Prof. Dr. B. Wilking
Dr. M. Kerin
Dr. S. Hoelzel

Wintersemester 2013/14
WWU Münster

Übungen zur Analysis 1
Blatt 1

Aufgabe 1. Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für die gilt:

(a) $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.

(b) $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(d) $n^3 \leqslant 2^{n+1}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion ($n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$):

(a) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

(b) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie:

(a) Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leqslant \frac{1}{k!}$

(b) Für $n \geqslant 4$ gilt: $2^n \leqslant n!$

(c) Für $n \geqslant 1$ gilt: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$

(d) Für $n \geqslant 1$ gilt: $\left(\frac{n}{3}\right)^n \leqslant \frac{1}{3}n!$

Aufgabe 4. Es sei $M = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine n-elementige Menge. Beweisen Sie, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M) := \{N \mid N \subset M\}$ 2^n Elemente hat.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Donnerstag, 24.10.2013, 8:15 Uhr.