Aufgabe 1 (1) IB: $0^5 - 0 = 0 = 5 * 0$
IV: Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung.
IS: $(n+1)^5 - n - 1 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - n - 1 \overset{IV}{=} 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + \frac{n^5-n}{5})$ $\square$

(2) IB $(n = 1)$: $\prod_{k=2}^{1}(1 - \frac{1}{k^2}) = 1 = \frac{1+1}{2*1}$
IV: Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung.
IS: $\prod_{k=2}^{n+1}(1 - \frac{1}{k^2}) \overset{IV}{=} (1 - \frac{1}{(n+1)^2})\frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{(n+1)^2-1}{2n(n+1)} = \frac{n^2+2n}{2n^2+2n} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$ $\square$

(3) IB: $\sum_{k=1}^{0} k^3 = 0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$
IV: Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung.
IS: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 \overset{IV}{=} (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4} = \frac{(n^2+2n+1)(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$ $\square$

(4) Die Behauptung gilt für $n \in \{0, 1, 2\}$ (Beweis durch Einsetzen). Außerdem gilt sie für alle $n \geq 8$:
IB: $8^3 = 512 \leq 2^{8+1}$
IV: Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}, n \geq 8$ gelte die Behauptung.
IS: $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \overset{IV}{\leq} 2^{n+1} + 3n^2 + 3n + 1 \overset{n\geq 8}{\leq} 2^{n+1} + 3n^2 + 4n \overset{n\geq 8}{\leq} 2^{n+1} + 4n^2 \overset{n\geq 8}{\leq} 2^{n+1} + n^3 \overset{IV}{\leq} 2^{n+2}$ $\square$

Aufgabe 2 (1) IB: $\sum_{k=1}^{2*1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \sum_{k=1+1}^{2*1} \frac{1}{k}$
IV: Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gelte die Behauptung.
IS: $\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \overset{IV}{=} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \frac{2}{2n+2} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=(n+1)+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k}$ $\square$

(2) IB: $\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = -1 = (-1)^1 \binom{1+1}{2}$
IV: Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gelte die Behauptung.
IS: $\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 \overset{IV}{=} (-1)^n \binom{n+1}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = (-1)^{n+1}\left((n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2}\right) = (-1)^{n+1}\left(\frac{n^2+3n+2}{2}\right) = (-1)^{n+1}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) = (-1)^{n+1}\binom{(n+1)+1}{2}$ $\square$

Aufgabe 3 (1) IB: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{0}\frac{1}{n^0} = 1 \leq \frac{1}{1!}$
IV: Für beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung.
IS: $\binom{n}{k+1}\frac{1}{n^{k+1}} = \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} * \frac{(n-k)}{n(k+1)} \overset{IV}{\leq} \frac{1}{k!} * \frac{n-k}{n(k+1)} = \frac{n-k}{n}\frac{1}{(k+1)!}$
$\frac{n-k}{n} \leq 1$ muss gelten, da für $k > n$ der Binomialkoeffizient nicht definiert wäre. Also gilt: $\frac{n-k}{n}\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{k+1!}$ $\square$

(2) IB: $2^4 = 16 \leq 24 = 4!$
IV: Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ gelte die Behauptung.

IS: $2^{n+1} = 2 * 2^n \overset{IV}{\leq} 2 * n! < (n+1) * n!$, da $2 < n+1$ für $n \geq 4$
$(n+1) * n! = (n+1)!$ $\square$

(3) Jedes Summenglied von $(1+\frac{1}{n})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$ entspricht der linken Seite aus 3a), welches jeweils einem Summenglied von $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ zugeordnet werden kann (vgl. 3a) rechte Seite). Die Summanden auf der linken Seite sind jeweils kleiner gleich den Zugeordneten auf der rechten Seite (Beweis geliefert in 3a))
Außerdem ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e = 2.718\dots < 3$ $\square$

(4) IB: $\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} * 1!$
IV: Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gelte die Behauptung.
IS: Nach c) gilt $(\frac{n+1}{n})^n = (1+\frac{1}{n})^n \overset{c)}{<} 3$

$$\overset{IV}{\Longrightarrow} \left(\frac{n}{3}\right)^n * \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \frac{1}{3} n! * 3 \iff \frac{n^n(n+1)^n}{3^n * n^n} =$$
$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^n < n! \iff \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} < n! * \frac{n+1}{3} = \frac{1}{3}(n+1)! \quad \square$$

Aufgabe 4 In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge $\binom{n}{k}$ beträgt. Die Summe dieser Teilmengen $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ist die Anzahl aller Teilmengen, also gesuchte Ordnung der Potenzmenge. Es bleibt zu zeigen, dass diese Summe 2^n ergibt:

IB: $$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = 1 = 2^0$$
IV: Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung.
IS: $$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \overset{\text{Vorlesung}}{=} 2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{IV}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + 2^n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + 2^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + 2^n \overset{IV}{=} 2^n + 2^n = 2^{n+1} \quad \square$$