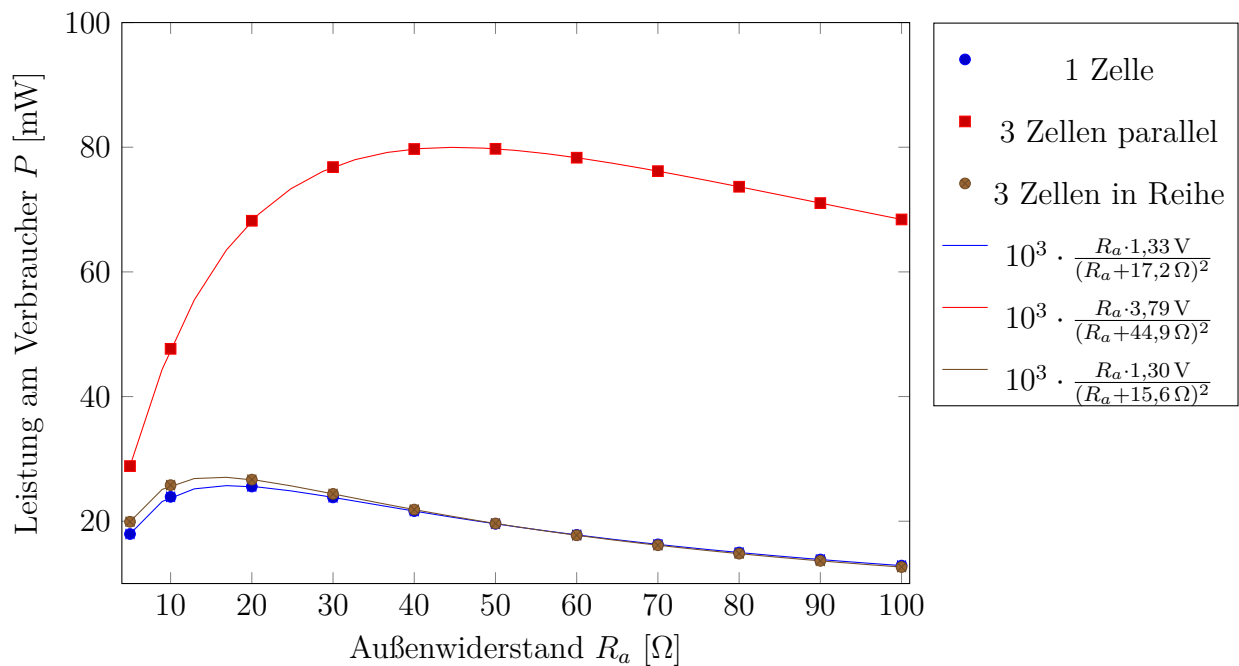


Abbildung 2: Leistung am Verbraucher abhängig vom Außenwiderstand

4 Versuchsreihe 2

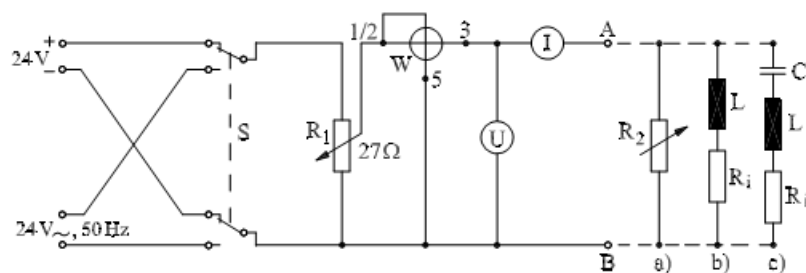


Abbildung 3: Schaltplan für die Aufgaben 4-8¹

In der zweiten Versuchsreihe wird die Zusammenhänge zwischen Spannung, Stromstärke und Leistung bei verschiedenen Bauteilen insbesondere bei Wechselstrom untersucht. Dazu wird eine Schaltung entsprechend Abbildung 3 aufgebaut bei der mithilfe des regelbaren Widerstandes R_1 verschiedene Spannungen angelegt werden können. Die Punkte A und B werden nacheinander durch verschiedene Verbraucher verbunden. Diese bestehen nacheinander aus einem ohmschen Widerstand, einem ohmschen Widerstand und einer Spule in Reihe, und einem ohmschen Widerstand, einer Spule und einem Kondensator in Reihe. Der ohmsche Widerstand im zweiten und dritten Verbraucher dient dabei der Vernachlässigung des Innenwiderstandes von Spule und Kondensator. Reguliert man nun die Spannung mittels R_1 , so kann Stromstärke und Leistung in Abhängigkeit davon gemessen werden.

4.1 Aufgabe 4

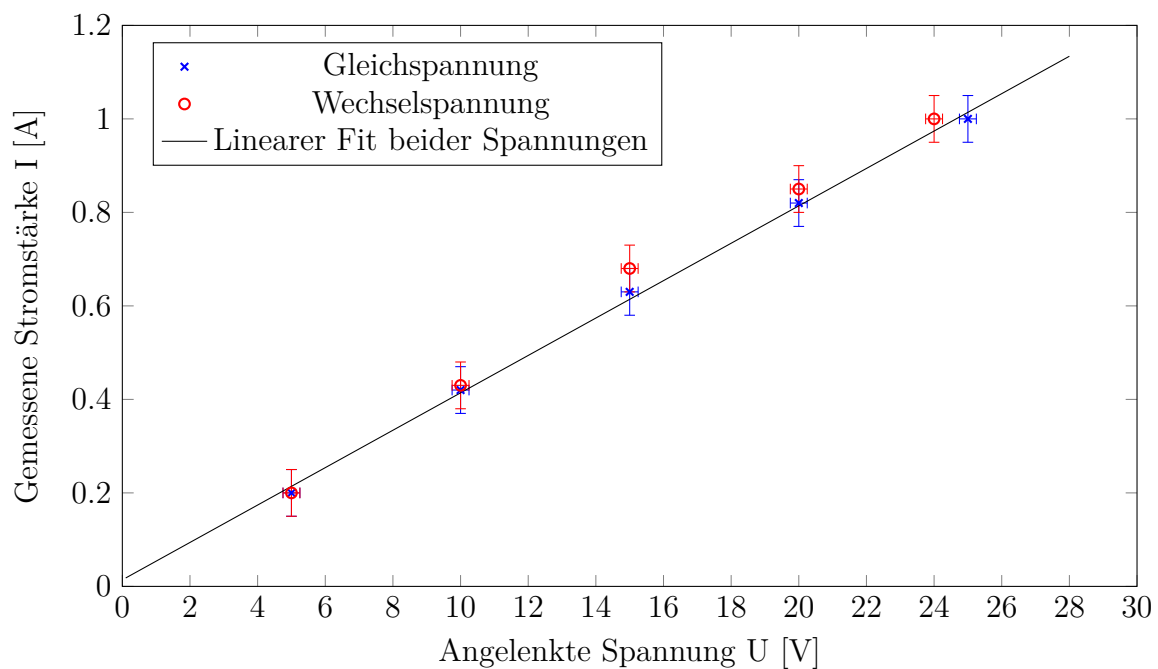
Da es keine weiteren Angaben zur Frequenz der Wechselspannung gab, wurde von den normalen 50 Hz ausgegangen.

In dem Aufbau wird kein Verbraucher angeschlossen um die Verlustleistung des Voltmeters zu bestimmen. Diese beträgt bei maximaler Spannung, $U_{\text{Gleich}} = 27V$ oder $U_{\text{Wechsel}} = 25,5V$, $P_{\text{verlust}} = 1W$ und nimmt bei sinkenden Spannungen weiter ab.

4.2 Aufgabe 5

An den Punkten A und B wird ein ohmscher Widerstand angeschlossen, für den bei Wechsel- und Gleichspannung die möglichen Messwerte bestimmt werden.

Spannungsart	Spannung U [V] $\pm 0,25$	Stromstärke I [A] $\pm 0,05$	Leistung P [W] $\pm 0,5$
Wechselspannung	24	1,00	23,7
	20	0,85	17,0
	15	0,68	9,8
	10	0,43	4,0
	5	0,20	1,0
Gleichspannung	25	1,00	24,5
	20	0,82	16,0
	15	0,63	9,0
	10	0,42	3,9
	5	0,20	0,6

Tabelle 5: Messwerte des ohmschen Widerstands**Abbildung 4:** Versuch mit ohmschen Widerstand (Spannung gegen Stromstärke)

In dem Diagramm wurde nur der Fit für Gleichspannung eingetragen, da sich dieser fast mit dem von der Wechselspannung deckt und so eine größere Übersichtlichkeit erreicht wurde.

Aufgrund des anscheinend sehr linearen Verlaufs der Messwerte für beide Spannungsarten und in Deckung mit der zu erwarteten Formel (1.20) wurde mit *gnuplot* nach dem *least-squares*-Verfahren die Werte der beiden Spannungsarten gegen die Funktion $f(x) = m \cdot x$ gefittet. Ausgabe:

Spannungsart	Variabel m	Unsicherheit
Gleichspannung	0,040	0,002
Wechselspannung	0,042	0,003

Tabelle 6: Linearer Fit zu Abbildung 4

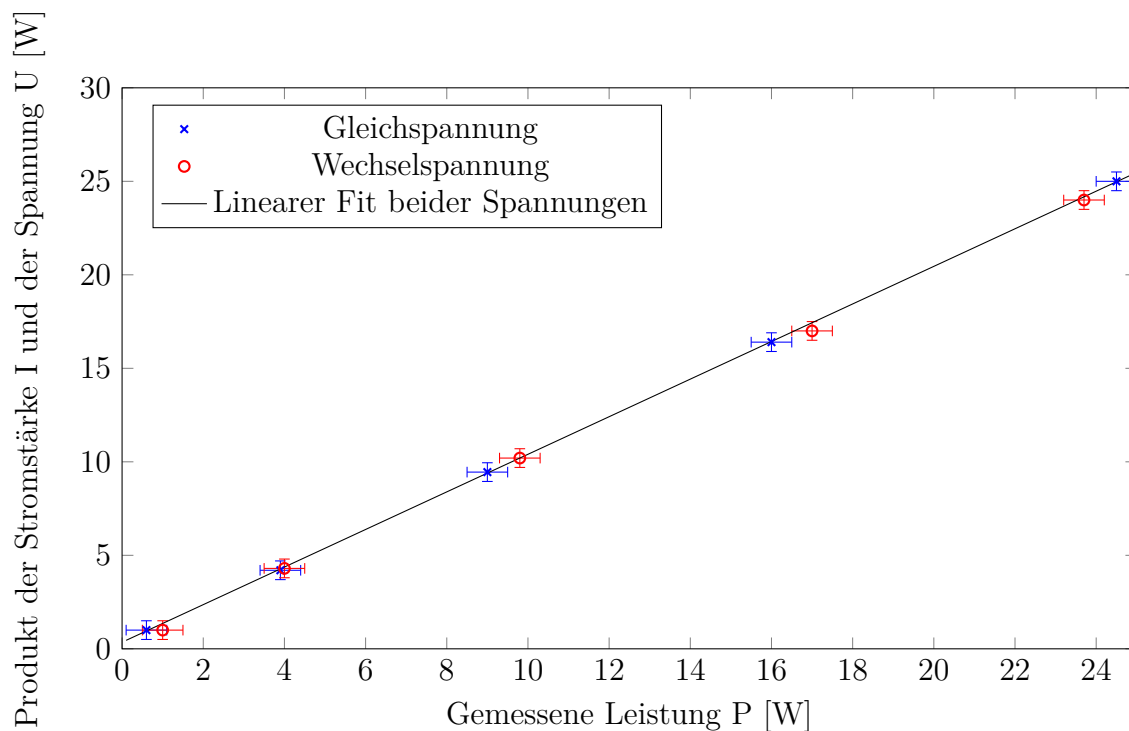


Abbildung 5: Versuch mit ohmschen Widerstand (Leistung gegen Produkt aus Spannung und Stromstärke)

In dem Diagramm wurde nur der Fit für Gleichspannung eingetragen, da sich dieser fast mit dem von der Wechselspannung deckt und so eine größere Übersichtlichkeit erreicht wurde. Der Fehler des Produktes von Stromstärke und Spannung wurde nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt.

Aufgrund des anscheinend linearen Verlaufs der Messwerte für beide Spannungsarten und in Deckung mit der zu erwarteten Formel 1.4 wurde mit *gnuplot* nach dem *least-squares*-Verfahren die Werte der beiden Spannungsarten gegen die Funktion $f(x) = m \cdot x + b$ gefittet. Ausgabe:

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varianz der Residuals
Gleichspannung	1,005	0,352	0,004
Wechselspannung	1,003	0,164	0,45

Tabelle 7: Linearer Fit zu Abbildung 5

4.3 Aufgabe 6

In diesem Versuchsteil wird eine Spule an den Punkten A und B angeschlossen (Aufbau b), und für Wechselspannung die Messwerte bestimmt.

Spannung U [V] $\pm 0,25$	Stromstärke I [A] $\pm 0,05$	Leistung P [W] $\pm 0,5$
25	0,85	16,2
20	0,67	10,8
15	0,50	6,0
10	0,33	2,5
5	0,20	1,0

Tabelle 8: Messwerte der Spule bei Wechselspannung

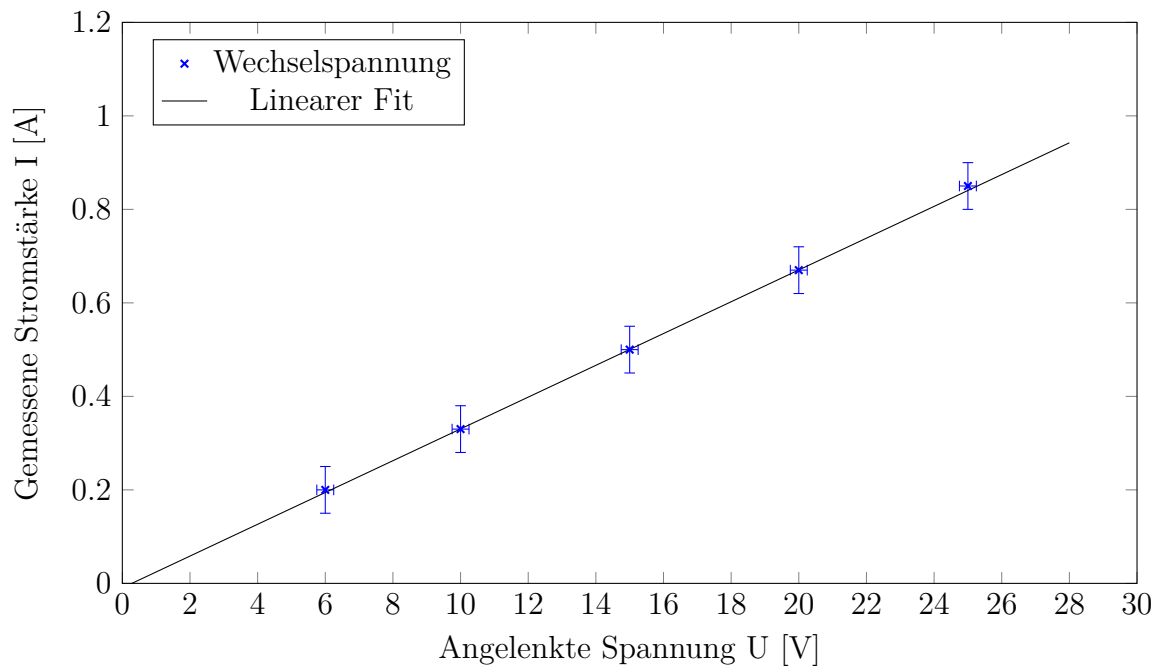


Abbildung 6: Versuch mit Spule (Spannung gegen Stromstärke)

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varianz der Residuals
Wechselspannung	0,034	-0,0096	$2,54 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 9: Linearer Fit zu Abbildung 6

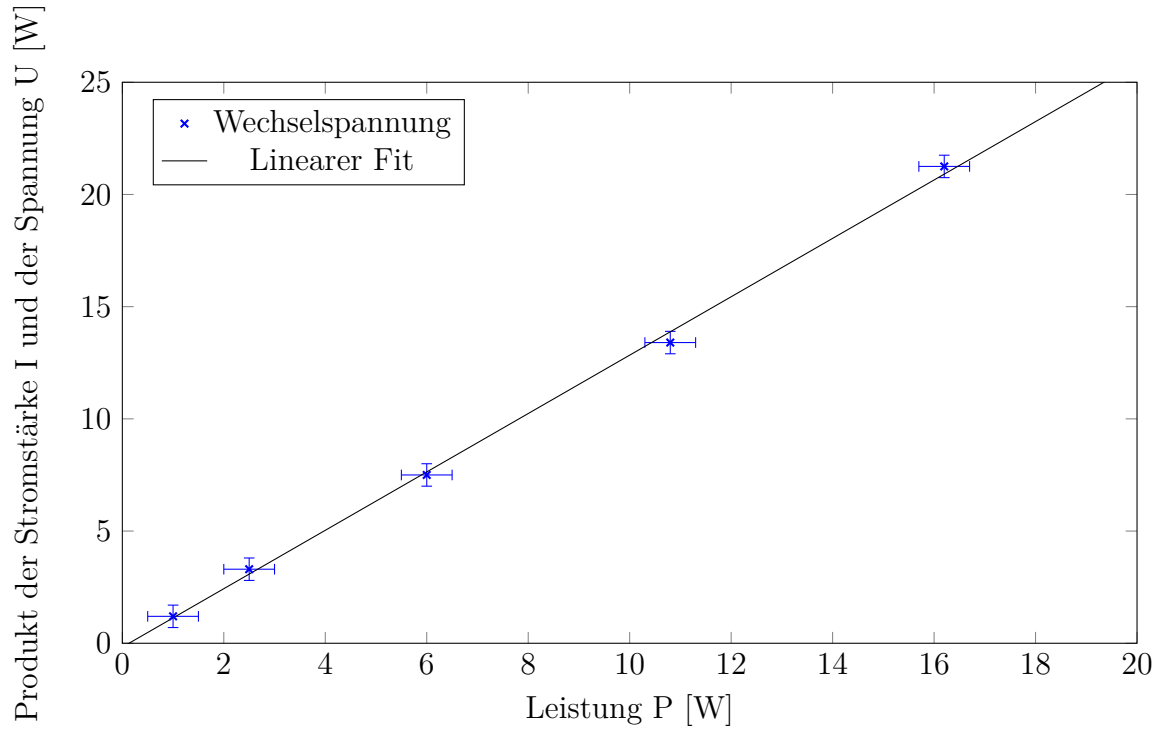


Abbildung 7: Versuch mit Spule (Leistung gegen Produkt aus Spannung und Stromstärke)

Der Fehler des Produktes von Stromstärke und Spannung wurde nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt.

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varians der Residuals
Wechselspannung	1,301	-0,171	0,14

Tabelle 10: Linearer Fit zu Abbildung 7

Aus dem Fit 10 ergibt sich, wenn man den b Achsenabschnitt, der aus Messungenauigkeiten folgt, vernachlässigt,

$$U \cdot I = 1,301 \cdot P. \quad (4.1)$$

Wenn man dies nun in (1.13) einsetzt und nach dem Phasenwinkel φ auflöst, erhält man

$$\varphi = \pm \arccos\left(\frac{1}{1,301}\right) \approx \pm 39,77^\circ. \quad (4.2)$$

Da es sich um eine Schaltung bestehend aus nur einer Spule handelt, kann man allgemein

sagen, dass die Stromstärke der Spannung folgt, woraus folgt, dass gilt

$$\varphi = 39,77^\circ. \quad (4.3)$$

Aus dem Fit 9 ergibt sich unter der Vernachlässigung von b

$$I = 0,034\Omega^{-1} \cdot U. \quad (4.4)$$

Wenn man dies nun in die Formel (1.24) einsetzt erhält man

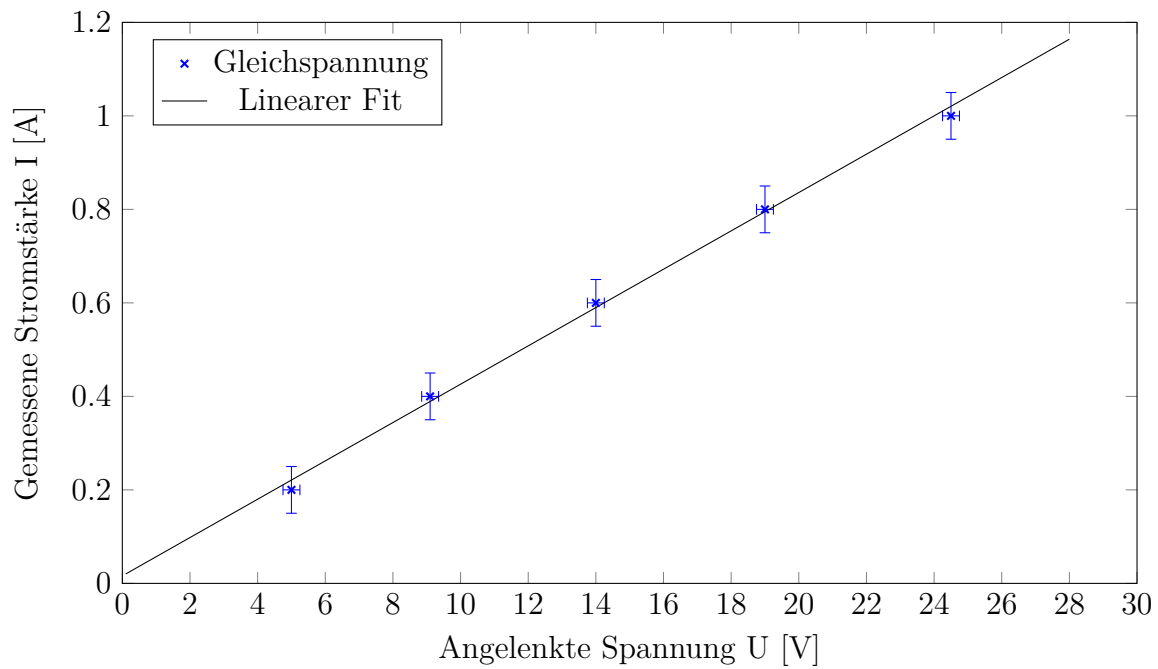
$$R_W = \frac{U}{I} \cos(\varphi) = \frac{U}{0,034\Omega^{-1} \cdot U} \cos(\varphi) = \frac{1}{0,034\Omega^{-1}} \cos(\varphi) = \frac{500}{17} \cos(\varphi)\Omega \approx 22,61\Omega \quad (4.5)$$

4.4 Aufgabe 7

In diesem Versuchsteil wird bei gleichem Aufbau wie in Aufgabe 6 eine Gleichspannung angelegt. Da der Wirkwiderstand der Spule bei Gleichstrom 0 wird, kann so der Innenwiderstand der Spule bestimmt werden.

Spannung U [V] $\pm 0,25$	Stromstärke I [A] $\pm 0,05$
24,5	1,0
19,0	0,8
14,0	0,6
9,1	0,4
5,0	0,2

Tabelle 11: Messwerte der Spule bei Wechselspannung

**Abbildung 8:** Versuch mit Spule

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varianz der Residuals
Gleichspannung	0,041	0,016	0,00035

Tabelle 12: Linearer Fit zu Abbildung 8

Aus dem Fit 12 ergibt sich unter der Vernachlässigung von b

$$I = 0,041\Omega^{-1} \cdot U. \quad (4.6)$$

Wenn man dies nun in die Formel 1.20 einsetzt erhält man

$$R_i = \frac{U}{I} = \frac{U}{0,041\Omega^{-1} \cdot U} = \frac{1}{0,041\Omega^{-1}} = \frac{1000}{41}\Omega = 24,39024\Omega \quad (4.7)$$

Aus der Formel (1.23) folgt

$$L = \sqrt{\frac{|Z|^2 - R^2}{\omega^2}} \approx 0,052 \text{ H} \quad (4.8)$$

4.5 Aufgabe 8

In diesem Versuchsteil wird zusätzlich ein Kondensator in Reihe geschaltet. Daraufhin wird Wechselspannung angelegt, und die Stromstärke und Leistung abhängig davon gemessen.

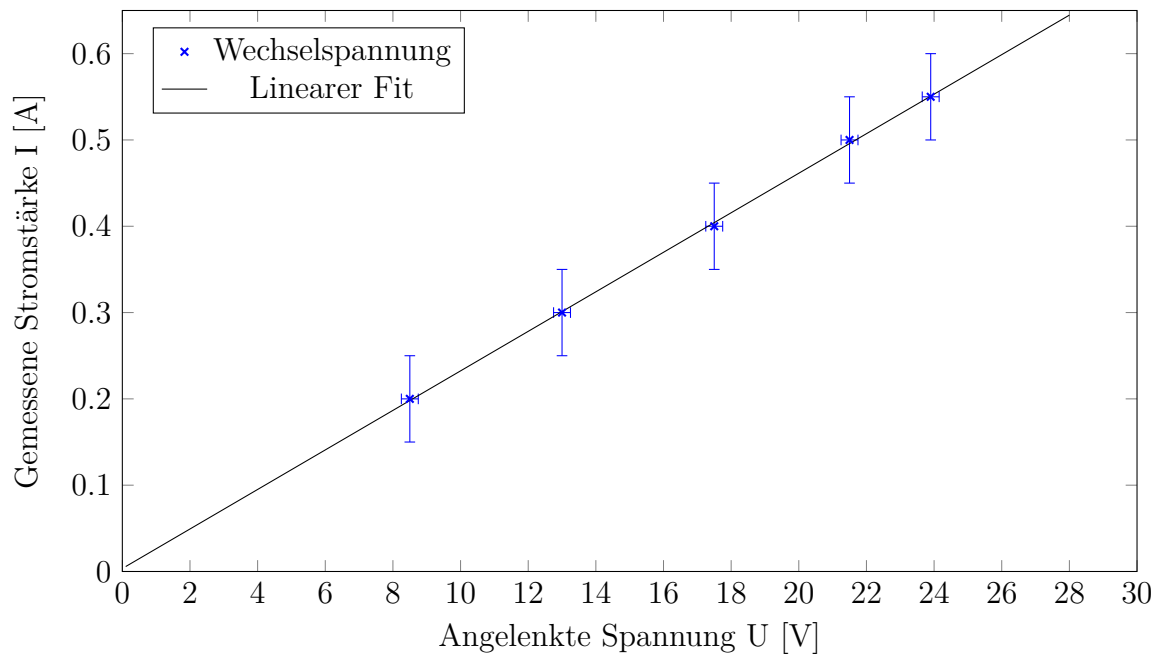


Abbildung 9: Versuch mit Spule und Kondensator (Spannung gegen Stromstärke)

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varianz der Residuals
Wechselspannung	0,023	0,003	$1,36 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 13: Linearer Fit zu Abbildung 9

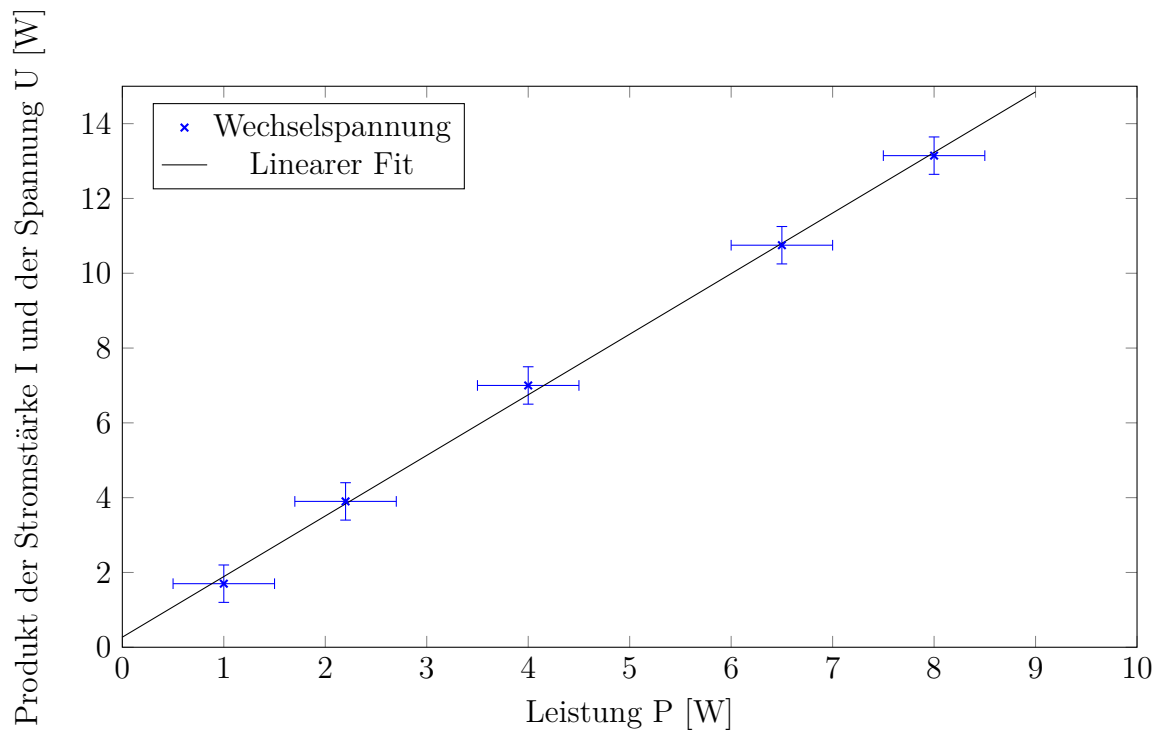


Abbildung 10: Versuch mit Spule (Leistung gegen Produkt aus Spannung und Stromstärke)

Der Fehler des Produktes von Stromstärke und Spannung wurde nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt.

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varianz der Residuals
Wechselspannung	1,62	0.27	0,038

Tabelle 14: Linearer Fit zu Abbildung 10

Der Phasenwinkel lässt sich analog zu Aufgabe 6 berechnen

$$\varphi = \arccos(1,62^{-1}) = 51,88^\circ. \quad (4.9)$$

Ebenso kann man den Widerstand $|Z|$ so wie bei Aufgabe 6 berechnen.

$$|Z| = \frac{1}{0,023\Omega^{-1}} = \frac{1000}{23}\Omega \approx 43,48\Omega \quad (4.10)$$

Damit kann nun die Kapazität des Kondensators berechnet werden

$$C = \frac{1}{\omega^2 L + \omega \sqrt{|Z|^2 - R^2}} = 60,72 \mu\text{F} \quad (4.11)$$

5 Diskussion

5.1 Versuchsreihe 1

Im ersten Versuch wurde überprüft, ob das Modell des Innenwiderstandes das reale Verhalten eines Akkumulators als Spannungsquelle gut beschreiben kann. Der offensichtlich lineare Zusammenhang in Abb. 1 bestätigt dies für alle drei Messreihen. Allerdings wurde im Versuch ein Vorwiderstand vor den Akku geschaltet, um den Effekt deutlicher sichtbar zu machen. Anhand des Farbcodes wurde ermittelt, dass dieser bei $R_V = 18 \Omega \pm 1 \%$ liegt. Die relative Abweichung zum gemessenen Innenwiderstand beträgt

- Für eine Zelle: $(18 \Omega - 17,2 \Omega) / 18 \Omega \approx 4,4 \%$
- Für drei Zellen parallel: $(18 \Omega - 44,9/3 \Omega) / 18 \Omega \approx 16,85 \%$
- Für drei Zellen in Reihe: $(18 \Omega - 15,6 \Omega) / 18 \Omega \approx 13,3 \%$

Es fällt auf, dass die gemessenen Innenwiderstände systematisch unterhalb des erwarteten Wertes liegen. Das Modell scheint also die Realität bei einer Zelle sehr gut zu beschreiben, während es bei mehreren Zellen ungenauer wird.

Die an den Verbraucher abgegebene Leistung scheint nach Abb. 2 sehr gut durch den Zusammenhang aus Gleichung (1.4) beschrieben zu werden. Da der Graph der Funktion aus Gleichung (1.4) sehr gut mit den Messpunkten übereinstimmt, liegt auch das Maximum der Leistung beim berechneten Außenwiderstand $R_a = R_i$.

5.2 Versuchsreihe 2

Zumindest qualitativ ließen sich in allen Versuchsteilen die theoretisch ermittelten Zusammenhänge zeigen. Bei jeder Messreihe ließ sich Spannung gegen Stromstärke sowie Produkt aus Spannung und Stromstärke ohne Ausreißer und ohne größere Fehler linear gegeneinander auftragen. Jedoch fehlen bei den meisten Ergebnissen die Referenzwerte

um festzustellen, ob die Werte auch qualitativ passen. Der einzige gegebene Referenzwert, die Kapazität des Kondensators, stimmt jedoch sehr gut mit unseren Ergebnissen überein. Der von uns bestimmte Wert $60,72\,\mu\text{F}$ weicht von dem angegebenen Wert nur um etwas mehr als 1 % ab. Dennoch könnte dieses gute Ergebnis durch mehrere sich aufhebende Fehler begünstigt sein.

Literatur

Donath, Markus und Anke Schmidt. *Anleitung zu den Experimentellen Übungen zur Mechanik und Elektrizitätslehre*. Auflage Wintersemester 2014/2015. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Physikalisches Institut, Oktober 2014.