Konvergenzraten des Robbins-Monro-Algorithmus

Alexander Schlüter

13. Juli 2016

Der Robbins-Monro-Algorithmus ist ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion, deren Wert nur stochastisch gestört gemessen werden kann. Im letzten Vortrag wurde die fast sichere Konvergenz gegen eine Nullstelle bewiesen. Ziel dieses Vortrages ist es, eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit und die Form der Verteilung im Limit ähnlich dem zentralen Grenzwertsatz zu beweisen.

Inhaltsverzeichnis

1 Erinnerungen

Im Folgenden sei

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{Z}, \mathcal{C})$ ein messbarer Raum,
- $(Z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge u.i.v $(\mathcal{Z}, \mathcal{C})$-wertiger Zufallsvariablen,
- $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall oder $I = \mathbb{R}$,
- X_0 eine von $(Z_n)_{n\geq 1}$ unabhängige I-wertige Zufallsvariable,
- $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $(0, \infty)$ und
- $H : (I \times \mathcal{Z}, \mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{C}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine messbare Abbildung mit

$$H(x, Z_1) \in \mathcal{L}^1 \quad \text{für alle } x \in I.$$

Der **Robbins-Monro-Algorithmus** ist die Folge $X = (X_n)_{n\geq 0}$ von reellen Zufallsvariablen definiert durch die Rekursion

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_{n+1} H(X_n, Z_{n+1}), \tag{1}$$

wobei wir annehmen, dass die Werte immer in I liegen.

Die **Erwartungswertfunktion** des Algorithmus ist definiert durch

$$h : I \to \mathbb{R}, \quad h(x) := \mathbb{E}[H(x, Z_1)]$$

und außerdem sei

$$g : I \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad g(x) := \mathbb{E}[H(x, Z_1)^2].$$

Wir haben gesehen, dass der Robbins-Monro-Algorithmus unter zusätzlichen Annahmen fast sicher gegen eine Nullstelle von h konvergiert. Diese Annahmen waren

(i) (Downcrossing-Bedingung) h ist stetig und es gibt ein $x_0 \in h^{-1}(0)$ mit

$$\sup_{x\in I}(x - x_0)h(x) \leq 0,$$

(ii) (Beschränkte Störung) $X_0 \in \mathcal{L}^2$ und $g(x) \leq C(1 + x^2)$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}_+$ und alle $x \in I$,

(iii) (Abnehmende Schrittweiten) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty$.

2 Vorbereitungen

Definition 2.1. Es sei $(Y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zufallsvariablen von $(\Omega, \mathcal{F})$ nach $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. $(Y_n)_{n\geq 1}$ heißt **mischend konvergent** gegen ν und wir schreiben

$$Y_n \longrightarrow \nu \quad \textit{mischend},$$

falls für alle $f \in \mathcal{L}^1(P)$ und $h \in C_b(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f \cdot h(Y_n)] = \int f \,\mathrm{d}P \int h \,\mathrm{d}\nu.$$

Bemerkung 2.2. Durch Wahl von $f = 1$ folgt aus der mischenden Konvergenz die bekannte Konvergenz in Verteilung.

Satz 2.3 (Stabiler CLT)**.** Seien $\gamma_n = C_1/(C_2 + n)$ für $n \geq 1$ mit reellen Konstanten $C_1 > 0$, $C_2 \geq 0$ und $x_0 \in h^{-1}(0)$. Die folgenden Bedingungen seien erfüllt:

(a) $X_n \to x_0$ f.s. für $n \to \infty$.
(b) $X_0 \in \mathcal{L}^2$ und $g(x) \leq C(1 + x^2)$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}_+$ und alle $x \in I$,
(c) g sei stetig in x_0, h sei differenzierbar in x_0, $h'(x_0) < 0$ und

$$h(x) = h'(x_0)(x - x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2) \quad \text{für } x \to x_0,$$

(d) Es existieren $\epsilon, \delta > 0$ sodass $H(x, Z_1) \in \mathcal{L}^{2+\delta}$ für alle $x \in I$ und

$$\sup_{|x-x_0|\leq\epsilon} \mathbb{E}[|H(x,Z_1)|^{2+\delta}] < \infty\,.$$

Dann gilt für $n \to \infty$:

(i) Falls $|h'(x_0)|C_1 > 1/2$:

$$\sqrt{n}(X_n - x_0) \to \mathcal{N}\left(0, \frac{g(x_0)C_1^2}{2|h'(x_0)|C_1 - 1}\right) \quad \textit{mischend,}$$

(ii) Falls $|h'(x_0)|C_1 = 1/2$:

$$\sqrt{\frac{n}{\log n}}(X_n - x_0) \to \mathcal{N}\left(0, g(x_0)C_1^2\right) \quad \textit{mischend,}$$

(iii) Falls $|h'(x_0)|C_1 < 1/2$:

$$n^{|h'(x_o)|C_1}(X_n - x_0) \to \xi \quad \text{f.s.}$$

für eine reelle Zufallsvariable ξ, die von X_0 abhängt.

Bemerkung 2.4. Downcrossing etc.