Aufgabe 1 (1) $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(2) $x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(3) $x \in A - (B \cup C) \iff x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \iff x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \iff x \in (A - B) \cup (A - C)$

(4) $x \in A - (B \cap C) \iff x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \iff x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \iff x \in (A - B) \cup (A - C)$

Aufgabe 2 Die Äquivalenz aller Aussagen mit $x \in B \vee x \notin A$ wird gezeigt:

(1)

$$\begin{aligned}
&A \subseteq B \\
\iff &(x \in A \implies x \in B) \\
\iff &x \in B \vee x \notin A
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&A \cap B = A \\
\iff &(x \in A \wedge x \in B \iff x \in A) \\
\iff &(x \in A \wedge x \in B \wedge x \in A) \vee ((x \notin A \vee x \notin B) \wedge x \notin A) \\
\iff &(x \in A \wedge x \in B) \vee ((x \notin A \vee x \notin B) \wedge x \notin A) \\
\iff &(x \in A \wedge x \in B) \vee x \notin A \\
\iff &(x \in A \vee x \notin A) \wedge (x \in B \vee x \notin A) \\
\iff &x \in B \vee x \notin A
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&A \cup B = B \\
\iff &(x \in A \vee x \in B \iff x \in B) \\
\iff &((x \in A \vee x \in B) \wedge x \in B) \vee ((x \notin A \wedge x \notin B) \wedge x \notin B) \\
\iff &x \in B \vee (x \notin A \wedge x \notin B) \\
\iff &(x \in B \vee x \notin A) \wedge (x \in B \vee x \notin B) \\
\iff &x \in B \vee x \notin A
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
&A - B = \emptyset \\
\iff &(x \in A \wedge x \notin B \iff x \in \emptyset) \\
\iff &(x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in \emptyset) \vee ((x \notin A \vee x \in B) \wedge x \notin \emptyset) \\
\iff &x \in B \vee x \notin A
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 p: Anzahl Pferde k: Anzahl Kühe h: Anzahl Hühner
Nach den Bedingungen gilt $k(k+p) = h + 120$.

Fall 1: Beide Seiten der Gleichung sind gerade.
$h + 120$ ist gerade, wenn h gerade ist. Die einzige gerade Primzahl ist 2, es gilt also $h = 2$.
Es folgt $k(k+p) = 122 = 2 * 61$. $k \neq 2$, da verschiedene Primzahlen gesucht werden und $h = 2$ angenommen wird. Es muss also gelten $k + p = 2$, was nicht durch zwei Primzahlen zu erfüllen ist $\Longrightarrow$ Widerspruch.

Fall 2: Es müssen also beide Seiten der Gleichung ungerade sein.
$k(k+p)$ ist ungerade, wenn beide Faktoren ungerade sind. $k+p$ ist ungerade, wenn genau einer der Summanden ungerade ist. Da k bereits als Faktor auftritt und zwingend ungerade sein muss, folgt p ist gerade und damit $p = 2$.

$$k(k+2) = k^2 + 2k = h + 120 \iff k^2 + 2k - 120 = h = (k+12)(k-10)$$

Einer der Teiler der Primzahl h muss 1 sein, und $k + 12$ ist es nicht, da sonst $k = -11$ wäre. Also bleibt $1 = k - 10 \iff k = 11$.
Durch Einsetzen folgt $h = 23$. Der Bauer hat 2 Pferde, 11 Kühe und 23 Hühner.

Aufgabe 4 Es gilt die Formel $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$:
IB: $F_2^2 = 1 * 1 = 1 = 1 * 2 - 1 = F_1F_3 + (-1)^1$
IV: Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
IS:

$$F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) = F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_{n+1} \overset{IV}{=} F_nF_{n+1} + F_n^2 + (-1)^n$$
$$= F_n(F_{n+1} + F_n) + (-1)^n = F_{(n+1)-1}F_{(n+1)+1} + (-1)^{(n+1)-1} \quad \square$$