Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Facultad Matemática y Computación, Universidad de La Habana

Informe de la Tarea Investigativa II

Estudiantes de Ciencias de la Computación

Claudia Alvarez Martinez C-212
Alex Sierra Alcala C-211

Modelos dinámicos de poblaciones simples y de sistemas depredador-presa

Autores:

Guruprasad Samanta, Bengal Engineering and Science University
Ricardo Gómez Aíza, Universidad Nacional Autónoma de México

Publicación:

Miscelánea Matemática 58, 2014

1. Introducción

Un modelo matemático es un conjunto de ecuaciones que describe las relaciones entre un conjunto de objetos que conforman un sistema, resolviendo estas ecuaciones podemos simular el comportamiento del sistema. En dicho artículo se aborda el estudio de sistemas dinámicos que describen la interacción de dos especies que coexisten en un espacio común. En particular, se considera la relación depredador-presa. Para los experimentos y gráficas en este informe hemos usado una

2. Modelos de poblaciones

Modelo de Malthus

Uno de los primeros investigadores en estudiar la dinámica de poblaciones fue Thomas Robert Malthus. Él propuso, alrededor de 1798, un modelo matemático de crecimiento de poblaciones basado en la idea de que, siendo N(t) el tamaño de una población en un instante t de tiempo, la tasa de aumento de la población es proporcional a la población en ese instante:

$$\frac{dN}{dt} = rN \tag{1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad que representa la tasa de aumento de la población que iguala a la tasa de natalidad menos la tasa de mortalidad. De este modo el comportamiento de la población será distinto según los valores de las tasas per cápita de nacimiento (n) y muerte (m).

- Si n ¿m, el tamaño de la población crecerá exponencialmente.
- Si n = m, el tamaño de la población permanecerá constante a lo largo del tiempo.
- Si n ¡m, el tamaño de la población irá disminuyendo arbitrariamente con el paso del tiempo, de forma tal que en este caso la población tiende hacia la extinción.

Cuando la población alcanza un cierto tamaño en relación al ambiente ecológico donde se desarrolla la población, el modelo exponencial puede dejar de ser adecuado porque los factores limitantes del crecimiento como la escasez de recursos (agua, comida, etc.), reducen la tasa de incremento de la población. En estos casos resulta adecuado introducir un término en la ecuación para así tener en cuenta la competencia entre los miembros de la población por los recursos.

Modelo de Verhulst

En 1838, cuarenta años más tarde, el matemático belga Pierre-Francois Verhulst, modificó el ensayo de Malthus y publicó un modelo continuo, basado en una ecuación diferencial ordinaria; conocido también como “modelo logístico de crecimiento de poblaciones”:

$$\frac{dN}{dt} = rN - cN^2 = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{2}$$

donde :

- N = N(t): tamaño de la población de una especie al tiempo t
- cN: competencia intraespecífica, c > 0
- r: tasa per cápita de crecimiento neta a la que la población crecería en ausencia de competencia intraespecífica, r > 0
- K = r/c: capacidad de carga de la población, K > 0

Modelo de Lotka-Volterra

En 1925, el matemático estadounidense Alfred J. Lotka y el biólogo italiano Vito Volterra, publicaron un modelo dinámico que describe la interacción entre dos especies que coexisten en un espacio común. El modelo de Lotka-Volterra es un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe la dinámica de dos poblaciones de especies diferentes, una depredadora y otra presa.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} \tag{3}$$

donde:

- x(t): tamaño de la población de presas al tiempo t
- y(t): tamaño de la población de depredadores al tiempo t
- a: tasa per cápita de crecimiento de la población de presas en ausencia de depredadores, a $>$ 0
- b: tasa per cápita de muerte de la población de presas a causa de los depredadores, b $>$ 0
- c: tasa per cápita de muerte de la población de depredadores en ausencia de presas, c $>$ 0
- d: tasa per cápita de crecimiento de la población de depredadores a causa de la presa, d $>$ 0

Por tanto, podemos llegar a la conclusión de que, si no existen depredadores, la población de presas crecería exponencialmente, mientras que, si no hubiera presas, la especie depredadora descendería en población. De esta manera, la población depredadora prospera al haber un número abundante de presas, pero vuelve a decaer al verse reducido de suministro. Al descender el número de depredadores, la población de presas aumenta de nuevo. Esta dinámica continua en un ciclo que oscila de manera periódica.

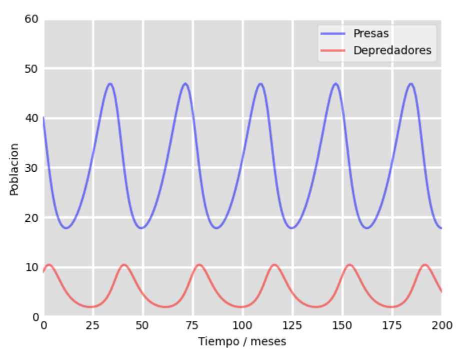

Figura 1: Modelo de Lotka-Volterra

3. Puntos de Equilibrio y Estabilidad

Considerando la ecuación logística, llamamos punto de equilibrio a las soluciones de la ecuación homogénea:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0 \tag{4}$$

Estos puntos se clasifican en estable o inestable, para ello debemos obtener la solución de la ecuación del modelo logístico de crecimiento poblacional, la cual la es resultado de separar variables e integrar a ambos miembros de la igauldad.

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \Rightarrow \frac{dN}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = rdt \tag{5}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dN}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = r\int dt \Rightarrow \int (\frac{1}{N}+\frac{1}{K-N})dN = r\int dt \tag{6}$$

$$\Rightarrow \log|N| - \log|K-N| = r(t+A) \Rightarrow \log|\frac{N}{K-N}| = r(t+A) \Rightarrow \frac{N}{K-N} = e^{rt}B \tag{7}$$

Despejando y partiendo de $N(0) = N_0$ como condición inicial, obtenemos la solución $N(t) = \frac{K}{1+(\frac{K}{N_0}-1)e^{-rt}}$ de forma tal que $N(t) \to K$ si $t \to \infty$. Por tanto, la ecuación diferencial tiene dos puntos de equilibrio:

- N = 0 punto de equilibrio inestable
- N = K punto de equilibrio estable

De la misma manera, si queremos obtener los puntos de equilibrios del modelo Lotka-Volterra, resolvemos el sistema de ecuaciones homogéneas:

$$\begin{cases} ax - bxy = 0 \\ -cy + dxy = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Del cual obtenemos las soluciones (0 ; 0) y ($\frac{c}{d}$; $\frac{a}{b}$). Para analizar el tipo de estabilidad de los puntos, buscamos los valores propios de la matriz Jacobiana de las funciones $f_1(x,y) = ax - bxy$ y $f_2(x,y) = -cy + dxy$:

$$J = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\Rightarrow |J - \lambda I_2| = \lambda^2 - (a-c-by+dx)\,\lambda + (adx + bcy - ac) = 0 \tag{10}$$

Punto (0, 0)

La ecuación caracteristica es $\lambda^2 - (a-c)\,\lambda - ac = 0$, por lo que sus raíces son $(\lambda - a)(\lambda + c)$, $\lambda = a, -c$. Notemos entonces que las raíces son reales y con signos opuestos, por tanto el punto (0, 0) es un punto de equilibrio inestable, es un punto silla.

Punto ($\frac{c}{d}$; $\frac{a}{b}$)

La ecuación caracteristica es $\lambda^2 + ac = 0$, por lo que sus raíces son $\lambda = \pm i\sqrt{ac}$. Finalmente, sus raíces son complejas conjugadas, por tanto el punto ($\frac{c}{d}$; $\frac{a}{b}$) es un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable, es un centro, como podemos apreciar en su diagrama de fases.

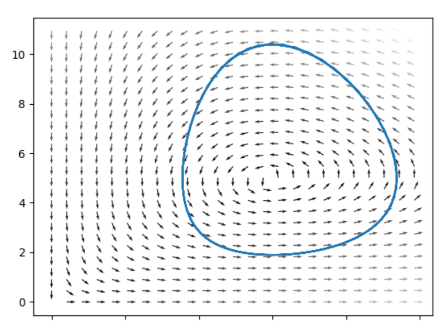

Figura 2: Diagrama de Fases

4. Introduciendo Competencia Intraespecífica en las presas

Introducir competencia intraespecífica en la especie de presas dentro del modelo de Lotka-Volterra nos lleva al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - kx^2 \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} \tag{11}$$

Donde el término kN^2 corresponde a la competencia intraespecífica en el hábitat para la especie de presas. Con esta expresión obtenemos un modelo que es más realista que el modelo de Lotka-Volterra, ya que en la naturaleza las presas no se reproducen de manera exponencial, sino que se ven afectadas por la competencia intraespecífica. Este dinámica logra que las poblaciones de depredadores y presas se mantengan constantes en el inifinito.

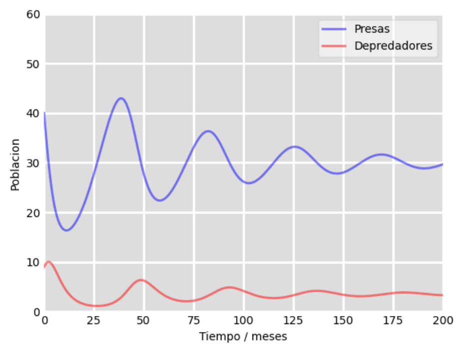

Figura 3: Diagrama de Fases

Su respectiva matriz Jacobiana es:

$$J = \begin{pmatrix} a - by - 2kx & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix} \tag{12}$$

Y sus puntos de equilibrio son $(0,\,0)$, $(\frac{a}{k}\ ;\, 0)$ y $(N_1^*,\, N_2^*)$, donde $N_1^* = \frac{c}{d}$ y $N_2^* = \frac{ad-kc}{bd}$. Analizemos el tipo de estabilidad de cada uno de ellos:

Punto (0, 0)

La ecuación caracteristica es $\lambda^2 - (a-c)\,\lambda - ac = 0$, por lo que sus raíces son $(\lambda - a)(\lambda + c)$, $\lambda = a, -c$. Notemos entonces que las raíces son reales y con signos opuestos, por tanto el punto $(0,\,0)$ es un punto de equilibrio inestable, es un punto silla.

Punto $(\frac{a}{k}\ ;\, 0)$

La ecuación caracteristica es $\lambda^2 - \left(-a + \frac{d-ck}{k}\right)\lambda - a\frac{d-ck}{k} = 0$, por lo que sus raíces son $(\lambda - a)(\lambda + c)$, $\lambda = a, -c$. Notemos entonces que las raíces son reales y con signos opuestos, por tanto el punto $(\frac{a}{k}\ ,\, 0)$ es un punto de equilibrio inestable, es un punto silla.

Punto $(N_1^*,\, N_2^*)$

La ecuación caracteristica es $\lambda^2 + kN_1^*\lambda + bdN_1^*N_2^* = 0$, y así
$\lambda = \frac{1}{2}\left(-kN_1^* \pm \sqrt{\Delta}\right)$, donde $\Delta = k^2 N_1^{*2} - 4bdN_1^*N_2^*$.

Finalmente vemos que sus raíces, o bien son reales y negativas, por lo que sería un nodo estable, o son complejas y conjugadas con parte real negativa, de donde sería un foco estable. Por tanto, el punto $(N_1^*,\, N_2^*)$ es localmente asintóticamente estable. El siguiente diagrama de fases nos muestra la dinámica de este sistema si se tratase de un foco estable:

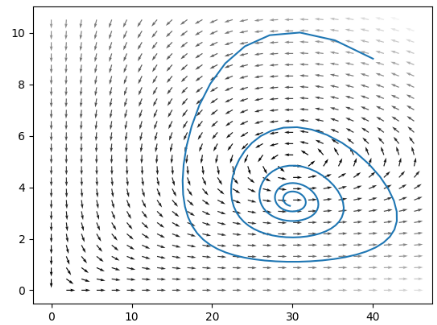

Figura 4: Diagrama de Fases

5. Conclusiones

En un primer momento, con el modelo malthusiano, analizamos que el crecimiento de una población que siga este patrón, no tiene ningún tipo de limitación, por tanto, el crecimiento es exponencial. Es bien sabido que en la naturaleza este fenómeno raramente ocurre, y por ello se diseñó la función logística que incorpora un término llamado capacidad de población sostenible. Hemos mostrado que el efecto de este término produce una curva sigmoidea (a diferencia de la curva exponencial), en la cual, la población al alcanzar cierto umbral reduce su tasa de crecimiento hasta estancarse y dejar de crecer.

La función logística explica un poco mejor cómo se comporta una población en un entorno natural, pero seguimos muy alejados de la realidad. Dependiendo de la especie nos podremos encontrar con que ésta sea depredadora o presa, o experimente otro tipo de interrelación con otras especies. En el caso de que sea presa o depredador, Lotka y Volterra dieron con un sistema de ecuaciones diferenciales que establece la dinámica de ambas poblaciones a lo largo del tiempo. A pesar de ser una mejora con respecto a la función logística, sigue presentando muchas carencias. Para que este modelo funcione adecuadamente debemos aceptar una serie de premisas:

- El ecosistema debe estar aislado: no hay migración, no hay otras especies presentes, no hay plagas...
- La población de presas en ausencia de depredadores crece de manera exponencial: la velocidad de reproducción es proporcional al número de individuos. Las presas sólo mueren cuando son cazadas por el depredador.
- La población de depredadores en ausencia de presas decrece de manera exponencial.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, se observa que el modelo Lotka-Volterra, aunque logra mostrar un aproximado de la realidad, no es verídico. La principal causa que evitó que el modelo se ajustara a la realidad fue que los datos experimentales presentan un comportamiento oscilatorio con amplitud, periodo y desfase variable (probablemente a causa de factores externos no considerados), mientras que los modelos estudiados asumen estas características constantes, pues sólo analizan la interacción entre las dos especies. Por lo tanto, se sugiere como trabajo futuro, estudiar otras variables determinantes en la dinámica poblacional de las especies consideradas, tales como, la caza, enfermedades, alimento de las presas, refugio de las presas. Es posible que esto genere una mejor aproximación de la realidad y, en consecuencia, un modelo útil para la toma de decisiones. Además, se podrían analizar modelos depredador-presa estructurados, los cuales, a pesar de ser considerablemente más complejos, tienen supuestos más realistas.

6. Bibliografía

C. Henry Edwards, Penney D.E., Calvis D. T. "Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera". Pearson Education, 2009. (Texto Digital)

7. Anexos

```
# Runge Kutta de orden 4
def rk4(f, x, h, a, parameters):
  k1 = h * f(x, a, parameters)
  k2 = h * f(x + 0.5 * k1, a, parameters)
  k3 = h * f(x + 0.5 * k2, a, parameters)
  k4 = h * f(x + k3, a, parameters)
  return x + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6

# Funcion que define el sistema de ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra
def deriv(y, a, parameters):
  r1, r2, b1, b2 = parameters['r1'], parameters['r2'], parameters['b1'], parameters['b2']
  R, F = y
  dRdt = r1 * R - b1 * R * F
  dFdt = -r2 * F + b2 * R * F
  return np.array([dRdt, dFdt])

# Funcion que define el sistema de ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra mejorado
def deriv_improved(y, a, parameters):
  r1, r2, b1, b2, c = parameters['r1'], parameters['r2'], parameters['b1'],
      parameters['b2'], parameters['c']
  R, F = y
  dRdt = r1 * R - b1 * R * F - c * R**2
  dFdt = -r2 * F + b2 * R * F
  return np.array([dRdt, dFdt])
```

Durante el proceso de desarrollo del proyecto, se realizaron varias pruebas con distintos valores de los parámetros, los resultados mostrados en las gráficas y diagramas de fases se obtuvieron con los siguientes parámetros:

Parámetros	
Parámetro	**Valor**
x_0	40
y_0	9
a	0.1
b	0.02
c	0.3
d	0.01
k	0.001

Cuadro 1: Parámetros utilizados en el modelo de Lotka-Volterra

Contamos además con un programa en Python que permite realizar las simulaciones de los modelos de Lotka-Volterra y ajustar algunos de los parámetros, mientras se visualizan los resultados.