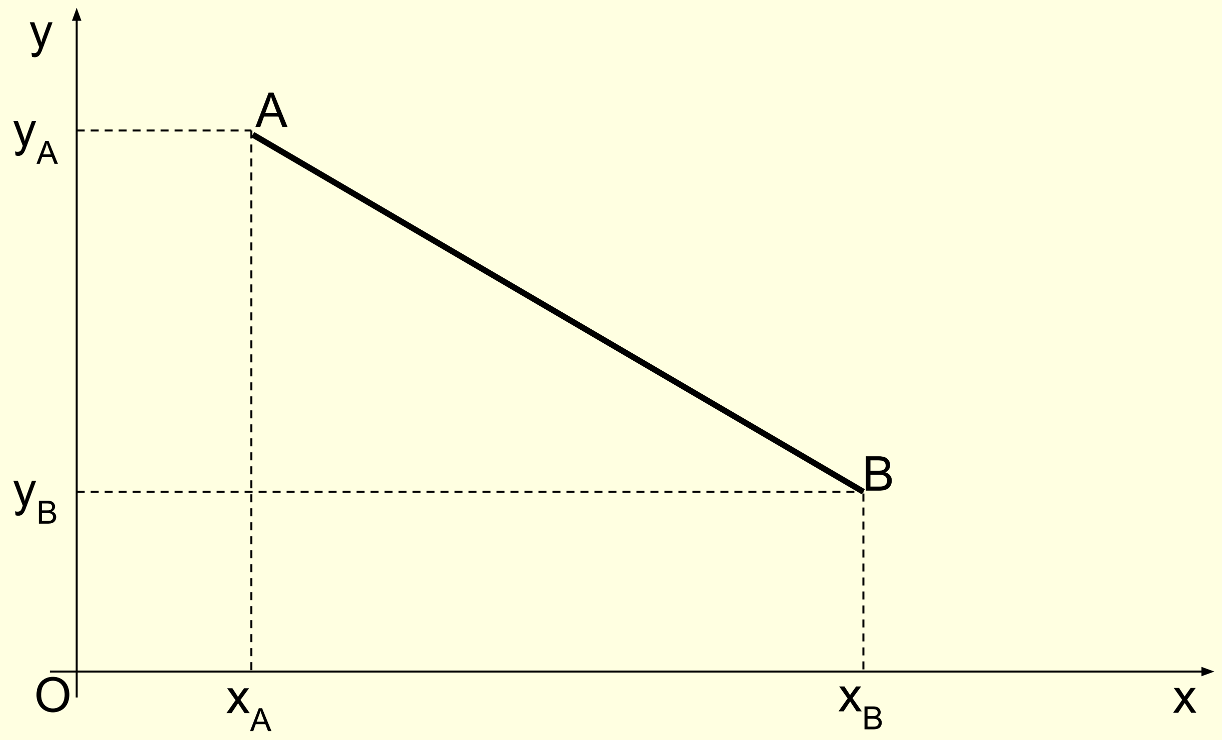
Elemente de geometrie computațională

Elemente de geometrie cu aplicabilitate în problemele de informatică

Distanța între două puncte

Distanța între două puncte $A(x_A,y_A)$ și $B(x_B,y_B)$ este:
$D = sqrt((x_A - x_B)*(x_A - x_B) + (y_A - y_B)*(y_A - y_B))$

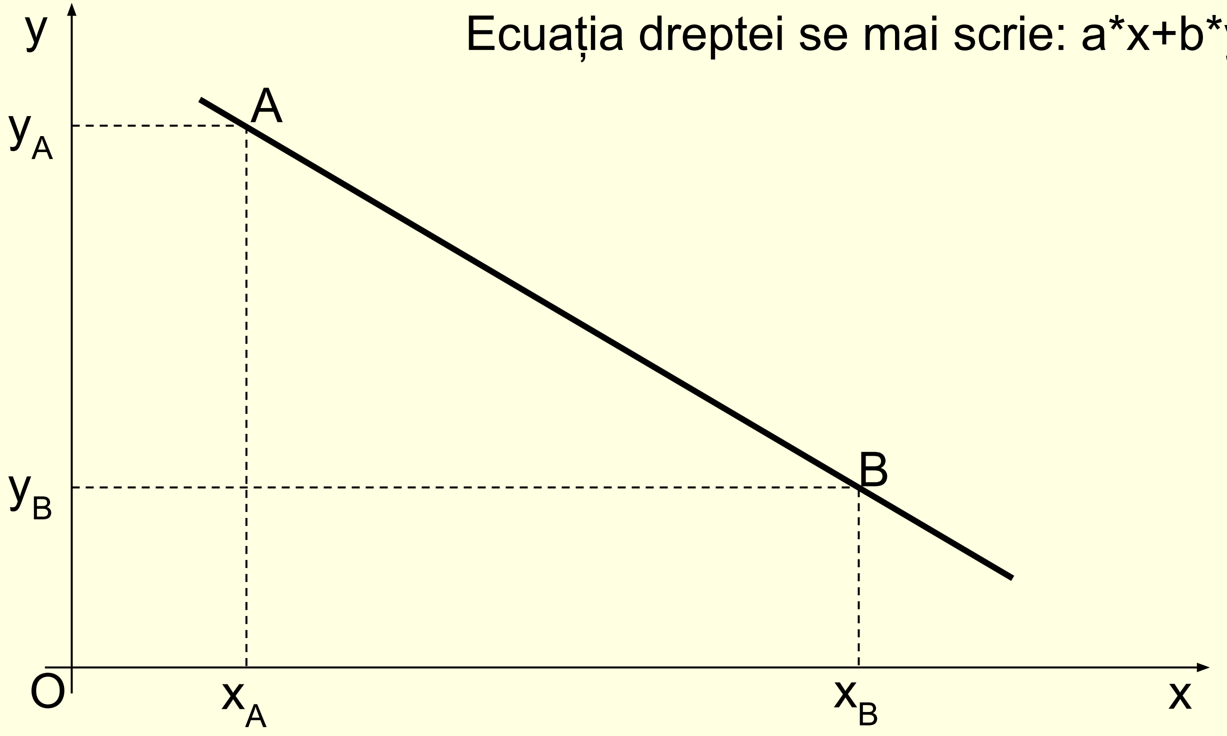


Ecuația unei drepte

Ecuația unei drepte ce trece prin punctele A(x_A,y_A) și B(x_B,y_B)

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \qquad x(y_B - y_A) + y(x_A - x_B) + y_A x_B - x_A y_B = 0$$

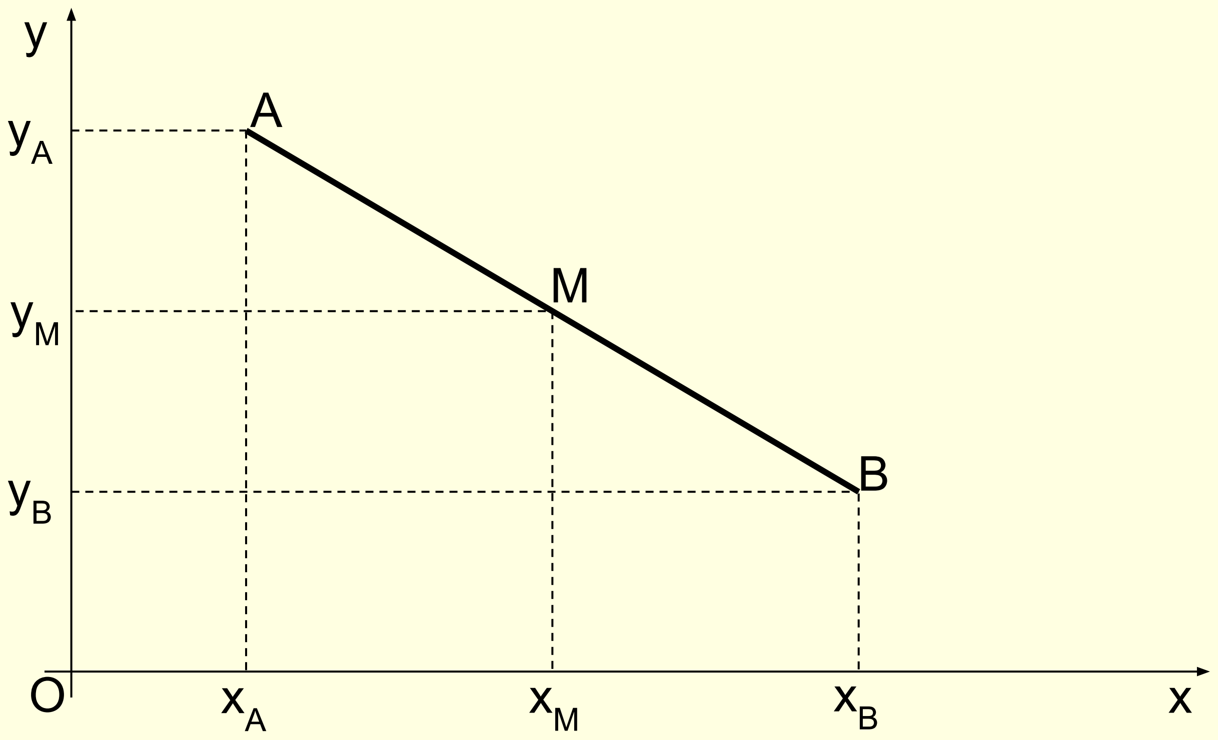
Ecuația dreptei se mai scrie: a*x+b*y+c=0



Mijlocul unui segment

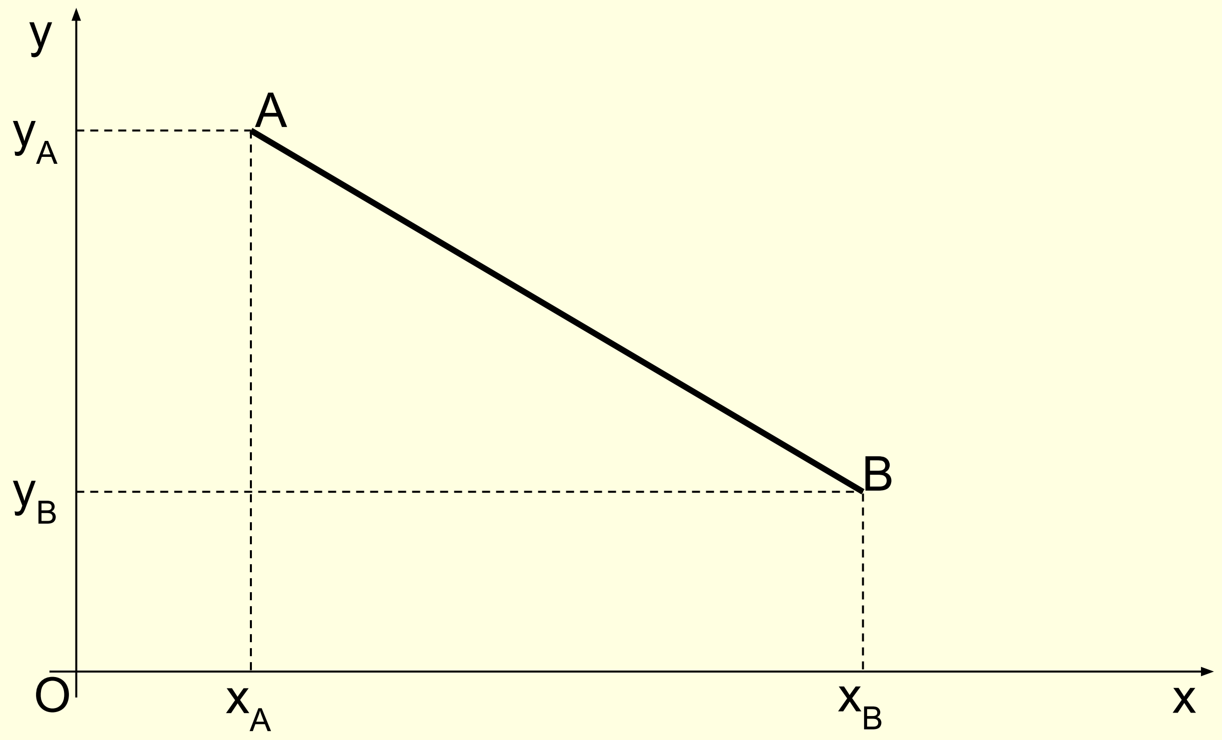
Mijlocul M al segmentului AB are coordonatele:

$x_M=(x_A+x_B)/2$ $y_M=(y_A+y_B)/2$



Lungimea unui segment

Lungimea segmentului AB= $\sqrt{(x_A - x_B)^2+(y_A - y_B)^2}$

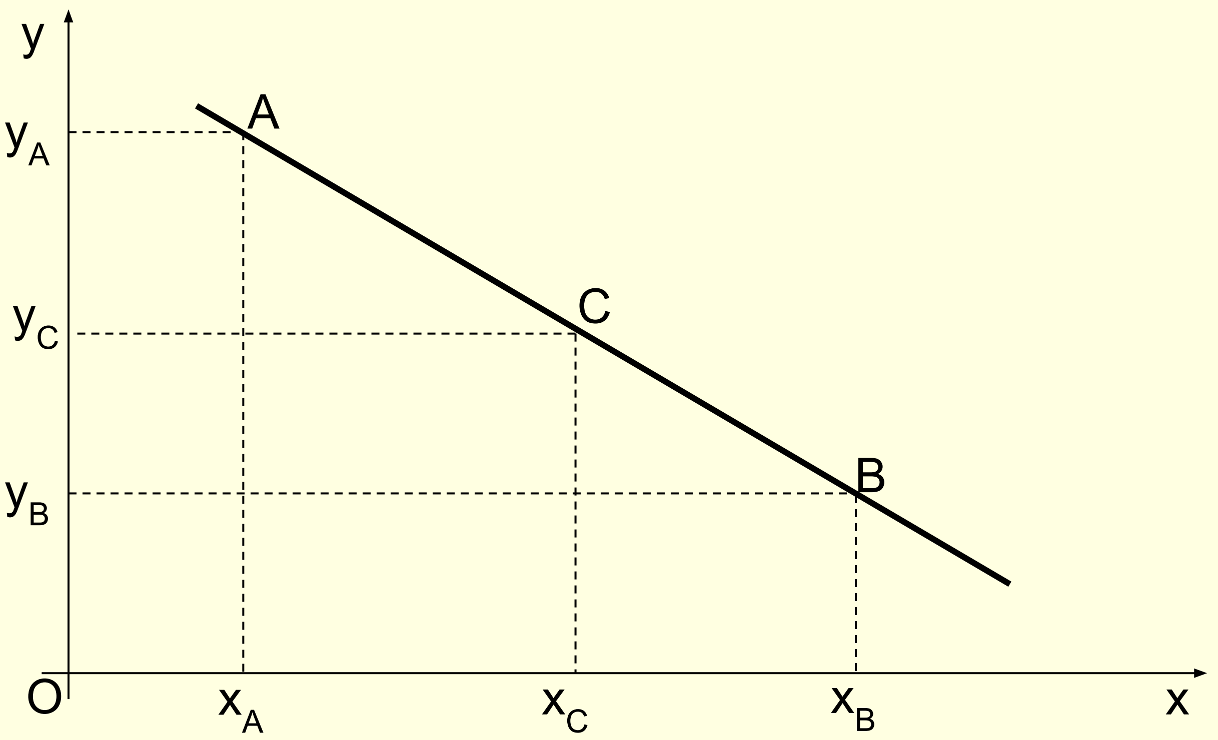


Poziția unui punct față de o dreaptă

- Pentru a afla poziția punctului $C(x_C, y_C)$ introducem coordonatele acestuia în ecuația:

și obținem: $x(y_B - y_A) + y(x_A - x_B) + y_A x_B - x_A y_B = 0$

$x_C(y_B - y_A) + y_C(x_A - x_B) + y_A x_B - x_A y_B = 0$ dacă $C \in AB$

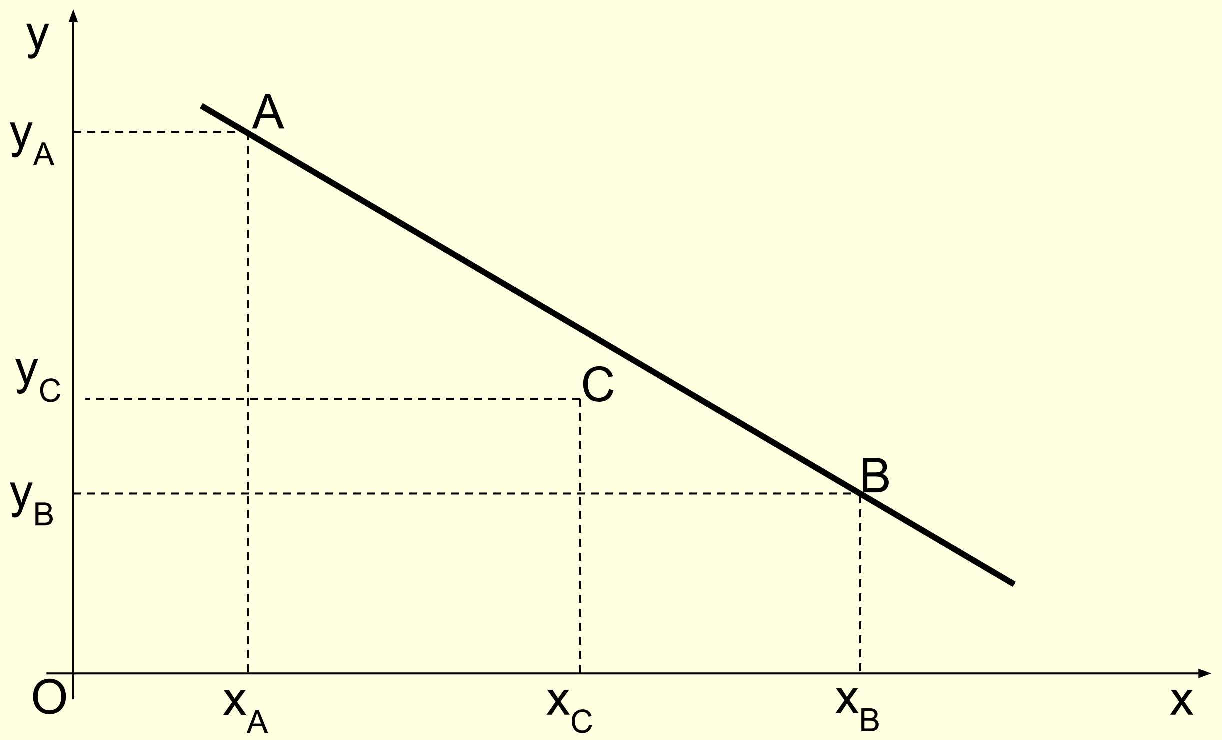


Poziția unui punct față de o dreaptă

- Pentru a afla poziția punctului $C(x_C, y_C)$ introducem coordonatele acestuia în ecuația:

și obținem: $x(y_B - y_A) + y(x_A - x_B) + y_A x_B - x_A y_B = 0$

$x_C(y_B - y_A) + y_C(x_A - x_B) + y_A x_B - x_A y_B < 0$ dacă C e pe o parte a dreptei

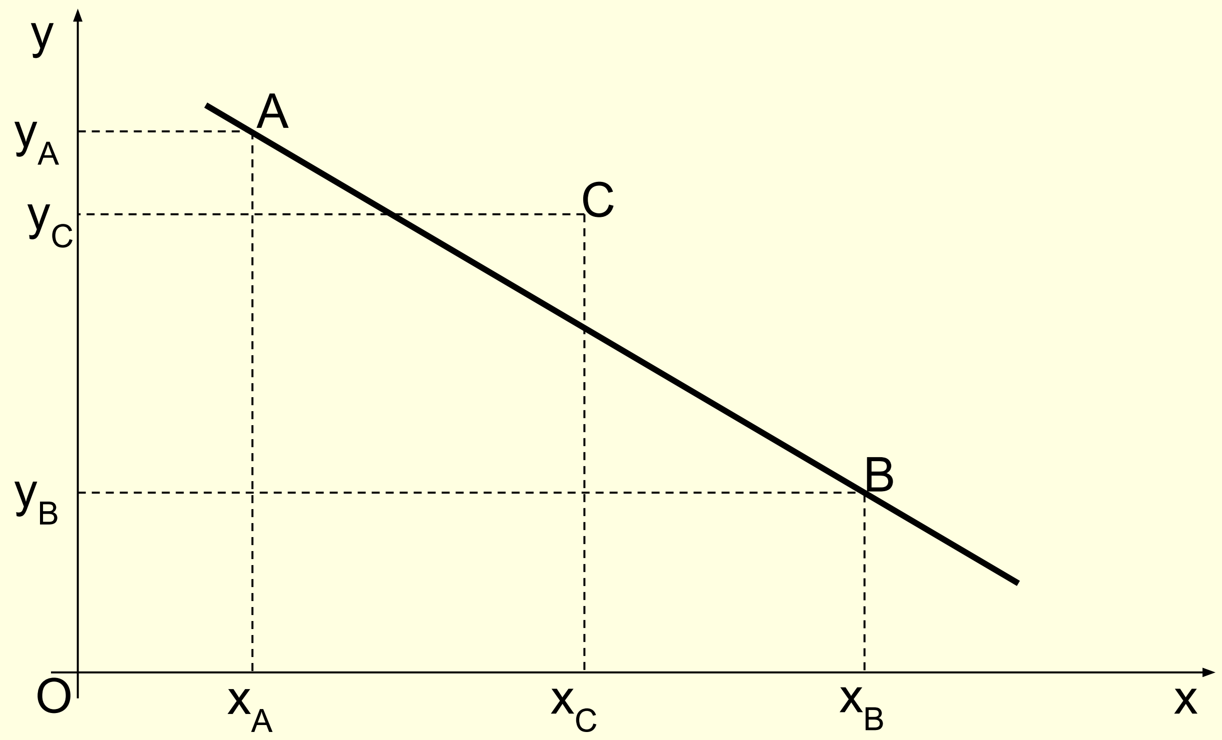


Poziția unui punct față de o dreaptă

- Pentru a afla poziția punctului $C(x_C, y_C)$ introducem coordonatele acestuia în ecuația:

și obținem: $x(y_B - y_A) + y(x_A - x_B) + y_A x_B - x_A y_B = 0$

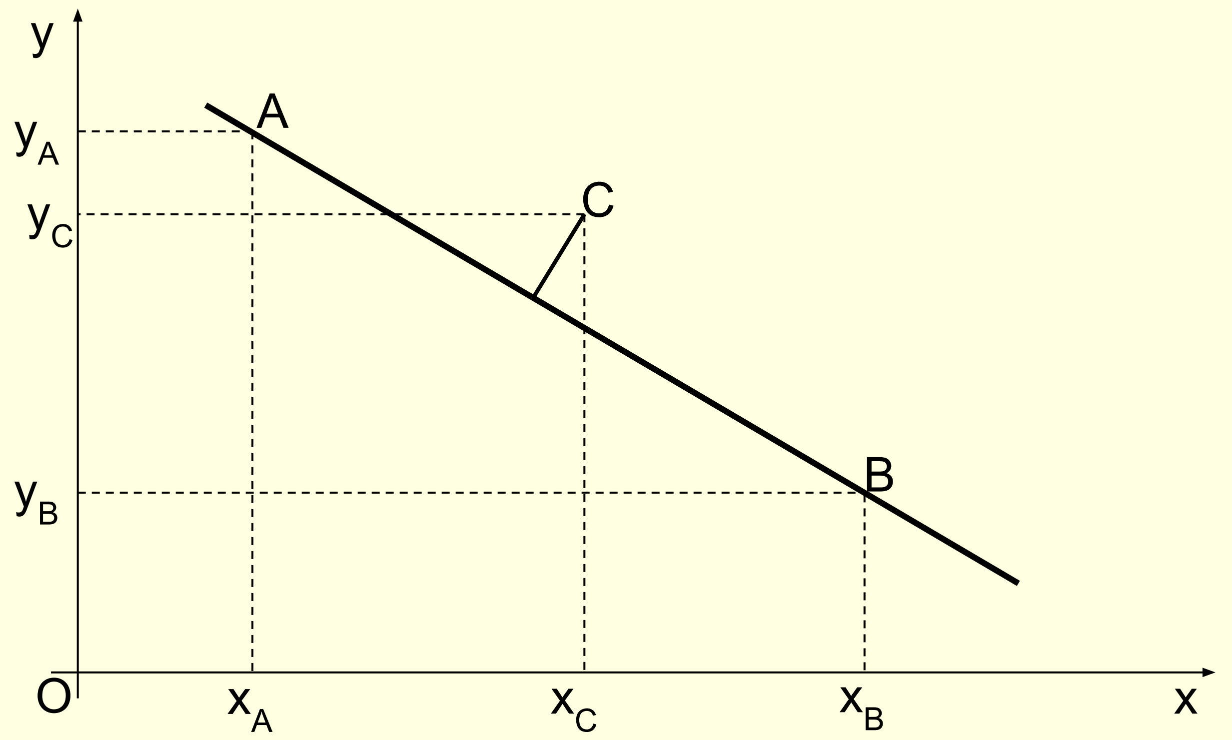
$x_C(y_B - y_A) + y_C(x_A - x_B) + y_A x_B - x_A y_B > 0$ dacă C e pe cealaltă parte a dreptei



Distanța de la un punct la o dreaptă

Distanța de la punctul $C(x_C, y_C)$ la dreapta ax+bx+c=0 este $\frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Din ecuația: $x(y_B - y_A) + y(x_A - x_B) + y_A x_B - x_A y_B = 0$ se obțin a, b și c



Aria unui triunghi

- Aria triunghiului determinat de punctele $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$

este : $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_c & 1 \end{vmatrix}$ (jumătate din modului determinantului)

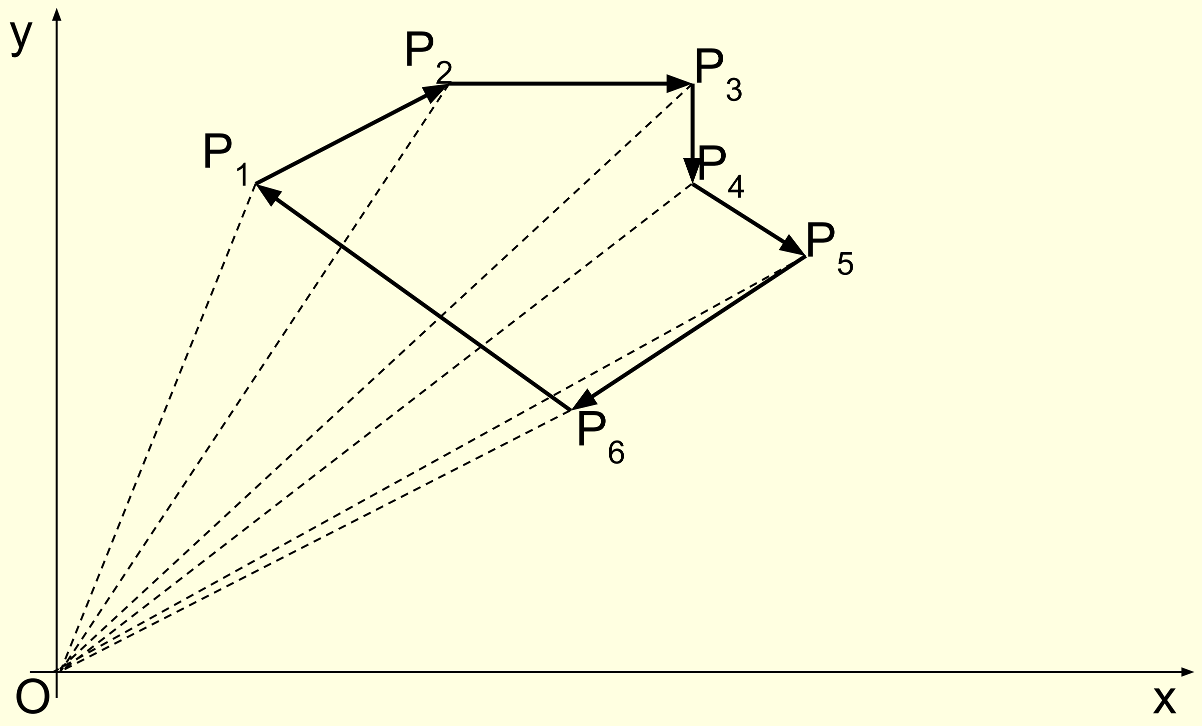
Adică A_{ABC} : $(x_A{*}\, y_B + x_B{*}\, y_C + x_C{*}\, y_A - x_C{*}\, y_B - x_B{*}\, y_A - x_A{*}\, y_C\,)/2$

Se mai poate folosi formula lui Heron, dar scade precizia

Aria unui poligon

Aria unui poligon de puncte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$… $P_n(x_n, y_n)$ este

A=$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)$



Intersecția a două drepte

- Dacă dorim să aflăm punctul de intersecție a două drepte

$a_1*x+b_1*y+c_1=0$ și $a_2*x+b_2*y+c_2=0$ formăm un sistem cu 2 ecuații și 2 necunoscute pe care-l rezolvăm.

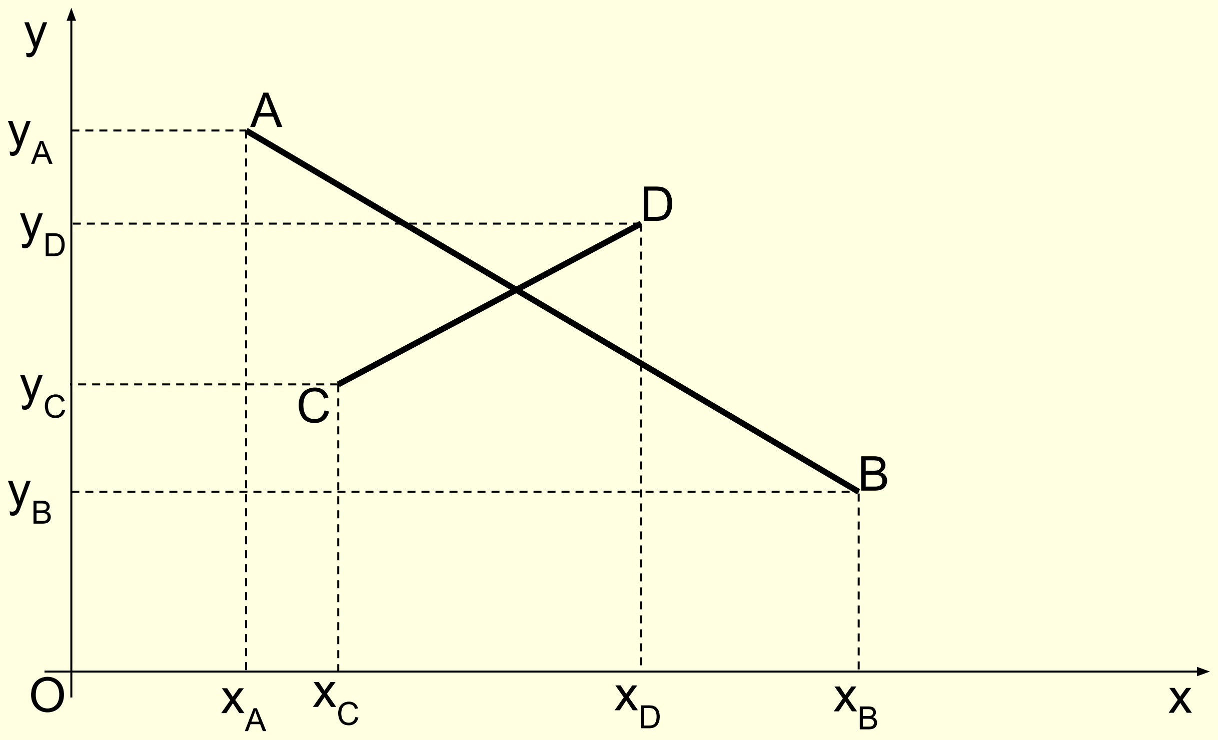
Obținem: $x=(c_2*b_1-c_1*b_2)/(a_1*b_2-a_2*b_1)$

și prin înlocuire: $y=(-c_1-a_1*x)/b_1$

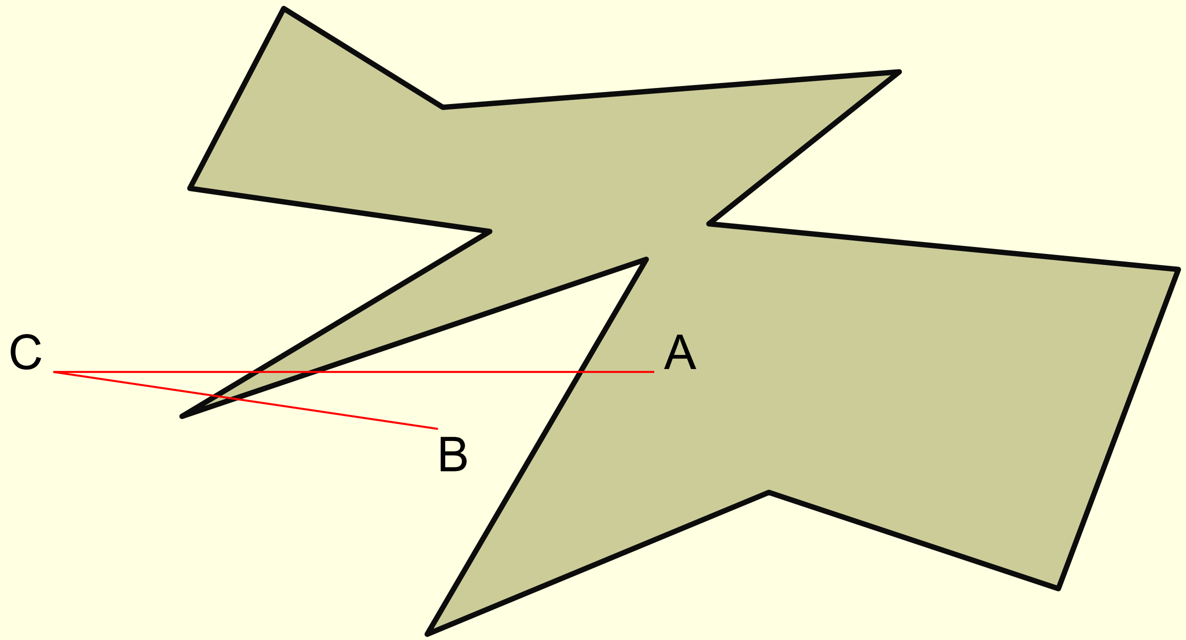
OBS. Trebuie verificat să nu facem împărțiri prin 0.

Intersecția a 2 segmente

2 segmente AB și CD se intersectează dacă:
- C și D se află de o parte și de alta a dreptei determinată de punctele A și B
- A și B se află de o parte și de alta a dreptei determinată de punctele C și D



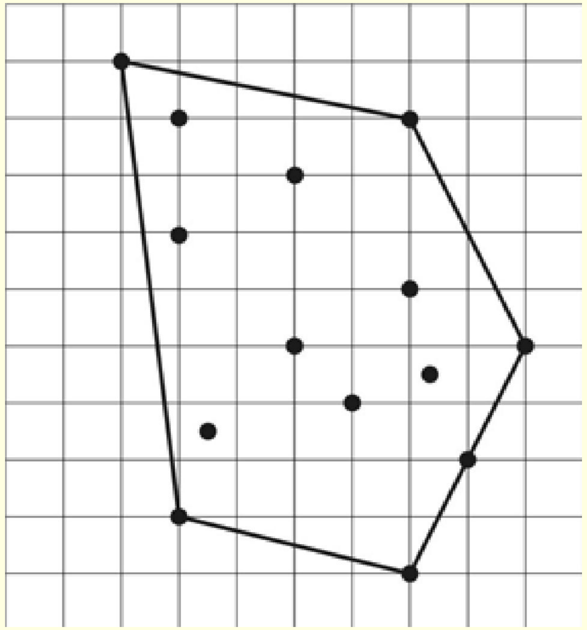
Punct în poligon



- Dacă vrem să verificăm că un punct (A sau B) sunt în poligon sau nu, unim punctul respectiv cu un punct care sigur nu e în poligon (C) și calculăm numărul de intersecții dintre segmentul respectiv și laturile poligonului. Dacă numărul de intersecții e impar (A) atunci punctul e în poligon, altfel nu.

Înfăşurătoare convexă

- Noțiunea de înfășurătoare convexă în plan este intuitiv simplă: pentru o mulțime *S* de puncte ale planului, înfășurătoarea convexă este mulțimea de vârfuri ale poligonului convex1 cu cea mai mică arie, care conține toate punctele mulțimii *S*. Înfășurătoarea convexă poate fi modelată cu ajutorul unei benzi elastice, întinse în jurul mulțimii *S*. La eliberare, banda elastică va repeta conturul înfășurătorii convexe



Înfășurătoare convexă. Algoritmul Graham. Varianta Andrew.

- Algoritmul se bazează pe următorul principiu: partea superioară (după y) a înfășurătorii convexe este bombată (în sus) pentru oricare 3 puncte consecutive ale sale, cea inferioară – bombată (în jos).

Algoritmul lui Graham. Pași.

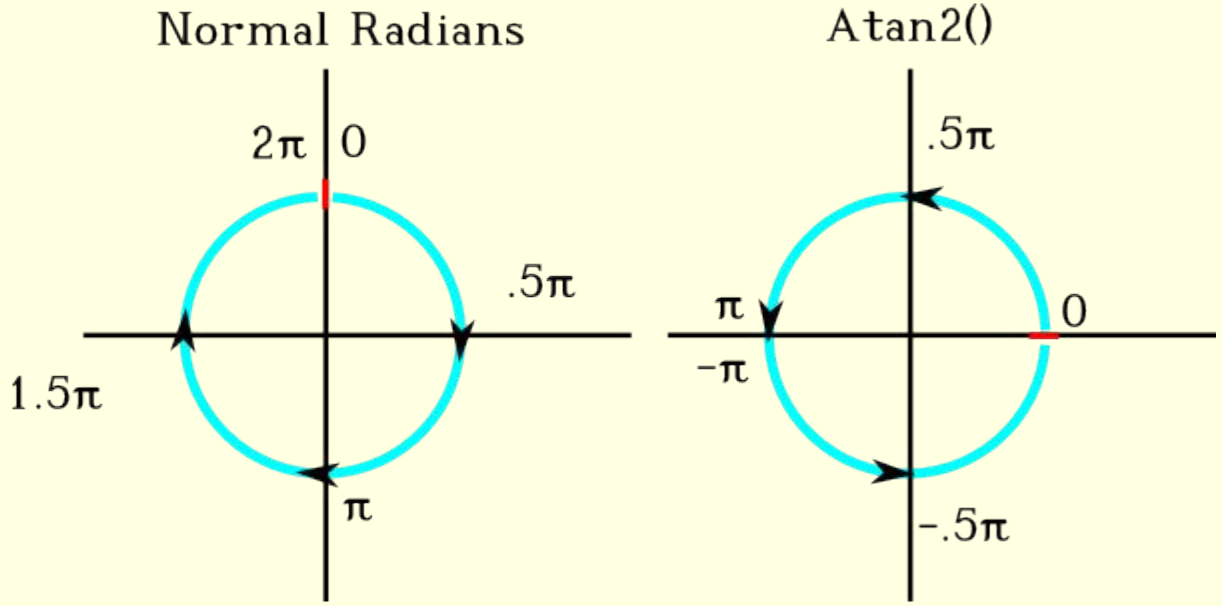
1. se determine două puncte $p1$($pfin$) din S cu abscisa minimă (maximă).
2. se determină segmentul de dreaptă, care le unește
3. se separă S în *Ssup* și *Sinf* după poziția punctelor față de segmentul $[p_1, pfin]$. *Ssup* – punctele extreme și cele din stânga vectorului $p_1\ pfin$, *Sinf* – punctele extreme și cele din dreapta vectorului $p1pfin$.
4. se sortează Ssup, Sinf după creșterea abscisei.
5. se verifică toate tripletele consecutive p_i, $_{pi+1}$, $p_{i+2} \in$ Ssup. Dacă p_{i+1} se află în stânga vectorului $p_i\ p_{i+2}$ se va trece la tripletul p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3}. Dacă p_{i+1} se află în dreapta vectorului $p_i\ p_{i+2}$ se va elimina p_{i+1} și se va cerceta tripletul p_i, p_{i+2}, p_{i+3}. Dacă la o parcurgere de la p_1 la p_{fin} nu se elimină nici un punct, cele rămase formează partea superioară a înfășurătoarei convexe.

Algoritmul lui Graham. Pași.

6. se determine două puncte $p1(\,pfin)$ din S cu abscisa minimă (maximă).
7. se determină segmentul de dreaptă, care le unește
8. se separă S în *Ssup* și *Sinf* după poziția punctelor față de segmentul $[p_1, pfin]$. *Ssup* – punctele extreme și cele din stânga vectorului $p_1\,pfin$, *Sinf* – punctele extreme și cele din dreapta vectorului $p1pfin$.
9. se sortează S_{sup}, S_{inf} după creșterea abscisei.
10. se verifică toate tripletele consecutive p_i, $_{pi+1}$, $p_{i+2} \in S_{sup}$. Dacă p_{i+1} se află în stânga vectorului $p_i\,p_{i+2}$ se va trece la tripletul p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3}. Dacă p_{i+1} se află în dreapta vectorului $p_i\,p_{i+2}$ se va elimina p_{i+1} și se va cerceta tripletul p_i, p_{i+2}, p_{i+3}. Dacă la o parcurgere de la p_1 la p_{fin} nu se elimină nici un punct, cele rămase formează partea superioară a înfășurătoarei convexe.
11. se verifică toate tripletele consecutive p_i, $_{pi+1}$, $p_{i+2} \in S_{inf}$. Dacă p_{i+1} se află în stânga vectorului $p_i\,p_{i+2}$ se va trece la tripletul p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3}. Dacă p_{i+1} se află în dreapta vectorului $p_i\,p_{i+2}$ se va elimina p_{i+1} și se va cerceta tripletul p_i, p_{i+2}, p_{i+3}. Dacă la o parcurgere de la p_1 la p_{fin} nu se elimină nici un punct, cele rămase formează partea superioară a înfășurătoarei convexe.
12. Înfășurătoarea e formată din reunirea S_{sup} cu S_{inf}

Funcții utile

- sin(unghi_in_radiani)
- cos(unghi_in_radiani)
- atan2(y, x) calculează arctangenta pentru un x și un y dat, rezultă un unghi, în radiani în intervalul –PI, PI



Transformare grade-radiani

- Unghi*M_PI/180