

Versuchsprotokoll M3

Elastizität

29.10.2014



Alexander Schlüter, Josh Wewers

Gruppe 15/mi

`alx.schlueter@gmail.com`

`joshw@muenster.de`

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Versuch: Elastische Biegung	3
3	Versuch: Torsionsschwingungen	7
3.1	Schwingung mit Scheibe	7
3.2	Schwingung mit Hantel	8
4	Diskussion	10
4.1	Versuch: Elastische Biegung	10
4.2	Torsionsschwingung mit Scheibe	11
4.3	Torsionsschwingung mit Hantel	12

1 Einführung

Wird ein Festkörper reversibel verformt, so nennt man dies eine **elastische** Verformung. Dabei treten im Körper Spannungen auf, die der Verformungskraft entgegenwirken (3. Newtonsches Gesetz).

Das **Hookesche Gesetz** nimmt einen proportionalen Zusammenhang zwischen in der Stärke der Verformung und der im Körper wirkenden Spannung an. Im Falle einer Zugkraft hat dieses die Form

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (1.1)$$

wobei σ elastische Zugspannung, E Elastizitätsmodul und $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ relative Längenänderung heißen. Bei einer Scherkraft lautet es

$$\tau = G\alpha, \quad (1.2)$$

wobei τ die Schubspannung, G der Schubmodul und α der Scherwinkel sind.

Neben einer Längenänderung kommt es auch zu einer Verkürzung der Querabmessung R (z.B. Radius). Die **Poissonzahl** / **Querkontraktionszahl** gibt das Verhältnis der relativen Änderungen an:

$$\mu = -\frac{\Delta R/R}{\Delta L/L} \quad (1.3)$$

Die Größen E, μ, G, K sind also Materialkonstanten, die das Verhalten eines Körpers unter äußeren Verformungskräften beschreiben, solange diese elastisch bleiben.

Wird ein Körper an einem Ende festgespannt und am anderen, freien Ende eine Kraft F angelegt, so spricht man von einer **Elastischen Biegung**. Die maximale Durchbiegung am freien Ende des Stabes ist

$$h_{\max} = \frac{F}{EI_q} \frac{L^3}{3} \quad (1.4)$$

(L Länge des Körpers, z Abstand von festem Ende, E Elastizitätsmodul, R lokaler Krümmungsradius). Dabei ist I_q das Flächenträgheitsmoment, welches vom Querschnitt

des Körpers abhängt:

$$I_q = \int y^2 \, dA \quad (1.5)$$

$$I_{\text{Kreis}} = \frac{\pi d^4}{64} \quad d \text{ Durchmesser} \quad (1.6)$$

$$I_{\text{Rechteck}} = \frac{ab^3}{12} \quad a \text{ senkrechte Kantenlänge, } b \text{ parallele} \quad (1.7)$$

Eine **Elastische Torsion** ist eine Verdrillung eines zylindrischen Stabes (Radius R , Länge L) um einen Torsionswinkel φ . Hängt man einen Körper mit Trägheitsmoment J an den Stab und verdreht diesen um φ , so kommt es zu einer harmonischen Schwingung. Dabei wirkt ein Direktionsmoment D^* der Auslenkung entgegen:

$$D^* = \frac{\pi G R^4}{2L} \quad (1.8)$$

Aus der Periodendauer T kann der Schubmodul errechnet werden:

$$G = \frac{8\pi L J}{R^4 T^2} \quad (1.9)$$

Das zur Rechnung benötigte Trägheitsmoment lautet für eine Scheibe mit Masse m und Radius R :

$$J_{\text{Scheibe}} = \frac{1}{2} m R^2 \quad (1.10)$$

Um dieses für eine Hantel zu bestimmen, hilft der **Steinerschen Satz**. Hat ein Körper mit Masse m ein Trägheitsmoment J_S bez. eines Punktes S , der im Abstand a zu einem zweiten Punkt A liegt, so lautet das Trägheitsmoment bez. A :

$$J_A = J_S + a^2 m \quad (1.11)$$

Es gilt nun für eine Hantel:

$$J_{\text{Achse}} = m_1 \left(\frac{1}{12} l_1^2 + \frac{1}{4} r_1^2 \right) \quad (1.12)$$

$$J_{\text{Scheiben}} = m_2 \left(\frac{1}{12} l_2^2 + \frac{1}{4} (r_2^2 + r_1^2) \right) \quad (1.13)$$

$$J_{\text{Hantel}} = J_{\text{Achse}} + 2 \cdot J_{\text{Scheiben}} + 2m_2a^2 \quad (1.14)$$

Wird diese als Torsionspendel genutzt, ergibt sich für die Schwingung folgende Beziehung zwischen Periodendauer und Abstand der Scheiben:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*} (J_{\text{Achse}} + 2 \cdot J_{\text{Scheiben}} + 2m_2a^2) \quad (1.15)$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{D^*}} \sqrt{J_{\text{Achse}} + 2 \cdot J_{\text{Scheiben}} + 2m_2a^2} \quad (1.16)$$

2 Versuch: Elastische Biegung

Es wurden 4 Metallstäbe zur Verfügung gestellt:

#	Aussehen	Form	gefühltes Gewicht
1	Gold	rechteckig	-
2	Gold	zylindrisch	mittel
3	Silber, hell	zylindrisch	leicht
4	Silber, dunkel	zylindrisch	schwer

Tabelle 1: Erste Beobachtungen zu den Metallstäben

Mit einer Mikrometerschraube wurde die Dicke der Stäbe an 5 verschiedenen Stellen je 3 mal gemessen (Messwerte siehe Laborbuch):

#	Mittelwert [mm]	Standardabweichung [mm]	relativer Fehler
1 flachkant	1,96	0,007	0,36 %
1 hochkant	4,96	0,008	0,16 %
2	2,93	0,012	0,41 %
3	2,94	0,006	0,20 %
4	2,95	0,012	0,41 %

Tabelle 2: Dicke der Stäbe

Da der relative Fehler sehr gering ist (jeweils $< 0,5\%$), nehmen wir im folgenden an, dass die Dicke der Stäbe über die gesamte Länge konstant gleich dem Mittelwert ist.

Die Länge der Stäbe wurde mit einem Maßband gemessen (Fehler jeweils $\pm 0,1\text{ cm}$):

#	Länge [cm]
1	29,4 cm
2	29,5 cm
3	29,8 cm
4	29,2 cm

Tabelle 3: Länge der Stäbe

Weiterhin standen 5 verschiedene Gewichte (5 g, 10 g, 20 g, 50 g, 100 g) zur Verfügung. Die Stäbe wurden an einem Ende horizontal zum Tisch fest eingespannt, wobei das freie Ende sich vor einem Spiegel mit vertikaler Längenskala befand.

Pro Gewicht wurde nun die Durchbiegung des Stabes gemessen: Zuerst wurde vor jeder Messung der Nullpunkt des Spiegels justiert, sodass er sich mittig hinter dem freien Stabende befand. Dann wurde das Gewicht in eine kleine Schaukel gelegt und diese am freien Ende angebracht. Eventuelle Schwingungen des Stabendes wurden abgewartet und schließlich die vertikale Auslenkung des Stabendes relativ zum Nullpunkt abgelesen. Dabei wurde der Parallaxenfehler gering gehalten, indem beim Ablesen die Spiegelung des Stabes mit dem Stab selbst ausgerichtet wurde.

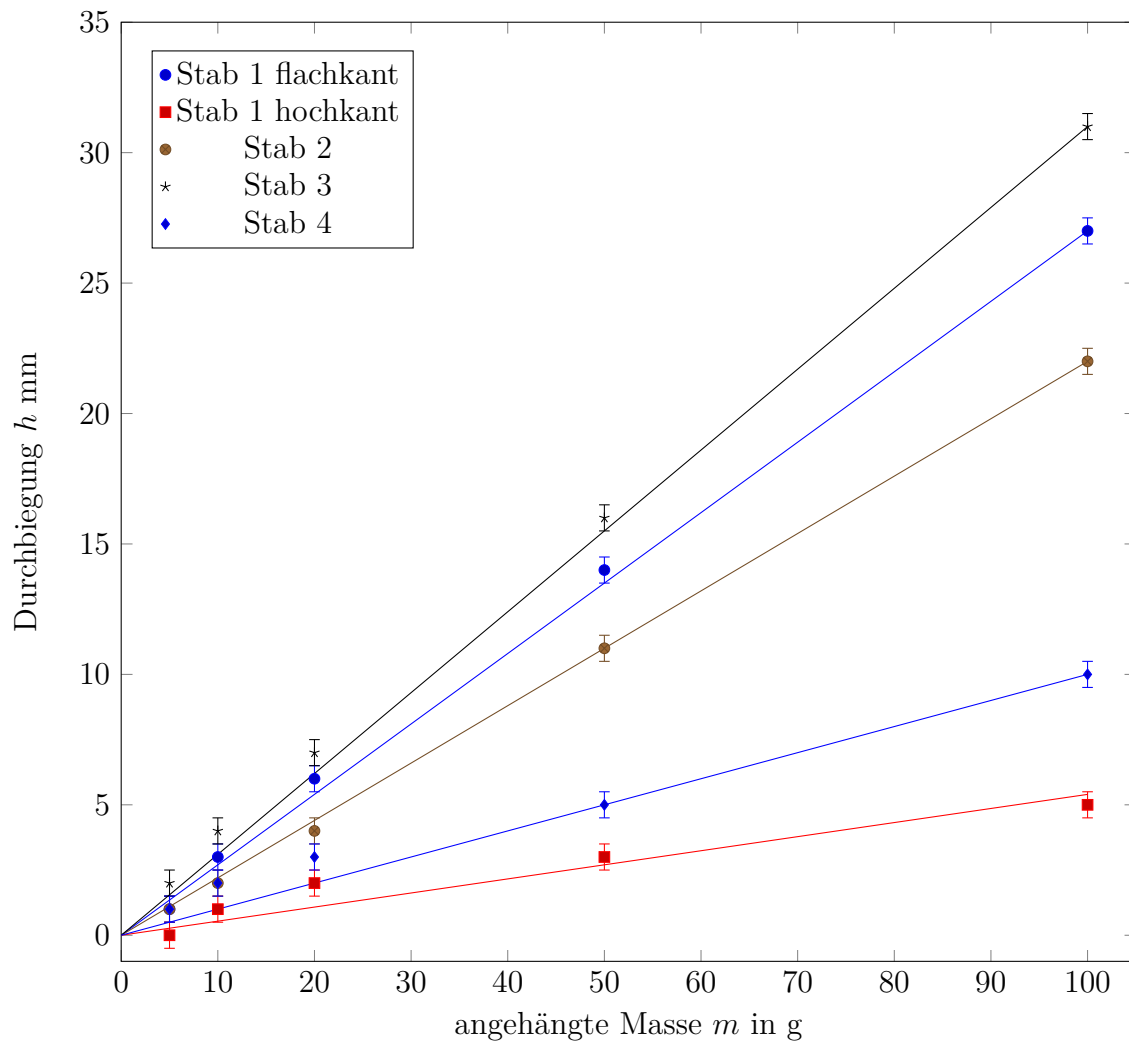
Der rechteckige Stab wurde sowohl hochkant als auch flachkant eingespannt und gemessen.

Die Erwartung ist, dass die Stäbe sich bei höherem angehängten Gewicht stärker biegen. Laut Theorie (Gleichung (1.4)) sollte der Zusammenhang linear sein (denn $F = mg$). Möglicherweise sind anfangs als schwerer empfundenen Stäbe schlechter zu biegen als die leichteren, weil ein Zusammenhang zwischen innerer Stabilität und Dichte bestehen könnte. Außerdem wird bei flachkantigem Einspannen des 1. Stabes eine stärkere Durchbiegung als bei hochkantigen erwartet.

#	5 g [mm]	10 g [mm]	20 g [mm]	50 g [mm]	100 g [mm]
1 flachkant	1,0	3,0	6,0	14,0	27,0
1 hochkant	0,0	1,0	2,0	3,0	5,0
2	1,0	2,0	4,0	11,0	22,0
3	2,0	4,0	7,0	16,0	31,0
4	1,0	2,0	3,0	5,0	10,0

Tabelle 4: Messergebnis zur Durchbiegung

Der Fehler wird geschätzt auf jeweils $\pm 0,5$ mm.

**Abbildung 1:** Messergebnis zur Durchbiegung

Wie erwartet scheint die Durchbiegung linear mit dem angehängten Gewicht zu steigen. Stab 1 hat sich flachkant stärker durchgebogen als hochkant. Der leichteste Stab 3 hat sich stärker als der mittelschwere (2) und dieser wiederum stärker als der schwerste Stab 4 verbogen.

Mit *gnuplot* werden nach dem *least-squares*-Verfahren die Werte der einzelnen Stäbe gegen die Funktion $f(x) = a \cdot x$ gefittet. Ausgabe:

#	a [mm/g]
1 flachkant	$0,27 \pm 0,01$
1 hochkant	$0,054 \pm 0,005$
2	$0,22 \pm 0,01$
3	$0,31 \pm 0,01$
4	$0,10 \pm 0,01$

Tabelle 5: Linearer Fit der Durchbiegung

Gleichung (1.4) wird umgestellt zu

$$h_{\max} = a \cdot m \implies a = \frac{gL^3}{3EI_q} \quad (2.1)$$

$$\implies E = \frac{g}{aI_q} \frac{L^3}{3} \quad (2.2)$$

und aus der Steigung a der Elastizitätsmodul berechnet. Es wird erwartet, dass für Stab 1 flachkant derselbe Elastizitätsmodul gilt wie für Stab 1 hochkant, da diese eine Materialgröße ist, die unabhängig von der Art der Einspannung sein sollte.

#	Elastizitätsmodul [kN/mm ²]
1 flachkant	$(9,9 \pm 0,4) \cdot 10^1$
1 hochkant	$(7,7 \pm 0,7) \cdot 10^1$
2	$(1,1 \pm 0,1) \cdot 10^2$
3	$(7,6 \pm 0,3) \cdot 10^1$
4	$(2,2 \pm 0,2) \cdot 10^2$

Tabelle 6: Elastizitätsmodul berechnet aus Steigung

Wider Erwarten liegt die Differenz zwischen dem Wert für Stab 1 flachkant / hochkant nicht innerhalb des Fehlerbereiches. Die aufgrund des gefühlten Gewichtes erwartete Reihenfolge der Elastizitätsmodule (Stab 4 > Stab 2 > Stab 3) ist eingetreten.

3 Versuch: Torsionsschwingungen

3.1 Schwingung mit Scheibe

An einem Draht der Länge $L = 1,739 \pm 0,002m$ und dem Durchmesser $d_{Draht} = 0,49 \pm 0,01mm$ wird eine Scheibe mit dem Radius $R_{Scheibe} = 7,1 \pm 0,05cm$ und mit der Masse $m_{Scheibe} = 2648g$ (angegebener Wert) angehängt und nach einer Auslenkung von $\phi = 180^\circ$ wird die Dauer für 3 Schwingungsperioden bestimmt. Der Durchmesser d_{Draht} wurde durch 5 Messungen an verschiedenen Stellen mit einer Mikrometerschraube bestimmt. Aufgrund der geringen Abweichungen wird er über die gesamte Länge des Drahtes als konstant angenommen.

Messung	1	2	3	4
Schwingungsdauer t	$76,5 \pm 0,5s$	$91,03 \pm 0,5s$	$91,44 \pm 0,5s$	$91,06 \pm 0,5s$

Tabelle 7: Schwingungsdauer für drei Perioden mit angehängter Scheibe

Im weiteren wird Messung 1 nicht weiter betrachtet, da ihr Wert deutlich von den anderen Werten abweicht und wahrscheinlich ein grober Messfehler vorliegt.

So ergibt sich eine durchschnittliche Schwingungsdauer von $\bar{t} = (91,18 \pm 0,23)s$.

Zu Bestimmung des Schubmoduls muss man die Formel 1.10 in 1.9 einsetzen und erhält:

$$G_{Scheibe} = \frac{4\pi L m R_{Scheibe}^2}{R^4 T^2} = \frac{4\pi \cdot 1,739m \cdot 2,648kg \cdot (0,071m)^2}{(0,00049m)^4 \frac{91,18s^2}{3}} = 5,47 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \quad (3.1)$$

Mit Messfehler lautet der Wert

$$G_{Scheibe} = (5,47 \pm 0,09) \cdot 10^9 N/m^2 \quad (3.2)$$

und der relative Fehler ist

$$\frac{\Delta G_{\text{Scheibe}}}{G_{\text{Scheibe}}} = 60,1\% \quad (3.3)$$

3.2 Schwingung mit Hantel

Nun wird der Versuchsablauf von „Schwingung mit Scheibe“ wiederholt, jedoch wird diesmal anstatt der Scheibe eine Hantel mit verschiebbaren Gewichten an den Seiten an den Draht gehängt.

Die Hantelstange hat eine Masse von $m_1 = 239,05g$ (angegeben), Länge von $l_1 = 25 \pm 0,1cm$ und einen Radius von $R_1 = 5,99 \pm 0,01mm$. Die Gewichte sind Zylinder mit einer Masse von $m_2 = 305,2g$ (angegeben), einem Radius von $\bar{R}_2 = 2,5cm$ und einer Höhe von $\bar{l}_2 = 19,8mm$. Durch das Reduzieren der angehängten Masse hat sich der Draht nun auf $\bar{L} = (1,738 \pm 0,002)cm$ verkürzt.

Messung	1	2	3
Schwingungsdauer t	$36,47 \pm 0,5s$	$36,59 \pm 0,5s$	$36,66 \pm 0,5s$

Tabelle 8: Schwingungsdauer für drei Perioden mit angehängter Hantelstange ohne Gewichte

So ergibt sich eine durchschnittliche Periode von $t_{\text{Stange}} = (12,19 \pm 0,10)s$

Die Gewichte werden nun in 5 verschiedene Positionen auf der Hantelachse eingerastet und der Abstand der Gewichte zum Aufhängepunkt wird jeweils mit einem Lineal gemessen.

Position	1	2	3	4	5
Abstand zum Aufhängepunkt [cm]	$11,45 \pm 0,1$	$9,1 \pm 0,1$	$6,6 \pm 0,1$	$4,1 \pm 0,1$	$1,9 \pm 0,1$

Tabelle 9: Abstand der einzelnen Massenpositionen zum Aufhängepunkt

Anschließend wird in jeder Konfiguration die Schwingungsdauer für drei Perioden ermittelt:

Position	1	2	3	4	5
Schwingungsdauer \bar{t}	$104,87s$	$86,56s$	$69,57s$	$54,30s$	$43,02s$

Tabelle 10: Schwingungsdauer für drei Perioden mit angehängter Hantel mit Gewichten

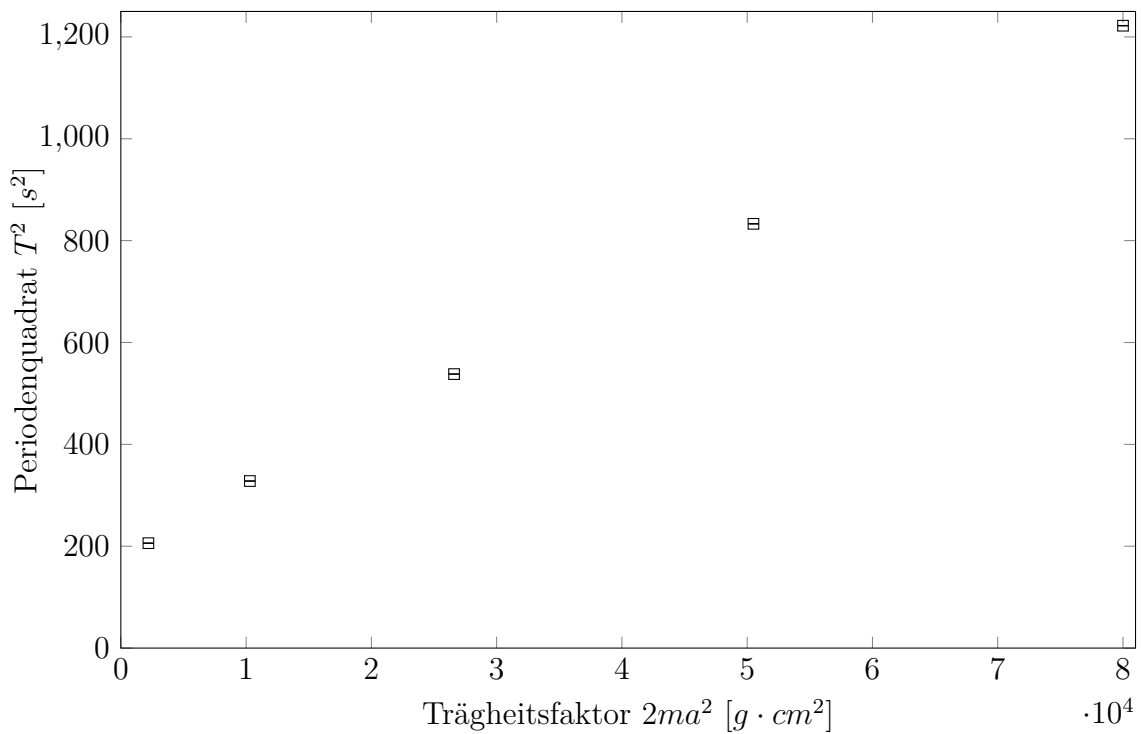


Abbildung 2: „Steinerscher Trägheitsfaktor“ $2ma^2$ gegen Periodendauerquadrat aufgetragen

Die Fehlerbalken in Abb. 2 sind recht kurz und fallen deshalb optisch mit dem Punkt überein. Wie aus Formel Gleichung (1.16) zu erwarten scheint ein linearer Zusammenhang zwischen dem Quadrat des Abstandes (a^2) und dem Periodenquadrat T^2 zu bestehen.

Mit *gnuplot* werden nach dem *least-squares*-Verfahren die Werte gegen die Funktion $f(x) = m \cdot x + b$ gefittet. Ausgabe:

Variabel	Wert
m	$(1,292 \pm 0,001) \cdot 10^{-2}$
b	$187,000 \pm 6,352$

Tabelle 11: Linearer Fit

Wir stellen nun Gleichung (1.16) um:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*} (J_{\text{Achse}} + 2 \cdot J_{\text{Scheibe}} + 2m_2 a^2) \quad (3.4)$$

$$= m \cdot (2m_2 a^2) + b \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow D^* = \frac{4\pi^2}{m} \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow J_{\text{Scheibe}} = \frac{1}{2} \left(\frac{D^*}{4\pi^2} \cdot b - J_{\text{Achse}} \right) \quad (3.7)$$

und aus der Schwingung ohne Scheiben:

$$J_{\text{Achse}} = \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \quad (3.8)$$

	D^*	J_{Achse}	J_{Scheibe}
aus Fit berechnet	$(3,056 \pm 0,001) \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$	$(1,15 \pm 0,02) \text{ gm}^2$	$(0,149 \pm 0,724) \text{ gm}^2$
aus Abmessungen	-	$(1,247 \pm 0,010) \text{ gm}^2$	$(0,0604 \pm 0,0038) \text{ gm}^2$

Tabelle 12: Ergebnisse zur Hantelschwingung

Als Vergleichswert wurden mit Gleichung (1.13) die Trägheitsmomente direkt über die Abmessungen berechnet.

4 Diskussion

4.1 Versuch: Elastische Biegung

Da es sich beim Elastizitätsmodul um eine Materialgröße handelt, sollte diese unabhängig von der Art des Einspannens sein. Dies hat sich in unserer Messung nicht bestätigt:

$$E_{1,\text{flach}} - E_{1,\text{hoch}} = (2,2 \pm 0,8) \cdot 10^1 \text{ kN/mm}^2 \quad (4.1)$$

Grund dafür ist, dass die Methode zur Ablesung der Durchbiegung nur eine signifikante Stelle geliefert hat, denn mit dem Auge sind Längenunterschiede $< 1 \text{ mm}$ schlecht zu erkennen. Dieser Unterschied liegt außerhalb des berechneten Fehlers, weil wie die Unsicherheiten der Eingabedaten für den *gnuplot*-Fit nicht fortpflanzen können (der von

gnuplot ausgegebene Fehler bezieht sich nur auf die Ungenauigkeit des Algorithmus, aber die Eingabedaten werden als exakt angenommen). Sinnvoll ausgesagt werden kann, dass der gefühlt leichteste Stab 3 einen deutlich geringeren Elastizitätsmodul hat als der schwerste Stab 4:

$$\Delta E_{34} = 200 \text{ kN/mm}^2 - 80 \text{ kN/mm}^2 = 120 \text{ kN/mm}^2 \quad (4.2)$$

Laut¹ ist der Elastizitätsmodul für verschiedene Werkstoffe:

Stoff	Elastizitätsmodul [kN/mm ²]
Nickellegierungen	150 ... 222
Gusseisen	66 ... 172
Kupfer	100 ... 130
Bronze	105 ... 124
Messing	78 ... 123
Aluminiumlegierungen	68 ... 82
Magnesiumlegierungen	42 ... 47

Tabelle 13: Literaturwerte für Elastizitätsmodul

Stab 1 liegt im Bereich von Messing, während Stab 3 im Bereich von Aluminiumlegierungen liegt. Beides deckt sich mit der Farbe. Bei Stab 2 und 4 ist der Fehler zu hoch, als das die Werte sinnvoll verglichen werden könnten, allerdings legt die sehr ähnliche Farbe nahe, dass Stab 2 genauso wie Stab 1 aus Messing besteht, während Gewicht und Aussehen von Stab 4 auf Gusseisen hindeuten. Dadurch das sämtlichen Stäben ein Material, welches zu den übrigen Erscheinungsmerkmalen passt, zugeordnet werden konnte, kann man davon ausgehen, dass trotz der teilweise ungenauen Messung, Auslenkung eines Stabes, die Messung gelungen ist.

4.2 Torsionsschwingung mit Scheibe

Laut² ist der Schubmodul von verschiedenen Werkstoffen:

¹Franz-Georg Simon Horst Czichos Birgit Skrotzki. *Das Ingenieurwissen: Werkstoffe*. 2014, S. 62.

²Waldemar von Münch Ellen Ivers-Tiffée. *Werkstoffe der Elektrotechnik*, S. 55.

Stoff	Schubmodul G_M [$10^4 MPa$]
Magnesium	1,7
Aluminium	2,6
Titan	4,5
Kupfer	4,6
Nickel	7,6
Stahl	8,3
Wolfram	16,0

Tabelle 14: Literaturwerte für Schubmodul

Leider wurde durch unsere Messung ein Schubmodul von $G = 0,547 \cdot 10^4 MPa$ bestimmt. Dieser Wert liegt außerhalb der angegebenen Tabelle und liegt eher im Bereich von Plastiken. Da der Stab jedoch aus einem glänzendem Metall bestand, ist es anzunehmen, dass im Laufe der Bestimmung eine 10er-Potenz verloren gegangen ist. Der richtige Wert sollte eher bei $G_{soll} = 5,47 \cdot 10^4 MPa$ liegen, was dann für einen Draht aus Nickel oder ähnlichem Metall spräche.

4.3 Torsionsschwingung mit Hantel

Bei der Bestimmung der Trägheitsmomente J_1 und J_2 wurden zwei unterschiedliche Verfahren gewählt, die beim der Bestimmung von J_1 , dem Trägheitsmoment der Stange, noch vergleichbare Ergebnisse geliefert haben. So liegt ΔJ_1 bei nur $0,97 gm^2$, dies entspricht gerade mal einem 0,08% relativem Fehler, was ein gutes Ergebnis ist. Bei der Bestimmung von J_2 ist die absolute Differenz ähnlich klein, $\Delta J_2 = 0,089 g^2$, dies ist entspricht aber einem relativen Fehler von über 200%, deutlich zu groß ist. Bei der Bestimmung ist der Methode über das Fitten, die sehr kleinen Werte des Trägheitsmomentes der Hantelscheiben zum Verhängnis geworden.

Literatur

Ellen Ivers-Tiffée, Waldemar von Münch. *Werkstoffe der Elektrotechnik*, S. 55.

Horst Czichos Birgit Skrotzki, Franz-Georg Simon. *Das Ingenieurwissen: Werkstoffe*.
2014, S. 62.