

Versuchsprotokoll E9

Magnetfelder

21.01.2015



Alexander Schlüter, Josh Wewers, Frederik Edens

Gruppe 15/mi

`alx.schlueter@gmail.com`

`joshw@muenster.de`

`f_eden01@wwu.de`

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	1
1.1. Biot-Savart-Gesetz	1
1.2. Feld einer Leiterschleife	1
1.3. Feld einer Helmholtz-Spule	2
1.4. Feld einer langen Zylinderspule	2
1.5. Feld eines magnetischen Quadrupols	3
1.6. Messen von Magnetfeldern	3
2. Versuche	4
2.1. Versuchskomponenten	4
2.2. Magnetfeld einer langen Spule	6
2.3. Axialkomponente des Magnetfeldes einer kurzen Spule	7
2.4. Magnetfeld in horizontal Symmetrieebene einer kurzen Spule	8
2.5. Feldvektoren	8
2.6. Magnetfeld einer Helmholtz-Spule	8
3. Diskussion	10
3.1. Lange Spule	10
3.2. Helmholtz-Spule	11
A. Anhang	13
A.1. Fehlerrechnung	13
A.1.1. Magnetfeld aus Induktionsspannung	13
A.2. Volumen Zylinder	13

1. Einführung

In diesem Versuch werden die Magnetfelder von verschiedenen Spulen und Spulenarrangements untersucht. Insbesondere sind dies eine lange Zylinderspule, eine kurze Ringspule, eine Helmholtz-Spule und ein magnetisches Quadrupol. Die theoretischen Grundlagen dieser magnetischen Felder lassen sich auf vier einfachen Gleichungen aufbauen, den so genannten Maxwell-Gleichungen. Darauf wird hier jedoch verzichtet.

1.1. Biot-Savart-Gesetz

Das Biot-Savart-Gesetz erlaubt die Bestimmung von magnetischen Feldern, die durch allgemeine stromdurchflossene Leiter erzeugt werden. Es lässt sich in differentieller Form und äquivalent in Integralform darstellen

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.1)$$

Dieses Gesetz sagt im wesentlichen aus, dass Leiter und Leiterkombinationen, bei denen die Stromstärke I in allen Leitern gleich ist, sich das magnetische Feld B alleine aus der Geometrie des Leiters errechnen lässt und proportional zu Stromstärke ist. Daraus lässt sich wenigstens numerisch für beliebige, bekannte Leitergeometrie die Feldstärke und Richtung des Magnetfeldes an jedem Ort berechnen. Einige für den Versuch relevanten Spezialfälle werden im Folgenden betrachtet.

1.2. Feld einer Leiterschleife

Eine Leiterschleife ist eine Spule aus nur einer Windung, oder mit gegen den Radius vernachlässigbarer Länge. Somit wird für den Fall einer Spule zur Berechnung angenommen, dass alle Windungen am gleichen Ort sind und somit die Feldstärke proportional zur Windungszahl zunimmt. Zudem zerlegt man das Magnetfeld in eine Komponente B_{\perp} senkrecht zur Symmetrieachse und eine Komponente B_{\parallel} parallel zur Achse. Auf der Symmetrieachse heben sich die B_{\perp} Komponenten, die durch die jeweils gegenüber liegenden Spulenstücke erzeugt werden gegenseitig auf, so dass in der Summe $B_{\perp} = 0$ T wird. Die Axialkomponente aller Spulenstücke sind gleich gerichtet. Daher lässt sich diese

durch ein Integral über die Leiterschleife berechnen

$$\begin{aligned} B_{\parallel} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R \\ &= \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Für mehrere Windungen entspricht die Feldstärke das entsprechende Vielfache.

1.3. Feld einer Helmholtz-Spule

Eine Helmholtz-Spule besteht aus zwei gleichen koaxial angeordneten Leiterschleifen. Diese haben den Radius R sowie Abstand $d = R$ voneinander. In beiden Schleifen soll der gleiche Strom in die gleiche Richtung fließen. Das Magnetfeld ergibt sich dann aus der Summe der Felder der beiden Leiterschleifen, die jeweils um $R/2$ in positive bzw. negative Achsenrichtung vom Ursprung verschoben sind. Das Gesamtfeld bei Windungszahl N ist somit

$$B = N \cdot \frac{\mu_0}{2} I \left(\frac{R^2}{\left(R^2 + \left(x + \frac{R}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{R^2}{\left(R^2 + \left(x - \frac{R}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) \quad (1.3)$$

1.4. Feld einer langen Zylinderspule

Bei der langen Zylinderspule sind viele Windungen N auf eine Länge L gleichmäßig verteilt. Zur besseren Berechenbarkeit geht man in sehr guter Näherung von einer homogenen Windungsdichte $n = N/L$ aus, mit der die Summe der Felder aller Windungen als Integral über die Länge der Spule darstellen lässt.

$$\begin{aligned} B &= N \cdot \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2 \int_0^L \frac{da}{(R^2 + (x-a)^2)^{3/2}}}{L} = n \frac{\mu_0}{2} I R^2 \int_0^L \frac{da}{(R^2 + (x+a)^2)^{3/2}} \\ B &= n \frac{\mu_0}{2} I R^2 \left(\frac{x+L}{\sqrt{R^2 + (x+L)^2}} - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Das Feld ist in der Mitte der Spule am stärksten und nahezu konstant. Erst nahe dem Rand beginnt das Feld stark abzuswächen mit Wendepunkten genau an den Enden der Spule.

1.5. Feld eines magnetischen Quadrupols

Magnetische Quadrupole können ähnlich der Helmholtz-Spule durch zwei koaxiale Leiterschleifen mit je N Windungen gebildet werden. Jedoch entspricht im Gegensatz zur Helmholtz-Spule der Abstand $d = 2R$, also den doppelten Radius anstatt den halben. Zudem soll die Stromstärke in den beiden Schleifen zwar im Betrag gleich sein, jedoch entgegengesetzt gerichtet. In hinreichend großer Entfernung von den Schleifen gilt auf der Symmetrieachse für das Magnetfeld

$$B = \frac{3\mu_0 I R^3}{x^4} \quad (1.5)$$

1.6. Messen von Magnetfeldern

Nach dem ampèreschen Gesetz wird in eine Leiterschleife der Fläche F und Windungszahl N eine Spannung von

$$U = \dot{B} N F \quad (1.6)$$

induziert. Bei Anlegen von Wechselstrom wird auch ein mit gleicher Frequenz oszillierendes magnetisches Feld

$$B(t) = B_0 \sin(\omega t) \quad (1.7)$$

erwartet. Somit gilt

$$\dot{B}(t) = \omega B_0 \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad \dot{B}_{eff} = \omega B_{eff} \quad (1.8)$$

setzt man dies in (1.6) ein, so erhält man

$$U_{eff} = \omega B_{eff} N F \quad \Leftrightarrow \quad B_{eff} = \frac{U_{eff}}{\omega N F} \quad (1.9)$$

Die induzierte Spannung lässt sich zum Beispiel mit einem Multimeter einfach und zuverlässig messen.

2. Versuche

2.1. Versuchskomponenten

Die Versuchskomponenten, die zur Durchführung verwendet werden sind eine Messspule, eine lange Spule und zwei Spulen kurze Spulen. Beide kurzen Spulen zusammen werden später auch, je nach Schaltung, als Quadrupol und Helmholtz-Spule verwendet wird. Die relevanten Eigenschaften sind zum Teil den Beschriftungen der Bauteile zu entnehmen und werden dann als nicht Fehlerbehaftet angenommen. Der Durchmesser der kurzen Spule ist nicht angegeben und wurde mit einem Messschieber gemessen. Die Messwerte sind in Tabelle 1 zu finden. Zudem wurde die induzierte Spannung an der Messspule gemessen, wenn in den anderen Spulen keine Strom floss. Diese betrug 0 mV in der feinsten Einstellung des Multimeters, so dass im Folgenden von keinem Offset der gemessenen Induktionsspannungen ausgegangen wird.

Messspule		lange Spule		kurze Spule	
Messgröße	Messwert	Fehler	Messgröße	Messwert	Fehler
eff. Fläche	$0,157 \text{ m}^2$	(abgelesen)	Windungszahl	330	(abgelesen)
			Radius	20 mm	(abgelesen)
			Länge	300 mm	(abgelesen)
			Windungszahl	330	(abgelesen)
			Innendurchmesser	$(14,98 \pm 0,02) \text{ cm}$	
			Außendurchmesser	$(11,98 \pm 0,02) \text{ cm}$	

Tabelle 1: Physikalische Eigenschaften der Spulen

2.2. Magnetfeld einer langen Spule

In diesem Feld wird das Magnetfeld entlang der Mittelachse einer langen Spule untersucht. Dazu wird die Spule an eine Wechselstromquelle von nicht mehr als 3 A angeschlossen. Bei höherer Stromstärke könnte sich die Spule überhitzen und somit geschädigt werden. Jedoch erwärmt sich die Spule auch unterhalb von 3 A, so dass der Strom nachgeregelt werden muss um dem zunehmenden ohmschen Widerstand entgegen zu wirken. Daraufhin wird die Messspule an verschiedene Stellen im entstehenden Magnetfeld der langen Spule geschoben und die jeweils induzierte Spannung gemessen.

Aus der Theorie der langen Spule ist zu erwarten, dass das Magnetfeld mittig in der Spule nahezu homogen ist, während es am Rand und außerhalb der Spule abfällt. Der Abfall ist dabei weit von der Spule entfernt wieder schwächer als unmittelbar am Rand. In unserem Fall betrug der Spulenstrom während der Durchführung $I = (2,90 \pm 0,03) \text{ A}$.

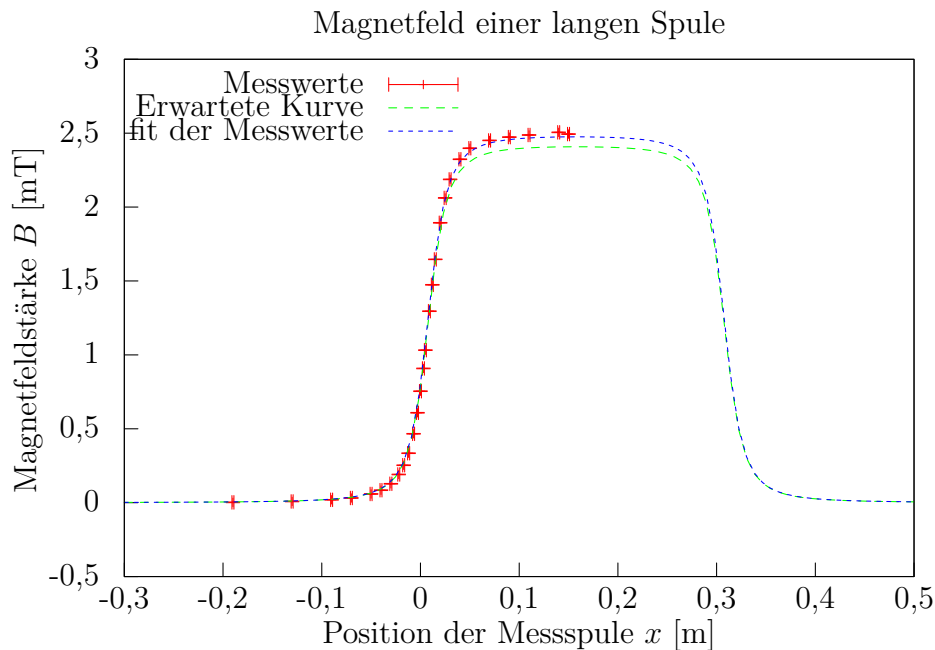


Abbildung 1: Magnetfeld der langen Spule in Abhängigkeit der Position

Im Diagramm wurde die Magnetfeldstärke gegen die Position der Messspule aufgetragen. Dazu wurden zunächst mit Hilfe von (??) die gemessenen Spannungen in die Feldstärke umgerechnet. Die dazu gehörige Fehlerrechnung ist im Anhang unter (??). Dann wurde zum Vergleich die Kurve die nach (??) zu erwarten ist eingezeichnet so

wie ein Fit der Messwerte nach dem *least squares Verfahren* mit Hilfe von *Gnuplot*. Der im beim Fit ermittelte Wert für $\mu_r In$ beträgt $\mu_r In = (1987,2 \pm 6,9) \text{ A m}^{-1}$. Der aus gemessener Stromstärke und abgelesener Windungszahl und Spulenlänge errechnete Vergleichswert beträgt $\mu_r In = (1933,3 \pm 20,0) \text{ A m}^{-1}$. Da nur die Stromstärke als Fehlerbehaftet angenommen wird ergibt sich der Fehler aus dem gleich bleibenden relativen Fehler.

2.3. Axialkomponente des Magnetfeldes einer kurzen Spule

Analog zur langen Spule wird die Axialkomponente des Magnetfeldes auf der Achse einer kurzen Spule vermessen. Diesmal wird der Spulenstrom auf $I = (0,98 \pm 0,01) \text{ A}$ gehalten.

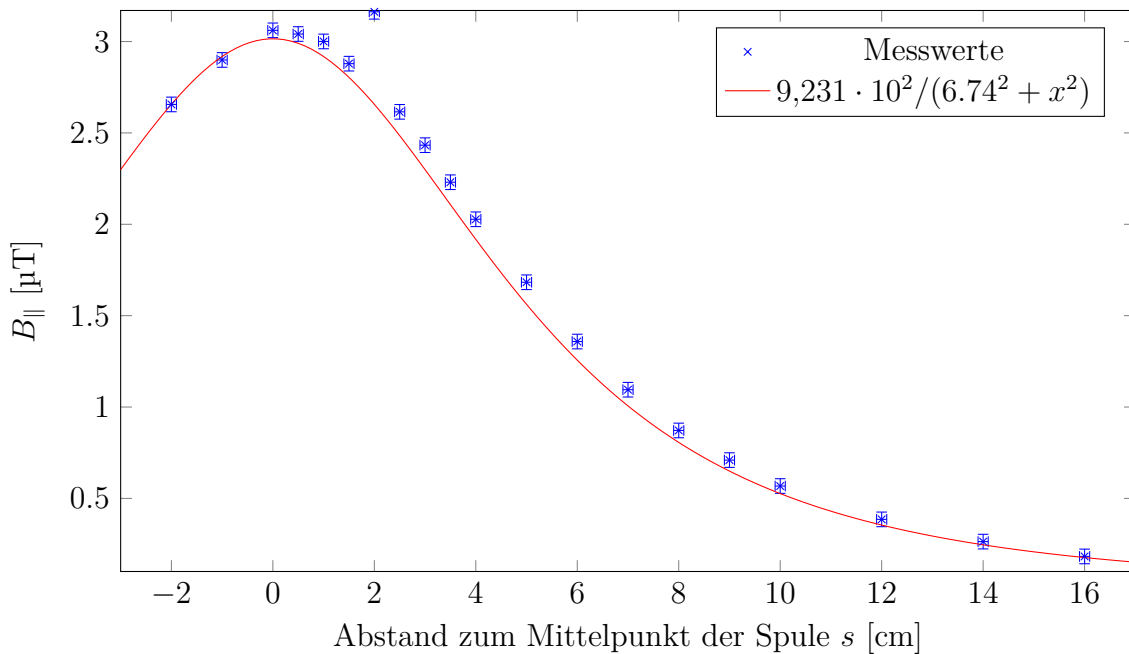


Abbildung 2: Messwerte und berechnete Kurve für B_{\parallel} auf der Achse einer kurzen Spule

Die Kurve im Diagramm entspricht dem Zusammenhang Gleichung (1.2) aus der Theorie, wobei $\frac{\mu_0 \cdot m}{2\pi} \approx 9,231 \cdot 10^2 \mu\text{T cm}^2$ und $R = 6,74 \text{ cm}$ eingesetzt wurden. Zu sehen ist, dass der Kurvenverlauf im Allgemeinen mit den Messwerten übereinstimmt. Allerdings weichen fast alle Messwerte leicht nach oben ab. Der Wert für $s = 2 \text{ cm}$ weicht so weit nach oben ab, dass wir einen groben Messfehler vermuten.

2.4. Magnetfeld in horizontal Symmetrieebene einer kurzen Spule

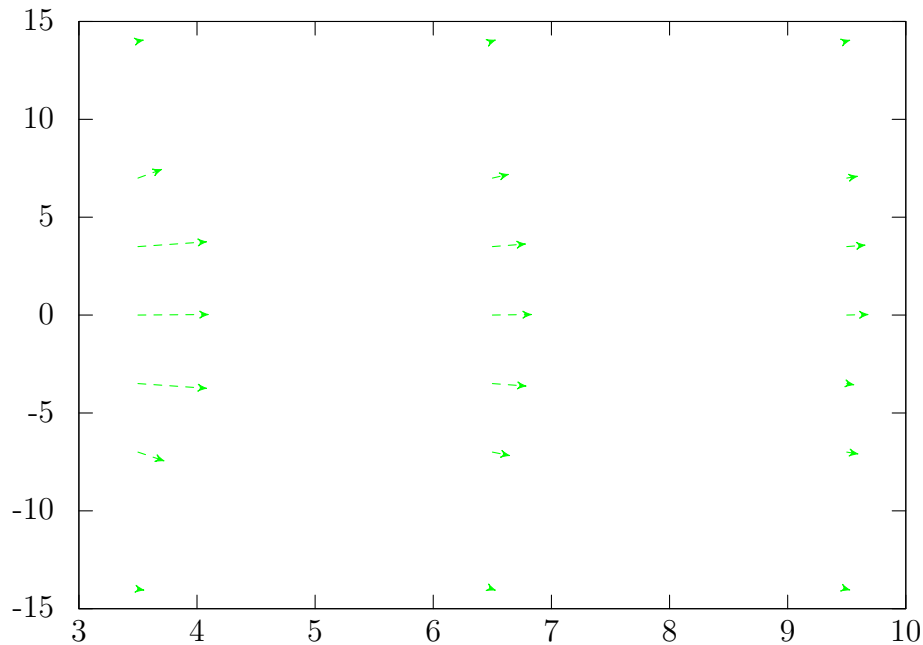


Abbildung 3: Feldvektoren des \vec{B} -Feldes bei einer kurzen Spule

Hier sind die Feldvektoren zu sehen, wobei der Mittelpunkt der Spule im Punkt $(0, 0)$ liegt. Es wurde entlang dreier Linien senkrecht zur Achse jeweils die Axial- und die Radialkomponente des B -Feldes bestimmt. Die achsennahen Feldvektoren verlaufen fast parallel zur Achse, während die weiter von der Achse entfernten Feldvektoren sich immer stärker von der Achse weg drehen.

2.5. Magnetfeld einer Helmholtz-Spule

Die Helmholtz-Spule wird aufgebaut, indem zwei kurze Spulen im Abstand entsprechend des Radius der Spulen aufgebaut werden. Dann wird eine Stromquelle angeschlossen, so dass in beiden Spulen der gleiche Strom in die gleiche Richtung fließt. Um sicher zu stellen, dass in beiden Spulen der gleiche Strom fließt, sollten diese in Reihe geschaltet sein. Der maximale Strom darf hierbei 1 A betragen um Überlastung vorzubeugen und muss um dem durch Erwärmung zunehmenden ohmschen Widerstand der Spulen entgegen zu wirken gegebenen Falls während der Durchführung nachgeregelt werden.

Daraufhin schiebt man die Messspule an verschiedene Stellen entlang der Symmetrie-Achse der Helmholtzspule und misst anhand des induzierten Stroms an der Spule die Axialkomponente des Magnetfeldes aus. Dieses Vorgehen wiederholt man mit einer um 90° gedrehten Messspule und erhält entsprechend die Radialkomponente, sowie mittig zwischen den Spulen entlang einer Achse senkrecht zur Symmetrieachse jeweils für Axial- und Radialkomponente.

Die Theorie der Helmholtz-Spule lässt zwischen den Spulen ein homogenes Feld erwarten, das erst nahe der Spulen beginnt abzunehmen. Dieses Feld ist radial ausgerichtet, so dass eine verschwindende Radialkomponente erwartet wird.

Während unserer Durchführung betrug der Spulenstrom $I = (1,000 \pm 0,003) \text{ A}$.

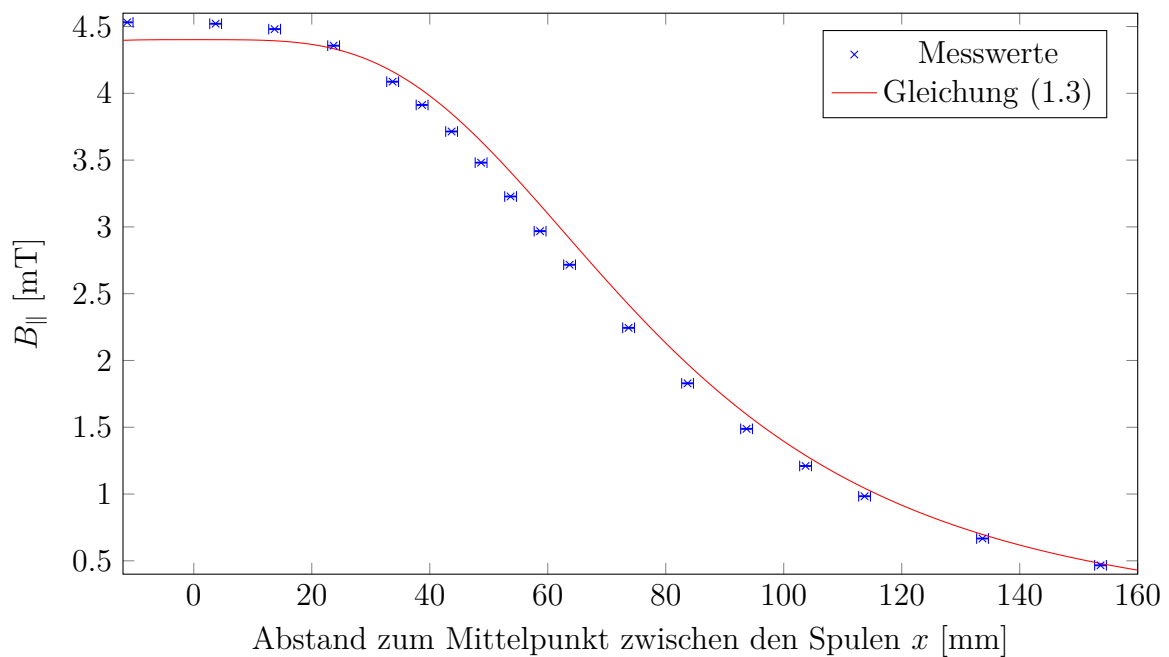


Abbildung 4: Messwerte und berechnete Kurve für B_{\parallel} auf der Achse einer Helmholtz-Spule

Die Radialkomponente wurde 6 mal auf der Achse gemessen. Innerhalb des Fehlers war $B_{\perp} = 0$ wie erwartet.

Nun wurden beide Komponenten in der Mitte der Spulen senkrecht zur Achse gemessen. Die zur Radialkomponente gemessene Spannung lag jeweils deutlich unter 1 mV, was wir auf leichte Stellungsfehler der Testspule zurückführen (siehe Diskussion).

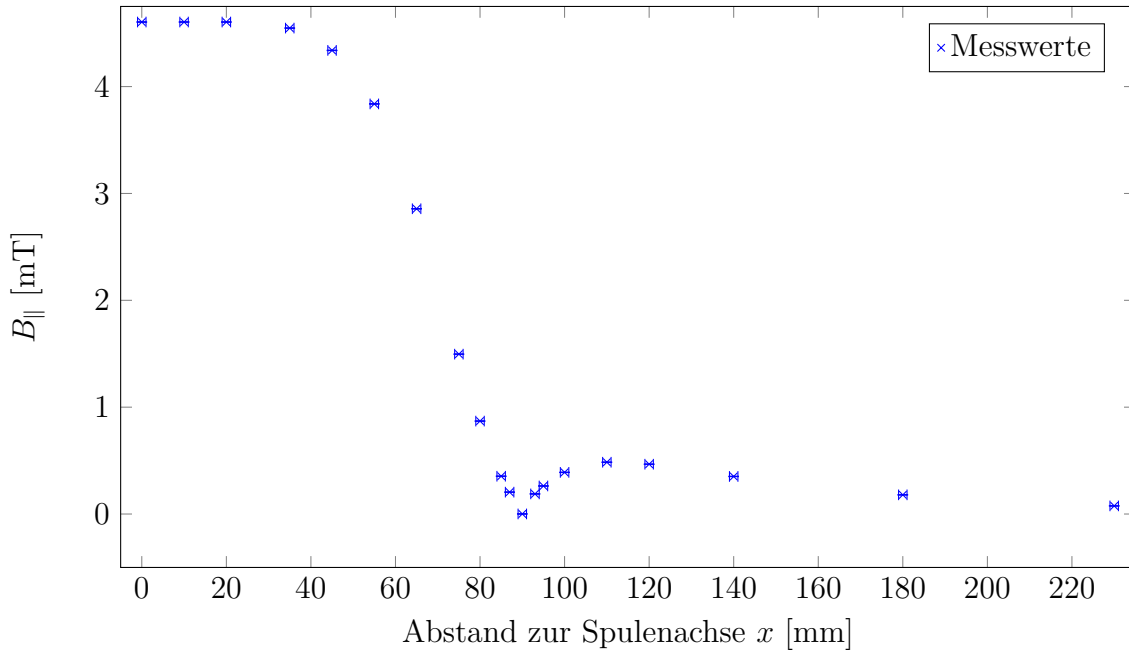


Abbildung 5: Messwerte für B_{\parallel} senkrecht zur Achse bei einer Helmholtz-Spule

Die Axialkomponente hat in der Mitte der Spule wie erwartet fast denselben Wert wie bei der ersten Messung in Abb. 4. Nach außen hin nimmt diese ab, bis ein Minimum bei ca. (90 ± 2) mm Abstand erreicht wird. Sie nimmt dann bis auf weniger als ein fünftel des ursprünglichen Maximalwertes zwischen den Spulen zu, um anschließend langsam wieder abzufallen.

3. Diskussion

3.1. Lange Spule

Das homogene Feld entlang der Achse der Spule in der Mitte ist gut zu erkennen. Von der Mitte bis 40 mm vor dem Ende der Spule ist das Magnetfeld um weniger als 10 % gefallen. Ab etwa 30 mm vor Spulenende beginnt das Feld immer schneller abzufallen. Im Kurvenverlauf stimmt die tatsächlich gemessene Kurve sehr gut mit der aus der Theorie erwarteten überein. Lediglich im inneren der Spule ist das Feld geringfügig stärker als erwartet. Dies könnte darauf zurück zu führen sein, dass die metallische Messspule eine höhere relative Permeabilität als die umgebende Luft besitzt und somit das Magnetfeld verstärkt, wenn sie sich in der langen Spule befindet. Jedoch haben wir die Messspule

nicht auf ferromagnetische Eigenschaften hin untersucht. Dennoch ist der Fehler nur sehr geringfügig. Berücksichtigt man die Grenzen der Vertrauensintervalle, so liegt die relative Abweichung gerade mal bei etwa 1,36 %.

3.2. Helmholtz-Spule

Bei der Helmholtzspule ist zunächst gut sichtbar, dass die Radialkomponente vollständig verschwindet. Alle Messwerte sind nahe 0 V und konnten bei der Durchführung sehr leicht durch eine nicht exakt ausgerichtete Messspule verfälscht werden. Dies war beim Ausrichten der Spule gut zu beobachten. Selbst eine geringe Verdrehung konnte in Messwerten der Größenordnung 20 mV resultieren. Selbst bei einer Verdrehung von 6° werden etwa $\sin(6^\circ) \approx 10\%$ der Axialkomponente gemessen. Die Axialkomponente des Magnetfeldes ist zwischen den Leiterschleifen nahezu homogen. Auf der Achse nimmt das Feld bis zur einschließenden Leiterschleife hin um kaum mehr als 10 % ab. Auch mittig zwischen den Schleifen nimmt das Feld mit zunehmenden Abstand von der Achse zunächst nur Geringfügig ab. Erst zwischen 45 mm und 55 mm hat das Feld mehr als 10 % seiner maximalen Stärke verloren. Zudem weißt das Feld hier mit zunehmenden Abstand eine weitere Besonderheit auf. Bei etwa 90 mm Abstand von der Achse verschwindet das Feld nahezu. Daraufhin nimmt es zunächst zu aber verschwindet dann für große Abstände vollständig. Dies lässt eine gegenseitige Auslöschung der durch die beiden Leiterschleifen erzeugten Magnetfelder vermuten.

Zur Abschätzung des Volumens, in dem die Feldstärke zwischen Leiterschleifen um weniger als 10 % abfällt, wird dieses Volumen als Zylinder angenommen. Dies entspricht zwar nicht der Realität, da bei einer genauen Rechnung berücksichtigt werden müsste, dass entlang der Achse mit Abnahme der Feldstärke auf der Achse auch der Radius um die Achse kleiner wird. Da jedoch nahe der Mitte die Intensität- und somit auch die Radiusabnahme sehr gering ist, wird dies als hinreichend genaue Näherung für die Abschätzung verwendet. Da die Feldstärke entlang der Achse erstmals zwischen 10 mm und 0 mm unter 90 % des Maximums abfällt, wird die Höhe des Zylinders durch $h = d - (10 \pm 10)$ mm abgeschätzt. Analog wird der Radius durch $R = (50 \pm 5)$ mm abgeschätzt. Mit der Volumenformel eines Zylinders und der dazu gehörigen Fehlerrechnung (A.2) im Anhang ergibt sich ein Volumen von

$$V = (490,1 \pm 98,4) \text{ cm}^3$$

A. Anhang

A.1. Fehlerrechnung

A.1.1. Magnetfeld aus Induktionsspannung

Da Windungszahl und Fläche der Spule sowie die Frequenz des Wechselstroms als nicht fehlerbehaftet angesehen werden, muss nur die Unsicherheit bei der Spannungsmessung berücksichtigt werden. Es gilt

$$\Delta B_{eff} = \left| \frac{\partial}{\partial U_{eff}} \frac{U_{eff}}{\omega N F} \Delta U_{eff} \right| = \left| \frac{\Delta U_{eff}}{\omega N F} \right| \quad (\text{A.1})$$

A.2. Volumen Zylinder

Das Volumen eines Zylinders ist gegeben durch

$$V = \pi h R^2$$

Nach gauß'scher Fehlerfortpflanzung ist die Unsicherheit gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pi \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial h} h R^2 \Delta h \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial R} h R^2 \Delta R \right)^2} \\ &= \pi \sqrt{(R^2 \Delta h)^2 + (2h R \Delta R)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$