Logik und Algebra Lernzettel

Themen

1. Aussagen und Verknüpfungen
2. Eigenschaften von Aussagen, Termumformung
3. Schlussfolgerungen und Mengenlehre
4. Relationen und Relationenalgebra
5. Normalformen und Algebraische Strukturen
6. Boolsche Algebra, Schaltalgebra und disjunktive Minimalformen
7. Prädikatenlogik und logisches Programmieren

= Vereinfachungsgesetze

Aussagen und Verknüpfungen

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Aussagen = p, q, r, s, t ......

Verknüpfung	formal	Beispiel
Konjunktion	$a \wedge b$	Ich bin krank *und* gehe zum Arzt.
Disjunktion	$b \vee c$	Ich gehe zum Arzt *oder* der Arzt kommt vorbei (oder beides).
Subjunktion	$a \rightarrow b$	*Wenn* ich krank bin, *dann* gehe ich zum Arzt.
Bijunktion	$a \leftrightarrow b$	*Wenn* ich krank bin, *dann* gehe ich zum Arzt *und umgekehrt*. (Ich gehe *genau dann* zum Arzt, *wenn* ich krank bin.)
XOR	$a \dot{\vee} b$	Ich gehe zum Arzt oder der Arzt kommt (nicht beides)

$\neg a$ = Nicht a

Wahrheitstabellen: Ein Term wird aufgeteilt, um herauszufinden ob er wahr oder falsch ist.

Beispiel: $(p \wedge q) \vee \neg r \rightarrow q$

p	q	r	¬r	p∧q	(p∧q)∨¬r	(p∧q)∨¬r → q
w	w	w	f	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f
w	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	f	w
f	f	f	w	f	w	f
f	f	w	f	f	f	w

bei ∧ muss beides w sein
bei ∨ muss eins oder beide w sein
bei $\dot{\vee}$ muss ein aber nicht beide w sein
bei → muss beides w oder f sein, oder das rechte w
bei ⟷ muss beides w oder f sein

Die Tautologie: Ist eine Aussage immer wahr ist es eine Tautologie.
Möglich bei: - Subjunktionen → Implikation (⇒)
- Bijunktion → Äquivalenz (⇔)

Kontradiktion: Immer falsch → Inkosistent

Negation: Beispiel: Michel spielt Fußball und Tennis
p = Michel spielt Fußball
q = Michel spielt Tennis

p	q	p∧q	¬(p∧q)	¬p	¬q	¬p∨¬q	~~¬p∧¬q~~
w	w	w	f	f	f	f	~~f~~
w	f	f	w	f	w	w	~~f~~
f	w	f	w	w	f	w	~~f~~
f	f	f	w	w	w	w	~~w~~

Disjunktive Darstellung der Negierten Konjunktion (gleich wie) → DeMorgansches Gesetz 1

Die Reihenfolge in der Mau bei einer Negation umformt ist genau andersrum

Also:
1. Bijunktion $\leftrightarrow$
2. Subjunktion $\rightarrow$
3. XOR $\dot{\vee}$
4. Disjunktion $\vee$
5. Konjunktion $\wedge$

Beispiel:

$$\neg(p \rightarrow q \wedge s \vee t) = p \wedge \neg(q \wedge t \vee s)$$ 1. Subjunktion

$$= p \wedge \neg(q \wedge t) \wedge \neg s$$ 2. Disjunktion

$$= p \wedge (\neg q \vee \neg t) \wedge \neg s$$ 3. Konjunktion

Die Grundgesetze der Aussagenlogik

Kommutativgesetz:

$p \wedge q = q \wedge p$

$p \vee q = q \vee p$

gilt für alles außer Subjunktionen $(p \rightarrow q \neq q \rightarrow p)$

Assosiativgesetze:

$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

$(p \dot{\vee} q) \dot{\vee} r = p \dot{\vee} (q \dot{\vee} r)$

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r = p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

gilt für alles außer Subjunktionen

Distributivgesetze:

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

gilt nur für Konjunktion und Disjunktion

Komplementgesetze:

$p \wedge \neg p = f$ (falsch)

$p \vee \neg p = w$ (wahr)

gilt nur für Konjunktion und Disjunktion

Neutrale Elemente:

$p \wedge w = p$

$p \wedge f = f$

$p \vee w = w$

$p \vee f = p$

gilt nur für Konjunktion und Disjunktion

Idempotenzgesetze:

$p \wedge p = p$

$p \vee p = p$

gilt nur für Konjunktion und Disjunktion

---

1. De-Morgansche Gesetze: $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

2. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

$\neg(p \dot{\vee} q) = p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q$

Negation der Bijunktion $\neg(p \leftrightarrow q) = p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge q$

Negation der Subjunktion $\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$

$$\boxed{p \rightarrow q = \neg p \vee q}$$

Beispiele:

$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) = p \wedge (q \vee \neg q)$ | Distributivgesetz (nach p ausklammern)

$= p \wedge w$ | Komplementgesetz q oder nicht q ist immer wahr (w)

$= p$ | Neutrales Element, wenn p wahr ist ist auch $p \wedge w$ wahr und umgekehrt

---

Beispiel 2: $\neg p \wedge q \vee \neg q \wedge w$

$= (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge w)$ | Klammern setzen

$= (\neg p \wedge q) \vee \neg q$ | Neutrales Element

$= (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q)$ | Distributivgesetz

$= (\neg p \vee \neg q) \wedge w$ | Komplementgesetz

$= \neg p \vee \neg q$ | Neutrales Element

$= \neg(p \wedge q)$ | De-Morgan

Schlussfolgerungen

Ein Schluss besteht aus Prämissen und einer Konklusion

Prämissen : Wenn Susi ein Mensch ist, dann ist sie sterblich.
Susi ist ein Mensch

Konklusion : ∴ Susi ist sterblich

(also; Konklusion)

Ein Schlussschema ist ein Schluss, nur mit Variablen

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

} bezogen auf das obere Beispiel

Ein Schlussschema aus den Prämissen $P = \{p_1, p_2 \dots, p_n\}$ und der Konklusion q nennt man gültig wenn $P \models q$. Dh. wenn die Subjunktion $p_1 \wedge p_2 \dots \wedge p_n$ eine Tautologie ist.

Andernfalls ist das Schlussschema nicht gültig.

Aufgabe 4: Schlussfolgerungen – 12 Punkte
Formalisieren Sie die folgende Aussage und prüfen Sie, ob ein gültiger Schluss vorliegt: *Wer raucht, schadet seiner Gesundheit. Wer seiner Gesundheit schadet, wird krank. Wer krank wird, fühlt sich unwohl. Also stimmt es nicht, dass man raucht und sich dabei noch wohlfühlt.*

Formalisierung:
p: Man raucht
q: Man schadet seiner Gesundheit
r: Man wird krank
s: Man fühlt sich uwohl

Drei Prämissen und ein Schluss:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ \hline \therefore\ \neg(p \wedge \neg s) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a \to b \\ b \to c \\ c \to d \\ \hline a \to d \end{array} \qquad w$$

Beispielaufgabe Schlussfolgerung: prüfen Sie, ob der folgende Schluss gültig ist

Wenn Karl ein Konservativer ist, dann ist er für die Privatversicherung der Müllabfuhr
Karl ist für die Privatisierung der Müllabfuhr

∴ Karl ist ein Konservativer

p: Karl ist ein Konservativer
q: Karl ist für die Privatversicherung der Müllabfuhr

Schema:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

$$\underbrace{(p \to q)}_{\text{Wenn er p ist dann q}} \wedge \underbrace{q}_{\text{er ist q}} \underbrace{\to p}_{\text{ist er nun auch p ???}}$$

p	q	p → q	(p → q) ∧ q	(p → q) ∧ q → p
w	f	f	f	w
w	w	w	w	w
f	f	w	f	w
f	w	w	w	f

→ Diese Subjunktion ist keine Tautologie und somit kein gültiger Schluss

Mengen

Gleichheit von Mengen = $M_1 = M_2$ → alle Elemente in zwei Mengen sind gleich

Teilmenge = $M_1 \subset M_2$ → M_1 ist enthalten in M_2 ($M_1 = \{1,2\}, M_2 = \{1,2,5\}$)
Teilmenge

Potenzmenge = Menge aller Teilmengen einer Menge. Hier gilt $M \subseteq M$ (Die Menge enthält sich selbst als Teilmenge) und $\emptyset \subseteq M$ (die leere Menge ist auch eine Teilmenge)

$$M = \{a, b, c\}$$

Potenz-zeichen → $\wp(M) = \{\emptyset, \{a,b,c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a\}, \{b,c\}, \{b\}, \{c\}\}$

! Die Potenzmenge ist immer die Anzahl der Elemente in einer Menge quadriert mit 2 als Basis. Menge mit 4 $\in$ = Potenzmenge 2^4

Vereinigung zweier Mengen = $M_1 \cup M_2$ (oder) →
- $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$

Beispiele für $\cup$

Durchschnitt von Mengen = $M_1 \cap M_2$ (und) → wenn M_1 und M_2 keine gleichen Elemente haben dann gilt $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

Differenzmenge = $M_1 \setminus M_2$ → Nur alle Elemente von M_1, ohne die die mit in M_2 sind.

$$\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$$

Kardinalität = $M_1 = \{1,2,3\}$

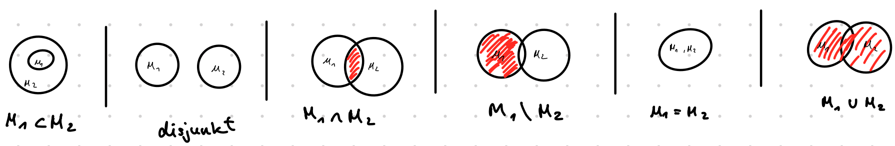
$|M_1| = 3$ → Anzahl von Elementen in einer Menge

Formel: $|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|$

Beispiel: $|M_1| = 49$, $|M_2| = 74$, $|M_1 \cup M_2| = 120$ → $120 = 49 + 74 - \underbrace{|M_1 \cap M_2|}_{x}$

$x = 3$

Venn Diagramm =



Komplement = $\overline{M_1}$ → Bsp: $M = \{1,2,3,4\}$

Teilmenge: $M_1 = \{1,2\}$

Komplement: $\overline{M_1} = \{3,4\}$ — Rest der Obermenge M

Kartesisches Produkt = $M_1 \times M_2$ = Menge aller geordneten Paare

Bsp: $M_1 = \{1,2,3\}$
$M_2 = \{1,4\}$

! · Hier können Elemente 2 mal gleich sein
· Rund klammern

$$M_1 \times M_2 = \{(1,1), (1,4), (2,1), (2,4), (3,1), (3,4)\}$$

Relationen

Eine Relation (R) ist eine Beziehung zwischen 2 Mengen

Eigenschaften: R ist reflexiv, wenn aRa für alle $R \in M$.
R ist irreflexiv, wenn es kein $a \in M$ gibt mit aRa
R ist symmetrisch, wenn aRb die Relation für alle $a,b \in M$ impliziert
R ist assymetrisch, wenn aRb nicht die Relation bRa impliziert
R ist antisymmetrisch, wenn aus aRb und bRa folgt $a=b$ für jedes $a,b \in M$
R ist transitiv, wenn aus aRb und bRc folgt: aRc für jedes $a,b,c \in M$

Aus diesen Eigenschaften lassen sich Systematiken erstellen:

1. Äquivalenzrelation R ist reflexiv, symmetrisch, transitiv

2. Ordnungsrelationen Relation werden mit $>, \geq, <, \leq$ ... verglichen
Hier gilt: irreflexiv, transitiv $\Rightarrow$ irreflexive Quasiordnung
reflexiv, transitiv $\Rightarrow$ reflexive Quasiordnung
antisymmetrisch $\Rightarrow$ Halbordnung
total $\Rightarrow$ Totalordnung

S c h e i s s d r a u f

3. Abbildungen (Tabelle, Venn-Diagramm, Paare ...)

Darstellung: $M_1 = \{1,2,3\}$
$M_2 = \{2,3,4\}$

$M_1 \times M_2$

	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

$M_2 \times M_1$

	1	2	3
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)

$M_1 \times M_2 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2) \ldots\}$

Relationenalgebra

Auf Relationen kann man wie auch auf Mengen operationen wie vereinigen, durchschnitt ... anwenden

R_1

M_1	M_2	M_3
1	2	3
4	5	6

R_2

M_1	M_2	M_3
7	8	9
4	5	6

$R_1 \cup R_2$

M_1	M_2	M_3
7	8	9
4	5	6
1	2	3

Vereinigung

$R_1 \setminus R_2$

M_1	M_2	M_3
1	2	3

Differenz

$R_1 \cap R_2$

M_1	M_2	M_3
4	5	6

Durchschnitt

$R_1 \times R_2$

M_1	M_2	M_3	M_1	M_2	M_3
1	2	3	7	8	9
1	2	3	4	5	6
4	5	6	7	8	9
4	5	6	4	5	6

Kartesisches Produkt

Das sind alles Mengentheoretische Operationen

Es gibt bei Relationen noch Relationenorientierte Operationen

- **Projektion**:

R

M_1	M_2	M_3	M_4
1	2	3	4
4	5	6	7
7	2	9	0

→

$\pi_{M_1, M_2}(R)$

M_1	M_2
1	2
4	5
7	2

$\pi_{M_3, M_4}(R)$

M_3	M_4
3	4
6	7
9	0

Besonderheit:

$\pi_{M_2}(R)$

M_2
2
5

- **Selektion**:

R

M_1	M_2	M_3	M_4
1	2	3	4
4	5	6	7
7	2	9	0
1	5	8	0

→

$\sigma_{(M_1 = 1)}(R)$

M_1	M_2	M_3	M_4
1	2	3	4
1	5	8	0

$\sigma_{(M_4 \neq 0)}(R)$

M_1	M_2	M_3	M_4
1	2	3	4
4	5	6	7

- Wichtig ist auch der Equi-Join. Bei dieser „Verbundsoperation" wird erst das kartesische Produkt gebildet und dann eine Selektion gemacht

Normalformen

Vorrangregel für logische Verknüpfungen:

1. Klammerausdrücke rechnen
2. ¬ stärker als ∧ stärker als ∨
3. Das ∧ kann man weglassen
4. Folgen gleiche Verknüpfungen, so rechnen wir von links nach rechts

Distributivgesetz in der Arithmetik: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

a, b, c = logische Ausdrücke

Man unterscheidet in:

Disjunktive Normalform (DN) & **Konjunktive Normalform** (KN)

$$K_1 \vee K_2 \vee K_3 \dots$$

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2) \vee \dots$$

$$D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \dots$$

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2) \dots$$

Algorithmen für KN und DN

1. Anwendung von DeMorganschen Regeln, bis Negationen nicht mehr vor Klammern sondern nurnoch an Variablen stehen
2. Anwendung von Distributivgesetzen - je nachdem ob KN oder DN gewünscht ist
3. zusammenfassen gleicher Terme → Idempotenzgesetz $\neg aab = \neg ccb$
4. Neutralelemente streichen oder bei f regel anwenden

Diese Normalformen sind nun noch nicht eindeutig, da es unterschiedlich aussehende aber äquivalente Ausdrücke gibt. Daher müssen wir sie weiter vereinheitlichen → kanonische DN/KN

Alogrithmus für kKN und kDN

1. Ausgehend von einer DN oder KN eines Terms A suchen wir alle Terme, in welchen Variablen fehlen. Gibt es solche Terme nicht, liegt bereits eine kDN oder kKN vor.
2. Sonst wählen wir den ersten K (D) und ergänzen eine fehlende Variable a indem sie durch $K \wedge (a \vee \neg a)$ einfügen. (Bei $D \vee (a \wedge \neg a)$)
3. Wir wenden das Distributivgesetz an
4. Gleiche Terme werden mit dem Idempotenzgesetze zusammengefasst

Beispiel (kDN): $f(a,b,c) = \neg a \vee \neg b \wedge c$

$= \neg a \wedge (b \vee \neg b) \vee (\neg b \wedge c) \wedge (a \vee \neg a)$ — fehlend Variablen ergänzen

$= \neg ab \vee \neg a \neg b \vee a \neg bc \wedge \neg a \neg bc$ — Distributivgesetz, a vor b und b∧c werden als paar (zusammen) distribuiert

$= \neg ab(c \vee \neg c) \vee \neg a \neg b(c \vee \neg c) \vee a \neg bc \wedge \neg a \neg bc$ — wieder fehlende Variablen ergänzt

$= \neg abc \vee \neg ab\neg c \vee \underline{\neg a \neg bc} \vee \neg a \neg b \neg c \vee a \neg bc \wedge \underline{\neg a \neg bc}$ — Distributivgesetz

$= \neg abc \vee \neg ab\neg c \vee \neg a \neg bc \vee \neg a \neg b \neg c \vee a \neg bc$ — idempotenzgesetz (gleiche ∧ weg)

✓ fertig

Boolsche Algebra

Gesetze der Booleschen Algebra

DEFINITION

	Name	Satz
1	Idempotenzgesetze	$\forall a \in M: a \otimes a = a$ $\forall a \in M: a \oplus a = a$
2	Assoziativgesetze	$\forall a,b,c \in M: a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ $\forall a,b,c \in M: a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
3	Absorptionsgesetze	$\forall a,b \in M: a \otimes (a \oplus b) = a$ $\forall a,b \in M: a \oplus (a \otimes b) = a$
4	Doppeltes Boolesches Komplement	$\forall a \in M: \sim(\sim a) = a$
5	DeMorgansche Regeln	$\forall a,b \in M: \sim(a \otimes b) = \sim a \oplus \sim b$ $\forall a,b \in M: \sim(a \oplus b) = \sim a \otimes \sim b$
6	Die neutralen Elemente sind wechselseitig komplementär	$\sim 0 = 1$ $\sim 1 = 0$
7	0-1 Gesetze	$\forall a \in M: a \otimes 0 = 0$ $\forall a \in M: a \oplus 1 = 1$

Schaltalgebra

Ist ein Modell der Boolschen Algebra. Man betrachtet z.B. Schalter die „a" oder „b" heißen. Sind sie zu sind sie gleich 0. Wenn es eine Verbindung aus a, b gibt (wie $a \wedge b$) ist es wie in der Mengenlehre.

$\mathbb{B} = \{0,1\}$, wir nennen die Elemente dieser Menge 0 und 1 Schaltkonstante

a	b	a∧b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

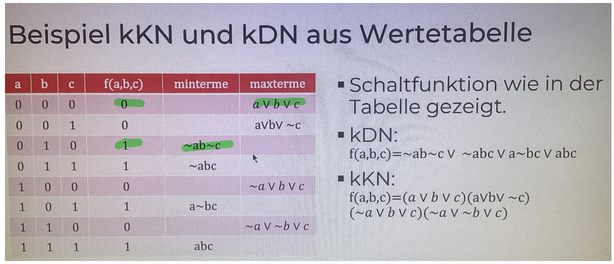
Schaltfunktionen

Gegeben ist folgende Schaltfunktion:

a	b	c	f(a, b, c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Bestimmen Sie die Minterme, die Dualzahlen sowie Dezimalzahlen.

Minterm	Dualzahl	Dezimalzahl
¬a¬bc	001	1
¬ab¬c	010	2
a¬b¬c	100	4
a¬bc	101	5
abc	111	7



Beispiel kKN und kDN aus Wertetabelle

a	b	c	f(a,b,c)	minterme	maxterme
0	0	0	0		a ∨ b ∨ c
0	0	1	0		a∨b∨ ~c
0	1	0	1	~ab~c	
0	1	1	1	~abc	
1	0	0	0		~a ∨ b ∨ c
1	0	1	1	a~bc	
1	1	0	0		~a ∨ ~b ∨ c
1	1	1	1	abc	

- Schaltfunktion wie in der Tabelle gezeigt.
- kDN:
  f(a,b,c)=~ab~c ∨ ~abc ∨ a~bc ∨ abc
- kKN:
  f(a,b,c)=(a ∨ b ∨ c)(a∨b∨ ~c)
  (~a ∨ b ∨ c)(~a ∨ ~b ∨ c)

Prädikatenlogik

Hierbei werden mit Hilfe von Quantoren (∀ = alle, ∃ = „es existiert ein") Aussagen über Eigenschaften von Objekten (Atomen) getroffen. Diese helfen dabei einen Wertebereich zu bestimmen.

Beispiele: • „Es gibt keinen Menschen, der weiter als 20m springt"
- $\neg \exists x (Mensch(x), springt\_mehr\_als(x, 20))$

- „Alle Menschen sind sterblich"
  $\forall x (Mensch(x) \rightarrow sterblich(x))$

logisches Programmieren

- Basiert auf der Prädikantenlogik
- Verwendet eine deklarative Programmierung, welche Regeln und Fakten verwendet, um eine Lösung zu finden
- Es hat das Ziel logische Verbindungen zwischen Fakten und Regeln zu finden

Übungsklausur mit Lösungen – Logik & Algebra

Aufgabe 1: Wahrheitstabellen – 5 Punkte
Stellen Sie eine Wahrheitstabelle für die Aussagenverknüpfung
$(p \wedge q) \vee \neg r \rightarrow q$ auf.

p	q	r	¬r	p ∧ q	(p ∧ q) ∨ ¬r	(p ∧ q) ∨ ¬r → q
f=0	f	f	w	f	w	f
f	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	f	w
w=1	f	f	w	f	w	f
w	f	w	f	f	f	w
w	w	f	w	w	w	w
w	w	w	f	w	w	w

Aufgabe 2: Aussagenlogik – 4 Punkte
a) Definieren Sie die DeMorganschen Regeln der Aussagenlogik.

1. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
2. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

b) Wie nennt man eine Aussage, die immer `wahr` ist?

Tautologie.

c) Was versteht man unter einer aussagenlogischen Implikation?

Eine tautologische Subjunktion.

Aufgabe 3: Termumformung – 10 Punkte
Formen Sie den folgenden Term um, um ihn soweit Sie können zu vereinfachen: $\neg p \wedge q \vee \neg q \wedge w$. Nutzen Sie dazu die Gesetze der Aussagenlogik und nennen Sie je Schritt, welches Gesetz Sie angewendet haben.

Term		Umformung	Gesetz
$\neg p \wedge q \vee \neg q \wedge w$	$\Leftarrow\Rightarrow$	$(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge w)$	*Klammern setzen
		$(\neg p \wedge q) \vee \neg q$	Neutrales Element
		$(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q)$	Distributivgesetz
		$(\neg p \vee \neg q) \wedge w$	Komplementgesetz
		$\neg p \vee \neg q$	Neutrales Element
		$\neg(p \wedge q)$	DeMorgan

Aufgabe 4: Schlussfolgerungen – 12 Punkte
Formalisieren Sie die folgende Aussage und prüfen Sie, ob ein gültiger Schluss vorliegt: *Wer raucht, schadet seiner Gesundheit. Wer seiner Gesundheit schadet, wird krank. Wer krank wird, fühlt sich unwohl. Also stimmt es nicht, dass man raucht und sich dabei noch wohlfühlt.*

Formalisierung:
p: Man raucht
q: Man schadet seiner Gesundheit
r: Man wird krank
s: Man fühlt sich uwohl

Drei Prämissen und ein Schluss:

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q \\ & q \rightarrow r \\ & r \rightarrow s \\ \hline \therefore & \neg(p \land \neg s) \end{array}$$

Zeigen, dass das Schlussschema $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r) \land (r \rightarrow s) \rightarrow \neg(p \land \neg s)$ eine Tautologie ist.

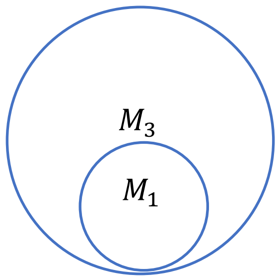
p	**q**	**r**	**s**	**A: p→q**	**B: q→r**	**C: r→s**	**A ∧ B ∧ C**	**p ∧ ¬s**	**¬(p ∧ ¬s)**	**A ∧ B ∧ C → ¬(p ∧ ¬s)**
f	f	f	f	w	w	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w	f	w	w
f	f	w	f	w	w	f	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w	f	w	w
f	w	f	f	w	f	w	f	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w	f	f	w	w
f	w	w	f	w	w	f	f	f	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	w	w	f	w	f	w
w	f	f	w	f	w	w	f	f	w	w
w	f	w	f	f	w	w	f	w	f	w
w	f	w	w	f	w	w	f	f	w	w
w	w	f	f	w	f	w	f	w	f	w
w	w	f	w	w	f	w	f	f	w	w
w	w	w	f	w	f	w	f	w	f	w
w	w	w	w	w	w	w	w	f	w	w

Es handelt sich um einen gültigen Schluss.

Aufgabe 5: Mengenlehre – 6 Punkte
Gegeben sind die folgenden Mengen:
$M_1 = \{5, 18, 37, 42\}$
$M_2 = \{4, 11, 24, 25, 42\}$
$M_3 = \{3, 5, 7, 18, 24, 37, 42\}$

Bilden bzw. berechnen Sie
a) $M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$ = {5, 18, 37, 42}
b) $\wp(M_3 \setminus M_1) = \wp(\{3, 7, 24\})$ = {{}, {3}, {7}, {24}, {3, 7}, {3, 24}, {7 ,24}, {3, 7, 24}}
c) $|M_2 \cup M_3|$ = |{3, 4, 5, 7, 11, 18, 24, 25, 37, 42}| = 10

d) Stelle Sie ein Venn-Diagramm auf für $M_1 und\ M_3$.



Aufgabe 6: Relationen – 3 Punkte
Gegeben sind die folgenden Relationen:

R_1		
M_1	M_2	M_3
2	4	6
1	3	5
6	7	8

R_2		
M_1	M_2	M_3
1	2	7
2	4	6
6	7	9

Stellen Sie die symmetrische Differenz $R_1 \Delta R_2$ auf.

$R_1 \Delta R_2$		
M_1	M_2	M_3
1	3	5
6	7	8
1	2	7
6	7	9

Aufgabe 7: Normalformen – 10 Punkte
Überführen Sie folgende Aussage in eine kDN: $f(a, b, c) = \neg(a \vee b) \vee c$.

f(a,b,c)=¬(a ∨ b) ∨ c
¬a¬b ∨ c =
¬a¬b (c ∨ ¬c) ∨ c (a ∨ ¬a) =
¬a¬b¬c ∨ ¬a¬bc ∨ ac ∨ ¬ac =
¬a¬b¬c ∨ ¬a¬bc ∨ ac (b ∨ ¬b) ∨ ¬ac (b ∨ ¬b)=
¬a¬b¬c ∨ ¬a¬bc ∨ abc ∨ a¬bc ∨ ¬abc ∨ ¬a¬bc
000 001 111 101 011 001

Umsortieren: ¬a¬b¬c ∨ ¬a¬bc ∨ ¬abc ∨ a¬bc ∨ abc

Aufgabe 8: Schaltfunktionen – 6 Punkte
Gegeben ist folgende Schaltfunktion:

a	**b**	**c**	**f(a, b, c)**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Bestimmen Sie die Minterme, die Dualzahlen sowie Dezimalzahlen.

Minterm	**Dualzahl**	**Dezimalzahl**
¬a¬bc	001	1
¬ab¬c	010	2
a¬b¬c	100	4
a¬bc	101	5
abc	111	7

Aufgabe 9: Prädikatenlogik und logisches Programmieren – 4 Punkte
a) Definieren Sie die Grundlagen der Prädikatenlogik.

Kernelement der Prädikatenlogik sind Aussagen über die Eigenschaften von Objekten. Durch n-stellige Prädikate definieren wir die Eigenschaften für diese Objekte, die auch Atome genannt werden.

b) Wofür wird der Ansatz des logischen Programmierens in der Praxis besonders häufig eingesetzt?

Logisches Programmieren wird besonders häufig für Wissensdatenbanken, sogenannte Expertensysteme, eingesetzt. Es wird nach gewissen Regeln eine Wissensdatenbank (DB) ins System eingegeben. Es können dann Abfragen an die DB gestellt werden, die das System versucht nach den Gesetzen der Logik zu beantworten. Beispielhafter Anwendungsfall: Medizin.