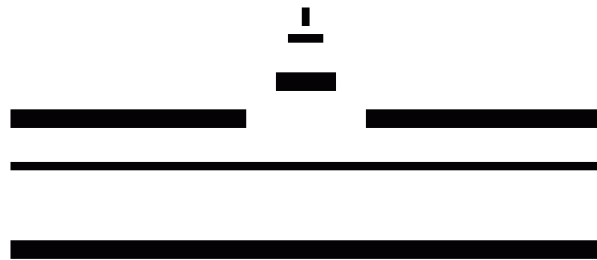


# Versuchsprotokoll E6

## Elektrische Resonanz

7.01.2015



Alexander Schlüter, Josh Wewers, Frederik Edens

Gruppe 15/mi

alx.schlueter@gmail.com

joshw@muenster.de

f\_eden01@wwu.de

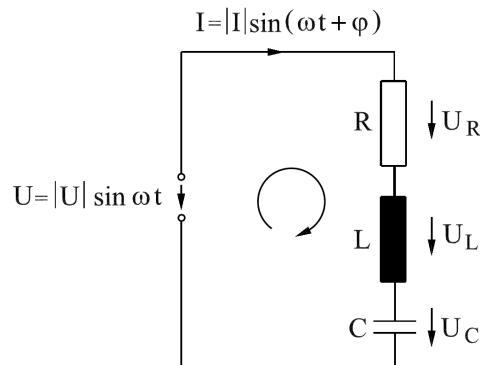
# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einführung</b>	<b>1</b>
1.1. Serienresonanzkreis . . . . .	1
1.2. Parallelresonanzkreis . . . . .	2
1.3. Güte . . . . .	3
<b>2. Versuch: Serienresonanzkreis</b>	<b>3</b>
<b>3. Versuch: Parallelresonanzkreis</b>	<b>4</b>
3.1. $10k\Omega$ Widerstand . . . . .	5
3.2. $\infty$ Widerstand . . . . .	8
3.3. $2k\Omega$ Widerstand . . . . .	11
3.4. Innenwiderstand der Spule . . . . .	12
<b>4. Diskussion</b>	<b>12</b>
4.1. Parallelresonanzkreis . . . . .	12
<b>A. Anhang</b>	<b>13</b>
A.1. Fehlerrechnung . . . . .	13
A.1.1. Stromstärke . . . . .	13
A.2. Herleitung . . . . .	13

# 1. Einführung

Resonanzkreise werden im allgemeinen als Frequenzfilter genutzt, um das Empfangen von nur speziellen Frequenzen zu ermöglichen.

## 1.1. Serienresonanzkreis



**Abbildung 1:** Schaltbild des Serienresonanzkreises

Bei dem Serienresonanzkreis sind Ohmsche Widerstände, Spulen und Kondensatoren in Reihe geschaltet. Bei der Berechnung werden dazu alle Ohmschen Widerstände und Innenwiderstände zu einem Gesamtwiderstand zusammengefasst und analog auch die Kondensatoren und Spulen zu Gesamtkapazitäten und Gesamtinduktivitäten zusammengefasst. Im einfachsten Fall ergibt sich das Schaltbild Abbildung 1. Diese Schaltung wird mit der komplexen Betrachtung des Wechselstroms berechnet. Die komplexe Impedanz setzt sich bei Reihenschaltung additiv zusammen. Es gilt

$$Z_G = Z_R + Z_L + Z_C = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (1.1)$$

Außerdem gilt analog zu Ohmschen Gesetz im Wechselstromkreis

$$|I| = \frac{|U|}{|Z_G|} = \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (1.2)$$

Die Resonanz ist bei maximaler Stromstärke erreicht. Da der Ohmsche Widerstand und die Spannung bezüglich der Frequenz konstant sind ist dies erreicht für

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.3)$$

und es gilt

$$|I_{max}| = |I(\omega_0)| = \frac{|U|}{R} \quad (1.4)$$

Kennt man nun die Kapazitäten  $C_1, C_2$ , für die  $|I| = \frac{|I_{max}|}{\sqrt{2}}$  gilt kann man daraus den Ohmschen Widerstand errechnen. In diesem Fall gilt

$$|Z| = \sqrt{2}|Z_{min}| = \sqrt{2}R^2 \stackrel{!}{=} \sqrt{R^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_{1,2}}\right)^2} \quad (1.5)$$

$$\Rightarrow R^2 = \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_{1,2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\omega_0 C_0} - \frac{1}{\omega_0 C_{1,2}}\right)^2 \quad (1.6)$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\omega_0} \left| \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_{1,2}} \right| = \frac{1}{2\omega_0} \left( \left| \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right| + \left| \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_2} \right| \right) \quad (1.7)$$

$$= \frac{1}{2\omega_0} \left| \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) - \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_2} \right) \right| = \frac{1}{2\omega_0} \left| \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right| \quad (1.8)$$

## 1.2. Parallelresonanzkreis

Beim Parallelresonanzkreis werden analog zum Serienresonanzkreis ohmscher Widerstand, Kondensator und Spule parallel geschaltet. Daher müssen zur Bestimmung der Gesamtimpedanz die Kehrwerte der Impedanzen addiert werden

$$\frac{1}{|Z|} = |Y| = \left| \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C \right| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad (1.9)$$

Zudem gilt

$$|I| = \frac{|U|}{|Z|} = |Y||U| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} U \quad (1.10)$$

Analog zur Serienresonanzschaltung wird  $|Y_{min}|$  erreicht für

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.11)$$

### 1.3. Güte

Damit eine Schaltung möglichst gut als Frequenzfilter genutzt werden kann, ist es wichtig, dass der Peak bei dieser Frequenz möglichst schmal ist. Daher bezeichnet man als Güte  $Q$  die Überhöhung des Resonanzpeaks.

$$|U_{L,max}| = |U_{C,max}| = Q|U| \quad \text{nach Definition von } Q \quad (1.12)$$

Da Höhe und Breite des Peaks im direkten Zusammenhang stehen, lässt sich die Güte auch durch die Halbwertsbreite der Resonanzkurve bestimmen. Es gilt

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (1.13)$$

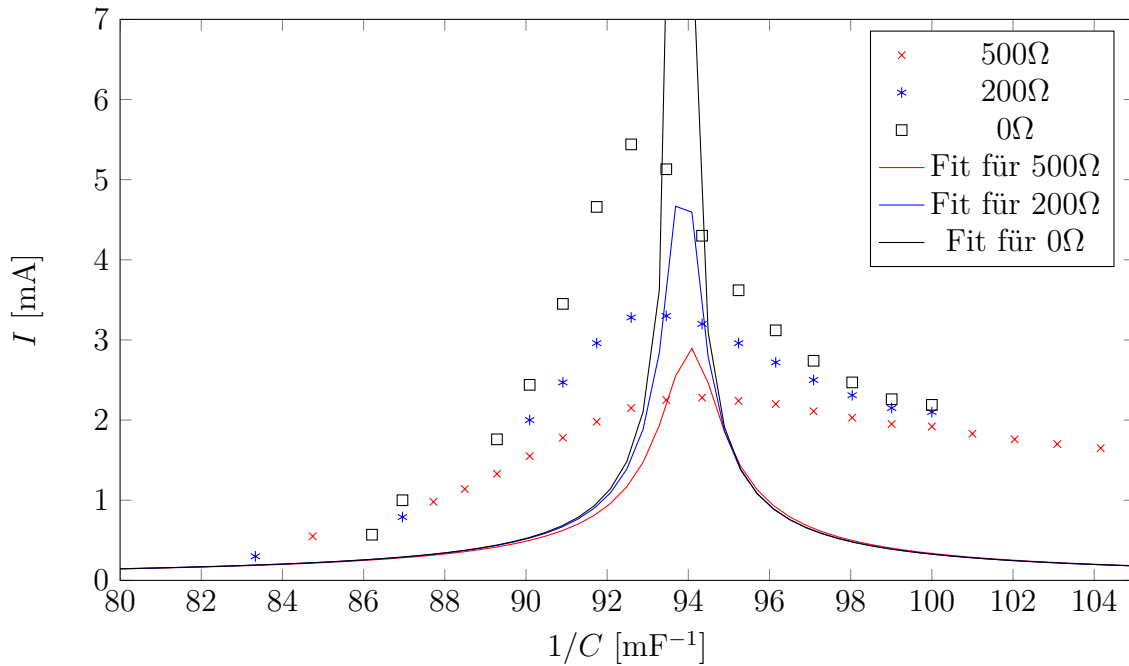
## 2. Versuch: Serienresonanzkreis

Wir überprüfen den aus Gleichung (1.2) erwarteten Zusammenhang, indem wir die obigen Daten mit gnuplot gegen die Funktion  $I(C)$  fitten. Wir erhalten:

Parameter	für $500\,\Omega$	für $200\,\Omega$	für $0\,\Omega$
$R$	$(694 \pm 326)\,\Omega$	$(385 \pm 283)\,\Omega$	$(30 \pm 2041)\,\Omega$
$L$	$(94,06 \pm 0,53)\,\text{H}$	$(93,88 \pm 0,24)\,\text{H}$	$(93,84 \pm 0,16)\,\text{H}$

**Tabelle 1:** Fit

Es fällt eine gute Übereinstimmung in den Werten für  $L$  auf. Dagegen haben die  $R$ -Werte jeweils einen so hohen Fehler, dass sie fast unbrauchbar sind.



**Abbildung 2:** Fit der Stromstärke in Abhängigkeit des Kehrwertes der Kapazität

Obwohl die Werte direkt gegen den aus der Theorie erwarteten Zusammenhang Gleichung (1.2) gefittet wurden, ist ein großer Unterschied zwischen Fit und Messwerten erkennbar. Der Ort des Maximums wird vom Fit noch recht gut getroffen, jedoch weichen die Höhe des Maximums sowie der Abfall stark ab: Die Messwerte fallen deutlich langsamer als der Fit zu beiden Seiten des Maximums. Auch die aus der Theorie erwartete Symmetrie ist bei unseren Messwerten nicht gegeben. Wir nehmen an, dass die regelbare Kapazität zu stark fehleranfällig war. Auch während der Durchführung ist aufgefallen, dass oft nicht der eingestellte Wert dem Tatsächlichen entsprach, und sich dies erst besserte wenn man den Regler festhielt um das Einrasten zu erzwingen.

## 2.1. Innenwiderstand der Spule

Mit einem Multimeter lies sich ein Widerstand von  $(52,2 \pm 0,1) \Omega$  bestimmen. Jedoch ist kein Vergleich mit den Ergebnissen der vorherigen Versuchen möglich, da dort eine zu große Unsicherheit angenommen werden musste. Zumindest stimmte aber die Größenordnung der vorherigen Ergebnisse.

### 3. Versuch: Parallelresonanzkreis

An dem Aufbau 3 wird eine Spannung von  $U_{\approx} = \pm 5V$  mit einer Frequenz von  $F = (1 \pm 0,005)kHz$  angelegt und es wird der Spannungsabfall am  $10\Omega$  Widerstand für unterschiedliche Kapazitäten und Widerstände  $R_p$  bestimmt. Der Fehler der Kapazität war mit 1% der eingestellten Kapazität gegeben und der Fehler der Spannung ergab sich aus der Genauigkeit des Messgeräts. Die Stromstärke konnte nun nach der Formel

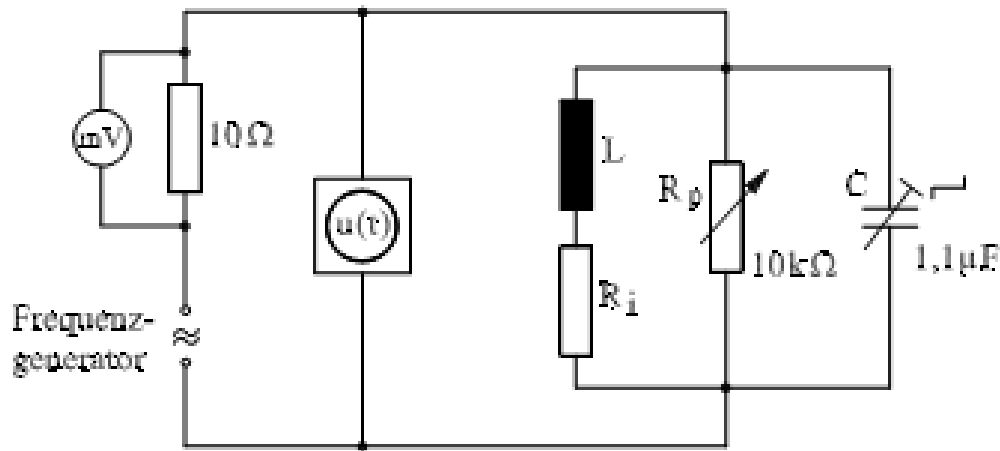


Abbildung 3: Aufbau eines Parallelresonanzkreises

$I = \frac{U}{R}$  berechnet werden. Mit der gleichen Formel wurde mit Hilfe der Gauß'sches Fehlerfortpflanzung der Fehler der Stromstärke bestimmt (Siehe Anhang).

#### 3.1. $10k\Omega$ Widerstand

Im folgenden wurde die Werte von C und I im Diagramm aufgetragen.

Dem anscheinend polynomischen Verlaufs nach wurden die Messwerte beider Prozesse zusammen gegen die Funktion  $I(C) = a \cdot x^6 + b \cdot x^5 + c \cdot x^4 + d \cdot x^3 + e \cdot x^2 + f \cdot x + g$  mit *gnuplot* nach dem *least-squares*-Verfahren gefittet.

Kapazität C [ $\mu\text{F}$ ]	Fehler [ $\mu\text{F}$ ]	Spannung U [ $\text{mV}$ ]	Fehler [ $\text{mV}$ ]	Stromstärke I [ $\text{mA}$ ]	Fehler [ $\text{mA}$ ]
0,000	0,000	62,900	0,100	6,290	0,315
0,050	0,001	52,100	0,100	5,210	0,261
0,100	0,001	41,500	0,100	4,150	0,208
0,147	0,001	31,500	0,100	3,150	0,158
0,150	0,002	30,800	0,100	3,080	0,154
0,180	0,002	24,500	0,100	2,450	0,123
0,210	0,002	18,300	0,100	1,830	0,092
0,240	0,002	12,600	0,100	1,260	0,064
0,253	0,003	10,500	0,100	1,050	0,053
0,270	0,003	8,400	0,100	0,840	0,043
0,289	0,003	7,400	0,100	0,740	0,038
0,300	0,003	7,900	0,100	0,790	0,041
0,321	0,003	10,500	0,100	1,050	0,053
0,330	0,003	12,000	0,100	1,200	0,061
0,360	0,004	17,800	0,100	1,780	0,090
0,390	0,004	24,000	0,100	2,400	0,120
0,420	0,004	30,500	0,100	3,050	0,153
0,425	0,004	31,500	0,100	3,150	0,158
0,450	0,005	37,000	0,100	3,700	0,185
0,500	0,005	47,600	0,100	4,760	0,238
0,900	0,009	132,200	0,100	13,220	0,661

**Tabelle 2:** Messwerte mit einem  $10k\Omega$  Widerstand

Variabel	Wert	Fehler
a	14329,9	$\pm 4004$
b	-24283,7	$\pm 6033$
c	14789,3	$\pm 3449$
d	-3881,36	$\pm 930$
e	429,052	$\pm 118,6$
f	-37,299	$\pm 6,064$
g	6,311	$\pm 0,088$

**Tabelle 3:** Linearer Fit zu Abbildung 4

Daraus ergibt sich ein Minimum von

$$I_{\min} = (0,702 \pm 0,035)\text{mA} \Rightarrow I_{\min} \cdot \sqrt{2} = (0,993 \pm 0,053)\text{mA} \quad (3.1)$$



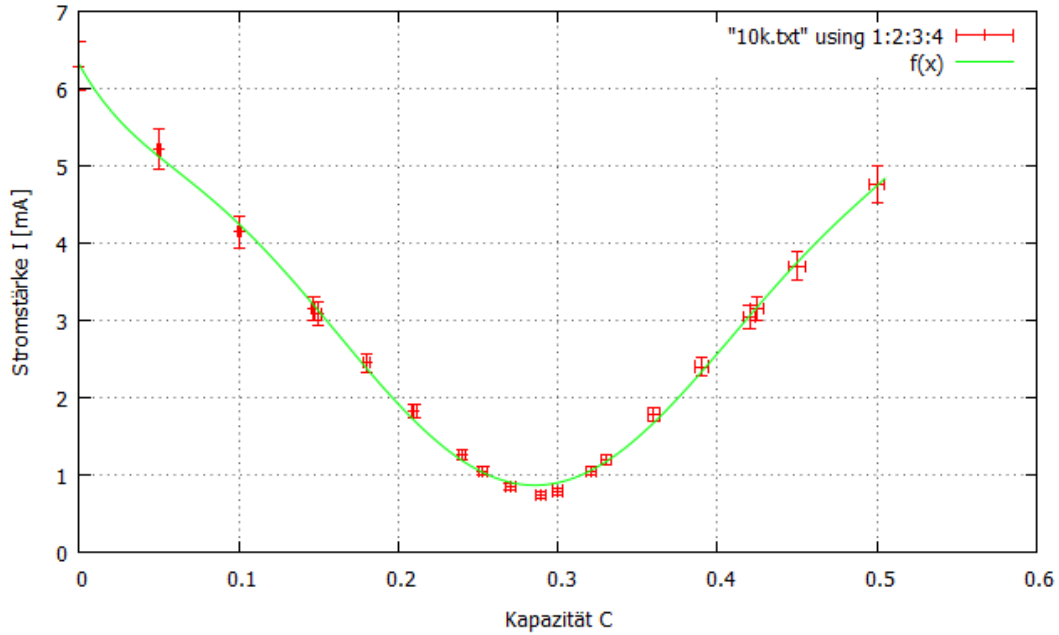


Abbildung 4: 10kΩ Widerstand

mit  $C_{min} = 0,285\mu F$  und  $C_1 = 0,257\mu F$  und  $C_2 = 0,314\mu F$  mit jeweils 1% Fehler.

Für die Spule lässt sich nun sagen, dass

$$L = \frac{1}{(2\pi f)^2 \cdot C} = 88,88mH \quad (3.2)$$

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{2\pi^2 f^3 C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{2\pi^2 f^2 C^2}\right)^2} = 1,24mH \quad (3.3)$$

So ergibt sich für die Spule  $L = (88,88 \pm 1,24)mH$ .

Der Verlustwiderstand der Schaltung ergibt sich aus

$$R_1 = \frac{1}{2\pi f(C_2 - C_1)} = 2792,192\Omega \quad (3.4)$$

$$\Delta R_1 = \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{\pi f^2(C_2 - C_1)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C_2}{\pi f(C_2 - C_1)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C_1}{\pi f(C_2 - C_1)}\right)^2} = 27,82\Omega \quad (3.5)$$

### 3.2. $\infty$ Widerstand

Kapazität C [ $\mu\text{F}$ ]	Fehler [ $\mu\text{F}$ ]	Spannung U [mV]	Fehler [mV]	Stromstärke I [mA]	Fehler [mA]
0,000	0,000	63,000	0,100	6,300	0,330
0,080	0,001	45,600	0,100	4,560	0,249
0,110	0,001	39,200	0,100	3,920	0,220
0,140	0,001	32,600	0,100	3,260	0,191
0,170	0,002	26,000	0,100	2,600	0,164
0,200	0,002	19,500	0,100	1,950	0,140
0,230	0,002	13,100	0,100	1,310	0,120
0,260	0,003	7,100	0,100	0,710	0,106
0,269	0,003	5,600	0,100	0,560	0,104
0,289	0,003	4,000	0,100	0,400	0,102
0,305	0,003	5,600	0,100	0,560	0,104
0,320	0,003	8,300	0,100	0,830	0,108
0,350	0,004	14,600	0,100	1,460	0,124
0,380	0,004	21,100	0,100	2,110	0,145
0,410	0,004	27,900	0,100	2,790	0,172
0,440	0,004	34,400	0,100	3,440	0,199
0,470	0,005	41,000	0,100	4,100	0,228
0,500	0,005	47,400	0,100	4,740	0,257

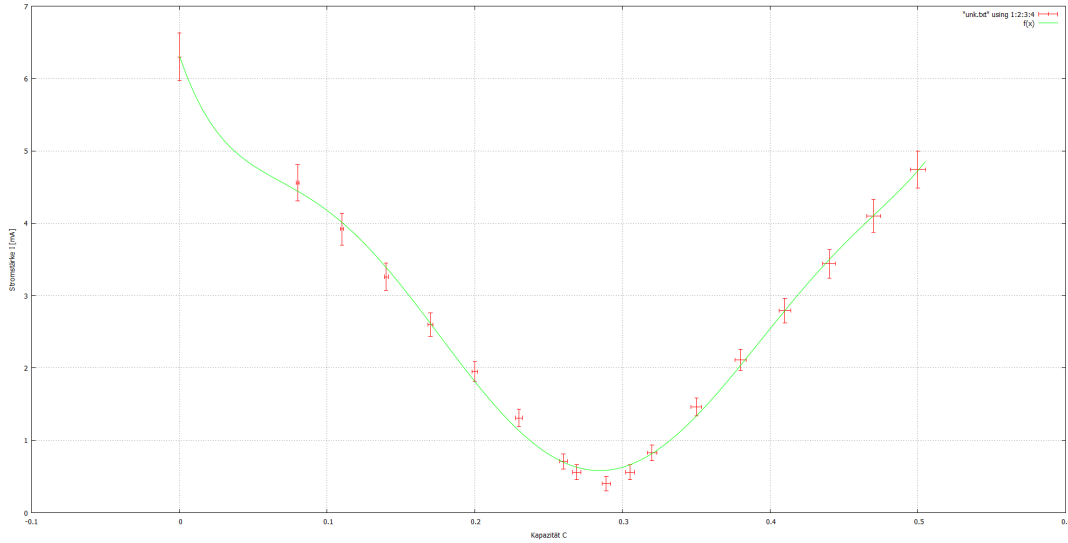
**Tabelle 4:** Messwerte mit einem unendlichem Widerstand

Im folgenden wurde die Werte von C und I im Diagramm aufgetragen.

Dem anscheinend polynomischen Verlaufs nach wurden die Messwerte beider Prozesse zusammen gegen die Funktion  $I(C) = a \cdot x^6 + b \cdot x^5 + c \cdot x^4 + d \cdot x^3 + e \cdot x^2 + f \cdot x + g$  mit *gnuplot* nach dem *least-squares*-Verfahren gefittet.

Variabel	Wert	Fehler
a	27020,7	$\pm 6518$
b	-44927,8	$\pm 10090$
c	27579,5	$\pm 5963$
d	-7512,98	$\pm 1669$
e	901,99	$\pm 219,9$
f	-59,7594	$\pm 11,03$
g	6,309	$\pm 0,122$

**Tabelle 5:** Linearer Fit zu Abbildung 5

Abbildung 5:  $\infty\Omega$  Widerstand

Daraus ergibt sich ein Minimum von

$$I_{min} = (0,580 \pm 0,037)mA \Rightarrow I_{min} \cdot \sqrt{2} = (0,820 \pm 0,047)mA \quad (3.6)$$

mit  $C_{min} = 0,285\mu F$  und  $C_1 = 0,25\mu F$  und  $C_2 = 0,32\mu F$  mit jeweils 1% Fehler.

Für die Spule lässt sich nun sagen, dass

$$L = \frac{1}{(2\pi f)^2 \cdot C} = 88,88mH \quad (3.7)$$

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{2\pi^2 f^3 C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{2\pi^2 f^2 C^2}\right)^2} = 1,24mH \quad (3.8)$$

So ergibt sich für die Spule  $L = (88,88 \pm 1,24)mH$ .

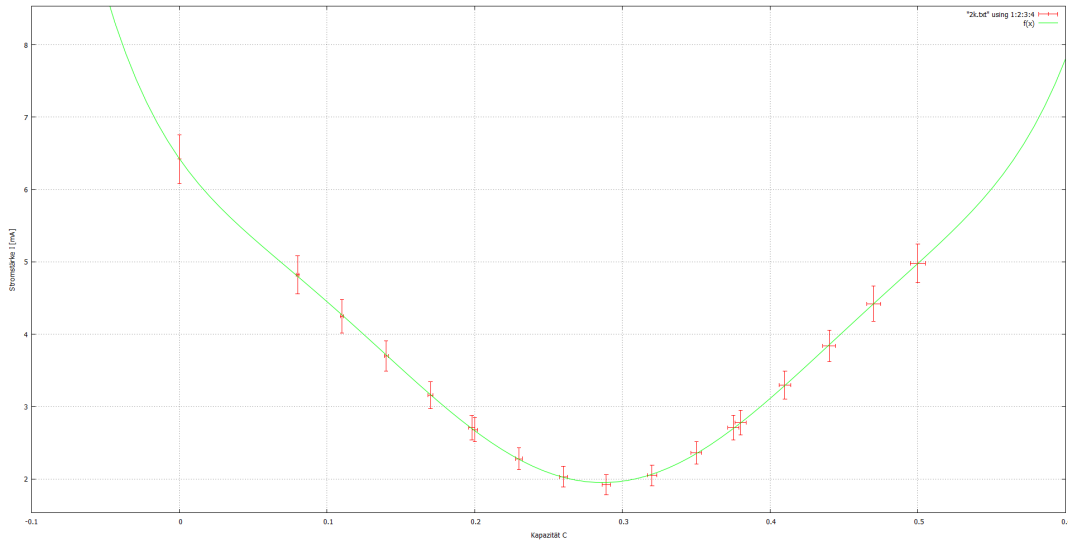
Der Verlustwiderstand der Schaltung ergibt sich aus

$$R_1 = \frac{1}{2\pi f(C_2 - C_1)} = 2273,642\Omega \quad (3.9)$$

$$\Delta R_1 = \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{\pi f^2(C_2 - C_1)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C_2}{\pi f(C_2 - C_1)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C_1}{\pi f(C_2 - C_1)}\right)^2} = 29,00\Omega \quad (3.10)$$

Kapazität C [ $\mu\text{F}$ ]	Fehler [ $\mu\text{F}$ ]	Spannung U [mV]	Fehler [mV]	Stromstärke I [mA]	Fehler [mA]
0,000	0,000	64,200	0,100	6,420	0,336
0,080	0,001	48,200	0,100	4,820	0,261
0,110	0,001	42,500	0,100	4,250	0,235
0,140	0,001	37,000	0,100	3,700	0,210
0,170	0,002	31,600	0,100	3,160	0,187
0,198	0,002	27,100	0,100	2,710	0,168
0,200	0,002	26,800	0,100	2,680	0,167
0,230	0,002	22,800	0,100	2,280	0,152
0,260	0,003	20,300	0,100	2,030	0,142
0,289	0,003	19,200	0,100	1,920	0,139
0,320	0,003	20,500	0,100	2,050	0,143
0,350	0,004	23,600	0,100	2,360	0,155
0,375	0,004	27,100	0,100	2,710	0,168
0,380	0,004	27,800	0,100	2,780	0,171
0,410	0,004	33,000	0,100	3,300	0,193
0,440	0,004	38,400	0,100	3,840	0,216
0,470	0,005	44,200	0,100	4,420	0,243
0,500	0,005	49,800	0,100	4,980	0,268

**Tabelle 6:** Messwerte mit einem  $2k\Omega$  Widerstand

Abbildung 6:  $2k\Omega$  Widerstand

### 3.3. $2k\Omega$ Widerstand

Im folgenden wurde die Werte von  $C$  und  $I$  im Diagramm aufgetragen.

Dem anscheinend polynomischen Verlaufs nach wurden die Messwerte beider Prozesse zusammen gegen die Funktion  $I(C) = a \cdot x^6 + b \cdot x^5 + c \cdot x^4 + d \cdot x^3 + e \cdot x^2 + f \cdot x + g$  mit *gnuplot* nach dem *least-squares*-Verfahren gefittet.

Variabel	Wert	Fehler
a	6919,65	$\pm 909,9$
b	-11829,1	$\pm 1414$
c	7273,85	$\pm 838,5$
d	-1880,89	$\pm 235,2$
e	220,707	$\pm 30,92$
f	-29,17	$\pm 1,547$
g	6,42	$\pm 0,017$

Tabelle 7: Linearer Fit zu Abbildung 6

Daraus ergibt sich ein Minimum von

$$I_{min} = (1,95 \pm 0,140)mA \Rightarrow I_{min} \cdot \sqrt{2} = (2,7577 \pm 0,160)mA \quad (3.11)$$

mit  $C_{min} = 0,285\mu F$  und  $C_1 = 0,194\mu F$  und  $C_2 = 0,38\mu F$  mit jeweils 1% Fehler.

Für die Spule lässt sich nun sagen, dass

$$L = \frac{1}{(2\pi f)^2 \cdot C} = 88,88mH \quad (3.12)$$

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{2\pi^2 f^3 C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{2\pi^2 f^2 C^2}\right)^2} = 1,24mH \quad (3.13)$$

So ergibt sich für die Spule  $L = (88,88 \pm 1,24)mH$ .

Der Verlustwiderstand der Schaltung ergibt sich aus

$$R_1 = \frac{1}{2\pi f(C_2 - C_1)} = 855,67\Omega \quad (3.14)$$

$$\Delta R_1 = \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{\pi f^2(C_2 - C_1)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C_2}{\pi f(C_2 - C_1)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C_1}{\pi f(C_2 - C_1)}\right)^2} = 8,56\Omega \quad (3.15)$$

### 3.4. Innenwiderstand der Spule

Bei der direkten Bestimmung des Innenwiderstands der Spule mit Hilfe des Multimeters ergab sich

$$R_{innen} = (18,9 \pm 0,1)\Omega \quad (3.16)$$

Bei der Bestimmung aus den Resonanzkurven nutzt man den Umstand, dass bei  $R_p = \infty$  gilt

$$R_i = \frac{(2\pi f)^2 L^2}{R} = 31,186 \quad (3.17)$$

## 4. Diskussion

### 4.1. Parallelresonanzkreis

Die Werte für die Induktivität der Spule stimmten bei allen Messungen überein, es gab nur Unterschiede außerhalb des Messgenauigkeit. Die Werte für den Innenwiderstand der Spule hingegen weichen deutlich von einander ab. Dies liegt nicht mehr im Rahmen der Messungenauigkeiten und ist auf eine Erwärmung der Spule oder andere Einflüsse zurückzuführen.

## A. Anhang

### A.1. Fehlerrechnung

#### A.1.1. Stromstärke

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U \cdot 5\% \cdot R}{R^2}\right)^2} \quad (\text{A.1})$$

### A.2. Herleitung

$$\begin{aligned} |I_{min}| \sqrt{2} &= \frac{|U|}{R} \sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \cdot |U| \\ \Rightarrow \frac{2}{R^2} &= \frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{R} &= \omega_0 C_1 - \frac{1}{\omega_0 L} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R} = \omega_0 C_2 + \frac{1}{\omega_0 L} \\ \Rightarrow \frac{2}{R} &= \omega_0 C_1 - \omega_0 C_2 \\ \Longleftrightarrow R &= \frac{2}{\omega_0 (C_1 - C_2)} \end{aligned}$$