

# Versuchsprotokoll E1

Gleich- und Wechselstrom

03.12.2014



Alexander Schlüter, Josh Wewers, Frederik Edens

Gruppe 15/mi

`alx.schlueter@gmail.com`

`joshw@muenster.de`

`f_eden01@wwu.de`

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Versuche</b>	<b>1</b>
2.1	Aufgabe 1 . . . . .	1
<b>3</b>	<b>Aufgabe 2</b>	<b>5</b>
3.1	Aufgabe 4 . . . . .	5
3.2	Aufgabe 5 . . . . .	6
3.3	Aufgabe 6 . . . . .	9
3.4	Aufgabe 7 . . . . .	11
3.5	Aufgabe 8 . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>15</b>
4.1	Aufgabe 1/2 . . . . .	15

## 1 Einführung

Eine reale Spannungsquelle wird durch das Modell des Innenwiderstandes beschrieben. Dabei wird gerechnet, als wäre ein Innenwiderstand  $R_i$  in Reihe mit der eigentlichen Spannungsquelle mit Leerlaufspannung  $U_0$  geschaltet. Es ergibt sich bei Belastung durch einen Außenwiderstand  $R_a$  (Strom  $I$ ):

$$U_0 = R_i \cdot I + R_a \cdot I \quad (1.1)$$

Die tatsächlich gemessene Spannung an der Quelle weicht von der Leerlaufspannung ab und heißt Klemmspannung  $U_{\text{Kl}}$ :

$$U_{\text{Kl}} = U_0 - R_i \cdot I = R_a \cdot I \quad (1.2)$$

Beim Kurzschluss für  $R_a = 0$  fließt der endliche Strom

$$I_{\text{Ks}} = U_0 / R_i. \quad (1.3)$$

Die an den Verbraucher abgegebene Leistung beträgt

$$P = U_0^2 \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2}. \quad (1.4)$$

Wir leiten die Bedingung für maximale Leistungsabgabe her:

$$\frac{dP}{dR_a} = \frac{U_0^2}{(R_a + R_i)^2} - 2 \cdot \frac{R_a U_0^2}{(R_a + R_i)^3} = 0 \quad (1.5)$$

$$\implies (R_a + R_i) = 2R_a \implies R_a = R_i \quad (1.6)$$

## 2 Versuche

### 2.1 Aufgabe 1

Ziel dieses Versuches ist die Bestimmung von Leerlaufspannung  $U_0$  und Innenwiderstand  $R_i$  von

1. einer einzelnen Akkumulatorzelle

2. drei Zellen parallel

3. drei Zellen in Reihe.

Dazu wird ein Stöpselwiderstand  $R_a$  in Reihe und ein Spannungsmessgerät zur Messung der Klemmspannung  $U_{\text{Kl}}$  parallel zu den Zellen geschaltet. Der Stöpselwiderstand fungiert als Lastwiderstand, über den der Strom  $I$  reguliert werden kann. Es werden jeweils 13 Spannungswerte nach Einstellen verschiedener Widerstände  $R_a$  abgenommen. Darunter sind auch Werte für den Kurzschlussfall ( $R_a=0$ ) und für nicht geschlossenen Stromkreis ( $R_a = \infty$ ).

$R_a$ [ $\pm 1 \Omega$ ]	$U_{\text{Kl}}$ [ $\pm 0,015 \text{ V}$ ]	$I = U_{\text{Kl}}/R_a$ [ $\pm 0,5 \text{ mA}$ ]
$\infty$	1,338	0
0	0,021	-
5	0,303	60,6
10	0,483	48,3
20	0,717	35,8
30	0,840	28,0
40	0,930	23,3
50	0,987	19,7
60	1,035	17,3
70	1,071	15,3
80	1,095	13,7
90	1,113	12,4
100	1,140	11,4

**Tabelle 1:** Messergebnis für eine Zelle

$R_a$ [ $\pm 1 \Omega$ ]	$U_{Kl}$ [ $\pm 0,05 \text{ V}$ ]	$I = U_{Kl}/R_a$ [ $\pm 1,2 \text{ mA}$ ]
$\infty$	4,00	0
0	0,10	-
5	0,40	80
10	0,70	70
20	1,15	57,5
30	1,48	49,3
40	1,73	43,3
50	1,98	39,6
60	2,12	35,3
70	2,30	32,9
80	2,40	30,0
90	2,52	28,0
100	2,61	26,1

**Tabelle 2:** Messergebnis für drei Zellen parallel

$R_a$ [ $\pm 1 \Omega$ ]	$U_{Kl}$ [ $\pm 0,015 \text{ V}$ ]	$I = U_{Kl}/R_a$ [ $\pm 0,5 \text{ mA}$ ]
$\infty$	1,323	0
0	0,030	-
5	0,327	65,4
10	0,495	49,5
20	0,717	35,9
30	0,843	28,1
40	0,930	23,3
50	0,990	19,8
60	1,023	17,1
70	1,068	15,3
80	1,095	13,7
90	1,113	12,4
100	1,137	11,4

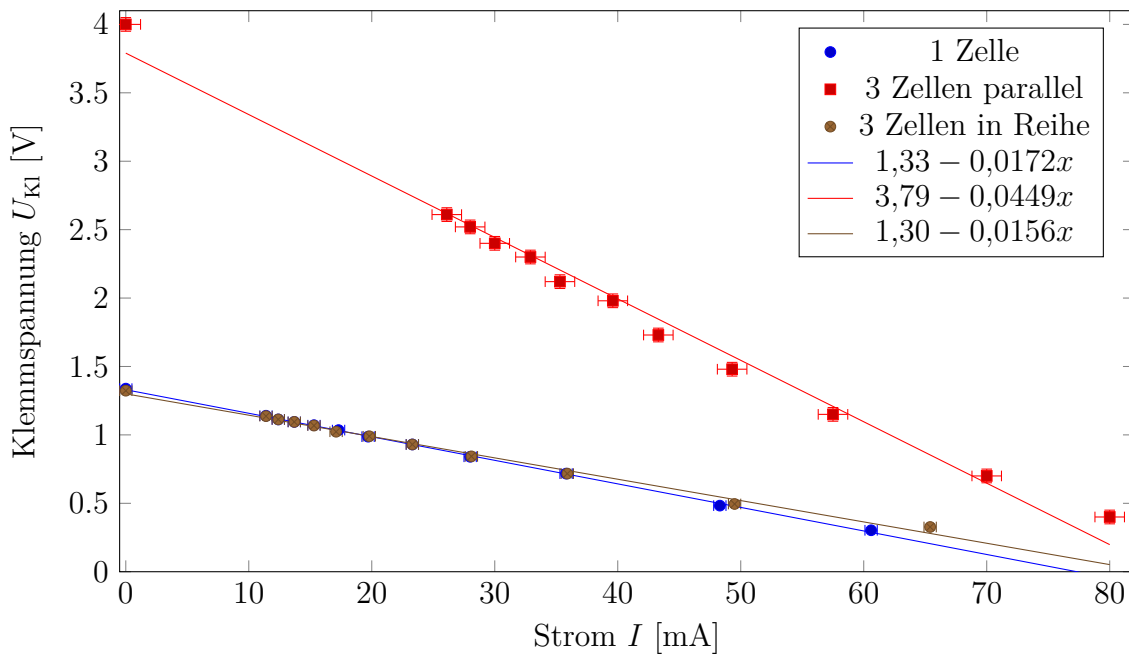
**Tabelle 3:** Messergebnis für drei Zellen in Reihe

Wir beobachten bei allen drei Messungen eine Zunahme der Klemmspannung  $U_{\text{Kl}}$  und Abnahme des Stromes  $I$  bei höherem Lastwiderstand  $R_a$ . Die Werte für eine Zelle entsprechen bis auf geringe Abweichungen den Werten für drei Zellen in Reihe. Die größte Abweichung tritt für  $R_a = 5\ \Omega$  auf und beträgt  $\Delta U_0 = (0,327\ \text{V} - 0,303\ \text{V}) / (0,303\ \text{V}) \approx 8\ \%$ .

Aus Gleichung (1.2) erwarten wir einen linearen Zusammenhang zwischen Klemmspannung und Strom. Wir fitten also mit gnuplot nach dem *least-squares*-Verfahren gegen  $U_{\text{Kl}}(I) = U_0 - R_i \cdot I$ . Ausgabe:

Messung	$U_0$ [V]	$R_i$ [ $\Omega$ ]
1 Zelle	$1,33 \pm 0,01$	$17,2 \pm 0,2$
3 Zellen parallel	$3,79 \pm 0,07$	$44,9 \pm 1,6$
3 Zellen in Reihe	$1,30 \pm 0,01$	$15,6 \pm 0,4$

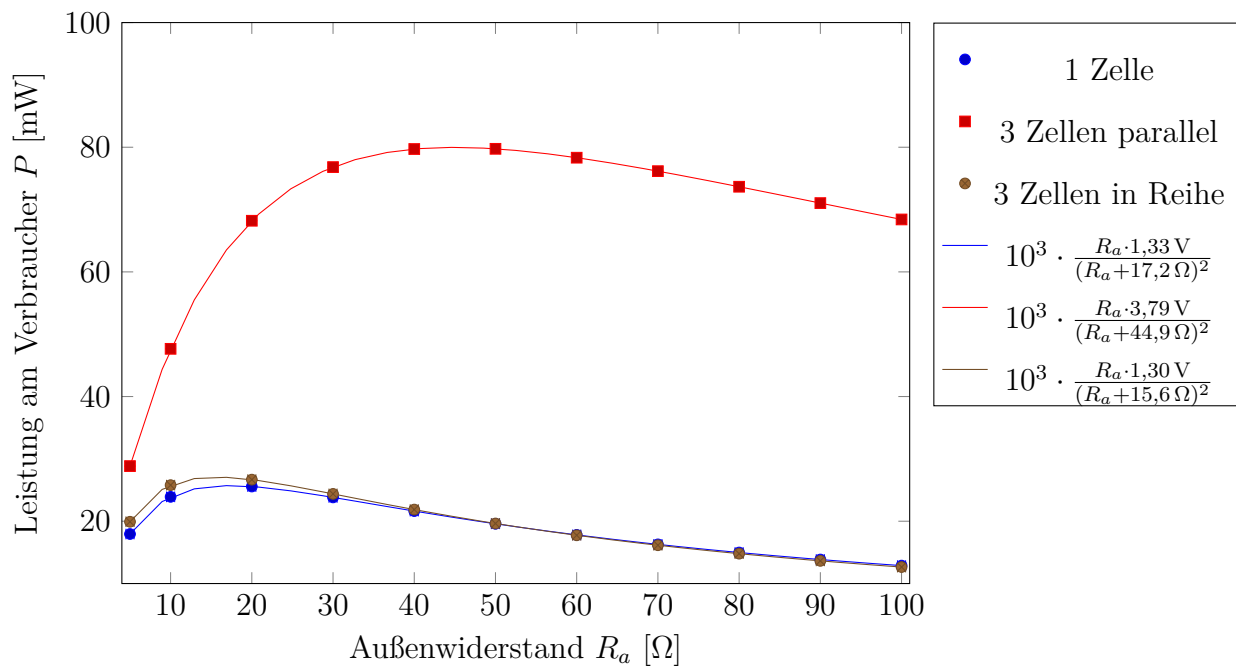
**Tabelle 4:** Klemmspannung und Innenwiderstand aus Fit



**Abbildung 1:** Klemmspannung  $U_{\text{Kl}}$  abhängig vom Strom  $I$  mit eingezeichnetem Fit

### 3 Aufgabe 2

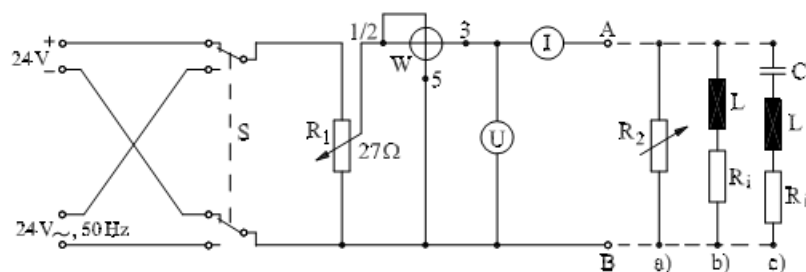
Anhang von Gleichung (1.4) kann mithilfe der Werte für  $U_0$ ,  $R_i$  aus dem vorherigen Aufgabenteil die an den Verbraucher abgegebene Leistung  $P$  berechnet werden.



**Abbildung 2:** Leistung am Verbraucher abhängig vom Außenwiderstand

#### 3.1 Aufgabe 4

Da es keine weiteren Angaben zur Frequenz der Wechselspannung gab, wurde von den normalen 50 Hz ausgegangen.



**Abbildung 3:** Schaltplan für die Aufgaben 4-8<sup>1</sup>

In dem Aufbau wird kein Verbraucher angeschlossen um die Verlustleistung des Voltmeters zu bestimmen. Diese beträgt bei maximaler Spannung,  $U_{\text{Gleich}} = 27V$  oder  $U_{\text{Wechsel}} = 25,5V$ ,  $P_{\text{verlust}} = 1W$  und nimmt bei sinkenden Spannungen weiter ab.

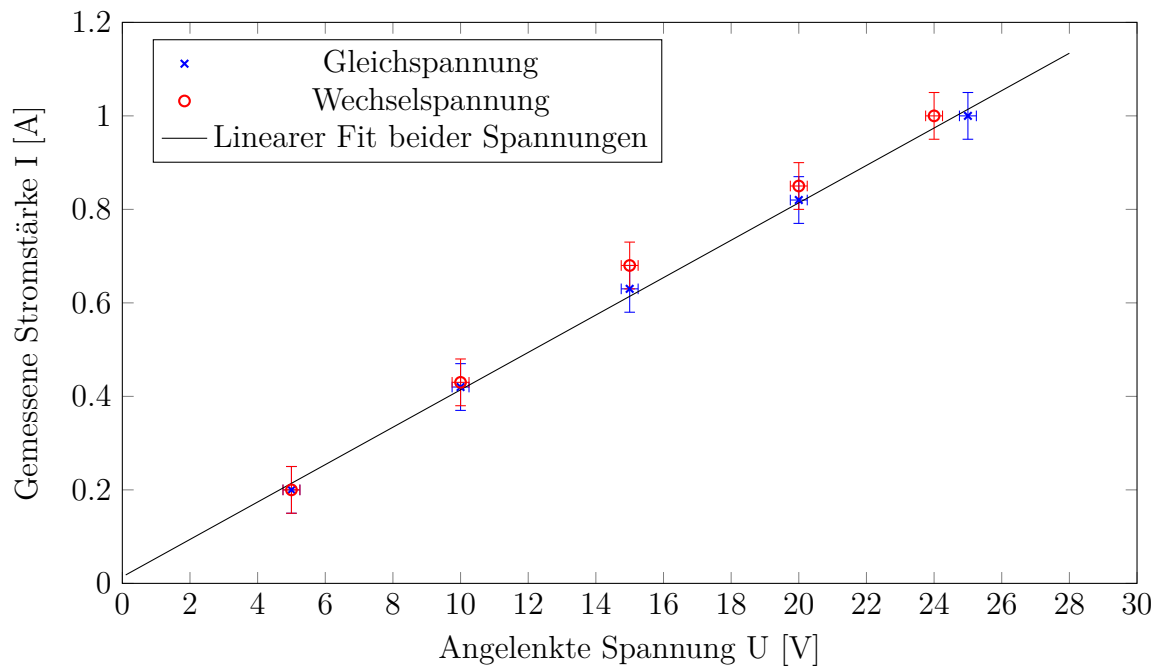
### 3.2 Aufgabe 5

An den Punkten A und B wird ein ohmscher Widerstand angeschlossen, für den bei Wechsel- und Gleichspannung die möglichen Messwerte bestimmt werden.

Spannungsart	Spannung U [V] $\pm 0,25$	Stromstärke I [A] $\pm 0,05$	Leistung P [W] $\pm 0,5$
Wechselspannung	24	1,00	23,7
	20	0,85	17,0
	15	0,68	9,8
	10	0,43	4,0
	5	0,20	1,0
Gleichspannung	25	1,00	24,5
	20	0,82	16,0
	15	0,63	9,0
	10	0,42	3,9
	5	0,20	0,6

**Tabelle 5:** Messwerte des ohmschen Widerstands





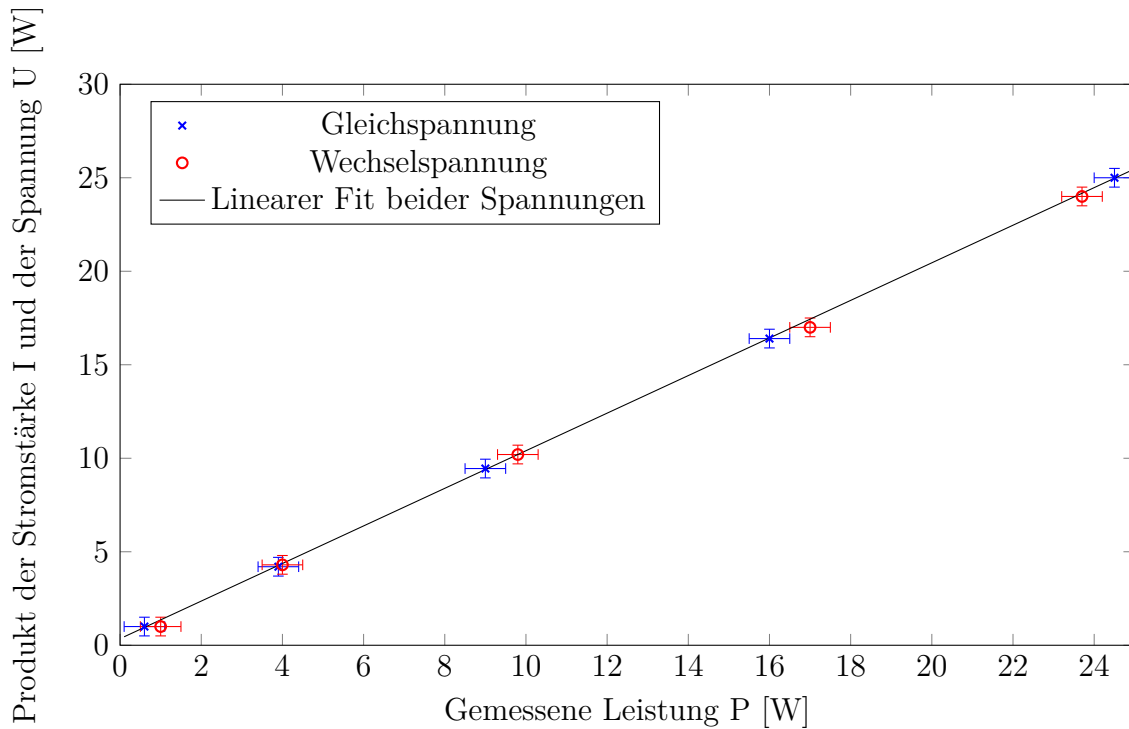
**Abbildung 4:** Versuch mit ohmschen Widerstand (Spannung gegen Stromstärke)

In dem Diagramm wurde nur der Fit für Gleichspannung eingetragen, da sich dieser fast mit dem von der Wechselspannung deckt und so eine größere Übersichtlichkeit erreicht wurde.

Aufgrund des anscheinend sehr linearen Verlaufs der Messwerte für beide Spannungsarten und in Deckung mit der zu erwarteten Formel ?? wurde mit *gnuplot* nach dem *least-squares*-Verfahren die Werte der beiden Spannungsarten gegen die Funktion  $f(x) = m \cdot x + b$  gefittet. Ausgabe:

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varianz der Residuals
Gleichspannung	0,04	0,014	0,00024
Wechselspannung	0,0422	0,007	0,00077

**Tabelle 6:** Linearer Fit zu Abbildung 4



**Abbildung 5:** Versuch mit ohmschen Widerstand (Leistung gegen Produkt aus Spannung und Stromstärke)

In dem Diagramm wurde nur der Fit für Gleichspannung eingetragen, da sich dieser fast mit dem von der Wechselspannung deckt und so eine größere Übersichtlichkeit erreicht wurde. Der Fehler des Produktes von Stromstärke und Spannung wurde nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt.

Aufgrund des anscheinend linearen Verlaufs der Messwerte für beide Spannungsarten und in Deckung mit der zu erwarteten Formel 1.4 wurde mit *gnuplot* nach dem *least-squares*-Verfahren die Werte der beiden Spannungsarten gegen die Funktion  $f(x) = m \cdot x + b$  gefittet. Ausgabe:

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varianz der Residuals
Gleichspannung	1,005	0,352	0,004
Wechselspannung	1,003	0,164	0,45

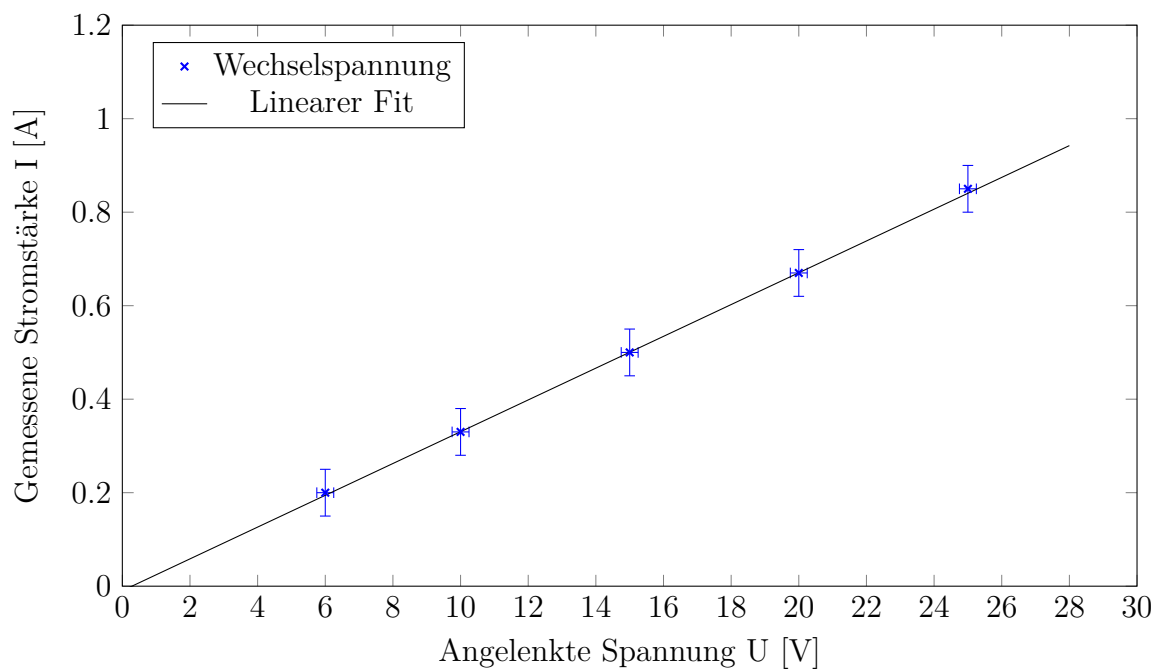
**Tabelle 7:** Linearer Fit zu Abbildung 5

### 3.3 Aufgabe 6

In diesem Versuchsteil wird eine Spule an den Punkten A und B angeschlossen (Aufbau b), und für Wechselspannung die Messwerte bestimmt.

Spannung U [V] $\pm 0,25$	Stromstärke I [A] $\pm 0,05$	Leistung P [W] $\pm 0,5$
25	0,85	16,2
20	0,67	10,8
15	0,50	6,0
10	0,33	2,5
5	0,20	1,0

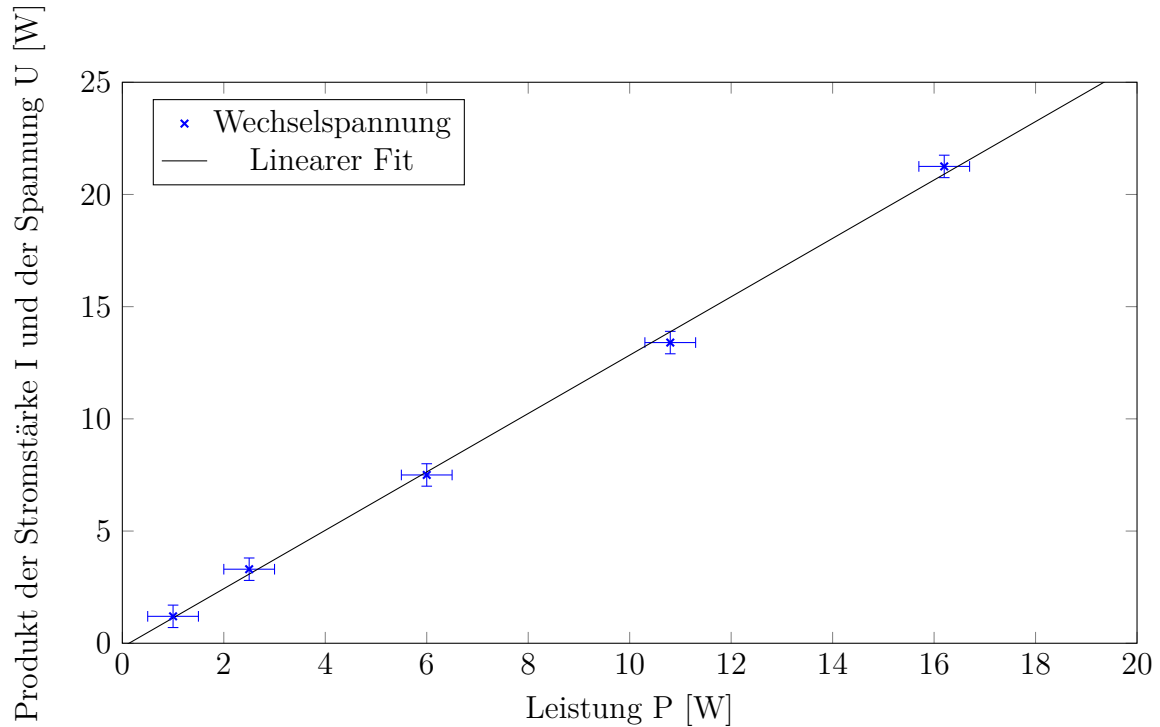
**Tabelle 8:** Messwerte der Spule bei Wechselspannung



**Abbildung 6:** Versuch mit Spule (Spannung gegen Stromstärke)

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varianz der Residuals
Wechselspannung	0,034	-0,0096	$2,54 \cdot 10^{-5}$

**Tabelle 9:** Linearer Fit zu Abbildung 6



**Abbildung 7:** Versuch mit Spule (Leistung gegen Produkt aus Spannung und Stromstärke)

Der Fehler des Produktes von Stromstärke und Spannung wurde nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt.

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varianz der Residuals
Wechselspannung	1,301	-0,171	0,14

**Tabelle 10:** Linearer Fit zu Abbildung 7

Aus dem Fit 10 ergibt sich, wenn man den  $b$  Achsenabschnitt, der aus Messungenauigkeiten folgt, vernachlässigt,

$$U \cdot I = 1,301 \cdot P. \quad (3.1)$$

Wenn man dies nun in ?? einsetzt und nach dem Phasenwinkel  $\varphi$  auflöst, erhält man

$$\varphi = \pm \arccos\left(\frac{1}{1,301}\right) = \pm 39,77^\circ. \quad (3.2)$$

Da es sich um eine Schaltung bestehend aus nur einer Spule handelt, kann man allgemein

sagen, dass die Stromstärke der Spannung folgt, woraus folgt, dass gilt

$$\varphi = 39,77^\circ. \quad (3.3)$$

Aus dem Fit 9 ergibt sich unter der Vernachlässigung von  $b$

$$I = 0,034\Omega^{-1} \cdot U. \quad (3.4)$$

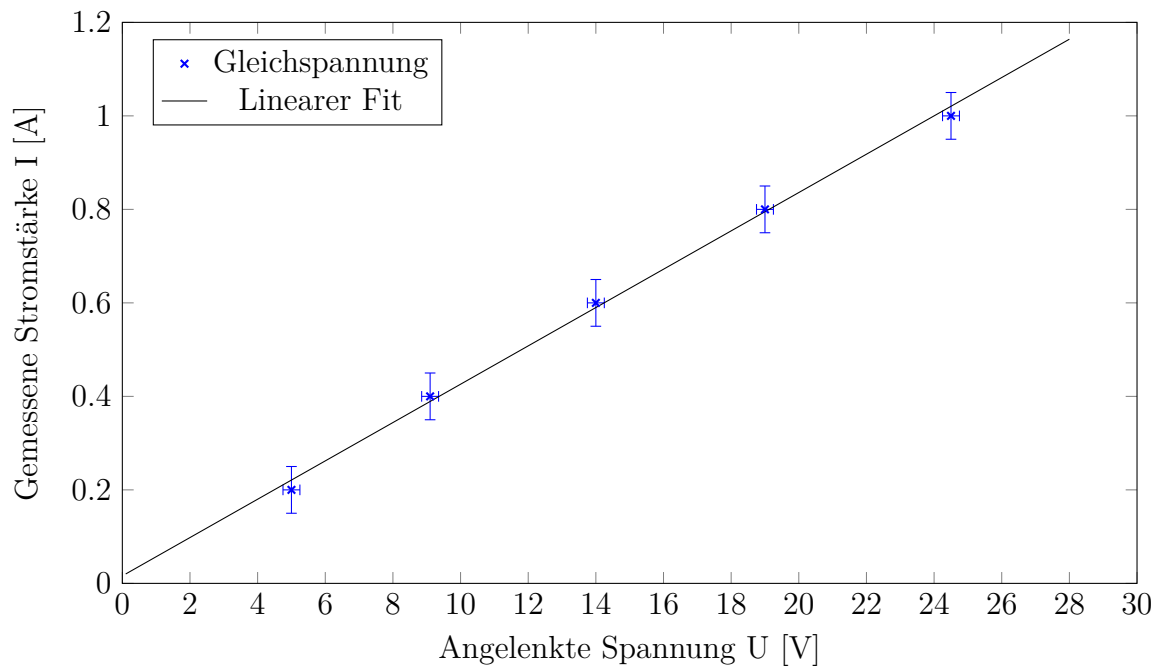
Wenn man dies nun in die Formel ?? einsetzt erhält man

$$R_W = \frac{U}{I} \cos(\varphi) = \frac{U}{0,034\Omega^{-1} \cdot U} \cos(\varphi) = \frac{1}{0,034\Omega^{-1}} \cos(\varphi) = \frac{500}{17} \cos(\varphi) \Omega \approx 22,61\Omega \quad (3.5)$$

### 3.4 Aufgabe 7

Spannung U [V] $\pm 0,25$	Stromstärke I [A] $\pm 0,05$
24,5	1,0
19,0	0,8
14,0	0,6
9,1	0,4
5,0	0,2

**Tabelle 11:** Messwerte der Spule bei Wechselspannung

**Abbildung 8:** Versuch mit Spule

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varianz der Residuals
Gleichspannung	0,041	0,016	0,00035

**Tabelle 12:** Linearer Fit zu Abbildung 8

Aus dem Fit 12 ergibt sich unter der Vernachlässigung von b

$$I = 0,041\Omega^{-1} \cdot U. \quad (3.6)$$

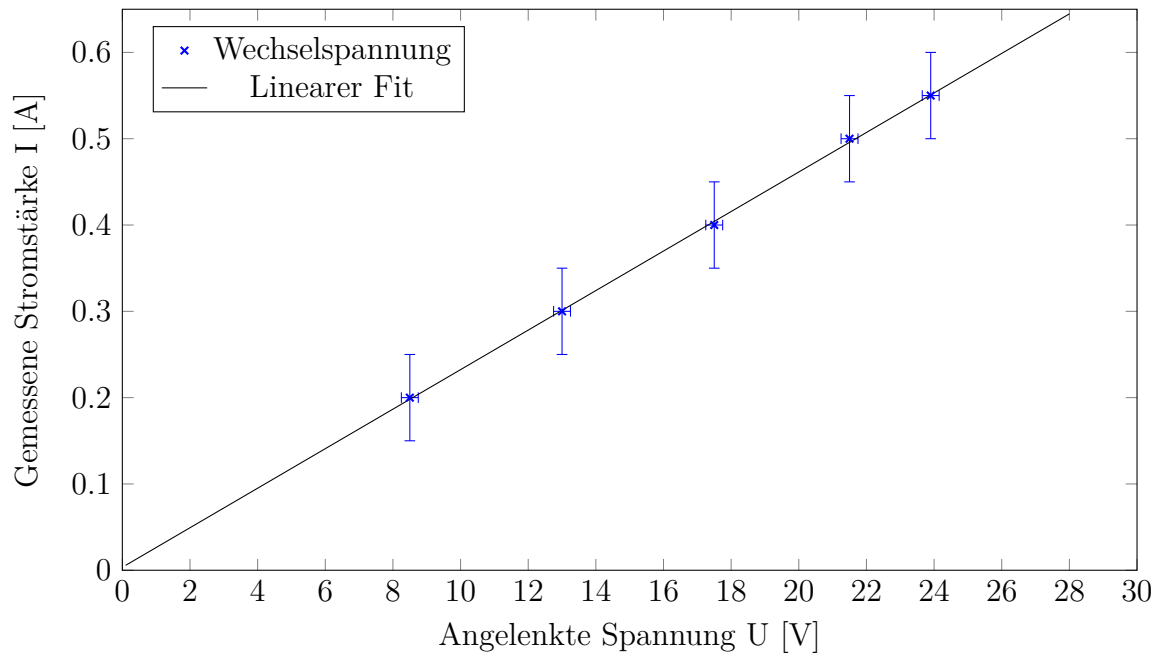
Wenn man dies nun in die Formel ?? einsetzt erhält man

$$R_i = \frac{U}{I} = \frac{U}{0,041\Omega^{-1} \cdot U} = \frac{1}{0,041\Omega^{-1}} = \frac{1000}{41}\Omega = 24,39024\Omega \quad (3.7)$$

Aus der Formel ?? folgt

$$L = \sqrt{\frac{|Z|^2 - R^2}{\omega^2}} \approx 0,96H \quad (3.8)$$

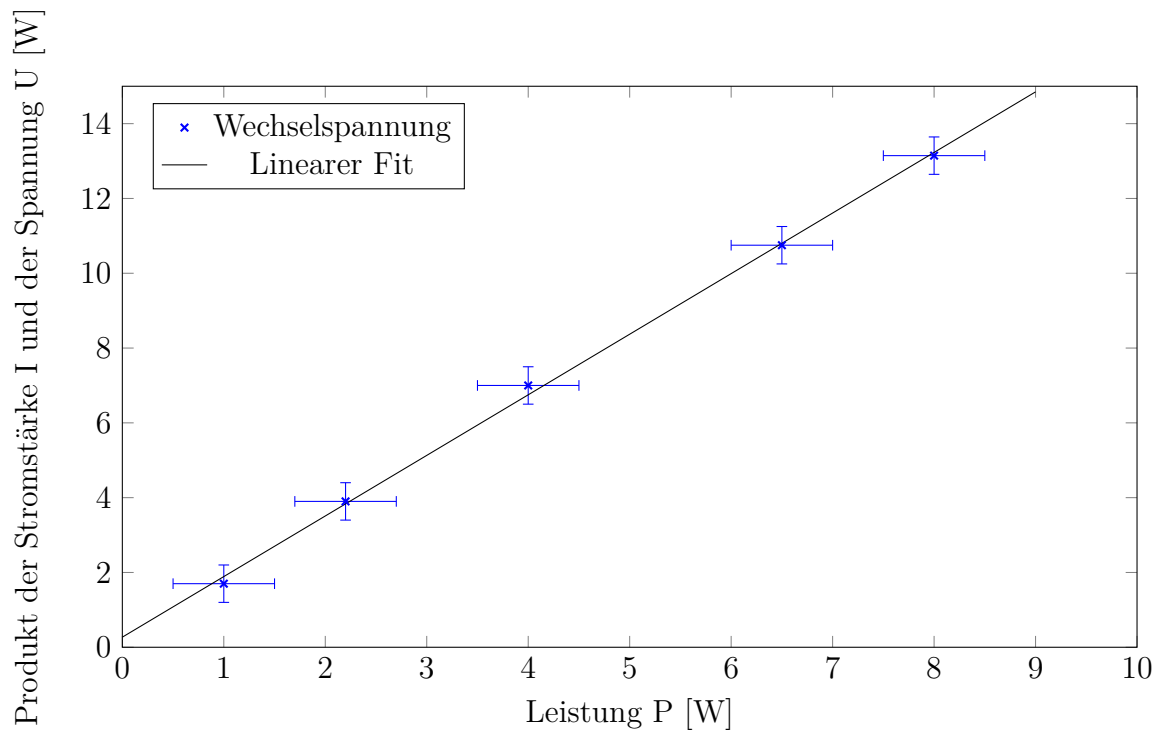
### 3.5 Aufgabe 8



**Abbildung 9:** Versuch mit Spule und Kondensator (Spannung gegen Stromstärke)

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varianz der Residuals
Wechselspannung	0,023	0,003	$1,36 \cdot 10^{-5}$

**Tabelle 13:** Linearer Fit zu Abbildung 9



**Abbildung 10:** Versuch mit Spule (Leistung gegen Produkt aus Spannung und Stromstärke)

Der Fehler des Produktes von Stromstärke und Spannung wurde nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt.

Spannungsart	Variabel m	Variabel b	Varianz der Residuals
Wechselspannung	1,62	0.27	0,038

**Tabelle 14:** Linearer Fit zu Abbildung 10

Der Phasenwinkel lässt sich analog zu Aufgabe 6 berechnen

$$\varphi = \arccos(1,62^{-1}) = 51,88^\circ. \quad (3.9)$$

Ebenso kann man den Widerstand  $|Z|$  so wie bei Aufgabe 6 berechnen.

$$|Z| = \frac{1}{0,023\Omega^{-1}} = \frac{1000}{23}\Omega \approx 43,48\Omega \quad (3.10)$$



Damit kann nun die Kapazität des Kondensators berechnet werden

$$C = \frac{1}{\omega^2 L + \omega \sqrt{|Z|^2 - R^2}} = 10,54 \mu F \quad (3.11)$$

## 4 Diskussion

### 4.1 Aufgabe 1/2

Im ersten Versuch wurde überprüft, ob das Modell des Innenwiderstandes das reale Verhalten eines Akkumulators als Spannungsquelle gut beschreiben kann. Der offensichtlich lineare Zusammenhang in Abb. 1 bestätigt dies für alle drei Messreihen. Allerdings wurde im Versuch ein Vorwiderstand vor den Akku geschaltet, um den Effekt deutlicher sichtbar zu machen. Anhand des Farbcodes wurde ermittelt, dass dieser bei  $R_V = 18 \Omega \pm 1 \%$  liegt. Die relative Abweichung zum gemessenen Innenwiderstand beträgt

- Für eine Zelle:  $(18 \Omega - 17,2 \Omega) / 18 \Omega \approx 4,4 \%$
- Für drei Zellen parallel:  $(18 \Omega - 44,9/3 \Omega) / 18 \Omega \approx 16,85 \%$
- Für drei Zellen in Reihe:  $(18 \Omega - 15,6 \Omega) / 18 \Omega \approx 13,3 \%$

## **Literatur**

Donath, Markus und Anke Schmidt. *Anleitung zu den Experimentellen Übungen zur Mechanik und Elektrizitätslehre*. Auflage Wintersemester 2014/2015. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Physikalisches Institut, Oktober 2014.