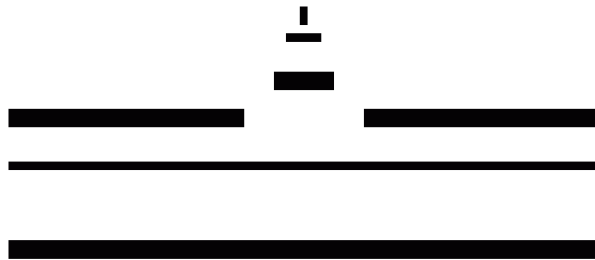


# Versuchsprotokoll E2

## Wheatstonesche Brücke & Thermoelement

10.12.2014



Alexander Schlüter, Josh Wewers, Frederik Edens

Gruppe 15/mi

`alx.schlueter@gmail.com`

`joshw@muenster.de`

`f_eden01@wwu.de`

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einführung</b>	<b>1</b>
1.1. Wheatstonesche Brücke . . . . .	1
1.2. Thermoelement . . . . .	4
1.2.1. Seebeck-Effekt . . . . .	4
1.2.2. Peltier-Effekt . . . . .	5
<b>2. Versuche</b>	<b>5</b>
2.1. Wheatstonesche Brücke . . . . .	5
2.1.1. Gleichstrombrücke . . . . .	5
2.1.2. Wechselstrombrücke zur Kapazitätsbestimmung . . . . .	6
2.1.3. Wechselstrombrücke zur Kapazitäts- und Widerstandsbestimmung eines RC-Gliedes . . . . .	8
2.1.4. Maxwellbrücke . . . . .	9
2.2. Thermoelement . . . . .	9
<b>3. Auswertung</b>	<b>11</b>
3.1. Wheatstonesche Brücke . . . . .	11
3.2. Thermoelement . . . . .	11
<b>A. Anhang</b>	<b>13</b>
A.1. Fehlerrechnung . . . . .	13
A.1.1. Ohmscher Widerstand . . . . .	13
A.1.2. Reihen- und Parallelschaltung . . . . .	13
A.1.3. Kapazitäten . . . . .	14
A.1.4. Maxwellbrücke . . . . .	14

# 1. Einführung

## 1.1. Wheatstonesche Brücke

Die Wheatstonesche Brücke ist eine Schaltung zur Bestimmung eines unbekannten ohmschen Widerstandes  $R_1$ . Dazu werden bekannte Widerstände  $R_2$  bis  $R_4$  so gewählt, dass der in der Mitte des Schaltbildes gemessene Strom  $I_M$  verschwindet. Bei der

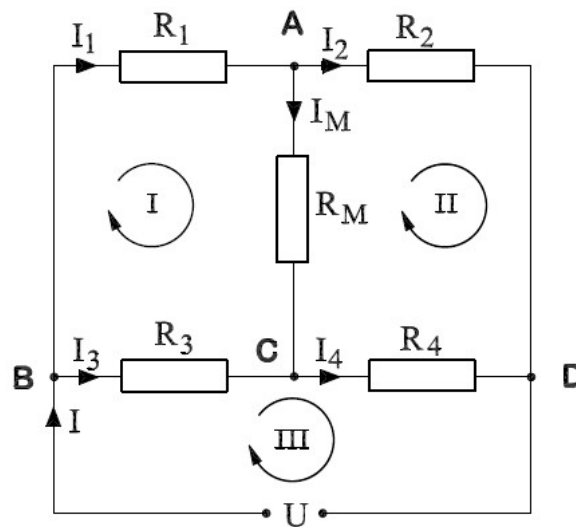


Abbildung 1: Wheatstonesche Brücke

Gleichstrombrücke werden die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  durch ein Potentiometer ersetzt. Es gilt der Zusammenhang:

$$R_x = \frac{l}{L-l} \cdot R_2 \quad (1.1)$$

Dabei ist  $R_x$  der unbekannte Widerstand.

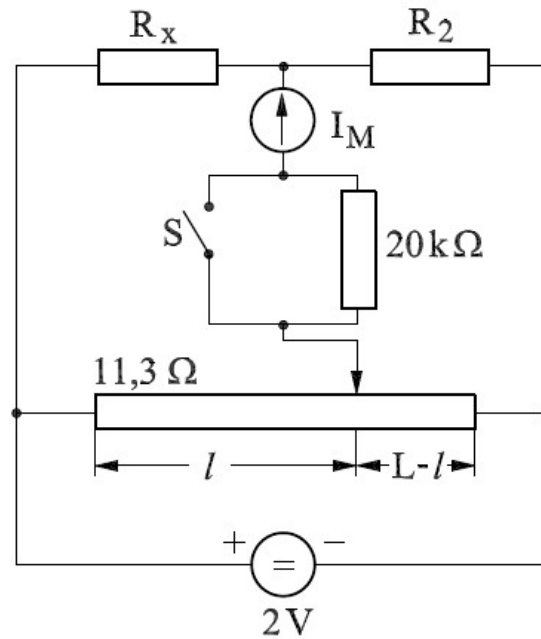


Abbildung 2: Gleichstrombrücke

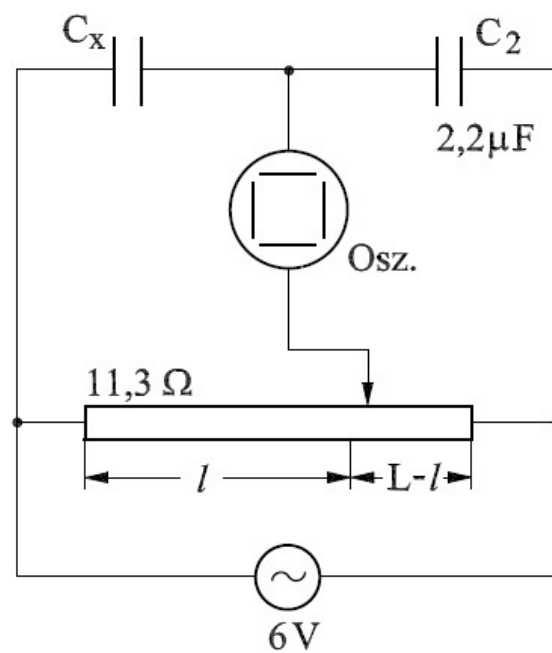
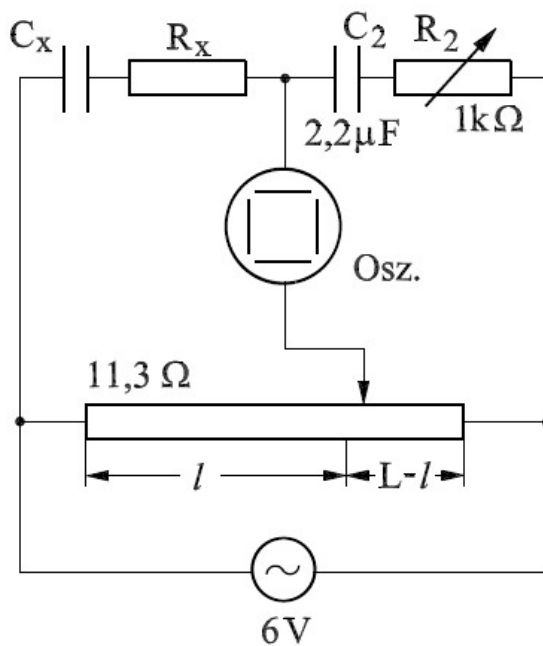


Abbildung 3: Wechselstrombrücke (C-Bestimmung)

Die Brücke kann angepasst werden, um allgemeine komplexwertige Impedanzen zu

bestimmen. Die Kapazität  $C$  eines Kondensators (vgl. Schaltbild Abb. 3) ergibt sich aus

$$C_x = \frac{L-l}{l} C_2 \quad (1.2)$$



**Abbildung 4:** Wechselstrombrücke (C- und R-Bestimmung)

Wird eine Kapazität  $C_x$  mit einem ohmschen Widerstand  $R_x$  in Reihe geschaltet, so können dieses mittels Wechselstrombrücke Abb. 4 bestimmt werden:

$$R_x = \frac{l}{L-l} \cdot R_2 \quad \text{und} \quad C_x = \frac{L-l}{l} \cdot C_2 \quad (1.3)$$

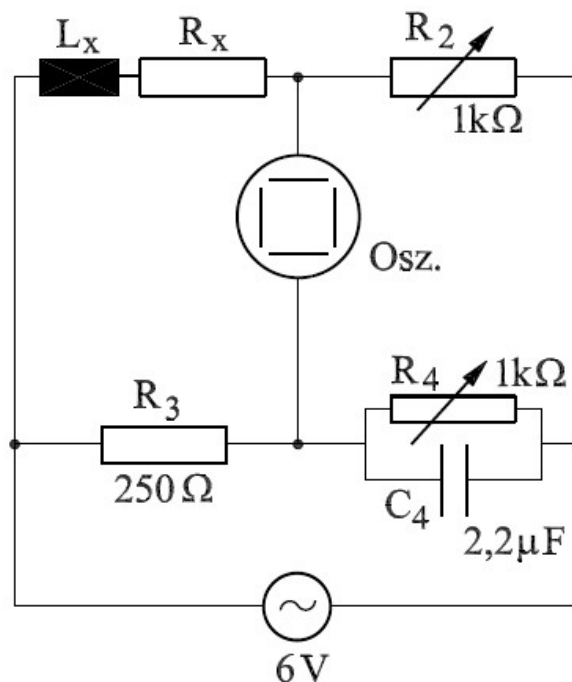


Abbildung 5: Maxwell-Brücke

Durch die Maxwellbrücke (Abb. 5) kann eine unbekannte Induktivität  $L_x$  in Serie mit einem ohmschen Widerstand  $R_x$  ermittelt werden:

$$R_x = \frac{R_3}{R_4} R_2 \quad \text{und} \quad L_x = R_2 R_3 C_4 \quad (1.4)$$

Die Abbildungen wurden aus<sup>1</sup> übernommen.

## 1.2. Thermoelement

### 1.2.1. Seebeck-Effekt

Unter dem Seebeck-Effekt versteht man das Auftreten einer Spannung zwischen zwei Leiterenden, wenn längs des Leiters ein Temperaturgradient vorliegt. Die Spannung entsteht aus dem Bestreben der Elektronen von dem wärmeren Ende, mit mehr kinetischer Energie, zu dem kälteren Ende mit einer höheren Elektronendichte zu kommen. Diese auftretende Spannung nennt sich Thermospannung und ist proportional zur Temperatur-

<sup>1</sup>anleitung-ws2014.

differenz der Leiterenden. Es gilt

$$\Delta U \sim \Delta T \Rightarrow \Delta U = \alpha_A \Delta T. \quad (1.5)$$

Der Faktor  $\alpha_A$  heißt Seebeckkoeffizient. Dieser Effekt ist jedoch so nicht messbar, deswegen wird der Seebeckkoeffizient, wie in Abbildung 6 dargestellt, bestimmt. Dies führt zu der Formel

$$\Delta U_{AB} = \alpha_A \cdot \Delta T - \alpha_B \cdot \Delta T = \alpha_{AB} \cdot \Delta T \quad (1.6)$$

mit  $\alpha_{AB} = \alpha_A - \alpha_B$ .

### 1.2.2. Peltier-Effekt

Der Peltier-Effekt beschreibt die Umkehrung des Seebeck-Effekts, durch einen Aufbau ähnlich Abbildung 6 wird nun ein konstanter Strom  $I$  geleitet. Dabei kühlt sich ein Ende ab, während sich das andere erhitzt. Zwischen der umgesetzten Peltierwärme  $\dot{Q}$  und dem Strom  $I$  gilt

$$\dot{Q} = \pi_{AB} \cdot I \text{ mit } \pi_{AB} = \alpha_{AB} \cdot T. \quad (1.7)$$

## 2. Versuche

### 2.1. Wheatstonesche Brücke

#### 2.1.1. Gleichstrombrücke

Für den ersten Versuchsteil wird eine Gleichstrombrücke entsprechen Abbildung 2 aufgebaut. Der Widerstand  $R_2$  war auf dem Bauteil mit  $270\,\Omega$  angegeben. Wir nehmen eine Unsicherheit von  $\pm 0,5\,\Omega$  an. Die Gesamtlänge des Potentiometers beträgt  $L = (100,0 \pm 0,1)\,\text{cm}$ . Nacheinander werden als unbekannter Widerstand  $R_x$  ein Widerstand mit der Kennzeichnung E4/8, ein Widerstand mit der Kennzeichnung E4/2, beide Widerstände in Reihe, beide Widerstände parallel und eine Spule angeschlossen. Die Spule verhält sich bei Gleichstrom genau wie ein ohmscher Widerstand. Bei jedem der unbekannten Widerstände wird die Stellung des Potentiometers gesucht, bei der Strom  $I_M$  verschwindet. Dazu wird zunächst ein Schutzwiderstand mit dem Strommessgerät in Reihe geschaltet um dieses vor Überlastung zu schützen. Ist der Strom fast 0 wird der Schutzwiderstand durch betätigen eines Schalters kurzgeschlossen, so dass das Potentio-

meter mit höherer Genauigkeit eingestellt werden kann. Wenn kein messbarer Strom mehr fließt wird die Abgleichbedingung als erfüllt angenommen, und das linke Streckenstück  $l$  als Messwert genommen. Mithilfe von (1.1) lässt sich  $R_x$  errechnen. Zusammen mit der Fehlerrechnung aus dem Anhang erhalten wir so

	$l$ [cm]	$R_x$ [ $\Omega$ ]
E4/8	$41,8 \pm 0,1$	$193,92 \pm 0,94$
E4/2	$32,1 \pm 0,1$	$127,64 \pm 0,66$
Reihenschaltung	$54,4 \pm 0,1$	$322,11 \pm 1,59$
Parallelschaltung	$22,1 \pm 0,1$	$76,60 \pm 0,48$
Spule	$48,4 \pm 0,1$	$253,26 \pm 1,22$

**Tabelle 1:** Messwerte und errechnete Widerstände

Die Widerstände bei Parallel- und Reihenschaltung lassen sich auch anhand der bekannten Gesetze für Parallel- und Reihenschaltung errechnen. Es gilt für Reihenschaltung

$$R_r = R_1 + R_2$$

und für Parallelschaltung

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Dadurch erhalten wir rechnerische Vergleichswerte. Die Fehlerrechnung ist im Anhang

	Rechnerisch [ $\Omega$ ]	Gemessen [ $\Omega$ ]
Reihenschaltung	$321,56 \pm 1,59$	$322,11 \pm 1,59$
Parallelschaltung	$76,98 \pm 0,18$	$76,60 \pm 0,48$

**Tabelle 2:** Vergleich mit Gesetz für Parallel- bzw. Reihenschaltung

### 2.1.2. Wechselstrombrücke zur Kapazitätsbestimmung

Bei der Wechselstrombrücke verwendet man die Verallgemeinerung von Widerständen auf Impedanzen. Der Schaltkreis wird entsprechend Abbildung 3 aufgebaut. Das Oszilloskop muss in diesem Versuch anstelle des Strommessgerätes verwendet werden, da Wechselstrom angelegt wird. Normale Messgeräte sind häufig zu träge um Stromverlauf bei Wechselstrom anzuzeigen und zeigen daher stattdessen das arithmetische Mittel



des Stroms an. Das arithmetische Mittel einer Sinus-Welle ist 0, so dass auch ohne Erfüllung der Abgleichbedingung ein normales Messgerät anzeigen könnte, dass kein Strom fließe. Ansonsten entspricht der Aufbau im Wesentlichen der Gleichstrombrücke. Für die Kapazität des Kondensators  $C_2$  ist auf dem Bauteil  $C_2 = 2,2 \mu\text{F}$ , als Unsicherheit nehmen wir  $\pm 0,05 \mu\text{F}$  an. Das Potentiometer ist das selbe wie bei der Gleichstrombrücke ( $L = (100,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ ). Für  $C_x$  werden nacheinander ein kurzer, dicker Kondensator, ein langer, dünner Kondensator, beide in Reihe und beide parallel angeschlossen. Die Abgleichbedingung wird als erfüllt angenommen, wenn das Oszilloskop einen vernachlässigbar kleinen Ausschlag zeigt. Das linke Streckenstück des Potentiometer wird gemessen und in (1.2) eingesetzt. Mit der Fehlerrechnung aus dem Anhang ergeben sich die folgenden Werte

	$l \text{ [cm]}$	$C_x \text{ [}\mu\text{F]}$
kurzer Kondensator	$80,5 \pm 0,1$	$0,533 \pm 0,013$
langer Kondensator	$30,5 \pm 0,1$	$5,013 \pm 0,117$
beide in Reihe	$82,0 \pm 0,1$	$0,483 \pm 0,012$
beide parallel	$28,4 \pm 0,1$	$5,546 \pm 0,129$

**Tabelle 3:** Messwerte und errechnete Kapazitäten

Die Gesamtkapazität der in Reihe und parallel geschalteten Kondensatoren lässt sich alternativ auch aus den Kapazitätsgesetz für Reihen- und Parallelschaltung bestimmen. Dieses lautet für Parallelschaltung

$$C_p = C_1 + C_2$$

und für Reihenschaltung

$$C_r = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Die entsprechenden Fehlerrechnungen sind im Anhang. Die daraus resultierenden Vergleichswerte lauten:

	Rechnerisch $[\mu\text{F}]$	Gemessen $[\mu\text{F}]$
Reihenschaltung	$0,482 \pm 0,093$	$0,483 \pm 0,012$
Parallelschaltung	$5,546 \pm 0,130$	$5,546 \pm 0,129$

**Tabelle 4:** Vergleich mit Gesetz für Parallel- bzw. Reihenschaltung

### 2.1.3. Wechselstrombrücke zur Kapazitäts- und Widerstandsbestimmung eines RC-Gliedes

Genau wie bei der alleinigen Kapazitätsbestimmung muss auch die gleichzeitige Kapazitäts- und Widerstandsbestimmung aus den gleichen Gründen mit einem Oszilloskop anstelle des Strommessgerätes durchgeführt werden. Der Schaltkreis wird Abbildung 4 entsprechend aufgebaut. Bei der Durchführung muss beachtet werden, dass die Gesamtimpedanz  $Z_x = R_x + Z_{C_x}$  komplex ist und somit durch das zweite Potentiometer  $R_2$  Real- und Imaginärteil gleichzeitig abgeglichen werden müssen. Das heißt, dass zum herstellen der Abgleichbedingung beide Potentiometer richtig eingestellt werden müssen. Der verwendete bekannte Kondensator  $C_2$  und das eine Potentiometer sind die selben wie im vorherigen Versuch ( $C_2 = (2,20 \pm 0,05) \mu\text{F}$ ,  $L = (100,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ ). Schließt man nun verschiedene RC-Glieder, bestehend aus jeweils einem Widerstand und einem Kondensator aus den vorherigen Versuchen in Reihe geschaltet, kann die Kombination aus  $R_2$  und  $l$  bestimmt werden, so dass die Abgleichbedingung erfüllt ist. Aus (1.3) lässt sich  $C_x$  und  $R_x$  errechnen. Die Fehlerrechnung ist im Anhang zu finden. Wir erhalten die folgenden Werte

	$l$ [cm]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_x$ [ $\Omega$ ]	$C_x$ [ $\mu\text{F}$ ]
E4/2, kurzer Kondensator	$80,5 \pm 0,1$	$36 \pm 4$	$148,62 \pm 16,56$	$0,533 \pm 0,013$
E4/8, kurzer Kondensator	$80,5 \pm 0,1$	$51 \pm 4$	$210,54 \pm 16,60$	$0,533 \pm 0,013$
E4/8, langer Kondensator	$30,5 \pm 0,1$	$441 \pm 1$	$193,53 \pm 1,05$	$5,013 \pm 0,117$
E4/2, langer Kondensator	$30,5 \pm 0,1$	$290 \pm 1$	$127,27 \pm 0,77$	$5,013 \pm 0,117$

**Tabelle 5:** Messwerte und errechnete Kapazitäten, Widerstände

Mit dem langen Kondensator haben wir sehr gute Werte für die Widerstände erhalten. Die errechneten Widerstandswerte unterscheiden sich in diesem Versuch zumindest bei dem langen Kondensator nur in den Nachkommastellen von den in den vorherigen Versuchen erhaltenen Ergebnissen. Bei dem kleinen Kondensator ist dagegen eine relativ deutliche Abweichung erkennbar. Es hat sich bereits während des Versuches gezeigt, dass es schwierig ist den Widerstand  $R_2$  genau einzustellen, so dass wir einen großen Fehler annehmen müssen. Zudem spielen gerade bei kleineren Widerstände konstante Innenwiderstände eine große Rolle. Dennoch liegt durch die relativ groß gewählte Unsicherheit der als richtig angenommene Wert aus den anderen Versuchen noch im Vertrauensintervall. Dass die Widerstände mitunter nicht genau bestimmt werden konnten stellt jedoch

kein größeres Problem da. Diese können auch mit einfacheren Aufbauten sehr genau bestimmt werden. Für Kapazitäten hat sich der Aufbau dafür als sehr gut erwiesen. Der bei  $R_2$  eingestellter Widerstand hat zumindest in der Berechnung keinen direkten Einfluss auf die ermittelte Kapazität, so dass wir dort zuverlässig Werte erhalten haben, die sich mit den anderen Versuchen decken. Die Messungen waren insbesondere auch sehr gut reproduzierbar. Bei jeder Messung von  $l$  haben wir jeweils innerhalb unserer Messgenauigkeit genau den gleichen Wert erhalten.

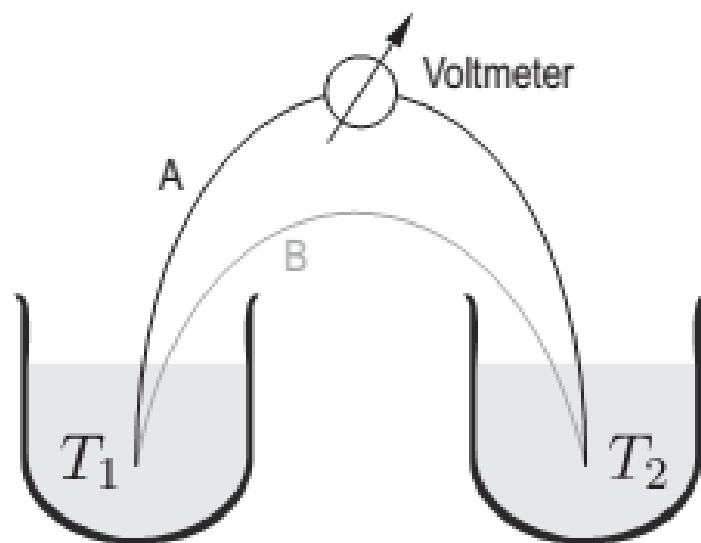
#### 2.1.4. Maxwellbrücke

Zum gleichzeitigen Bestimmen von Innenwiderstand und Induktivität einer Spule kann die Maxwellbrücke (Abbildung 5) verwendet werden. Der Kondensator  $C_4$  und der Widerstand  $R_3$  in dieser Schaltung sind die selben wie  $C_2$  bzw.  $R_2$  aus den vorherigen Versuchen ( $C_4 = (2,20 \pm 0,05) \mu\text{F}$ ,  $R_3 = (270,0 \pm 0,5) \Omega$ ). Ist die Abgleichbedingung erfüllt, kann mit (1.4) Induktivität und Innenwiderstand errechnet werden. Die Fehlerrechnung ist im Anhang. Bei unserer Durchführung erhielten wir

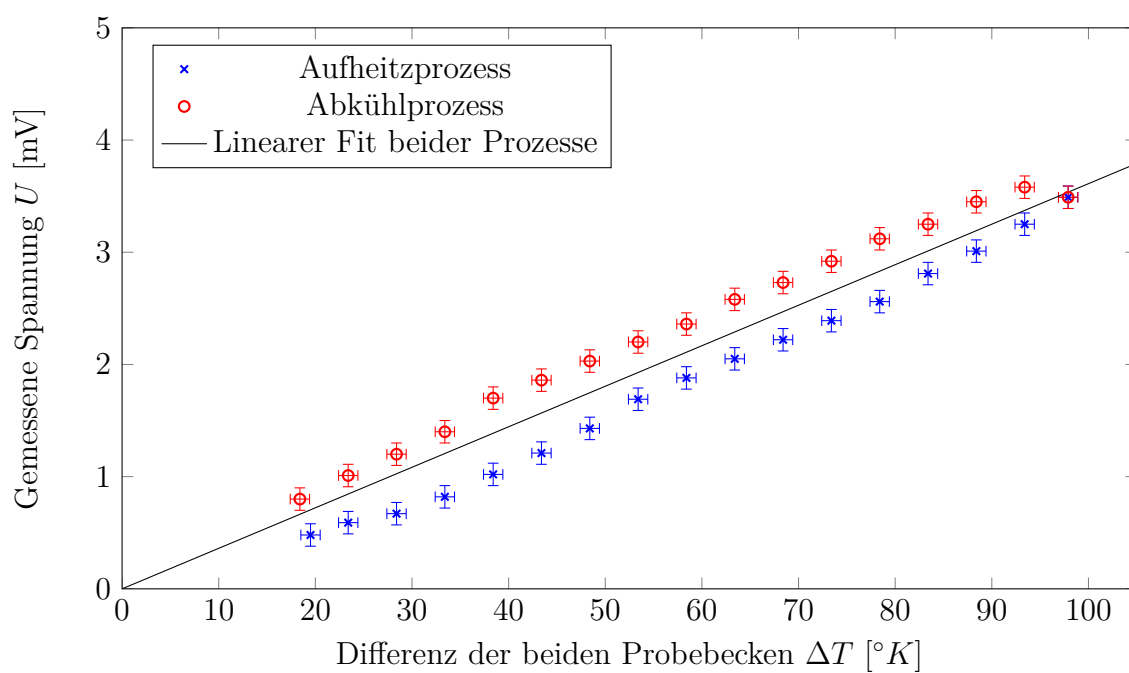
$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_x$ [ $\Omega$ ]	$L_x$ [H]
$260 \pm 5$	$272 \pm 5$	$258,09 \pm 6,88$	$0,1544 \pm 0,0046$

## 2.2. Thermoelement

Der Versuch wird wie in dem Schema 6 aufgebaut und das Referenzbecken wird auf  $T_2 = 1,6^\circ\text{C}$  mit Hilfe von Eiswasser gehalten. Nun wird das Becken 1 mit Hilfe einer Heizplatte erst bis auf  $T_1 = 100^\circ\text{C}$  erhitzt und anschließend wieder auf die Ausgangstemperatur herunter gekühlt. Um den Abkühlprozess zu beschleunigen wird langsam Eis in das Becken 1 gegeben. Während des Aufwärmens und Abkühlens wird bei regelmäßigen Temperaturabständen die Spannung am Voltmeter bestimmt.



**Abbildung 6:** Schematische Darstellung des Thermoelementsaufbau<sup>2</sup>



**Abbildung 7:** Gemessene Spannung gegen Differenz der Temperatur der Probebecken

Dem anscheinend linearen Verlauf und der erwarteten Formel 1.6 nach wurden die Messwerte beider Prozesse zusammen gegen die Funktion  $U = m \cdot \Delta T$  mit *gnuplot* nach

dem *least-squares*-Verfahren gefittet.

Variabel $m$ [ $mV/K$ ]	Varianz der Residuals
0,0361	0,069

**Tabelle 6:** Linearer Fit zu Abbildung 7

Es wurden beide Prozesse zusammengefasst, um die Trägheit der Temperaturbestimmung auszugleichen.

Unsere Variabel  $m$  entspricht dem  $\alpha_{AB}$  aus der Formel 1.6.

## 3. Auswertung

### 3.1. Wheatstonesche Brücke

### 3.2. Thermoelement

Bei dem Vergleich von dem bestimmten  $m = 0,0361 mV/K$  mit den Literaturwerten aus der Abbildung 8 wird deutlich, dass es mehrere Paare geben kann, die so einen Seebeckkoeffizienten haben.

Material	Seebeck Coeff. *	Material	Seebeck Coeff. *	Material	Seebeck Coeff. *
Bismuth	-72	Aluminum	3.5	Tungsten	7.5
Constantan	-35	Lead	4.0	Iron	19
Nickel	-15	Tantalum	4.5	Nichrome	25
Potassium	-9.0	Rhodium	6.0	Antimony	47
Sodium	-2.0	Copper	6.5	Germanium	300
Platinum	0	Gold	6.5	Silicon	440
Mercury	0.60	Silver	6.5	Tellurium	500
Carbon	3.0	Cadmium	7.5	Selenium	900

\*: Units are  $\mu V/^\circ C$ ; all data provided at a temperature of  $0^\circ C$  ( $32^\circ F$ )

**Abbildung 8:** Literaturwerte des Seebeckkoeffizienten<sup>3</sup>

Material 1	Material 2	Resultierender Seebeckkoeffizienten[mV/K]
Konstantan	Platin	-0,035
Kalium	Antimon	0,038
Bismut	Konstantan	-0,037

**Tabelle 7:** Einige mögliche Kombinationen die ein  $\alpha_{AB} \approx m$  ergeben

Das Vorzeichen des Seebeckkoeffizienten ist dabei nicht entscheidend, weil keine bestimmte Messrichtung vorgegeben war und bei Umpolung des Messgeräts der gleiche Wert mal  $-1$  heraus kommt.

So lässt sich sagen, dass die Messung zwar gelungen ist, es sind realistische Werte herausgekommen, jedoch reicht dies nicht aus um das Material genau zu bestimmen.

## A. Anhang

### A.1. Fehlerrechnung

#### A.1.1. Ohmscher Widerstand

Diese Fehlerrechnung wird bei der Gleichstrombrücke und der Wechselstrombrücke mit RC-Gliedern benötigt um die Unsicherheit  $\Delta R_x$  zu bestimmen

$$R_x = \frac{l}{L-l} R_2$$

$$\begin{aligned} \Delta R_x &= \sqrt{\left(\frac{\partial R_x}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial L} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_2} \Delta R_2\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{L}{(L-l)^2} R_2 \delta l\right)^2 + \left(\frac{l}{(L-l)^2} R_2 \Delta L\right)^2 + \left(\frac{l}{L-l} \Delta R_2\right)^2} \end{aligned}$$

#### A.1.2. Reihen- und Parallelschaltung

Da die Gesetze für Widerstände und Kapazitäten die gleiche Form haben, werden sie hier gemeinsam behandelt. Für Reihenschaltung von Widerständen bzw. Parallelschaltung von Kondensatoren gilt

$$R = R_1 + R_2$$

Der Fehler setzt sich entsprechend auch additiv zusammen

$$\Delta R = \Delta R_1 + \Delta R_2$$

Bei Parallelschaltung von Widerständen bzw. Reihenschaltung von Kondensatoren gilt

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$\begin{aligned}\Delta R &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_1} \Delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2} \Delta R_2\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta R_1}{R_1^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_2}{R_2^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2}\right)^2}\end{aligned}$$

### A.1.3. Kapazitäten

Diese Fehlerrechnung wird bei der Errechnung der Kapazität eines Kondensator anhand der Wheatstonebrücke benötigt

$$C_x = \frac{L-l}{l} C_2 = \left(\frac{L}{l} - 1\right) C_2$$

$$\begin{aligned}\Delta C_x &= \sqrt{\left(\frac{\partial C_x}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial C_x}{\partial L} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial C_x}{\partial C_2} \Delta C_2\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{L}{l^2} C_2 \Delta l\right)^2 + \left(\frac{1}{l} C_2 \Delta L\right)^2 + \left(\frac{L-l}{l} \Delta C_2\right)^2}\end{aligned}$$

### A.1.4. Maxwellbrücke

Der Fehler für den Innenwiderstand ergibt sich durch

$$R_x = R_2 R_3 \frac{1}{R_4}$$

$$\begin{aligned}\Delta R_x &= \sqrt{\left(\frac{\partial R_x}{\partial R_2} \Delta R_2\right)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_3} \Delta R_3\right)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_4} \Delta R_4\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(R_3 \frac{1}{R_4} \Delta R_2\right)^2 + \left(R_2 \frac{1}{R_4} \Delta R_3\right)^2 + \left(R_2 R_3 \frac{1}{R_4^2} \Delta R_4\right)^2}\end{aligned}$$

Der Fehler für die Induktivität ergibt sich durch

$$L_x = R_2 R_3 C_4$$



$$\begin{aligned}\Delta L_x &= \sqrt{\left(\frac{\partial L_x}{\partial R_2} \Delta R_2\right)^2 + \left(\frac{\partial L_x}{\partial R_3} \Delta R_3\right)^2 + \left(\frac{\partial L_x}{\partial C_4} \Delta C_4\right)^2} \\ &= \sqrt{(R_3 C_4 \Delta R_2)^2 + (R_2 C_4 \Delta R_3)^2 + (R_2 R_3 \Delta C_4)^2}\end{aligned}$$