

# Versuchsprotokoll E3

Millikan

17.12.2014



Alexander Schlüter, Josh Wewers, Frederik Edens

Gruppe 15/mi

`alx.schlueter@gmail.com`

`joshw@muenster.de`

`f_eden01@wwu.de`

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einführung</b>	<b>1</b>
1.1. Korrektur . . . . .	2
<b>2. Durchführung</b>	<b>2</b>
<b>3. Auswertung</b>	<b>2</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>6</b>
A.1. Formelherleitung für $r$ und $Q$ . . . . .	6
A.2. Zeichnung zu den Kräftegleichgewichten . . . . .	6
A.3. Fehlerrechnung . . . . .	6

# 1. Einführung

Mit dem Millikanversuch ist es möglich durch Beobachtung der Geschwindigkeit von geladenen Flüssigkeitstropfen in einem Kondensator möglich Rückschlüsse auf die Elementarladung zu ziehen. Als Flüssigkeit wurde ein Öl gewählt, da es sich im Gegensatz zu Wasser kaum verflüchtigt. Diese Eigenschaft ist notwendig, da die Masse der Tropfen während der Beobachtung konstant bleiben muss.

Wenn sich ein Öltropfen zwischen den Kondensatorplatten befindet, wirken die folgenden Kräfte auf ihn:

$$\begin{array}{llll} \text{Gewichtskraft} & \vec{F}_G & = & m\vec{g} = V\rho_{\text{Öl}}\vec{g} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\text{Öl}}\vec{g} \\ \text{Kraft im elektrischen Feld} & \vec{F}_{el} & = & Q\vec{E} \text{ mit } |\vec{E}| = \frac{U}{d} \\ \text{Auftrieb} & \vec{F}_A & = & V\rho_L\vec{g} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_L\vec{g} \\ \text{Reibungskraft} & \vec{F}_R & = & 6\pi\eta r\vec{v} \end{array}$$

Nach kurzer Zeit spielt sich zwischen diesen Kräften ein Gleichgewicht ein, welches je nach Polung der Kondensatoren und Bewegungsrichtung des Tropfen unterschiedlich ist. Unter der Bedingung, dass sich der Tropfen nicht zu schnell bewegen darf, aber auch nicht fast stehen darf, weil beide Fälle die Messung durch die kurzen zumessenden Zeiten oder den Brownschen Effekt der Molekularbewegung ungenauer machen, ergeben sich folgende Gleichgewichte:

1. Bei ausgeschaltetem elektrischen Feld:

$$|\vec{F}_G| = |\vec{F}_R| + |\vec{F}_A| \quad (1.1)$$

2. Bei senkrecht nach unten orientiertem elektrischen Feld und Kraft im elektrischen Feld stärker als die um die Auftriebskraft verminderte Gewichtskraft:

$$|\vec{F}_G| + |\vec{F}_R| = |\vec{F}_{el}| + |\vec{F}_A| \quad (1.2)$$

Dabei ist es wichtig, dass die beiden Kondensatorplatten waagerecht zueinander sind, da ansonsten die Kraft  $\vec{F}_{el}$  nicht parallel zu den anderen Kräften wirken.

Diese beiden Formel 1.1 und 1.2 können nun nach dem Radius  $r$  und der Ladung  $Q$

des Tropfen umgestellt werden. (Herleitung siehe Anhang)

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta v_{\downarrow}}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L)g}} \quad (1.3)$$

$$Q = \frac{18\pi d}{U} \sqrt{\frac{\eta^3 v_{\downarrow}}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L)g}} (v_{\downarrow} + v_{\uparrow}) \quad (1.4)$$

### 1.1. Korrektur

Da man Tropfen in einer Größenordnung der freien Weglänge der Luftmoleküle beobachtet, gilt das Stokessche Gesetz nicht bzw. es muss modifiziert werden, da es nur für eine homogene Flüssigkeitsumgebung gilt. So muss mit einer korrigierten Viskosität gerechnet werden.

$$\eta_{\text{kor}} = \frac{\eta}{1 + \frac{A\lambda}{r}} \quad (1.5)$$

Wobei mit der mittleren freien Weglänge in Luft  $\lambda$ , dem Tröpfchenradius  $r$  und einer empirischen Konstante  $A = 0,863$  gerechnet wird.

## 2. Durchführung

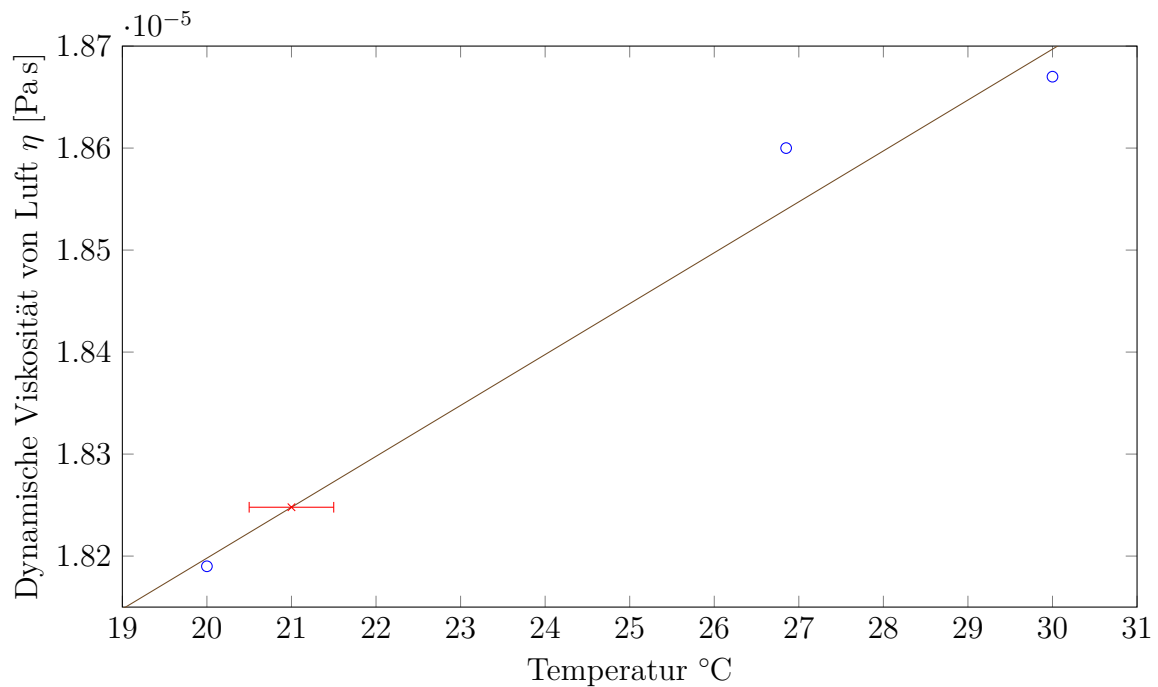
Bei der Zeitbestimmung für die Strecke die ein Tropfen zurücklegt, werden die Zeiten separat für fünf Durchgänge bestimmt und später gemittelt, um eventuelle grobe Messfehler erkennen zu können.

## 3. Auswertung

Mit *gnuplot* wird nach dem least-squares-Verfahren ein linearer Fit gegen die drei in der Anleitung<sup>1</sup> angegebenen Werte durchgeführt, um die dynamische Viskosität  $\eta$  von Luft bei  $T = (21,0 \pm 0,5)^\circ\text{C}$  (gemessen mit Thermometer) zu bestimmen.

---

<sup>1</sup>Markus Donath und Anke Schmidt. *Anleitung zu den Experimentellen Übungen zur Mechanik und Elektrizitätslehre*. Auflage Wintersemester 2014/2015. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Physikalisches Institut, Oktober 2014.

**Abbildung 1:** Fit der dynamischen Viskosität von Luft

Wir lesen  $\eta = (1,824 \pm 0,002) \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$  ab.

Der Luftdruck wurde mit einem Barometer gemessen:  $p = (990,9 \pm 0,1) \text{ mbar}$ .

Die Dichte der Luft berechnen wir zu  $\rho_L = (T_0 \cdot p / (T \cdot p_0)) = 1,204 \text{ kg/m}^3$ .

Für die mittlere freie Weglänge ergibt sich  $\lambda = 3\eta \cdot \sqrt{\pi\rho_L/(8p)}/\rho_L = 99,32 \text{ nm}$ .

Wir führen mit Gleichung (1.5) pro beobachtetes Teilchen eine Iteration durch, um  $\eta_{\text{kor}} zu bestimmen. Die Werte liegen im Bereich zwischen  $0,91\eta$  und  $0,96\eta$ .$

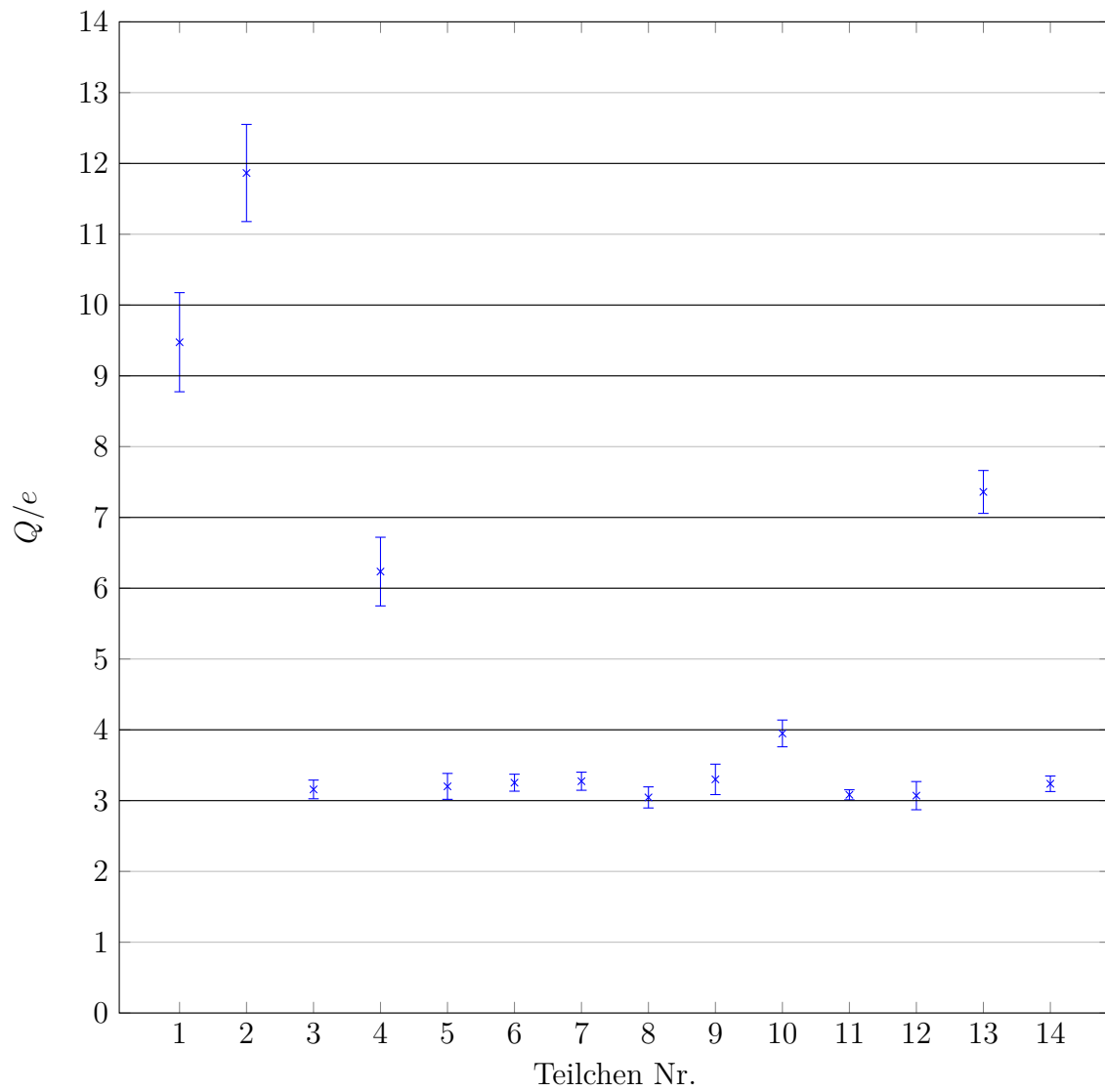
Die Dichte von Öl wurde gemittelt aus den in<sup>2</sup> angegebenen Werten:  $\rho_{\text{Öl}} = 877 \text{ kg/m}^3 - (21 - 15)/(25 - 15) \cdot 6 \text{ kg/m}^3 = 834,4 \text{ kg/m}^3$ .

Wir berechnen nun die Mittelwerte der Steig- und Fallzeiten, daraus  $v_{\uparrow}$  bzw.  $v_{\downarrow}$  und daraus mithilfe von Gleichung (1.3)  $r$  und mithilfe von Gleichung (1.4)  $Q$ . Wir tragen  $Q/e$  für jedes gemessene Teilchen in ein Diagramm ein:

<sup>2</sup>Donath und Schmidt, *Anleitung zu den Experimentellen Übungen zur Mechanik und Elektrizitätslehre*.

$U$ [V]	$t_{\uparrow}$ [s]	$t_{\downarrow}$ [s]	$v_{\uparrow}$ [mm/s]	$v_{\downarrow}$ [mm/s]	$r$ [ $\mu\text{m}$ ]	$Q$ [aC]	$Q/e$
578 $\pm$ 2	10,55 $\pm$ 0,63	4,52 $\pm$ 0,27	0,0948 $\pm$ 0,0057	0,2214 $\pm$ 0,0131	1,460 $\pm$ 0,043	1,518 $\pm$ 0,112	9,475 $\pm$ 0,700
575 $\pm$ 2	18,57 $\pm$ 1,19	3,47 $\pm$ 0,15	0,0538 $\pm$ 0,0034	0,2880 $\pm$ 0,0120	1,665 $\pm$ 0,035	1,901 $\pm$ 0,110	11,865 $\pm$ 0,686
571 $\pm$ 2	23,73 $\pm$ 1,40	9,06 $\pm$ 0,27	0,0421 $\pm$ 0,0025	0,1104 $\pm$ 0,0033	1,031 $\pm$ 0,016	0,506 $\pm$ 0,021	3,158 $\pm$ 0,132
571 $\pm$ 2	21,92 $\pm$ 1,30	5,48 $\pm$ 0,32	0,0456 $\pm$ 0,0027	0,1826 $\pm$ 0,0107	1,326 $\pm$ 0,039	0,999 $\pm$ 0,078	6,235 $\pm$ 0,485
569 $\pm$ 2	18,28 $\pm$ 1,92	9,58 $\pm$ 0,36	0,0547 $\pm$ 0,0058	0,1043 $\pm$ 0,0039	1,002 $\pm$ 0,019	0,513 $\pm$ 0,029	3,201 $\pm$ 0,183
500 $\pm$ 2	11,60 $\pm$ 0,75	12,59 $\pm$ 0,15	0,0862 $\pm$ 0,0055	0,0794 $\pm$ 0,0009	0,874 $\pm$ 0,005	0,521 $\pm$ 0,019	3,253 $\pm$ 0,120
500 $\pm$ 2	12,55 $\pm$ 0,84	12,06 $\pm$ 0,22	0,0797 $\pm$ 0,0054	0,0829 $\pm$ 0,0015	0,893 $\pm$ 0,008	0,524 $\pm$ 0,020	3,274 $\pm$ 0,128
564 $\pm$ 2	11,38 $\pm$ 0,94	12,07 $\pm$ 0,27	0,0879 $\pm$ 0,0073	0,0828 $\pm$ 0,0018	0,893 $\pm$ 0,010	0,488 $\pm$ 0,024	3,045 $\pm$ 0,149
564 $\pm$ 2	14,14 $\pm$ 0,92	10,22 $\pm$ 0,55	0,0707 $\pm$ 0,0046	0,0978 $\pm$ 0,0053	0,970 $\pm$ 0,026	0,529 $\pm$ 0,034	3,300 $\pm$ 0,215
563 $\pm$ 2	12,03 $\pm$ 0,73	9,29 $\pm$ 0,34	0,0831 $\pm$ 0,0050	0,1077 $\pm$ 0,0039	1,018 $\pm$ 0,018	0,633 $\pm$ 0,030	3,949 $\pm$ 0,189
564 $\pm$ 2	24,07 $\pm$ 1,38	9,29 $\pm$ 0,10	0,0415 $\pm$ 0,0024	0,1076 $\pm$ 0,0012	1,018 $\pm$ 0,006	0,494 $\pm$ 0,011	3,082 $\pm$ 0,071
563 $\pm$ 2	15,62 $\pm$ 0,56	10,52 $\pm$ 0,60	0,0640 $\pm$ 0,0023	0,0950 $\pm$ 0,0054	0,956 $\pm$ 0,027	0,492 $\pm$ 0,032	3,070 $\pm$ 0,199
563 $\pm$ 2	7,86 $\pm$ 0,14	6,28 $\pm$ 0,23	0,1272 $\pm$ 0,0022	0,1592 $\pm$ 0,0059	1,238 $\pm$ 0,023	1,179 $\pm$ 0,048	7,360 $\pm$ 0,303
564 $\pm$ 2	14,64 $\pm$ 0,64	10,26 $\pm$ 0,26	0,0683 $\pm$ 0,0030	0,0974 $\pm$ 0,0024	0,968 $\pm$ 0,012	0,519 $\pm$ 0,018	3,238 $\pm$ 0,110

Tabelle 1: Messergebnisse

**Abbildung 2:** Fit der dynamischen Viskosität von Luft

## A. Anhang

### A.1. Formelherleitung für $r$ und $Q$

Aus der Formel 1.1 ergibt sich nach dem Einsetzen der Kraftformeln

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Öl}} \vec{g} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_L \vec{g} + 6\pi\eta r \vec{v}_{\downarrow} \\
 \iff \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_L) \vec{g} &= 6\pi\eta r \vec{v}_{\downarrow} \\
 \iff r^2 = \frac{9\eta \vec{v}_{\downarrow}}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L) \vec{g}} &\iff r = \sqrt{\frac{9\eta \vec{v}_{\downarrow}}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L) \vec{g}}}
 \end{aligned}$$

Aus der Formel 1.2 ergibt sich nach dem Einsetzen der Kraftformeln und der Formel 1.3

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Öl}} \vec{g} + 6\pi\eta r \vec{v} &= Q \frac{U}{d} + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_L \vec{g} \\
 \iff \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_L) \vec{g} + 6\pi\eta r \vec{v}_{\uparrow} &= Q \frac{U}{d} \\
 \iff Q = \frac{18\pi d}{U} \sqrt{\frac{\eta^3 v_{\downarrow}}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L) g}} (v_{\downarrow} + v_{\uparrow})
 \end{aligned}$$

### A.2. Zeichnung zu den Kräftegleichgewichten

### A.3. Fehlerrechnung

Fehler für den Radius der Tröpfchen

$$\begin{aligned}
 r &= 3\sqrt{\frac{\eta v_{\downarrow}}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L) g}} \\
 \Delta r &= \left| \frac{\partial r}{\partial v_{\downarrow}} \Delta v_{\downarrow} \right| \\
 &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\eta}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L) g v_{\downarrow}}} \Delta v_{\downarrow}
 \end{aligned}$$



Fehler für die Ladung des Öltröpfchens

$$Q = \frac{18\pi d}{U} \sqrt{\frac{\eta^3 v_{\downarrow}}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L)g}} (v_{\downarrow} + v_{\uparrow}) = \frac{6\pi\eta d}{U} r (v_{\downarrow} + v_{\uparrow})$$

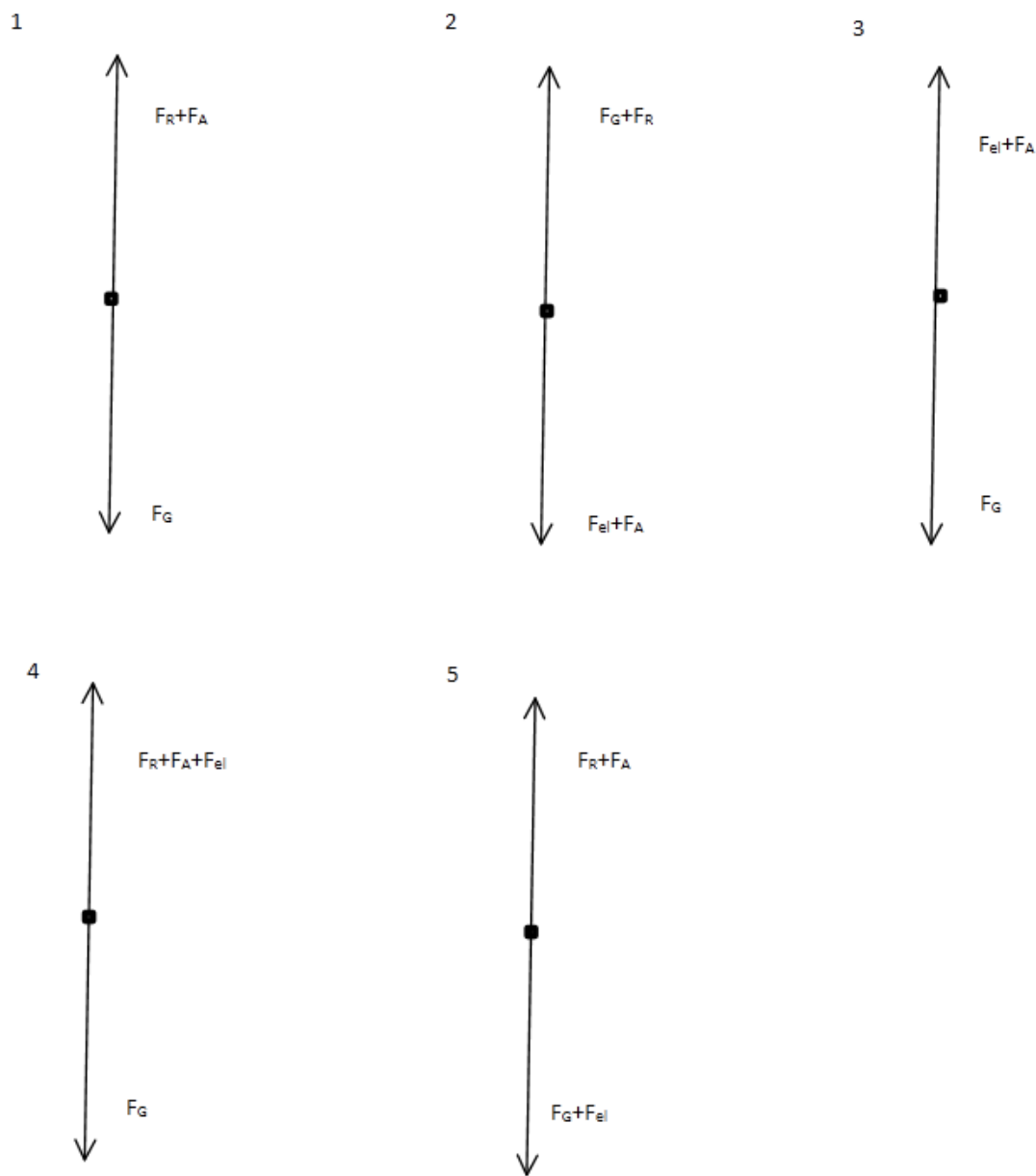
$$\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial d} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial U} \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial v_{\downarrow}} \Delta v_{\downarrow}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial v_{\uparrow}} \Delta v_{\uparrow}\right)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial d} = \frac{18\pi}{U} \sqrt{\frac{\eta^3 v_{\downarrow}}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L)g}} (v_{\downarrow} + v_{\uparrow})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial U} = -\frac{18\pi}{U^2} \sqrt{\frac{\eta^3 v_{\downarrow}}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L)g}} (v_{\downarrow} + v_{\uparrow})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial v_{\uparrow}} = \frac{18\pi}{U} \sqrt{\frac{\eta^3 v_{\downarrow}}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L)g}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial v_{\downarrow}} = \frac{18\pi}{U} \sqrt{\frac{\eta^3 v_{\downarrow}}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L)g}} + \frac{9\pi d}{U} \sqrt{\frac{\eta^3}{2(\rho_{\text{Öl}} - \rho_L)g}} (v_{\downarrow} + v_{\uparrow})$$

**Abbildung 3:** Kräftegleichgewichte

## **Literatur**

Donath, Markus und Anke Schmidt. *Anleitung zu den Experimentellen Übungen zur Mechanik und Elektrizitätslehre*. Auflage Wintersemester 2014/2015. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Physikalisches Institut, Oktober 2014.