

# Konvergenzraten des Robbins-Monro-Algorithmus

Alexander Schlüter

13. Juli 2016

Der Robbins-Monro-Algorithmus ist ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion, deren Wert nur stochastisch gestört gemessen werden kann. Im letzten Vortrag wurde die fast sichere Konvergenz gegen eine Nullstelle bewiesen. Ziel dieses Vortrages ist es, eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit und die Form der Verteilung im Limit ähnlich dem zentralen Grenzwertsatz zu beweisen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Erinnerungen</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Vorbereitungen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Konvergenzraten</b>	<b>6</b>

## 1 Erinnerungen

Im Folgenden sei

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(\mathcal{Z}, \mathcal{C})$  ein messbarer Raum,
- $(Z_n)_{n \geq 1}$  eine Folge u.i.v  $(\mathcal{Z}, \mathcal{C})$ -wertiger Zufallsvariablen,
- $I \subset \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall oder  $I = \mathbb{R}$ ,
- $X_0$  eine von  $(Z_n)_{n \geq 1}$  unabhängige  $I$ -wertige Zufallsvariable,
- $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, Z_1, \dots, Z_n)$  und  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  eine Filtration,
- $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $(0, \infty)$  und
- $H : (I \times \mathcal{Z}, \mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{C}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  eine messbare Abbildung mit

$$H(x, Z_1) \in \mathcal{L}^1 \quad \text{für alle } x \in I.$$

Der **Robbins-Monro-Algorithmus** ist der  $\mathbb{F}$ -adaptierte reelle Prozess  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  definiert durch die Rekursion

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_{n+1} H(X_n, Z_{n+1}), \quad (1)$$

wobei wir annehmen, dass die Werte immer in  $I$  liegen.

Die **Erwartungswertfunktion** des Algorithmus ist definiert durch

$$h : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := \mathbb{E}[H(x, Z_1)]$$

und außerdem sei

$$g : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad g(x) := \mathbb{E}[H(x, Z_1)^2].$$

**Bemerkung 1.1.** Wir haben gesehen, dass der Robbins-Monro-Algorithmus unter zusätzlichen Annahmen fast sicher gegen eine Nullstelle von  $h$  konvergiert. Diese Annahmen waren

- (a) (Downcrossing-Bedingung)  $h$  ist stetig und es gibt ein  $x_0 \in h^{-1}(0)$  mit

$$\sup_{x \in I} (x - x_0) h(x) \leq 0,$$

- (b) (Beschränkte Störung)  $X_0 \in \mathcal{L}^2$  und  $g(x) \leq C(1 + x^2)$  für eine Konstante  $C \in \mathbb{R}_+$  und alle  $x \in I$ ,

- (c) (Abnehmende Schrittweiten)  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty$ .

Wir benötigen noch folgende Resultate vom letzten Mal:

**Lemma 1.2** (Doob-Zerlegung). Unter den o.g. Bedingungen ist  $X$  ein  $\mathcal{L}^2$ -Prozess und für die Doob-Zerlegung  $X = N + A$  in ein Martingal  $N = (N_n)_{n \geq 0}$  und einen previsible Prozess  $A = (A_n)_{n \geq 0}$  gilt

$$N_n = X_0 + \sum_{j=1}^n \gamma_j (H(X_{j-1}, Z_j) - h(X_{j-1}))$$

$$\langle N \rangle_n = \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 (g(X_{j-1}) - h(X_{j-1})^2)$$

für  $n \geq 0$ . Außerdem ist  $N$  ein  $\mathcal{L}^2$ -Martingal.

**Lemma 1.3** (Substitution bei Unabhängigkeit). Für  $n \geq 1$  und jede Funktion  $f : (I \times \mathcal{Z}, \mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{C}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mit wohldefiniertem Integral bezüglich  $P^{(X_{n-1}, Z_n)}$  gilt

$$\mathbb{E}[f(X_{n-1}, Z_n) | \mathcal{F}_{n-1}](\cdot) = \int f(X(\cdot), z) dP^{Z_1}(z) \quad \text{fast sicher.}$$

*Beweis.*  $Z_n$  ist unabhängig von  $\mathcal{F}_{n-1}$ , also ist die Aussage vom letzten Mal anwendbar.  $\square$

## 2 Vorbereitungen

**Definition 2.1.** Es sei  $(Y_n)_{n \geq 1}$  eine Folge von Zufallsvariablen von  $(\Omega, \mathcal{F})$  nach  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  und  $\nu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .  $(Y_n)_{n \geq 1}$  heißt **mischend konvergent** gegen  $\nu$  und wir schreiben

$$Y_n \longrightarrow \nu \quad \text{mischend},$$

falls für alle  $f \in \mathcal{L}^1(P)$  und  $h \in C_b(\mathbb{R}^d)$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f \cdot h(Y_n)] = \int f \, dP \int h \, d\nu.$$

**Bemerkung 2.2.** Durch Wahl von  $f = 1$  folgt aus der mischenden Konvergenz die bekannte Konvergenz in Verteilung.

**Lemma 2.3.** Sei  $(Y_n)_{n \geq 1}$  eine Folge von reellen Zufallsvariablen und  $\nu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mit  $Y_n \rightarrow \nu$  *mischend* für  $n \rightarrow \infty$ . Außerdem sei  $(Z_n)_{n \geq 1}$  eine Folge von reellen Zufallsvariablen mit  $Z_n \rightarrow 0$  *in Wahrscheinlichkeit*. Dann gilt

$$(Y_n, Z_n) \rightarrow \nu \otimes \delta_0 \quad \text{mischend}.$$

*Beweis.* Siehe [LPW08, Korollar 5.29(a)]. □

**Korollar 2.1.** Sei  $(Y_n)_{n \geq 1}$  eine Folge von reellen Zufallsvariablen und  $\nu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mit  $Y_n \rightarrow \nu$  *mischend* für  $n \rightarrow \infty$ . Außerdem sei  $(Z_n)_{n \geq 1}$  eine Folge von reellen Zufallsvariablen mit  $Z_n \rightarrow 0$  *in Wahrscheinlichkeit*. Dann gilt

$$Y_n + Z_n \rightarrow \nu \quad \text{mischend}.$$

*Beweis.* Es seien  $f \in \mathcal{L}^1(P)$  und  $h \in C_b(\mathbb{R})$  beliebig. Dann ist  $h' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h'(y, z) := h(y + z)$  in  $C_b(\mathbb{R}^2)$ . Nach Lemma 2.3 gilt

$$(Y_n, Z_n) \rightarrow \nu \otimes \delta_0 \quad \text{mischend}.$$

Nach Definition der mischenden Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f \cdot h(Y_n + Z_n)] &= \mathbb{E}[f \cdot h'(Y_n, Z_n)] \rightarrow \int f \, dP \int h'(y, z) \, d\nu \otimes \delta_0(y, z) \\ &= \int f \, dP \int h(y + 0) \, d\nu(y). \end{aligned}$$

□

**Satz 2.4** (Stabiler CLT). Es sei  $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$  ein  $\mathcal{L}^2$ -Martingal bezüglich einer Filtration  $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 0}$  und  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $(0, \infty)$  mit  $a_n \rightarrow \infty$ . Die folgenden Bedingungen seien erfüllt:

(a) Es existiert eine Konstante  $v > 0$  mit

$$\frac{\langle Y \rangle_n}{a_n^2} \longrightarrow v \quad \text{in Wahrscheinlichkeit}$$

für  $n \rightarrow \infty$ ,

(b) ( $\mathbb{G}$ -bedingte Lyapunov-Bedingung) Es existiert ein  $\delta > 0$ , sodass

$$\frac{1}{a_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|\Delta Y_j|^{2+\delta} | \mathcal{G}_{j-1}] \rightarrow 0 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit}$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

Dann gilt für  $n \rightarrow \infty$ :

$$\frac{Y_n}{a_n} \rightarrow \mathcal{N}(0, v) \quad \text{mischend.}$$

*Beweis.* Siehe [LPW08, Satz 5.31 und Bemerkung 5.32(a)]. □

**Lemma 2.5** (Diskrete Regel von de l'Hospital). Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $(b_n)_{n \geq 1}$  eine Folge positiver reeller Zahlen, sodass

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$  und
- (b) es existiert  $c \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = c$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{\sum_{j=1}^n b_j} = c.$$

*Beweis.* Seien  $\varepsilon > 0$  und  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n/b_n - c| \leq \varepsilon$  für alle  $n > n_0$ . Dann gilt für  $n > n_0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{\sum_{j=1}^n b_j} - c \right| &\leq \frac{\sum_{j=1}^n b_j |a_j/b_j - c|}{\sum_{j=1}^n b_j} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n_0} b_j |a_j/b_j - c|}{\sum_{j=1}^n b_j} + \frac{\sum_{j=n_0+1}^n b_j |a_j/b_j - c|}{\sum_{j=1}^n b_j} \\ &\leq \frac{\sum_{j=1}^{n_0} b_j |a_j/b_j - c|}{\sum_{j=1}^n b_j} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{\sum_{j=1}^n b_j} - c \right| \leq \varepsilon$$

und da  $\varepsilon$  beliebig war folgt die Behauptung. □

**Lemma 2.6** (Kronecker, WT Lem. 4.28). Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  und sei  $(b_n)_{n \geq 1}$  eine Folge reeller Zahlen. Konvergiert  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j/a_j$  in  $\mathbb{R}$ , so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^n b_j = 0.$$

**Lemma 2.7.** (i) Für reelle Konstanten  $b \geq 0$  und  $a > -b - 1$  existiert  $L \in (0, \infty)$ , sodass

$$\prod_{j=1}^n \left( 1 + \frac{a}{b+j} \right) \sim L n^a \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(ii) Für  $b > -1$  gilt

$$\sum_{j=1}^n j^b \sim \frac{n^{b+1}}{b+1} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und für  $b = -1$

$$\sum_{j=1}^n j^{-1} \sim \log n \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

*Beweis.* (i) Die Gammafunktion hat die Eigenschaft

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

für eine positive reelle Zahl  $t$ . Deshalb gilt

$$\prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{a}{b+j}\right) = \frac{\prod_{j=1}^n (a+b+j)}{\prod_{j=1}^n (b+j)} = \frac{\Gamma(a+b+n+1)}{\Gamma(a+b+1)} \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+n+1)}$$

Wir identifizieren den von  $n$  unabhängigen Faktor

$$L := \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}$$

und untersuchen den übrigen Term. Stirlings Formel für die Gammafunktion

$$\Gamma(t) \sim \sqrt{2\pi} t^{t-1/2} e^{-t}, \quad t \rightarrow \infty$$

liefert

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(a+b+n+1)}{\Gamma(b+n+1)} &\sim (a+b+n+1)^a \left(\frac{a+b+n+1}{b+n+1}\right)^{b+n+1/2} e^{-a} \\ &\sim n^a \left(1 + \frac{a}{b+n+1}\right)^{b+n+1} e^{-a}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde genutzt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a+b+n+1}{n}\right)^a = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{b+n+1}{a+b+n+1}} = 1.$$

Schließlich folgt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{b+n+1}\right)^{b+n+1} = e^a$$

die Behauptung.

(ii) Falls  $-1 < b \leq 0$ , so ist die Abbildung  $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^b$  monoton fallend. Also gilt für  $j \in \mathbb{N}$

$$(j+1) \leq \int_j^{j+1} x^b dx \leq j^b$$

und deshalb

$$\frac{(n+1)^{b+1} - 1}{b+1} = \int_1^{n+1} x^b dx \leq \sum_{j=1}^n j^b \leq \int_0^n x^b dx = \frac{n^{b+1}}{b+1}.$$

Die Behauptung folgt, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{b+1} - 1}{b+1} \cdot \frac{b+1}{n^{b+1}} = 1.$$

Mit demselben Argument bekommt man den Fall  $b = -1$ :

$$\log(n+1) = \int_1^{n+1} x^{-1} dx \leq \sum_{j=1}^n j^{-1} \leq 1 + \int_1^n x^{-1} dx = 1 + \log(n)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n)} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \log(n)}{\log(n)}.$$

Falls  $b > 0$ , so ist  $x \mapsto x^b$  monoton wachsend, also

$$j^b \leq \int_j^{j+1} x^b dx \leq (j+1)^b$$

und die Abschätzung ist analog zu oben.

□

### 3 Konvergenzraten

**Satz 3.1** (Konvergenzraten, stabiler CLT). Seien  $\gamma_n = C_1/(C_2+n)$  für  $n \geq 1$  mit reellen Konstanten  $C_1 > 0$ ,  $C_2 \geq 0$  und  $x_0 \in h^{-1}(0)$ . Die folgenden Bedingungen seien erfüllt:

- (a)  $X_n \rightarrow x_0$  f.s. für  $n \rightarrow \infty$ .
- (b)  $X_0 \in \mathcal{L}^2$  und  $g(x) \leq C(1+x^2)$  für eine Konstante  $C \in \mathbb{R}_+$  und alle  $x \in I$ ,
- (c)  $g$  sei stetig in  $x_0$ ,  $h$  sei differenzierbar in  $x_0$ ,  $h'(x_0) < 0$  und

$$h(x) = h'(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2) \quad \text{für } x \rightarrow x_0,$$

- (d) Es existieren  $\varepsilon, \delta > 0$  sodass  $H(x, Z_1) \in \mathcal{L}^{2+\delta}$  für alle  $x \in I$  und

$$\sup_{|x-x_0| \leq \varepsilon} \mathbb{E}[|H(x, Z_1)|^{2+\delta}] < \infty.$$

Dann gilt für  $n \rightarrow \infty$ :

- (i) Falls  $|h'(x_0)|C_1 > 1/2$ :

$$\sqrt{n}(X_n - x_0) \rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{g(x_0)C_1^2}{2|h'(x_0)|C_1 - 1}\right) \quad \text{mischend,}$$

(ii) Falls  $|h'(x_0)|C_1 = 1/2$ :

$$\sqrt{\frac{n}{\log n}}(X_n - x_0) \rightarrow \mathcal{N}\left(0, g(x_0)C_1^2\right) \quad \text{mischend,}$$

(iii) Falls  $|h'(x_0)|C_1 < 1/2$ :

$$n^{|h'(x_0)|C_1}(X_n - x_0) \rightarrow \xi \quad \text{f.s.}$$

für eine reelle Zufallsvariable  $\xi$ , die von  $X_0$  abhängt.

**Bemerkung 3.2.** Downcrossing etc.

*Beweis.* Hier wird nur ein Teil vom Fall  $|h'(x_0)|C_1 > 1/2$  bewiesen. Für den vollen Beweis siehe [LPW08, Satz 11.4].

Wie wir letzte Woche gesehen haben, folgt aus (b), dass  $X$  ein  $\mathcal{L}^2$ -Prozess ist. Sei

$$a := -h'(x_0) = |h'(x_0)|.$$

Nach (c) gilt  $a > 0$ . Man wähle  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a\gamma_{n_0} < 1$  und definiere für  $n \geq 0$

$$\beta_n := \prod_{j=n_0}^n (1 - a\gamma_j) = \prod_{j=1}^{n-n_0+1} (1 - a\gamma_{j+n_0-1}).$$

Insbesondere gilt also  $\beta_0 = \dots = \beta_{n_0-1} = 1$  und nach Lemma 2.7(i)

$$\beta_n \sim Ln^{-aC_1}$$

für  $n \rightarrow \infty$  mit einer Konstanten  $L \in (0, \infty)$ . Wegen  $\gamma_n \sim C_1/n$  folgt

$$\frac{\gamma_n}{\beta_n} \sim \frac{C_1}{L} n^{aC_1-1} \quad (2)$$

Mit der Doob-Zerlegung  $X = N + A$  aus Lemma 1.2 bekommen wir

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(X_n - x_0) &= \sqrt{n}\beta_n \left( X_0 - x_0 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_j} (X_j - X_{j-1} + X_{j-1}) - \frac{1}{\beta_{j-1}} X_{j-1} - \frac{x_0}{\beta_j} + \frac{x_0}{\beta_{j-1}} \right) \\ &= \sqrt{n}\beta_n (X_0 - x_0) \\ &\quad + \sqrt{n}\beta_n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_j} \Delta N_j \\ &\quad + \sqrt{n}\beta_n \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{\beta_j} \Delta A_j + (X_{j-1} - x_0) \left( \frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{\beta_{j-1}} \right) \right). \end{aligned}$$

Wir wollen die drei Summanden einzeln auf ihr Verhalten für  $n \rightarrow \infty$  untersuchen. Definiere dazu für  $n \geq 0$

$$M_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_j} \Delta N_j$$

$$B_n := \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{\beta_j} \Delta A_j + (X_{j-1} - x_0) \left( \frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{\beta_{j-1}} \right) \right).$$

Da  $\sqrt{n}\beta_n \sim Ln^{-aC_1+1/2} \rightarrow 0$  gilt auch  $\sqrt{n}\beta_n(X_0 - x_0) \rightarrow 0$  punktweise.

Es gilt auch  $\sqrt{n}\beta_n B_n \rightarrow 0$  fast sicher, allerdings ist der Beweis nicht trivial und kann nachgelesen werden in [LPW08, Satz 11.4]. Er basiert auf der Idee, die Zuwüchse  $\Delta B_n$  für große  $n$  gegen  $(X_n - x_0)^2$  abzuschätzen. Dazu wird Voraussetzung (c) genutzt.

Im Folgenden wird gezeigt, dass

$$\sqrt{n}\beta_n M_n \rightarrow \mathcal{N} \left( 0, \frac{g(x_0)C_1^2}{2aC_1 - 1} \right) \quad \text{mischend,}$$

denn dann folgt die Behauptung mittels Korollar 2.1.

$M = (M_n)_{n \geq 0}$  ist ein  $\mathcal{L}^2$ -Martingal, da  $N$  eins ist. Es gilt nach der Darstellung für  $\langle N \rangle$  aus Lemma 1.2

$$\begin{aligned} \Delta \langle M \rangle_n &= \mathbb{E}[(\Delta M_n)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \frac{1}{\beta_j^2} \mathbb{E}[(\Delta N_n)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \frac{\gamma_j^2}{\beta_j^2} (g(X_{j-1}) - h(X_{j-1})^2) \end{aligned}$$

für  $n \geq 0$ . Wegen der Stetigkeit von  $h$  und  $g$  in  $x_0$  gilt

$$g(X_{n-1}) - h(X_{n-1})^2 \rightarrow g(x_0) - h(x_0)^2 = g(x_0) \quad \text{f.s.,}$$

und zusammen mit Gleichung (2) bekommt man

$$\frac{\Delta \langle M \rangle_n}{n^{2aC_1-2}} \rightarrow \frac{g(x_0)C_1^2}{L^2} \quad \text{f.s.}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . □

**Bemerkung 3.3.** Optimale Schrittweite

**Beispiel 3.4.** Mittelwert und Quantil

## Literatur

[LPW08] David A. Levin, Yuval Peres und Elizabeth L. Wilmer. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Society, 2008. URL: <http://pages.uoregon.edu/dlevin/MARKOV/>.