Konvergenzraten des Robbins-Monro-Algorithmus

Alexander Schlüter

13. Juli 2016

Der Robbins-Monro-Algorithmus ist ein rekursives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion, deren Wert nur stochastisch gestört gemessen werden kann. Im letzten Vortrag[1] wurde die fast sichere Konvergenz gegen eine Nullstelle gezeigt. Ziel dieses Vortrages ist es, einen zentralen Grenzwertsatz für den Algorithmus zu beweisen, der Aufschluss über die Konvergenzgeschwindigkeit und die Form der Verteilung im Limes gibt.

Inhaltsverzeichnis

1 Erinnerungen

Diese Arbeit orientiert sich an [Lus13, Kapitel 11.1]. Im Folgenden sei

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(V, \mathcal{V})$ ein messbarer Raum,
- $(Z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge u.i.v $(V, \mathcal{V})$-wertiger Zufallsvariablen,
- X_0 eine von $(Z_n)_{n\geq 1}$ unabhängige reelle Zufallsvariable,
- $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, Z_1, \ldots, Z_n)$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration,
- $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $(0, \infty)$ und
- $H : (\mathbb{R} \times V, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{V}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine messbare Abbildung mit

$$H(x, Z_1) \in \mathcal{L}^1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

[1] Kas16.

Der **Robbins-Monro-Algorithmus** ist der $\mathbb{F}$-adaptierte reelle Prozess $X = (X_n)_{n\geq 0}$ definiert durch die Rekursion

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_{n+1} H(X_n, Z_{n+1})\,. \tag{1}$$

Die **Erwartungswertfunktion** des Algorithmus ist definiert durch

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) \coloneqq \mathbb{E}[H(x, Z_1)]$$

und außerdem sei

$$g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad g(x) \coloneqq \mathbb{E}[H(x, Z_1)^2].$$

Bemerkung 1.1. Wir haben gesehen, dass der Robbins-Monro-Algorithmus unter zusätzlichen Annahmen fast sicher gegen eine Nullstelle von h konvergiert. Diese Annahmen waren

(a) (Downcrossing-Bedingung) h ist stetig und es gibt ein $x_0 \in \{\, h = 0 \,\}$ mit

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (x - x_0) h(x) \leq 0\,,$$

(b) (Beschränkte Störung) $X_0 \in \mathcal{L}^2$ und $g(x) \leq C(1 + x^2)$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}_+$ und alle $x \in \mathbb{R}$,

(c) (Abnehmende Schrittweiten) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty$.

Wir benötigen noch folgende Resultate vom letzten Mal:

Lemma 1.2 (Substitution bei Unabhängigkeit)**.** Für $n \geq 1$ und jede messbare Funktion $f : (\mathbb{R} \times V, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{V}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit wohldefiniertem Integral bezüglich $P^{(X_{n-1}, Z_n)}$ gilt

$$\mathbb{E}[f(X_{n-1}, Z_n) \,|\, \mathcal{F}_{n-1}](\cdot) = \int f(X(\cdot), z)\,\mathrm{d}P^{Z_1}(z) \quad \text{fast sicher.}$$

Beweis. Z_n ist unabhängig von $\mathcal{F}_{n-1}$, also ist die Aussage vom letzten Mal anwendbar. □

Lemma 1.3 (Doob-Zerlegung)**.** Unter den o.g. Bedingungen ist X ein $\mathcal{L}^2$-Prozess und für die Doob-Zerlegung $X = N + A$ in ein Martinal $N = (N_n)_{n\geq 0}$ und einen previsiblen Prozess $A = (A_n)_{n\geq 0}$ gilt

$$N_n = X_0 + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (H(X_{j-1}, Z_j) - h(X_{j-1}))$$
$$\langle N \rangle_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^2 (g(X_{j-1}) - h(X_{j-1})^2)$$

für $n \geq 0$. Außerdem ist N ein $\mathcal{L}^2$-Martingal.

2 Vorbereitungen

Für die Untersuchung der Konvergenzraten brauchen wir eine Version des zentralen Grenzwertsatzes für Martingale. Da dieser die Folgerung einer stärkeren Konvergenz als Verteilungskonvergenz zulässt, lohnt es sich, diese zunächst einzuführen.

Definition 2.1. Es sei $(Y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zufallsvariablen von $(\Omega, \mathcal{F})$ nach $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. $(Y_n)_{n\geq 1}$ heißt **mischend konvergent** gegen ν und wir schreiben

$$Y_n \longrightarrow \nu \quad \textit{mischend},$$

falls für alle $f \in \mathcal{L}^1(P)$ und $h \in C_b(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f \cdot h(Y_n)] = \int f \,\mathrm{d}P \int h \,\mathrm{d}\nu\,.$$

Bemerkung 2.2. Durch Wahl von $f = 1$ folgt aus der mischenden Konvergenz die bekannte Konvergenz in Verteilung.

Lemma 2.3. Sei $(Y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von reellen Zufallsvariablen und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $Y_n \to \nu$ *mischend* für $n \to \infty$. Außerdem sei $(U_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von reellen Zufallsvariablen mit $U_n \to 0$ *in Wahrscheinlichkeit*. Dann gilt für $n \to \infty$

$$(Y_n, U_n) \to \nu \otimes \delta_0 \quad \textit{mischend.}$$

Beweis. Siehe [Lus13, Korollar 5.29(a)]. □

Korollar 2.4 (Stabiler Slutzky)**.** In der Situation von Lemma 2.3 gilt

$$\begin{aligned} Y_n + U_n &\to \nu && \textit{mischend} \text{ und} \\ Y_n \cdot U_n &\to \delta_0 && \textit{mischend.} \end{aligned}$$

Beweis. Es seien $f \in \mathcal{L}^1(P)$ und $h \in C_b(\mathbb{R})$ beliebig. Dann ist $h' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h'(y,u) := h(y+u)$ in $C_b(\mathbb{R}^2)$. Nach Lemma 2.3 gilt

$$(Y_n, U_n) \to \nu \otimes \delta_0 \quad \textit{mischend.}$$

Nach Definition der mischenden Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f \cdot h(Y_n + U_n)] = \mathbb{E}[f \cdot h'(Y_n, U_n)] &\to \int f \,\mathrm{d}P \int h'(y,u) \,\mathrm{d}\nu \otimes \delta_0(y,u) \\ &= \int f \,\mathrm{d}P \int h(y+0) \,\mathrm{d}\nu(y)\,. \end{aligned}$$

Für die Multiplikation funktioniert der Beweis analog. □

Satz 2.5 (Stabiler CLT)**.** Es sei $M = (M_n)_{n\geq 0}$ ein $\mathcal{L}^2$-Martingal bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$ und $(\kappa_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $(0, \infty)$ mit $\kappa_n \to 0$. Die folgenden Bedingungen seien erfüllt:

(a) Es existiert eine Konstante $v \geq 0$ mit

$$\kappa_n^2 \langle M \rangle_n \longrightarrow v \quad \textit{in Wahrscheinlichkeit}$$

für $n \to \infty$,

(b) ($\mathbb{F}$-bedingte Lyapunov-Bedingung) Es existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$\kappa_n^{2+\delta} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[|\Delta M_j|^{2+\delta} \,|\, \mathcal{F}_{j-1}] \to 0 \quad \textit{in Wahrscheinlichkeit}$$

für $n \to \infty$.

Dann gilt für $n \to \infty$:

$$\kappa_n M_n \to \mathcal{N}(0, v) \quad \textit{mischend.}$$

Beweis. Siehe [Lus13, Satz 5.31 und Bemerkung 5.32(a)]. □

Bemerkung 2.6. Sei $(Y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge u.i.v. Zufallsvariablen mit $Y_1 \in \mathcal{L}^2$. Man bekommt den klassischen zentralen Grenzwertsatz durch Wahl von

$$M_n := \sum_{j=1}^{n} (Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]) \,,$$

$\kappa_n := 1/\sqrt{n}$ und die von M erzeugte Filtration. Um die Lyapunov-Bedingung zu zeigen benötigt man die zusätzliche Annahme $Y_1 \in \mathcal{L}^{2+\delta}$ für ein $\delta > 0$. Der Satz bleibt jedoch wahr, wenn man die Lyapunov-Bedingung durch die schwächere Lindeberg-Bedingung ersetzt, mit der man ohne diese Annahme auskommt[2].

Außerdem brauchen wir noch ein paar Resultate aus der Analysis:

Lemma 2.7 (Diskrete Regel von l'Hospital)**.** Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $(0, \infty)$, sodass

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ und

(b) es existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c$.

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j} = c \,.$$

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n/b_n - c| \leq \epsilon$ für alle $n > n_0$. Dann gilt für $n > n_0$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j} - c \right| &\leq \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j |a_j/b_j - c|}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n_0} b_j |a_j/b_j - c|}{\sum_{j=1}^{n} b_j} + \frac{\sum_{j=n_0+1}^{n} b_j |a_j/b_j - c|}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \\
&\leq \frac{\sum_{j=1}^{n_0} b_j |a_j/b_j - c|}{\sum_{j=1}^{n} b_j} + \varepsilon \,.
\end{aligned}$$

[2] Lus13, Korollar 5.33.

Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\sum_{j=1}^n a_j}{\sum_{j=1}^n b_j} - c\right| \le \varepsilon$$

und da ε beliebig war folgt die Behauptung. □

Lemma 2.8 (Kronecker, WT Lem. 4.28)**.** Sei $(a_n)_{n\ge 1}$ eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und sei $(b_n)_{n\ge 1}$ eine Folge reeller Zahlen. Konvergiert $\sum_{j=1}^\infty b_j/a_j$ in $\mathbb{R}$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^n b_j = 0\,.$$

Lemma 2.9. (i) Für reelle Konstanten $b \ge 0$ und $a > -b-1$ existiert $L \in (0,\infty)$, sodass

$$\prod_{j=1}^n\left(1+\frac{a}{b+j}\right) \sim Ln^a \quad \text{für } n\to\infty.$$

(ii) Für $b > -1$ gilt

$$\sum_{j=1}^n j^b \sim \frac{n^{b+1}}{b+1} \quad \text{für } n\to\infty$$

und für $b=-1$

$$\sum_{j=1}^n j^{-1} \sim \log n \quad \text{für } n\to\infty.$$

Beweis. (i) Die Gammafunktion hat die Eigenschaft

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

für eine positive reelle Zahl t. Deshalb gilt

$$\prod_{j=1}^n\left(1+\frac{a}{b+j}\right) = \frac{\prod_{j=1}^n(a+b+j)}{\prod_{j=1}^n(b+j)} = \frac{\Gamma(a+b+n+1)}{\Gamma(a+b+1)}\,\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+n+1)}$$

Wir identifizieren den von n unabhängigen Faktor

$$L \coloneqq \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}$$

und untersuchen den übrigen Term. Stirlings Formel für die Gammafunktion

$$\Gamma(t) \sim \sqrt{2\pi}t^{t-1/2}e^{-t}, \quad t\to\infty$$

liefert

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(a+b+n+1)}{\Gamma(b+n+1)} &\sim (a+b+n+1)^a\left(\frac{a+b+n+1}{b+n+1}\right)^{b+n+1/2} e^{-a}\\ &\sim n^a\left(1+\frac{a}{b+n+1}\right)^{b+n+1} e^{-a}\,.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde genutzt, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a+b+n+1}{n}\right)^a = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{b+n+1}{a+b+n+1}} = 1\,.$$

Schließlich folgt mit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{b+n+1}\right)^{b+n+1} = e^a$$

die Behauptung.

(ii) Falls $-1 < b \le 0$, so ist die Abbildung $(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^b$ monoton fallend. Also gilt für $j\in\mathbb{N}$

$$(j+1) \le \int_j^{j+1} x^b \,\mathrm{d}x \le j^b$$

und deshalb

$$\frac{(n+1)^{b+1}-1}{b+1} = \int_1^{n+1} x^b\,\mathrm{d}x \le \sum_{j=1}^n j^b \le \int_0^n x^b\,\mathrm{d}x = \frac{n^{b+1}}{b+1}\,.$$

Die Behauptung folgt, da

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{b+1}-1}{b+1}\cdot\frac{b+1}{n^{b+1}} = 1\,.$$

Mit demselben Argument bekommt man den Fall $b=-1$:

$$\log(n+1) = \int_1^{n+1} x^b\,\mathrm{d}x \le \sum_{j=1}^n j^b \le 1 + \int_1^n x^b\,\mathrm{d}x = 1+\log(n)$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log(n)} = 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\log(n)}{\log(n)}\,.$$

Falls $b>0$, so ist $x\mapsto x^b$ monoton wachsend, also

$$j^b \le \int_j^{j+1} x^b\,\mathrm{d}x \le (j+1)^b$$

und die Abschätzung ist analog zu oben.

□

3 Konvergenzraten

Der aus der Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie bekannte zentrale Grenzwertsatz kann verstanden werden als eine Aussage über die Konvergenzrate im starken Gesetz der großen Zahlen. Letzteres besagt für u.i.v. Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots \in \mathcal{L}^1$ mit $\mu = \mathbb{E}[Y_1]$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j - \mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{f.s.}$$

Der zentrale Grenzwertsatz beantwortet (im Fall endlicher Varianz $\sigma^2 = \mathrm{Var}[Y_1] > 0$) die Frage „Wie schnell ist die Konvergenz gegen μ?“.

Dazu gibt er eine Folge (nämlich $\sqrt{n}$) an, die genau schnell genug wächst, um sich mit der Nullfolge bei Multiplikation auszubalancieren. Das Ergebnis ist die bekannte schwache Konvergenz gegen eine Normalverteilung

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j - \mu\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)\,.$$

Jede langsamer wachsende Folge als $\sqrt{n}$ würde gegen die Nullfolge „verlieren“ und man bekäme Konvergenz des Produktes gegen die Dirac-Verteilung bei 0. Umgekehrt wäre jede schneller wachsende Folge „zu schnell“ und das Produkt würde nicht mehr schwach konvergieren.

Statt dem Gesetz der großen Zahlen werden wir gleich für den Robbins-Monro-Algorithmus annehmen

$$X_n - x_0 \to 0 \quad \textit{f.s.}$$

und wir suchen wie oben eine passende Folge (a_n) mit $a_n \to \infty$ und

$$a_n(X_n - x_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, ?)\,.$$

Satz 3.1 (Konvergenzraten, stabiler CLT)**.** Seien $\gamma_n = C_1/(C_2+n)$ für $n \geq 1$ mit reellen Konstanten $C_1 > 0$, $C_2 \geq 0$ und $x_0 \in \{\, h = 0 \,\}$. Die folgenden Bedingungen seien erfüllt:

(a) $X_n \to x_0$ f.s. für $n \to \infty$,
(b) $X_0 \in \mathcal{L}^2$ und $g(x) \leq C(1 + x^2)$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}_+$ und alle $x \in \mathbb{R}$,
(c) g sei stetig in x_0, h sei differenzierbar in x_0, $h'(x_0) < 0$ und

$$h(x) = h'(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2) \quad \text{für } x \to x_0\,,$$

(d) Es existieren $\varepsilon, \delta > 0$ sodass $H(x, Z_1) \in \mathcal{L}^{2+\delta}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\sup_{|x - x_0| \leq \varepsilon} \mathbb{E}[|H(x, Z_1)|^{2+\delta}] < \infty\,.$$

Dann gilt für $n \to \infty$:

(i) Falls $|h'(x_0)|C_1 > 1/2$:

$$\sqrt{n}(X_n - x_0) \to \mathcal{N}\left(0, \frac{g(x_0)C_1^2}{2|h'(x_0)|C_1 - 1}\right) \quad \textit{mischend,}$$

(ii) Falls $|h'(x_0)|C_1 = 1/2$:

$$\sqrt{\frac{n}{\log n}}(X_n - x_0) \to \mathcal{N}\left(0, g(x_0)C_1^2\right) \quad \textit{mischend,}$$

(iii) Falls $|h'(x_0)|C_1 < 1/2$:

$$n^{|h'(x_0)|C_1}(X_n - x_0) \to \xi \quad \text{f.s.}$$

für eine reelle Zufallsvariable ξ, die von X_0 abhängt.

Bemerkung 3.2. (1) Die quadratische Abschätzung für den Restterm in Voraussetzung (c) ist erfüllt, wenn h in einem offenen Intervall J um x_0 differenzierbar ist mit Lipschitz-stetiger Ableitung. Denn dann gilt nach dem Mittelwertsatz, dass für alle $x \in J$ ein η zwischen x und x_0 existiert mit

$$\begin{aligned}|h(x) - h'(x_0)(x - x_0)| &= |h(x) - h(x_0) - h'(x_0)(x - x_0)| \\ &= |h'(\eta)(x - x_0) - h'(x_0)(x - x_0)| \\ &= |h'(\eta) - h'(x_0)||x - x_0| \\ &\leq L|\eta - x_0||x - x_0| \leq L|x - x_0|^2 ,\end{aligned}$$

wobei L die Lipschitz-Konstante von h' sei. Insbesondere ist die Voraussetzung erfüllt, wenn h in einer Umgebung von x_0 zweimal stetig differenzierbar ist.

(2) Es gibt einen „Phasenübergang“ bei $|h'(x_0|C_1 = 1/2$. Die schnellste Konvergenzrate ist im Fall $|h'(x_0|C_1 > 1/2$ realisiert. Dies ist intuitiv gesprochen erfüllt, wenn h um x_0 herum schnell fällt bzw. die Schrittweiten γ_n groß sind. Da allerdings bei Anwendung des Algorithmus x_0 und damit auch die Ableitung $h'(x_0)$ unbekannt sind, ist nicht klar, wie groß die Schrittweite gewählt werden muss, um die schnelle Konvergenzrate tatsächlich zu bekommen.

(3) Der ausgeartete Fall $g(x_0) = 0$ ist im Satz nicht ausgeschlosssen. Die Limesverteilungen sind dann Dirac-Verteilungen in 0.

Beweis von Satz 3.1. Hier wird nur ein Teil vom Fall $|h'(x_0)|C_1 > 1/2$ bewiesen. Für den vollen Beweis siehe [Lus13, Satz 11.4].

Wie wir letzte Woche gesehen haben, folgt aus Voraussetzung (b), dass X ein $\mathcal{L}^2$-Prozess ist. Sei

$$a := -h'(x_0) = |h'(x_0)| .$$

Nach (c) gilt $a > 0$. Man wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a\gamma_{n_0} < 1$ und definiere für $n \geq 0$

$$\beta_n := \prod_{j=n_0}^{n} (1 - a\gamma_j) = \prod_{j=1}^{n-n_0+1} (1 - a\gamma_{j+n_0-1}) .$$

Insbesondere gilt also $\beta_0 = \cdots = \beta_{n_0-1} = 1$ und nach Lemma 2.9(i)

$$\beta_n \sim Ln^{-aC_1} \tag{2}$$

für $n \to \infty$ mit einer Konstanten $L \in (0, \infty)$. Wegen $\gamma_n \sim C_1/n$ folgt

$$\frac{\gamma_n}{\beta_n} \sim \frac{C_1}{L} n^{aC_1 - 1} \tag{3}$$

Mit der Doob-Zerlegung $X = N + A$ aus Lemma 1.3 bekommen wir

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}(X_n - x_0) = \sqrt{n}\beta_n &\left(X_0 - x_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_j}(X_j - X_{j-1} + X_{j-1}) - \frac{1}{\beta_{j-1}} X_{j-1} - \frac{x_0}{\beta_j} + \frac{x_0}{\beta_{j-1}} \right) \\
= \quad & \sqrt{n}\beta_n (X_0 - x_0) \\
& + \sqrt{n}\beta_n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_j} \Delta N_j \\
& + \sqrt{n}\beta_n \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\beta_j} \Delta A_j + (X_{j-1} - x_0)(\frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{\beta_{j-1}}) \right) .
\end{aligned} \tag{4}$$

Wir wollen die drei Summanden einzeln auf ihr Verhalten für $n \to \infty$ untersuchen. Definiere dazu für $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
M_n &\coloneqq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_j} \Delta N_j \\
B_n &\coloneqq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\beta_j} \Delta A_j + (X_{j-1} - x_0)(\frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{\beta_{j-1}}) \right) .
\end{aligned}$$

Da $\sqrt{n}\beta_n \sim L n^{-aC_1 + 1/2} \to 0$ gilt auch $\sqrt{n}\beta_n(X_0 - x_0) \to 0$ punktweise.

Es gilt auch $\sqrt{n}\beta_n B_n \to 0$ fast sicher, allerdings ist der Beweis nicht trivial und kann nachgelesen werden in [Lus13, Satz 11.4]. Er basiert auf der Idee, die Zuwächse ΔB_n für große n gegen $(X_n - x_0)^2$ abzuschätzen. Dazu wird Voraussetzung (c) genutzt.

Im Folgenden wird mit dem stabilen CLT 2.5 gezeigt, dass

$$\sqrt{n}\beta_n M_n \to \mathcal{N}\left(0, \frac{g(x_0) C_1^2}{2aC_1 - 1}\right) \quad \textit{mischend.} \tag{5}$$

Wähle also $\kappa_n = \sqrt{n}\beta_n$, dann gilt wie oben schon bemerkt $\kappa_n \to 0$. $M = (M_n)_{n \geq 0}$ ist ein $\mathcal{L}^2$-Martingal, da N eins ist.

Wir wollen nun Voraussetzung (a) des CLT überprüfen. Es gilt nach der Darstellung für $\langle N \rangle$ aus Lemma 1.3

$$\begin{aligned}
\Delta\langle M \rangle_n = \mathbb{E}[(\Delta M_n)^2 \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] &= \frac{1}{\beta_n^2} \mathbb{E}[(\Delta N_n)^2 \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \frac{\gamma_n^2}{\beta_n^2} (g(X_{n-1}) - h(X_{n-1})^2)
\end{aligned}$$

für $n \geq 1$. Wegen der Stetigkeit von h und g in x_0 gilt

$$g(X_{n-1}) - h(X_{n-1})^2 \to g(x_0) - h(x_0)^2 = g(x_0) \quad \text{f.s.},$$

und zusammen mit Gleichung (3) ergibt sich

$$\frac{\Delta\langle M \rangle_n}{n^{2aC_1 - 2}} \to \frac{g(x_0) C_1^2}{L^2} \quad \text{f.s.}$$

für $n \to \infty$. Da wir $aC_1 > 1/2$ annehmen, ist $2aC_1 - 2 > -1$ und deshalb

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{2aC_1-2} = \infty\,.$$

Somit können wir die diskrete Regel von l'Hospital 2.7 anwenden und bekommen

$$\frac{\langle M\rangle_n}{\sum_{j=1}^n j^{2aC_1-2}} \to \frac{g(x_0)C_1^2}{L^2} \quad \text{f.s.}$$

für $n \to \infty$. Aus Lemma 2.9(ii) und Gleichung (2) kennen wir die asymptotischen Äquivalenzen

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^n j^{2aC_1-2}} \overset{2.9}{\sim} \frac{2aC_1-1}{n^{2aC_1-1}} \overset{(2)}{\sim} \frac{2aC_1-1}{L^2} n\beta_n^2$$

d.h. insgesamt

$$\kappa_n^2 \langle M\rangle_n \to \frac{g(x_0)C_1^2}{2aC_1-1} \quad \text{f.s.}$$

Zur Anwendung des CLT fehlt uns noch die bedingte Lyapunov-Bedingung. Es gilt für $j \geq 1$

$$\Delta M_j = \frac{\gamma_j}{\beta_j}(H(X_{j-1}, Z_j) - h(X_{j-1}))\,,$$

also mit dem δ aus Voraussetzung (d)

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|\Delta M_j|^{2+\delta} \,|\, \mathcal{F}_{j-1}] \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{\gamma_j}{\beta_j}\right)^{2+\delta} \sup_{k\geq 1} \mathbb{E}[|H(X_{k-1}, Z_k) - h(X_{k-1})|^{2+\delta} \,|\, \mathcal{F}_{k-1}]\,. \quad (6)$$

Das Supremum über die bedingten Erwartungswerte kann gebildet werden, weil die Indexmenge abzählbar ist. Für $n \to \infty$ gilt wegen $\gamma_n \sim C_1/n$

$$(\sqrt{n}\beta_n)^{2+\delta} \left(\frac{\gamma_n}{\beta_n}\right)^{2+\delta} = n^{1+\delta/2}\gamma_n^{2+\delta} \sim C_1^{2+\delta} n^{-1-\delta/2}$$

und deshalb

$$\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n^{2+\delta} \left(\frac{\gamma_n}{\beta_n}\right)^{2+\delta} < \infty\,.$$

Mit dem Kronecker-Lemma 2.8 folgt

$$\kappa_n^{2+\delta} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\gamma_j}{\beta_j}\right)^{2+\delta} \to 0\,.$$

Es soll nun das Supremum in Gleichung (6) mithilfe von Voraussetzung (d) abgeschätzt werden. Mittels Substitution bei Unabhängigkeit 1.2 gilt für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|H(X_{n-1}, Z_n) - h(X_{n-1})|^{2+\delta} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] &= \int |H(X_{n-1}, z) - h(X_{n-1})|^{2+\delta} \,\mathrm{d}P^{Z_1}(z) \\ &= \|H(X_{n-1}, Z_1(\cdot)) - h(X_{n-1})\|_{2+\delta}^{2+\delta}\end{aligned}$$

mit der Norm auf $\mathcal{L}^{2+\delta}(P)$. Definiere $\varphi(x) \coloneqq \mathbb{E}[|H(x,Z_1)|^{2+\delta}]$. Durch die Dreiecksungleichung und die Jensensche Ungleichung kann für $x \in \mathbb{R}$ man abschätzen

$$\begin{aligned}\|H(x,Z_1) - h(x)\|_{2+\delta} &\leq \|H(x,Z_1)\|_{2+\delta} + |h(x)| \\ &= \varphi(x)^{1/(2+\delta)} + |\mathbb{E}[H(x,Z_1)]| \\ &\leq \varphi(x)^{1/(2+\delta)} + \mathbb{E}[|H(x,Z_1)|^{2+\delta}]^{1/(2+\delta)} \\ &= 2\varphi(x)^{1/(2+\delta)},\end{aligned}$$

also gilt

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|H(X_{n-1},Z_n) - h(X_{n-1})|^{2+\delta} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}] \leq 2^{2+\delta} \sup_{n\geq 1} \varphi(X_{n-1}) < \infty \text{ f.s.}$$

Die rechte Seite ist fast sicher endlich nach Voraussetzung (d) zusammen mit der fast sicheren Konvergenz von X_n gegen x_0.

Insgesamt folgt die Lyapunov-Bedingung

$$\kappa_n^{2+\delta} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[|\Delta M_j|^{2+\delta} \,|\, \mathcal{F}_{j-1}] \to 0 \quad \text{f.s.}$$

und der stabile CLT liefert

$$\sqrt{n}\beta_n M_n \to \mathcal{N}\left(0, \frac{g(x_0)C_1^2}{2aC_1 - 1}\right) \quad \textit{mischend.}$$

Wir kehren zur Zerlegung aus Gleichung (4) zurück:

$$\sqrt{n}(X_n - x_0) = \sqrt{n}\beta_n(X_0 - x_0) + \sqrt{n}\beta_n M_n + \sqrt{n}\beta_n B_n$$

Aufgrund der fast sicheren Konvergenz der beiden anderen Terme gegen 0 folgt die Behauptung mittels Korollar 2.4. □

Bemerkung 3.3 (Optimale Schrittweiten, [Lus13, S. 386])**.** Im nicht-ausgearteten Fall $g(x_0) > 0$ wird die Limesvarianz

$$\frac{g(x_0)C_1^2}{2|h'(x_0)|C_1 - 1}$$

unter der Bedingung $|h'(x_0)|C_1 > 1/2$ als Funktion von C_1 durch

$$C_1 = \frac{1}{|h'(x_0)|}$$

minimiert mit resultierender Varianz

$$\frac{g(x_0)}{h'(x_0)^2} = \frac{\operatorname{Var}[H(x_0,Z_1)]}{h'(x_0)^2}.$$

Die beste Wahl der Schrittweiten ist also

$$\gamma_n = \frac{1}{|h'(x_0)|(C_2 + n)}$$

für $n \geq 1$. Wie oben schon bemerkt ist allerdings bei der Nullstellensuche $h'(x_0)$ nicht bekannt, sodass der Algorithmus mit diesen Schrittweiten nicht implementierbar ist.

Beispiel 3.4 (Rekursiver Quantilschätzer, [Lus13, Bsp. 11.7])**.** Die Verteilungsfunktion F von P^{Z_1} sei stetig und es sei $\alpha \in (0, 1)$ gegeben. Durch den Robbins-Monro-Algorithmus kann rekursiv ein α-Quantil von P^{Z_1} geschätzt werden. Dazu sei $X_0 = s \in \mathbb{R}$, $H(x, z) = \alpha - \mathbb{1}_{\{z \leq x\}}$, $C_1 > 0$ und $C_2 \geq 0$. Die Rekursionsgleichung hat dann die Form

$$X_{n+1} = X_n + \frac{C_1}{C_2 + n + 1}(\alpha - \mathbb{1}_{\{Z_{n+1} \leq X_n\}})$$

und es gilt $h(x) = \alpha - F(x)$ und $g(x) = \alpha^2 - 2\alpha F(x) + F(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist h monoton fallend und $\{ h = 0 \} = \{ F = \alpha \}$ die Menge der α-Quantile von P^{Z_1}.

Nach dem Resultat von letzter Woche gilt

$$X_n \to X_\infty \quad \textit{f.s.}$$

für eine reelle Zufallsvariable X_∞ mit

$$P(X_\infty \in \{ F = \alpha \}) = 1\,.$$

Gilt $\{ F = \alpha \} = \{x_0\}$ und ist F in einer Umgebung von x_0 differenzierbar mit Lipschitz-stetiger Ableitung und $F'(x_0) > 0$, so ist Satz 3.1 anwendbar, denn die Voraussetzungen (b) und (d) sind aufgrund der Beschränktheit von H erfüllt. Bei optimaler Wahl der Schrittweiten mit $C_1 = 1/|h'(x_0)| = 1/F'(x_0)$ folgt

$$\sqrt{n}(X_n - x_0) \to \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{F'(x_0)^2}\right) \quad \textit{mischend}$$

für $n \to \infty$.

Literatur

[Kas16] Sebastian Kassing. „Konvergenz des Robbins-Monro-Algorithmus“. 2016.

[Lus13] H. Luschgy. *Martingale in diskreter Zeit: Theorie und Anwendungen.* Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 9783642299612.