Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Московская школа экономики
Кафедра эконометрики и математических методов экономики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Учебное пособие для вузов

Вологда
ВолНЦ РАН
2020

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.161я73
С23

Авторы:
Е. А. Ивин, А. Н. Курбацкий,
А. А. Мироненков, Ф. Ю. Попеленский,
А. В. Словеснов, С. В. Хизгияев

Рецензент
Артамонов Д. В., доцент кафедры математических методов
анализа экономики Экономического факультета МГУ им. М.В.
Ломоносова

С23 Сборник задач по математическому анализу. Первый семестр : учебное пособие для вузов / Е. А. Ивин [и др.] ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московская школа экономики, Кафедра эконометрики и математических методов экономики. – Вологда : ВолНЦ РАН, 2020. – 90 с.

ISBN 978-5-93299-459-7

В сборнике задач представлены задачи по математическому анализу и некоторые примеры решений, которые разбирались на семинарских занятиях в осенних семестрах 2008-2019 учебных годов в Московской школе экономики МГУ имени М.В. Ломоносова со студентами бакалавриата программы "Экономика".

Рекомендуется студентам экономических и инженерно–технических специальностей. Может быть полезна также студентам, обучающимся на естественно–научных направлениях.

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-93299-459-7

Светлой памяти

Евгения Александровича Ивина

посвящается

Математический анализ
Первый семестр

1 Множества и операции над ними

1.1. Какое из множеств A и B является подмножеством другого, если

$$A = \{k \in \mathbb{R} \mid 2k \leq 13\}, B = \{k \in \mathbb{R} \mid 3k \leq 19\}?$$

1.2. Какое из множеств A и B является подмножеством другого, если

$$A = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 \geq 10\}, B = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 \leq 12\}?$$

1.3. Как изменится ответ в задачах **1.1** и **1.2**, если числа рассматриваются не вещественные, а целые?

1.4. Какое из множеств A и B является подмножеством другого, если

$$A = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 + 5k - 6 \geq 0\}, B = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 - 3k + 2 \leq 0\}?$$

1.5. Какое из множеств A и B является подмножеством другого, если

$$A = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 + 5k + 6 \geq 0\}, B = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 - 3k + 2 \leq 0\}?$$

1.6. Как изменится ответ в задачах **1.4** и **1.5**, если числа рассматриваются не вещественные, а целые?

1.7. Равны ли A и B, если

a) $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k - \text{четное}, k^2 - k - 6 \leq 0\}$ и $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k - \text{четное}, k^2 + k - 6 \leq 0\}$?

b) $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k - \text{нечетное}, k^2 - k - 6 \leq 0\}$ и $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k - \text{нечетное}, k^2 + k - 6 \leq 0\}$?

c) $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k$ — нечетное$, k^2 - k - 6 \leq 0\}$ и $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k$ — четное$, k^2 + k - 6 \leq 0\}$?

1.8. Подсчитайте количество элементов множеста

a) $\{k \in \mathbb{Z} \mid 3k + 2 = 0\}$;

b) $\{k \in \mathbb{Z} \mid 3k + 2 \geq 0, \;\; 7k - 11 \leq 0\}$;

c) $\{k \in \mathbb{Z} \mid 2k - 3 \geq 0, \;\; 3l \leq 15, \;\; 7 - 3k \leq 0\}$;

d) $\{k \in \mathbb{Z} \mid 3k + 2 \leq 0, \;\; 7k + 2 \leq 0, \;\; 2k + 11 \geq 0\}$.

1.9. Опишите множество, являющееся пересечением множества четных чисел и чисел, делящихся на 5.

1.10. Опишите множество, являющееся пересечением множества четных чисел и чисел, делящихся на 10.

1.11. Найти $A \cap B, \quad A \cup B, \quad A \triangle B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A$ для множеств

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ — нечетное}, \; 0 \leq n \leq 10\},$$

$$B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ делится на } 3, \; 1 \leq n \leq 11\}.$$

1.12. Для множеств $A = \{1; 3; 5; 9\}$ и $B = \{2; 5; 7; 10\}$ найти

a) $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \vartriangle B$;

b) $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

1.13. Для множеств A и B из задачи **1.12** найти $A \times B$.

1.14. Выписать все элементы декартова произведения $A \times B$ и изобразить их на координатной плоскости, если

$$A = \{1, 2, 4\} \text{ на } B = \{1, 5, 6\}.$$

1.15. Изобразить на координатной плоскости декартово произведение

а) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
б) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
в) $\{1, 2, 3\} \times \mathbb{R}$;
г) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$;
д) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$;
е) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.16. Изобразить на координатной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ее подмножества

а) $A = \{(x, y) | \ x + 2 \geq 0\}$;
б) $B = \{(x, y) | \ x^2 + 4x + 4 \leq y\}$;
в) $A \cap B$.

1.17. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \triangle B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ для подмножеств координатной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$A = \{(x, y) \mid x \leq y\}, \qquad B = \{(x, y) \mid x \geq y - 2\}.$$

1.18. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \triangle B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ для подмножеств координатной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$A = \{(x, y) \mid x \geq 1\}, \qquad B = \{(x, y) \mid y \leq 2\}.$$

1.19. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \triangle B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ для подмножеств координатной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$A = \{(x, y) \mid x \leq y\}, \qquad B = \{(x, y) \mid x \geq -y\}.$$

1.20. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \triangle B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ для подмножеств координатной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$A = \{(x, y) \mid x^2 \leq y\}, \qquad B = \{(x, y) \mid y \leq 4\}.$$

1.21. Для множества $A = \{1; e; 3; \pi\}$ найти все его подмножества.

1.22. Сколько подмножеств содержит множество из n элементов?

1.23. а) Нарисовать на плоскости круги A и B, для которых $A \cap B = A$.

б) Пусть для каких-то двух множеств A и B известно, что $A \cap B = A$. Найти $A \cup B$ и $A \bigtriangleup B$.

1.24. а) Нарисовать на плоскости круги A и B, для которых $A \cap B = B$.

б) Пусть для каких-то двух множеств A и B известно, что $A \cap B = B$. Найти $A \cup B$ и $A \bigtriangleup B$.

1.25. а) Нарисовать на плоскости круги A и B, для которых $A \cap B = \emptyset$.

б) Пусть для каких-то двух множеств A и B известно, что $A \cap B = \emptyset$. Найти $A \cup B$ и $A \bigtriangleup B$.

1.26. Доказать, что

а) $(A \cap B) \cup C = (B \cup C) \cap (B \cup C)$;

б) $(A \cup B) \cap C = (B \cap C) \cup (B \cap C)$.

в) $(A \cap B) \triangle C = (B \triangle C) \cap (B \triangle C)$;

г) $(A \cup B) \triangle C = (B \triangle C) \cup (B \triangle C)$;

д) $(A \setminus B) \triangle C = (B \triangle C) \setminus (B \triangle C)$;

е) $(A \triangle B) \cup C = (B \cup C) \triangle (B \cup C)$;

ё) $(A \triangle B) \setminus C = (B \setminus C) \triangle (B \setminus C)$.

ж) Придумайте свою задачу на дистрибуривность операций с множествами и решите ее.

1.27. а) Пусть $A \subset P$. Доказать, что $A = P \setminus (P \setminus A)$.

б) Доказать, что $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

в) Доказать, что $A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

В следующих двух задачах все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого множества P. Для множества $A \subset P$ его дополнение в P, т. е. $P \setminus A$, обозначается через $\overline{A}$.

1.28. а) Если $P = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ и $A = \{1; 2\}$, то верно ли, что $\overline{A} = \{3; 4; 5; 6\}$?

б) Пусть $P = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ и $A = \{1; 3; 5\}$. Найти $\overline{A}$.

1.29. Доказать, что

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

в) $\overline{A} \vartriangle \overline{B} = A \vartriangle B$;

г) $\overline{A \setminus B} = \overline{B} \setminus \overline{A}$.

Суммой Минковского двух множеств A и B на плоскости называется множество $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

1.30. Найти сумму Минковского $A + B$ и нарисовать ее, если

а) A — точка $(1, 2)$, B — отрезок, соединяющий точки $(0, 1)$ и $(1, 0)$;

б) A — отрезок, соединяющий точки $(-1, 0)$ и $(0, 1)$, B — отрезок, соединяющий точки $(0, 1)$ и $(1, 0)$;

в) A — точка $(1, 1)$, B — отрезок, соединяющий точки $(0, 1)$ и $(1, 0)$;

г) A — точка $(1, -1)$, B — отрезок, соединяющий точки $(0, 1)$ и $(1, 0)$;

д) A — отрезок, соединяющий точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$, B — квадрат с вершинами $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ и $(-1, 0)$.

2 Отображения и их простейшие свойства

2.1 Определение отображения, композиция отображений

2.1. Задает ли отображение A в B подмножество R прямого произведения $A \times B$, если
а) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 6, 7, 8\}$, а $R = \{(1, 6), (2, 7), (1, 8), (3, 8)\}$;
б) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 6, 7, 8\}$, а $R = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$;
в) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 6, 7, 8\}$, а $R = \{(1, 6), (2, 7)\}$;
г) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 6, 7, 8\}$, а $R = \{(1, 6), (2, 7), (1, 8)\}$?

2.2. Задает ли подмножество R прямого произведения $A \times B$ отображение A в B и если да, то инъективно оно, сюрьективно, биективно?
а) $A = \{1, 2, 4\}, B = \{4, 6, 7, 8\}$, а $R = \{(1, 6), (2, 7), (1, 8), (3, 8)\}$;
б) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 6, 7, 8\}$, а $R = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$;
в) $A = \{1, 2, 5, 6\}, B = \{4, 6, 7, 8\}$, а $R = \{(1, 6), (2, 7)\}$;
г) $A = \{1, 2\}, B = \{4, 6, 7, 8\}$, а $R = \{(1, 6), (2, 7), (1, 8)\}$?

2.3. В группе 20 человек. Только тот, кто сдал зачет, допускается на экзамен. Преподаватели могут поставить четыре оценки: $2, 3, 4, 5$. Всегда ли отображение, сопоставляющее студенту его оценку, будет сюръективным? Может ли оно быть биективным?

2.4. Для функций

а) $f(x) = x^2$ и $g(x) = x + 1$;
б) $f(x) = x^2$ и $g(x) = x - 1$;
в) $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = x^2$;
г) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и $g(x) = x^3$;
д) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$;
е) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ и $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

записать их композиции $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$ и $f(f(x))$. Найти области определения этих композиций.

2.5. Для функций

а) $f(x) = -x$ и $g(x) = \sqrt{x}$;

б) $f(x) = |x|$ и $g(x) = \sqrt{-x}$;

в) $f(x) = \ln x$ и $g(x) = e^x$;

г) $f(x) = \ln(-x)$ и $g(x) = e^x$

записать их композиции $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$ и $f(f(x))$. Найти области определения этих композиций.

2.6. Для функций

а) $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \arcsin x$;

б) $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \arccos x$

в) $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$;

г) $f(x) = \sin(-x)$ и $g(x) = \ln x$

записать их композиции $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$ и $f(f(x))$. Найти области определения этих композиций.

2.2 Инъекция, сюръекция, биекция

2.7. Пусть множество A содержит три элемента, а множество B – четыре.

а) Приведите пример отображения $A \to B$, которое является вложением (инъекцией).

б) Приведите пример отображения $A \to B$, которое не является вложением (инъекцией).

в) Существует ли сюрьективное отображение $A \to B$?

2.8. Пусть множество A содержит четыре элемента, а множество B — три.

а) Приведите пример отображения $A \to B$, которое является сюръекцией.

б) Приведите пример отображения $A \to B$, которое не является сюръекцией.

в) Существует ли вложение $A \to B$?

2.9. Пусть множества A и B содержат по четыре элемента.

а) Приведите пример отображения $A \to B$, которое является сюръекцией.

б) Приведите пример отображения $A \to B$, которое является вложением (инъекцией).

в) Приведите пример отображения $A \to B$, которое не является сюръекцией.

г) Приведите пример отображения $A \to B$, которое не является вложением (инъекцией).

д) Существует ли вложение $A \to B$, которое не является сюръекцией?

е) Существует ли сюръекция $A \to B$, которая не является вложением (инъекцией)?

2.10. Является ли инъекцией отображение $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, если оно задано формулой

а) $f(x) = \sqrt{x}$;

б) $f(x) = \sqrt{x+1}$;

в) $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

Является ли это отображение сюръекцией?

2.11. Пусть отображение $f : A \to (0, 1)$ задается формулой

а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = \sqrt{x}$; в) $f(x) = x^3 + 8$,

где A — некоторое подмножество $\mathbb{R}$. Для каких A эта формула задает отображение? Для каких A она задает биекцию?

Далее в задачах предполагается, что $f : X \to Y$ — отображение из X в Y.

2.12. Докажите, что если A и B являются подмножествами X, а A' и B' — подмножества Y, то

а) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
б) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$;
в) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$;
г) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2.13. Докажите, что для любого подмножества $A \subset X$ выполнено

$$f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

2.14. Докажите, что для любого подмножества $B' \subset Y$ выполнено

$$f(f^{-1}(B')) \subset B'.$$

2.15. Покажите, что отображение $f : X \to Y$ сюръективно тогда и только тогда, когда для любого подмножества $B^{'} \subset Y$ справедливо

$$f(f^{-1}(B^{'})) = B^{'}.$$

2.16. Покажите, что отображение $f : X \to Y$ инъективно тогда и только тогда, когда для любого подмножества $A \subset X$ справедливо

$$f^{-1}(f(A)) = A.$$

2.17. Установите равномощность следующих множеств с помощью функций, заданных явными формулами:

а) $[0;1]$ и $[-2;3]$;

б) $[-1;1]$ и $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$;

в) $(0;+\infty)$ и $(-\infty;+\infty)$;

г) $(0;1]$ и $[1;+\infty)$;

д) $(-\pi/2;\pi/2)$ и $(-\infty;+\infty)$;

е) $(-1;1)$ и $(-\infty;+\infty)$;

ж) $(0;\pi/2)$ и $(0;+\infty)$;

з) $(0;\pi)$ и $(-\infty;+\infty)$.

2.18. Доказать счетность множества четных чисел.

2.19. Доказать счетность множества $\{(n,m) \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$.

2.20. Доказать счетность множества рациональных чисел.

2.21. Дать геометрическую иллюстрацию

а) равномощности интервала $(0;1)$ и полуокружности без концевых (граничных) точек;

б) полуокружности без концевых (граничных) точек и вещественной прямой $\mathbb{R}$;

в) интервала $(0;1)$ и вещественной прямой $\mathbb{R}$.

2.22.* Доказать равномощность интервала $(0;1)$ и отрезка $[0;1]$.

3 Графики элементарных функций, общие точки графиков

3.1 Простейшие графики

В следующих задачах требуется построить графики квадратичных функций. На рисунке указать ось параболы, направление ветвей, пересечение с осью Oy, корни, т. е. точки пересечения с Ox, если они есть.

3.1.

a) $y = x^2 - 3x + 2$;
b) $y = x^2 + 2x - 8$;
c) $y = x^2 - 5x + 6$;
d) $y = x^2 - 5x - 6$.

3.2.

a) $y = x^2 + 4x + 4$;
b) $y = x^2 - 6x + 9$;
c) $y = -x^2 + 4x - 4$;
d) $y = -x^2 - 8x - 16$;
e) $y = -x^2 - 4x + 5$.

3.3.

a) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2$;
b) $y = 2x^2 - 4x + 2$.

3.4.

a) $y = x^2 + 4x + 6$;
b) $y = -x^2 + 2x - 4$.

3.5.

a) $y = x^2 - 2x + 1$;

b) $y = -x^2 + 2x$;

c) $y = x^2 + 4x + 5$;

d) $y = x^2 + 2x - 1$;

e) $y = -x^2 + 4x - 2$;

f) $y = 2x^2 - 4x$;

g) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2$;

h) $y = -\dfrac{x^2}{2} - 2x - 1$;

i) $y = \dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{1}{2}$;

j) $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 3$.

В следующих задачах построить графики дробно-линейных функций, обращая внимание на пересечение с осью Oy, корни, т. е. точки пересечения с Ox, если они есть, а также асимптоты: вертикальную и горизонтальную.

3.6.

a) $y = \dfrac{1}{x}$;

b) $y = \dfrac{1}{-x + 2}$;

c) $y = \dfrac{-3}{x + 1}$;

d) $y = \dfrac{4}{2x + 1}$.

3.7.

a) $y = \dfrac{x}{x - 1}$;

b) $y = \dfrac{x}{x + 2}$;

c) $y = \dfrac{x}{2 - x}$;

d) $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$;

e) $y = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$;

f) $y = \dfrac{3x + 1}{2x - 1}$;

g) $y = \dfrac{2x + 1}{2x + 3}$;

h) $y = \dfrac{5x + 1}{2x - 3}$;

i) $y = \dfrac{x + 4}{x + 2}$;

j) $y = \dfrac{2x - 6}{x - 2}$;

k) $y = \dfrac{x + 3}{x + 2}$.

3.8. Схематично изобразить графики следующих функций, обращая особое внимание на пересечение с осью Oy, корни и промежутки знакопостоянства a) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$;

b) $y = (x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$;

c) $y = (x+1)(x-2)^3(x+2)^2$;

d) $y = (x+1)^2(x-2)^3(x+2)^2$.

3.9. Схематично изобразить графики следующих функций, обращая особое внимание на пересечение с осью Oy, корни, промежутки знакопостоянства, точки разрыва, вертикальные асимптоты и наличие асимптот при $x \to \pm\infty$.

a) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)}$;

b) $y = \dfrac{(x-1)^2(x-3)}{(x-2)^3}$;

c) $y = \dfrac{(x+1)(x-2)^3}{(x+2)^2}$;

d) $y = \dfrac{(x+1)^2(x-2)^3}{(x+2)^2}$.

3.2 Сдвиги, растяжения, отражения

Для всех задач раздела требуется построить графики функций.

3.10. Тригонометрические функции.

а) $y = \cos(2x + \pi/4)$;

б) $y = 2\sin(x + \pi/6)$;

в) $y = 5\sin(\pi/3 - x)$;

г) $y = |\sin(x + \pi/6)|$;

д) $y = \sin|x|$;

е) $y = |\cos(x - \frac{\pi}{3})|$;

ж) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

з) $y = -2\operatorname{tg} 3x$.

3.11. Функции с модулями и радикалами.

а) $y = 1 - \sqrt{x-1}$;
б) $y = 2|x+3|$;
в) $y = |x^2 - 4|$;
г) $y = -|x^2 - 4| + 1$;
д) $y = |x^2 + 3x - 4|$;
е) $y = x^2 + 3|x| - 4$;
ж) $y = \big||x^2 + 3x| - 4\big|$;
з) $y = 2 - |1 - x^2|$;
и) $y = 3\sqrt{x+1}$;
й) $y = |x - 1|$;
к) $y = |x + 2|$;
л) $y = |2x + 2|$;
м) $y = |2x - 1|$.

3.12. Показательные и логарифмические функции.

а) $y = 2^{x+1}$;
б) $y = 1 - 2^{x+1}$;
в) $y = 1 - e^{|x|}$;
г) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 5)$;
д) $y = 2 - \ln(1 - 2x)$;
е) $y = |\ln(1 - 2x)|$;
ж) $y = \lg \frac{1}{1-x^2}$.

3.13. Функции, обратные к тригонометрическим.

а) $y = \arcsin(x + 1)$;
б) $y = -\arcsin(2 - x)$;
в) $y = 3\,\mathrm{arctg}(1 - x)$;
г) $y = \pi + \arccos 2x$.

3.3 Общие точки графиков

3.14. Аналитически и графически найти общие точки каждой пары графиков функций
а) $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$ и $y = x$;
b) $y = x^2 + 2x - 1$, $y = -x^2 + 2x + 1$ и $y = 2x$;
c) $y = x^2 - 2$, $y = -x^2 - 4x - 2$и $y = -2x - 2$;
d) $y = x^2 - 3$, $y = -x^2 - 2x + 1$ и $y = -x - 1$.

3.15. Аналитически и графически найти общие точки графиков функций
а) $y = \dfrac{x}{x-1}$ и $y = \dfrac{x^2}{2}$;

b) $y = \dfrac{-x}{x+1}$ и $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x$;

c) $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$ и $y = x^2 - 4x + 4$;

d) $y = \dfrac{x}{x+2}$ и $y = x^2 + 2x$;

e) $y = \dfrac{-x}{x+2}$ и $y = -x^2 - 2x$.

3.16. Графически найти общие точки графиков функций и с помощью монотонности и выпуклости доказать, что других общих точек нет.

a) $y = -\dfrac{x^2}{2} + 1$ и $y = 2^x$;

b) $y = -x^2 + 2x + 1$ и $y = 2^x$;

c) $y = -2x^2 + 8x - 4$ и $y = 2^x$;

d) $y = -\dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{2}$ и $y = 2^{x+1}$;

e) $y = -x^2 + 4x - 2$ и $y = 2^{x-1}$;

f) $y = -2x^2 + 4x + 2$ и $y = 2^{x+1}$;

g) $y = -2x^2 + 8x - 5$ и $y = 3^{x-1}$;

h) $y = -2x^2 + 4x + 1$ и $y = 3^x$.

3.17. Графически найти общие точки графиков функций и с помощью монотонности и выпуклости доказать, что других общих точек нет.

a) $y = x^2 - 2x + 1$ и $y = \log_2 x$;

b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{4}$ и $y = \log_2(x+1)$;

c) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{4}$ и $y = \log_3(x+2)$;

d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{4}$ и $y = \log_3 x$.

3.18. Графически найти две общие точки графиков функций и указать приближенно, где находится третья общая точка графиков.

a) $y = \dfrac{x^2}{2} - x + 1$ и $y = 2^x$;
b) $y = x^2 + 1$ и $y = 2^x$;
c) $y = 2x^2 - 4x + 4$ и $y = 2^x$;
d) $y = x^2 + 2x + 2$ и $y = 2^{x+1}$;
e) $y = x^2 - 2x + 2$ и $y = 2^{x-1}$;
f) $y = 2x^2 + 2$ и $y = 2^{x+1}$;
g) $y = 2x^2 - 4x + 3$ и $y = 3^{x-1}$;
h) $y = 2x^2 + 1$ и $y = 3^x$.

3.19. Графически найти две общие точки графиков функций и указать приближенно, где находится третья общая точка графиков.

a) $y = -x^2 + 4x - 3$ и $y = \log_2 x$;
b) $y = \dfrac{-x^2 + 6x - 1}{4}$ и $y = \log_2(x + 1)$;
c) $y = \dfrac{-x^2 + 6x - 5}{4}$ и $y = \log_3 x$;
d) $y = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{4}$ и $y = \log_3(x + 2)$.

4 Комплексные числа

4.1 Алгебраическая форма комплексного числа

4.1. Вычислить i^{77}, i^{2008} и i^{2019}.

4.2. Вычислить

а) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$;

б) $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$;

в) $(2+i)^3+(2-i)^3$;

г) $(1+2i)^4+(1-2i)^4$;

д) $(2+3i)(3-2i)+(3+2i)(2-3i)$;

е) $(1+2i)(3-4i)-(4+5i)(5-6i)$;

ж) $(2+3i)(3-4i)+(3+2i)(4-3i)$;

з) $(2+3i)(3+4i)-(3-2i)(4-3i)$;

и) $(1+7i)(3+4i)-(1-7i)(3-4i)$;

к) $(2-5i)(3+4i)-(2+5i)(3-4i)$.

4.3. Представить в алгебраической форме, т. е. в виде $a+bi$, следующие выражения:

а) $\dfrac{125-50i}{4i+3}$;

б) $\dfrac{3-i}{2i-1}$;

в) $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$;

г) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$;

д) $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;

е) $\dfrac{(3+5i)(1-4i)+(3+i)(1+2i)}{(1-i)^2}$;

ж) $\dfrac{(1+5i)(3-4i)+(1+i)(2+i)}{(1+i)^2}$;

з) $\dfrac{(1+3i)(3-2i)+(1-i)(2+i)}{(1+i)^2}$.

4.4. Решить уравнение

а) $z^2 = i$;

б) $z^2 = 5 - 12i$;

в) $z^2 + \bar{z} = 0$;

г) $|z| + z = 8 + 4i$.

4.5. Решить уравнение

а) $z^2 + 3z + 2 = 0$;

б) $z^2 + z + 1 = 0$;

в) $z^2 + 2z + 2 = 0$;

г) $z^2 + 2z + 3 = 0$.

4.2 Тригонометрическая форма комплексного числа, формула Муавра

4.6. Найти тригонометрическую форму комплексного числа

а) 5;

б) i;

в) -2;

г) $1+i$;

д) $1-i$;

е) $1-i\sqrt{3}$;

ж) $-\sqrt{3}+i$;

з) $-\sqrt{3}-i$;

и) $\sin\alpha + i\cos\alpha$.

4.7. Вычислить

а) $(1+i)^{1000}$;

б) $(1+i)^{11}$;

в) $(1+i\sqrt{3})^{150}$;

г) $(\sqrt{3}+i)^{30}$;

д) $(1+i\sqrt{3})^7 + (1-i\sqrt{3})^7$;

е) $(\sqrt{3}+i)^7 + (\sqrt{3}-i)^7$;

ж) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$;

з) $(-3+3i)^{21}$.

4.3 Корни из комплексных чисел

4.8. Вычислить

а) $\sqrt{2+2i}$; в) $\sqrt[4]{-1}$; д) $\sqrt[3]{-i}$;
б) $\sqrt[3]{i}$; г) $\sqrt[4]{1}$; е) $\sqrt{3+4i}$.

4.9. Найти

а) $\sqrt[3]{8i}$; б) $\sqrt{3-4i}$.

4.10. Вычислить

а) $\sqrt[5]{-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{8+24i}{3-i}}$.

4.11. Найти произведение корней шестой степени из

а) 1; б) -1; в) 2.

4.12. Найти сумму корней пятой степени из

а) 3; б) -1; в) -32.

4.13. Найти сумму и произведение всех корней из $z = 1$

а) степени 2;
б) степени 3;
в) степени 4;
г) степени 5;
д) произвольной степени n.

4.14. Найти сумму и произведение всех корней из $z = -1$

а) степени 2;
б) степени 3;
в) степени 4;
г) степени 5;
д) произвольной степени n.

4.15. Найти сумму и произведение всех корней из $z = i$

а) степени 2;
б) степени 3;
в) степени 4;
г) степени 5;
д) произвольной степени n.

4.16. Найти сумму и произведение всех корней из $z = -i$

а) степени 2;
б) степени 3;
в) степени 4;
г) степени 5;
д) произвольной степени n.

4.4 Геометрическая интерпретация комплексного числа

4.17. Найти множество точек на плоскости xOy, изображающей комплексные числа $z = x + iy$, для которых:

а) $|z| = 1$;
б) $z = |z|$;
в) $1 < |z| < 3$;
г) $\arg z = \frac{\pi}{4}$;
д) $|2z - 1| > 5$;
е) $|z + 1| = |z - 1|$;
ж) $1 \leqslant |z + i| < 2$;
з) $|z - 1| > |z - i|$.

4.18. Нарисовать на комплексной плоскости множество а) $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$;

б) $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$;

в) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1$.

4.19. Найти минимум $|z|$, если $|z - 2 + 2i| = 1$.

4.20. Нарисовать образ множества $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$ при отображении $z \mapsto z + 1 + 2i$.

4.21. Нарисовать образ отрезка с концами в точках 1 и $1 + i$ при отображении $z \mapsto (1 + i)\, z$.

4.22. Нарисовать образ множества

$$\{z \mid \pi/4 \leq \arg z \leq \pi/2, |z| < 2\}$$

при отображении $z \mapsto z^2$.

5 Метод математической индукции

5.1 Доказательство равенств

5.1. Доказать для всех натуральных n равенство

a) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

b) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n = \dfrac{1}{2}\,(3^{n+1} - 1)$;

c) $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, где q — любое вещественное число, отличное от 1.

5.2. Доказать для всех натуральных n равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$$

5.3. Доказать для всех натуральных n равенство

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

5.4. Доказать формулы для сумм степеней первых n натуральных чисел:

а) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5.5. Доказать, что для всех натуральных n выполняется равенство

a) $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

b) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n+1) = \dfrac{(3n+2)(n+1)}{2}$.

5.6. Доказать, что для всех натуральных n выполняется равенство

a) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{(n+2)(n+1)n}{3}$.

5.7. Доказать для всех натуральных n равенство

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-3)^2 = \frac{4n^3 - 12n^2 + 11n}{3}.$$

5.8. Доказать для всех натуральных n равенство

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

5.9. Доказать для всех натуральных n равенство

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

5.10. Доказать для всех натуральных n равенство

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

5.11. Доказать для всех натуральных n равенство

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

5.12.* Доказать для всех натуральных n равенство

$$n + (n+1) + \ldots + (2n-1) + (2n) = \frac{3n(n+1)}{2}.$$

5.13.* Доказать для всех натуральных n равенство

$$(2n+1)+(2n+2)+\ldots+(3n+2)=\frac{(5n+3)(n+2)}{2}.$$

5.14.* Доказать для всех натуральных n равенство

$$(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(2n)^2=\frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}.$$

5.2 Доказательство неравенств

5.15. (*Неравенство Бернулли*) Доказать, что при $x>-1$ и всех натуральных n выполняется неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$.

5.16. Методом математической индукции установить справедливость следующих неравенств для всех натуральных n:

a) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$;

b) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-1)$;

c) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

5.17. Доказать для всех натуральных n неравенство

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

5.18. a) Доказать для натуральных $n \geq 2$ неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

b) Доказать для натуральных $n \geq 3$ неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}.$$

5.19. Доказать для всех натуральных n неравенство $2^n > n$.

5.20. Доказать для натуральных $n \geq 4$ неравенство $n! \geq 2^n$.

5.21. Доказать для всех натуральных n неравенство

$$2!\,4!\,\ldots\,(2n)! > \big((n+1)!\big)^n.$$

Объяснить, почему для $n \geq 2$ это неравенство строгое.

5.22. Доказать для всех натуральных n неравенство

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2.$$

5.23. Доказать для всех натуральных n неравенство

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \geq \frac{4^n}{n+1}.$$

Объяснить, почему при $n \geq 2$ это неравенство строгое.

5.3 Разные задачи

5.24. Пусть число $a_1 = x + \dfrac{1}{x}$ целое. Доказать, что число $a_n = x^n + \dfrac{1}{x^n}$ также является целым.

5.25. Доказать, что для всех натуральных n число n^3+3n^2+2n делится на 6.

5.26. Доказать, что для всех натуральных n число $n^3 + 5n$ делится на 6.

5.27. Доказать, что для всех натуральных n число $10^n+18n-1$ делится на 27.

5.28. Доказать, что для всех натуральных n число $4^n+15n-1$ делится на 9.

5.4 Бином Ньютона

Пусть $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

5.29. a) Доказать, что $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

b) Затем по индукции доказать формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + \\ + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

5.30. a) Доказать, что для всех n и k

$$C_{n-1}^{k-1} \cdot C_n^{k+1} \cdot C_{n+1}^k = C_{n-1}^k \cdot C_{n+1}^{k+1} \cdot C_n^{k-1}.$$

b) Доказать, что при $0 \le k \le m \le n$

$$C_n^m \cdot C_m^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}.$$

5.31. Решить уравнение–пропорцию

$$C_n^{k+1} : C_n^k : C_n^{k-1} = 5 : 5 : 3.$$

5.32. С помощью формулы бинома Ньютона доказать равенства

a) $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3$;

b) $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4$;

c) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

5.33. С помощью формулы бинома Ньютона доказать равенства

a) $C_3^0 - C_3^1 + C_3^2 - C_3^3 = 0;$

b) $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4 = 0;$

c) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0.$

5.34. С помощью формулы бинома Ньютона доказать равенства

a) $C_3^0 + 2C_3^1 + 2^2C_3^2 + 2^3C_3^3 = 3^3;$

b) $C_4^0 + 2C_4^1 + 2^2C_4^2 + 2^3C_4^3 + 2^4C_4^4 = 3^4;$

c) $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \ldots + 2^{n-1}C_n^{n-1} + 2^nC_n^n = 3^n.$

6 Последовательности

6.1 Способы задания

6.1. Приведены первые несколько членов последовательности. Подберите закономерность, которой они подчиняются, и предложите формулу общего члена последовательности

a) $2, 12, 22, 32, 42, 52, \ldots$;

b) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$;

c) $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \ldots$;

d) $2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots$;

e) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$;

f) $1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots$;

g) $0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$;

h) $2, 4, 10, 28, 82, 244, 730, \ldots$;

i) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$;

j) $0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots$;

k) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$;

l) $0, 3, 3, 9, 15, 33, 63, \ldots$;

m) $0, 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, \ldots$

6.2. Выписать первые пять членов последовательности

a) $a_n = \dfrac{100}{n+1}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{n^2 - 10}$;

c) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$;

d) $a_n = n^{(-1)^n}$;

e) $a_n = \sin \frac{\pi n}{2}$;

f) $a_n = 3^{n^{(-1)^n}}$.

6.2 Монотонность

6.3. Исследовать последовательность на монотонность

а) $a_n = n^{(-1)^n}$;

б) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$;

в) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$;

г) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

6.4. Исследовать последовательность на монотонность

a) $a_n = n$;

b) $a_n = n^2 + 1$;

c) $a_n = n^2 - 8n - 20$;

d) $a_n = n^2 - 6n - 7$;

e) $a_n = 10n - n^2$;

f) $a_n = \dfrac{1}{n}$;

g) $a_n = \dfrac{1}{n+2}$;

h) $a_n = \dfrac{100}{n+1}$;

i) $a_n = \dfrac{2}{2n-9}$;

j) $a_n = \dfrac{100n}{n+1}$;

k) $a_n = \dfrac{2n+5}{n+2}$;

l) $a_n = \dfrac{2n-5}{n+2}$;

m) $a_n = \dfrac{2n+5}{2n-11}$;

n) $a_n = \dfrac{1-2n}{2n-11}$;

o) $a_n = \dfrac{3n+8}{2n}$.

6.5. Исследовать последовательность на монотонность

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2-10}$;

b) $a_n = \dfrac{100}{n^2+1}$;

c) $a_n = \dfrac{4}{n^2+2n+3}$;

d) $a_n = \dfrac{100n}{n^2+1}$;

e) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$;

f) $a_n = \dfrac{8n^2}{2n^3+n}$.

6.6. Исследовать последовательность на монотонность

a) $a_n = 3^n$;

b) $a_n = 3^{-n+1}$;

c) $a_n = n\,2^{-n}$;

d) $a_n = (n^2+1)\,2^{-n}$;

e) $a_n = n^{(-1)^n}$;

f) $a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$;

g) $a_n = n\sin\frac{\pi n}{2}$;

h) $a_n = 3^{n^{(-1)^n}}$;

i) $a_n = 4^{n\sin\frac{\pi n}{2}}$.

6.7.* Исследовать последовательность $a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}$ на монотонность.

6.3 Ограниченность последовательности

6.8. Исследовать последовательность на ограниченность

a) $a_n = n\,$;

b) $a_n = n^2+1\,$;

c) $a_n = n^2-8n-20\,$;

d) $a_n = n^2-6n-7\,$;

e) $a_n = 10n-n^2\,$;

f) $a_n = \dfrac{1}{n}\,$;

g) $a_n = \dfrac{1}{n+2}\,$;

h) $a_n = \dfrac{100}{n+1}\,$;

i) $a_n = \dfrac{2}{2n-9}\,$;

j) $a_n = \dfrac{100n}{n+1}\,$;

k) $a_n = \dfrac{2n+5}{n+2}\,$;

l) $a_n = \dfrac{2n-5}{n+2}\,$;

m) $a_n = \dfrac{2n+5}{2n-11}\,$;

n) $a_n = \dfrac{1-2n}{2n-11}\,$;

o) $a_n = \dfrac{3n+8}{2n}$.

6.9. Исследовать последовательность на ограниченность

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2-10}$;

b) $a_n = \dfrac{100}{n^2+1}$;

c) $a_n = \dfrac{4}{n^2+2n+3}$;

d) $a_n = \dfrac{100n}{n^2+1}$;

e) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$;

f) $a_n = \dfrac{8n^2}{2n^3+n}$.

6.10. Исследовать последовательность на ограниченность

a) $a_n = 3^n$;

b) $a_n = 3^{-n+1}$;

c) $a_n = n\,2^{-n}$;

d) $a_n = (n^2+1)\,2^{-n}$;

e) $a_n = n^{(-1)^n}$;

f) $a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$;

g) $a_n = n\sin\frac{\pi n}{2}$;

h) $a_n = 3^{n^{(-1)^n}}$;

i) $a_n = 4^{n\sin\frac{\pi n}{2}}$.

6.11. Привести пример ограниченной последовательности, у которой

a) есть наибольший и наименьший члены;

б) есть наибольший член, но нет наименьшего;

в) есть наименьший член, но нет наибольшего;

г) нет ни наименьшего, ни наибольшего членов.

6.12. Найти наибольший и наименьший члены последовательности,

а) $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$;

б) $a_n = \dfrac{n+1}{2^n}$;

в) $a_n = \dfrac{n}{100+n^2}$;

г) $a_n = \dfrac{2n+1}{2^n}$;

д) $a_n = \dfrac{n+1}{2^n}$.

6.13. Найти наименьший член последовательности

а) $a_n = n^2 - 5n + 1$;

б) $a_n = n + \dfrac{100}{n}$;

в) $a_n = n + 5\sin\dfrac{\pi n}{2}$.

7 Предел последовательности

7.1 Последовательности, сходящиеся к 0 (бесконечно малые последовательности)

7.1. Указать такие N, начиная с которых можно гарантировать выполнение неравенства $|a_n| < \varepsilon$ для $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.001$, если

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{n+3}$;

c) $a_n = \dfrac{1}{3n+4}$;

d) $a_n = \dfrac{100}{n+1}$;

e) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$;

f) $a_n = \dfrac{100n}{n^2+1}$;

g) $a_n = \dfrac{1}{n^2+7n+1}$;

h) $a_n = \dfrac{n}{n^2+6n+2}$;

i) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$;

j) 2^{-n+3};

k) $a_n = \log_n 2$;

l) $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \ldots$

7.2 Определение предела последовательности

7.2. Используя определение предела, покажите, что последовательность сходится, и укажите ее предел:

a) $x_n = \dfrac{1}{n^2+1}$;

b) $x_n = \dfrac{3n-2}{2n}$;

c) $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$;

d) $x_n = \dfrac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n+2}$;

e) $x_n = 2^{-n}\sin\frac{\pi n}{2}$;

f) $x_n = \dfrac{(n+1)\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2}$.

7.3. Используя определение предела, докажите, что последовательность не сходится (не имеет предела)

a) $x_n = (-1)^n$;

b) $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$;

c) $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2} + \cos\dfrac{\pi n}{2}$;

d) $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2-(-1)^n}$;

e) $x_n = \dfrac{3+(-1)^{n^2}}{2-(-1)^{n^2}}$;

f) $x_n = \dfrac{n\sin\frac{\pi n}{2}}{n+1}$.

7.3 Вычисление пределов

Свойства пределов. Пусть последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда верны следующие утверждения.

• Для любого числа $c \in \mathbb{R}$ последовательность $(c\,a_n)$ сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, т. е. константа выносится из-под знака предела.

• Последовательность $(a_n \pm b_n)$ сходится, причем ее предел удовлетворяет равенству $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B$.

• Последовательность $(a_n \cdot b_n)$ сходится, причем ее предел удовлетворяет равенству $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$.

• Пусть дополнительно известно, что $b_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и при этом $B \neq 0$. Последовательность (a_n/b_n) сходится, причем ее предел удовлетворяет равенству $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n/\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A/B$.

Теорема о двух жандармах. Если для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n \leq b_n \leq c_n$, и при этом известно, что последовательности (a_n) и (c_n) сходятся к одному пределу, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, тогда последовательность (b_n) тоже сходится, причем к тому же пределу: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

В следующих задачах вычислите пределы последовательностей, используя свойства пределов.

7.4.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n+2}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-7}{n+4}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2n}{n+11}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-6n}{2n+1}$.

7.5.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-1}{2n^2-n+11}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n-1}{n^2+7n+150}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n^2-2n-1}{2n^2+2n+1}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n+3)^2}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^2-(n-2)^2}{(n+2)^2+(n-1)^2}$.

7.6.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3n-2}{n^3+n^2+239\pi}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3+2n+1}{8n^3+n+2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(2n+3)^3}{(3n+4)^3}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(2n-1)^3}{(2n-3)^3-(3n+1)^3}$;

e) $x_n = \dfrac{(2n+1)^4-n^4}{n^4+(2008n+1)^3}$;

f) $x_n = \dfrac{(2n-1)^5-3n^5}{9n^5+(3+2008n)^3}$.

7.7.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+1}{n^2+3}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n^3+3n^2+31\sqrt{e^\pi}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n-1}{n^2+2n+1}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2n-1}{n^3+2n+1}$.

7.8.

a) $x_n = \dfrac{(1+n)^3+(1-n)^3}{(1+n)^2+(1-n)^2}$;

b) $x_n = \dfrac{(1+2n)^3+(1-2n)^3}{(1+3n)^2+(3-n)^2}$;

c) $x_n = \dfrac{(n+2)^3-(n+1)^3}{(n+2)^2+(n+1)^2}$;

d) $x_n = \dfrac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{(n-2)^3-(n+2)^3}$;

e) $x_n = \dfrac{(1+n)^4-(1-n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$;

f) $x_n = \dfrac{(1+n)^4+(1-n)^4}{(1+n)^5+(1-n)^5}$.

7.9.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1}+2^n}{5^n-2^{n+1}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+2^{n+1}+1}{3^n+2^n+5}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot 2^{n+1}-7\cdot 3^n+1}{2^{n+1}-7\cdot 3^{n+1}+6}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+\pi^{n+1}}{e^n+\pi^n}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+3}+3^{n+2}}{4^n+5^n}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-5^n}{3^n+4^n}$.

7.10.

a) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n+3}$;

b) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3-2n}}{n+2}$;

c) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+4}}{n^2+1}$;

d) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^3-2n+(-1)^n}}{n+\pi^2}$;

e) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n-1}}{n^2-3n+15}$;

f) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3+3\pi n+e^2}}{n^2+3n+\ln 10}$.

7.11.

a) $x_n = \sqrt{n^2+2n} - n$;

b) $x_n = \sqrt{n^2+4n} - n - 2$;

c) $x_n = \sqrt{n^2+4n} - n$;

d) $x_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{n+1}$;

e) $x_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}$;

f) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

7.12.

a) $x_n = \sqrt{n^4-3n^2+2} - \sqrt{n^4+5n^2+1}$;

b) $x_n = \sqrt{n^6+10n^3+5} - \sqrt{n^6+8n^3+6}$;

c) $x_n = \sqrt{n^4+3n+7} - \sqrt{n^4+n+100}$;

d) $x_n = \sqrt{n^6+3n^4+n^3+1} - \sqrt{n^6+3n^4+2n^3+5}$;

e) $x_n = \sqrt{n^6+3n^4+n^3+1} - \sqrt{n^6+n^4+2n^3+5}$;

f) $x_n = \sqrt{n^4+2n^3+n+1} - \sqrt{n^4+2n^3+2n+1}$;

g) $x_n = \sqrt{n^4+2n^3+1} - \sqrt{n^4+n^3+2n+1}$.

7.13.

a) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3+3n^2-1} - \sqrt{n^3-2n^2+2n}}$;

b) $x_n = \left(\sqrt{n^5-3n^2-14} - \sqrt{n^5+5n^2-9n}\right) \cdot n$.

7.14.

a) $x_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$;

b) $x_n = \left(1+\dfrac{3}{n+1}\right)^n$;

c) $x_n = \left(\dfrac{3n+1}{4n+5}\right)^n$;

d) $x_n = \left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2+1}$;

e) $x_n = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2+2n}$;

f) $x_n = \left(\dfrac{n^3+4n}{n^3+2n-3}\right)^{n^2-3}$;

g) $x_n = \left(\dfrac{n^2+3n}{n^2+2n+2}\right)^{n^2}$;

h) $x_n = \left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+2}\right)^{n^2}$;

i) $x_n = \left(\dfrac{n^2+3n}{n^2+2n+2}\right)^{n}$;

j) $x_n = \left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+2}\right)^{n}$.

7.15.

a) $x_n = \dfrac{\cos n}{n+1}$;

b) $x_n = \dfrac{\cos(7n - \pi\sqrt{n})}{n^2+1}$;

c) $x_n = \dfrac{\cos(n^2-1)}{2^n}$;

d) $x_n = \dfrac{\sin(n^{100}+e^n)}{n^2+1}$;

e) $x_n = \dfrac{2n + \sin 3n}{n+\sqrt{\pi}}$;

f) $x_n = \dfrac{n\cos(n^2+n+1)}{(n+1)^2-(n-1)^2}$;

g) $x_n = \dfrac{n^2+n\sin(n^2-\ln n)}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

h) $x_n = \dfrac{n^2+n\sin(2^n+n)}{(n-1)^3-(n+1)^3}$.

7.16.

a) $x_n = \dfrac{2}{1+2^{-n}} + \dfrac{1}{n}$;

b) $x_n = \dfrac{n^2+3^{-n}n}{(n+2)^2+(n+3)^2}$;

c) $x_n = \dfrac{n^2+n\sin(2^{-n}n)+3^{-2n}}{(2n+\cos n)^2}$;

d) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+\sin(2^n+1)}}{(\sqrt{n}+1)^2+(\sqrt{n}-1)^2}$;

e) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2-\cos(2^n-1)}}{(\sqrt{n}+\sin n)^2+(\sqrt{n}-\sin n)^2}$;

f) $x_n = \sqrt{n^2+2n+2\sin(n+2)} - \sqrt{n^2+\sin(n-3)}$.

7.17.* Найти предел последовательности

a) $x_n = \dfrac{n}{2^n}$;

b) $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$;

c) $x_n = n\,q^n$, где $|q|<1$;

d) $x_n = \sqrt[n]{a}$, где $a>0$;

e) $x_n = \dfrac{n\cos(n^2 + e^n)}{2^n - 1}$;

f) $x_n = \dfrac{n^2 \sin(3n + n^5)}{4^n + 4^{-n}}$;

g) $x_n = \dfrac{2^n + 729n^{10}}{2^{n+1} + 1024n^8}$.

8 Предел функции

8.1 Определение предела функции

Говорят, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

8.1. Для заданных $f(x)$, x_0 и ε укажите какое-нибудь $\delta > 0$, чтобы выполнялось требуемое в определении предела функции неравенство.

а) $f(x) = x + 2$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 0.1$;
б) $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 0.01$;
в) $f(x) = x + 2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0.1$;
г) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0.01$;
д) $f(x) = x + 2$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 0.1$;
е) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 0.01$;
ж) $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 0.001$;
з) $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 0.0001$;
и) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0.001$;
к) $f(x) = x^4$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0.0001$.

8.2. Используя определение предела, показать что

а) $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$;
б) $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$;
в) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + x = 6$;
г) $\lim\limits_{x \to 3} x^2 - x = 6$;
д) $\lim\limits_{x \to 1} x^3 + x = 2$;
е) $\lim\limits_{x \to 2} x^3 + x = 10$.

8.3. Используя определение предела и неравенство $\sin x < x$ для $x > 0$, показать, что а) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$;

б) $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$;

г) $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$.

Говорят, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и пишут $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall x : x > N \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Аналогично, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall x : -x > N \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon,$$

и $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall x : |x| > N \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

8.4. Используя определение предела, показать, что

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x+3} = 0$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+3} = 0$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2-3x+1} = 0$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x + 2}{x^2-3x+1} = 0$.

8.2 Простейшие пределы

8.5. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x+3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-7}{x+14}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-2x}{x+11}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-6x}{4x+1}$.

8.6. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2}{x^2+3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-3}{3x^2-x+13}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2+7x+141}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x^2-2x-1}{3x^2+2x-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2+(x-2)^2}{(x+3)^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+3)^2-(x-3)^2}{(x+2)^2+(x-1)^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3+(2x+3)^3}{(3x+4)^3}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3-(2x-1)^3}{(2x-3)^3-(3x+1)^3}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)^4-x^4}{x^4+(2019x+1)^3}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-1)^5-3x^5}{9x^5+(3+2019x)^3}$.

8.7. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+1}{x^2+3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-\sqrt{21}}{x^3+3x^2+137\sqrt{\sin 2}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x-1}{x^2+2x+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x-1}{x^3+2x+1}$.

8.8. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+x)^3+(1-x)^3}{(1+x)^2+(1-x)^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+2x)^3+(1-2x)^3}{(1+3x)^2+(3-x)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+2)^3-(x+1)^3}{(x+2)^2+(x+1)^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)^3-(2x-1)^3}{(x-2)^3-(x+2)^3}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+x)^4-(1-x)^4}{(1+x)^3-(1-x)^3}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+x)^4+(1-x)^4}{(1+x)^5+(1-x)^5}$.

8.9. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{x+1}+2^{x+1}}{3^x+2^x}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5^{x+1}+2^x}{5^x-2^{x+1}}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\cdot 2^{x+1}-7\cdot 3^x+1}{2^{x+1}-7\cdot 3^{x+1}+6}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x+\pi^{x+1}}{e^x+\pi^x}$.

8.10. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3-2x}}{x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{x^2+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+x-1}}{x^2-3x+15}$.

8.11. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4x}-x-2$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4x}-x$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}$.

8.12. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^4-2x^2+5}-\sqrt{x^4+5x^2+1})$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-1})$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^6+13x^3+5}-\sqrt{x^6+8x^3+6}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^6+3x^4+x^3+1}-\sqrt{x^6+x^4+2x^3+5})$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^4+2x^3+x+1}-\sqrt{x^4+2x^3+2x+1})$.

8.13. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+\sqrt{x-1}-3}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-\sqrt[3]{x-8}-8}{16-2x}$.

8.14. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{4x+6}\right)^{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^{x^2+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2+2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+4x}{x^3+2x-3}\right)^{x^2-3}$.

8.15. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(8x-\pi\sqrt{x})}{x^2+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(x^2-1)}{2^x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x^{100}+e^x)}{x^2+1}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin 3x}{x+\sqrt{\pi}}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\cos(x^2+x+1)}{(x+1)^2-(x-1)^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x\sin(x^2-\ln x)}{(x+1)^2+(x-1)^2}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x\sin(2^x+x)}{(x-1)^3-(x+1)^3}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x+4+\sin x}{1-x-x^2-3\cos x}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+x+5+2\sin x}{3x^2-\cos x+1-5x}$.

8.16. Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{1+2^{-x}}+\dfrac{1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3^{-x}x}{(x+2)^2+(x+3)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x\sin(2^{-x}x)+3^{-2x}}{(2x+\cos x)^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+\sin(2^x+1)}}{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-\cos(2^x-1)}}{(\sqrt{x}+\sin x)^2+(\sqrt{x}-\sin x)^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x+2\sin(x+2)}-\sqrt{x^2+\sin(x-3)}$.

8.3 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ и 1^∞ с помощью замечательных пределов

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2};$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$
$$\lim_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})^x=1;$$
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=1;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$$

8.17. Вычислить предел

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^5+1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-4x^2+x+6}$;

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-7x-6}{x^3-4x^2+x+6}$.

8.18. Вычислить

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 7x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 7x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 2x \operatorname{tg} 17x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 10x}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot \operatorname{arctg} x}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

8.19. Вывести $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$ из $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

8.20. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(x-\frac{\pi}{4})}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos 3x+1}{(x-\frac{\pi}{3})^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos \frac{x}{2}}{x-\pi}$;

д) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

е) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{2\cos 2x}$.

8.21. Вычислить пределы функций при $x\to\infty$

а) $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{2x+3}$;

б) $\left(\dfrac{3x-4}{1+3x}\right)^{2x-2}$;

в) $\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x+1}$;

г) $\left(1-\dfrac{2008}{2x}\right)^{5x}$;

д) $\left(1+\dfrac{3}{5x}\right)^{-2008x}$;

е) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{2x-1}{2x+3}}\right)^{1-x}$;

ж) $\left(\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x^2-x+2}\right)^{x^2-2}$;

з) $\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x+1}\right)^{2x+4}$;

и) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-7}}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}}$;

к) $\left(\sqrt[5]{\dfrac{2x+7}{2x-5}}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}$.

8.22. Вычислить пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{3}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} 2x\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} 3(x-\pi)\cdot\sin\frac{6}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-1-x}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x^2}-1}{6x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty} 2x(\ln(x+6)-\ln x)$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{1-2x}$.

8.4 Классификация точек разрыва

• Точка $x = x_0$ называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$, если существует предел $f(x)$ при $x \to x_0$, но при этом значение $f(x_0)$ или не определено, или не совпадает с пределом $f(x)$ при $x \to x_0$.

• Точка $x = x_0$ называется *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если существуют конечные односторонние пределы $f(x)$ при $x \to x_0 \pm 0$ и при этом они не равны.

• Точка $x = x_0$ называется *точкой разрыва второго рода* функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x)$ при $x \to x_0 \pm 0$ бесконечен или не существует.

8.23. Является ли функция $f(x)$ непрерывной в точке x_0, если

а) $x_0 = 1,\ f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

б) $x_0 = 0,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0; \\ 3, & x = 0. \end{cases}$

в) $x_0 = 1,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1; \\ 2, & x = 1. \end{cases}$

г) $x_0 = 0,\ f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

8.24. Найти точки разрыва функции и определить их тип.

а) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x^2-4|}$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}$;

в) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x+1)(x+2)}$;

г) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2-4x+3}$.

8.25. Найти значение A, при котором функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, если а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 8x - x}{3x + \sin 4x}\,, & x > 0; \\ A\cos x\,, & x \leqslant 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}\,, & x \neq 0; \\ A, & x = 0. \end{cases}$

8.26. Классифицировать разрыв в нуле функции $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ и найти предел на бесконечности.

8.27. Пусть $f(x)$ — разрывная функция. Может ли $|f(x)|$ быть непрерывной?

8.28. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — разрывные функции. Может ли их сумма $f(x) + g(x)$ быть непрерывной функцией?

8.29. Привести пример функции со счетным числом точек разрыва первого (второго) рода.

9 Производная

9.1 Приращение функции и определение производной

Пусть дана функция $f(x)$. Зафиксируем значение аргумента x. Разность значений функции $f(x)$ в точке $x+\Delta x$ и в точке x называется *приращением функции*. Обозначение:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, если он существует, называется *производной* функции $f(x)$ в точке x. Обозначение: $f'(x)$, $\dfrac{df(x)}{dx}$.

9.1. Переменная x получает приращение Δx. Найти приращение Δf функции $f(x)$, если

а) $f(x) = 2x+3$; б) $f(x) = x^2$;
в) $f(x) = x^3$; г) $f(x) = ax+b$;
д) $f(x) = ax^2+bx+c$; е) $f(x) = \sin x$.

9.2. Опираясь непосредственно на определение, найти производную функции

а) x^2; б) x^3;
в) $\dfrac{1}{x}$; г) $\dfrac{1}{x^2}$;
д) $\sqrt{x}$; е) $ax+b$;
ж) ax^2+bx+c; з)* $\sqrt[3]{x}$.

9.3. Опираясь непосредственно на определение, найти производную функции

а) $\sin x$; б) $\cos x$;
в) e^x; г) $\ln x$;
д) $\sin(2x+1)$; е) $\cos(3x-2)$;
ж) e^{2x-7}; з) $\ln(x+7)$.

9.4. Используя определение, найти производную в точке $x = 2$ функции

$$f(x) = 18x^2 + x + 2008.$$

9.5. Пусть по прямой едет машина и пройденный ею путь в метрах от начала движения задается формулой $f(t) = 10t + 5t^2$, где t — время в секундах. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени $20 \le t \le 20 + \Delta t$, если

а) $\Delta t = 1$; б) $\Delta t = 0.1$; в) $\Delta t = 0.01$.

Найти скорость в момент времени $t = 20$.

9.2 Техника дифференцирования

Список основных производных:

$$(x^a)' = ax^{a-1} \text{ для любого } a \in \mathbb{R}.$$

Важные частные случаи этой формулы:

$$\begin{array}{ll}
1' = 0, & x' = 1, \\
(x^2)' = 2x, & (x^3)' = 3x^2, \\
\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}, & \left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = -\dfrac{2}{x^3}, \\
(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & (\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \\
\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}. &
\end{array}$$

Продолжение списка основных производных:

$$
\begin{array}{ll}
(e^x)' = e^x, & (a^x)' = a^x \ln a, \\
(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, & (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \\
(\sin x)' = \cos x, & (\cos x)' = -\sin x, \\
(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, & (\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{1}{-\sin^2 x}, \\
(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, & (\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.
\end{array}
$$

Основные формулы для вычислений. Здесь $f = f(x)$ и $g = g(x)$ — функции, $c \in \mathbb{R}$ — константа.

$$
\begin{aligned}
&(f \pm g)' = f' \pm g', \\
&(cf)' = c\,f', \\
&(fg)' = f'g + g'f, \\
&\frac{f}{g} = \frac{f'g - g'f}{g^2}, \\
&\frac{1}{g} = -\frac{g'}{g^2}.
\end{aligned}
$$

Производная сложной функции:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x).$$

Производная обратной функции:

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

9.6. Продифференцировать следующие функции и найти значения производных в точках $x = 1$ и $x = -1/2$ (если функция в них определена) а) x^4+x^3-2x;

б) $\frac{1}{4}x^8+\frac{1}{3}x^6+x^2+2$;

в) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$;

г) $\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+10x$;

д) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$;

е) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}$;

ж) $x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$;

з) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$;

и) $x+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$;

к) $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

л) $\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$.

9.7. Продифференцировать следующие функции и найти значения производных в точках $x=1$ и $x=-1/2$

а) $(2x+10)^5$;

б) $(3x-12)^3$;

в) $(4x+3)^4$;

г) $(x^2+1)^3$;

д) $(3x^2-7)^8$;

е) $(2x^3+7)^4$;

ж) $(x^2+7x)^{10}$;

з) $(x^7+8x^2)^9$.

9.8. Вычислить производные

а) $\sqrt{x^2+1}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

в) $\sqrt[3]{x^3+11}$;

г) $\sqrt{x^4+3x^2-8x}$;

д) $\sqrt{x^3+7x^2}$;

е) $\sqrt[3]{x^3+7x^2}$;

ж) $\sqrt[3]{x^5+7x^3}$;

з) $\sqrt[3]{x^3+2x}$;

и) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+2x}}$.

9.9. Продифференцировать с помощью формулы для производной произведения

а) $(x-5)(x-6)$;

б) $(x-2)(x-3)$;

в) $(x-a)(x-b)$;

г) $(x-a)(x+a)$;

д) $(x-5)^3(x-6)^4$;

е) $(2x+1)^3(3x-2)^2$;

ж) $(x^2+4)^6(x^3+2x)^4$;

з) $(x^2-3)^6(x^2+4)^8$;

и) $(x^2+x)\sqrt{x+1}$;

к) $(x-4)\sqrt{2+x}$;

л) $\sqrt{x-1}(x^2+3x+6)$;

м) $(x^2-2)\sqrt{1+x^2}$;

н) $(x^2-3)\sqrt{2x^2+3}$;

о) $\sqrt{x^2+5}(3x^4-20x^2+200)$.

9.10. Дана функция $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$. Найти $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$.

9.11. Найти производную

а) $\dfrac{1+x}{1-x}$; б) $\dfrac{x+2}{x+3}$;

в) $\dfrac{1}{1-x^2}$; г) $\dfrac{x}{1-x^2}$;

д) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; е) $\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$;

ж) $\dfrac{1}{1-x+x^2}$; з) $\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

9.12. Продифференцировать

а) $\dfrac{x}{(x^2+1)^3}$; б) $\dfrac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^4}$;

в) $\dfrac{x}{(1-x^2)^4}$; г) $\dfrac{x}{(x+1)^{10}}$;

д) $\dfrac{x^7}{(x+1)^{10}}$; е) $\dfrac{x^3}{(x-2)^6}$;

ж) $\dfrac{(x-1)^5}{(x+1)^7}$; з) $\dfrac{(x^2-1)^5}{(x^2+1)^7}$.

9.13. Найти производную функции

а) $\sin 2x$; б) $\sin(3x-2)$;

в) $\sin(x^2+11)$; г) $\sin(3x+7)$;

д) $\cos(x^2+8x)$; е) $\sin^2 x$;

ж) $\sin^2(3x+4)$; з) $\sin^2(x+3)$;

и) $\sin^3(2x-5)$; к) $\sin^2(x^2+2)$;

л) $\sin^2(\sqrt{x^2+2})$; м) $\sin^3(3x^2+2)$;

н) $\cos^2(3x^2+7)$; о) $\mathrm{tg}(x+7)$;

п) $\mathrm{tg}(x^3+3x^2)$; р) $\mathrm{tg}(7x^2+8)$;

с) $\cos(\sin x)$; т) $\sin(\mathrm{tg}\, x)$.

9.14. Продифференцировать

а) $\ln(2x-5)$; б) $\ln(x^2-5)$;
в) $\ln(2x^3-2x^2)$; г) $\ln(x^2+10x)$;
д) $\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})$; е) $\ln(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x})$;
ж) $\log_2(7x^2+9)$; з) $\log_2(2x^7+9)$.

9.15. Найти производную функции
а) $\ln(\ln x)$; б) $\ln(2\ln x)$;
в) $\ln(\ln(\ln x))$; г) $\ln(2\ln(2\ln x))$;
д) $\ln(\ln(\ln(\ln x)))$; е) $\ln(2\ln(3\ln(4\ln x)))$;
ж) $\ln(\cos(\ln x))$; з) $\ln(\ln(\sin x))$.

9.16. Найти производную функции
а) e^{x+7}; б) e^{x^2+7};
в) e^{-2x^2+7}; г) $e^{-\frac{1}{2}x^2+7}$;
д) e^{-x^2+3}; е) e^{7x^3-21};
ж) $e^{\sqrt{x+1}}$; з) $e^{\sin x}$.

9.17. Найти производную функции
а) xe^x; б) x^2e^{2x};
в) $e^x(2-2x+x^2)$; г) $e^{-x}(-4-3x-x^2)$;
д) $e^{-x}(-8+5x-x^2)$; е) $e^{x/2}(16-8x+2x^2)$;
ж) $2e^{1+\frac{x}{2}}(7-4x+x^2)$; з) $e^x(-6+6x-3x^2+x^3)$.

9.18. Найти производную функции
а) $-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)$; б) $e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)$;
в) $-\frac{2}{5}e^{x/2}(\cos x-3\sin x)$; г) $-\frac{2}{17}e^{x/2}(3\cos 2x-5\sin 2x)$;
д) $\frac{1}{13}e^{-2x}(-5\cos 3x+\sin 3x)$; е) $\frac{1}{25}e^{-3x}(\cos 4x+7\sin 4x)$.

9.19. Найти производную функции
а) $e^{2x}\sqrt{x+1}$; б) $e^{-2x}\sqrt{x-1}$;
в) $e^{x/2}\sqrt{x^2+1}$; г) $e^{-x/2}\sqrt{2x^2+1}$;
д) $e^{x^2}\sqrt{2x+1}$; е) $e^{x^2}\sqrt{x^2-1}$;
ж) $e^{x^2}\sqrt{x+2}$; з) $e^{x^3}\sqrt{2x-3}$.

9.20. Вычислить производную функции
а) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}$;

б) $\dfrac{1}{4}\,\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

в) $\dfrac{1}{6}\,\ln\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$;

г) $\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$;

д) $f(x)=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$.

9.21. Вычислить производную функции

а) $x^n\sin x$;

б) $x^n e^x$;

в) $\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$;

г) $(2-x^2)\cos x+2x\sin x$;

д) $\sin^2 x\cos 2x$;

е) $\sin^3 x\cos 3x$;

ё) $\sin^n x\cos nx$;

ж) $\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$;

з) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

9.22. Вычислить производную функции

а) $\dfrac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$;

б) $\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x$;

в) $x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$;

г) $e^{ax}\,\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

9.23. Вычислить 5-ю производную функции

а) x^3;

б) $2x^5+4x^4$;

в) $3x^6+4x^4+x$;

г) $\dfrac{1}{ax+b}$;

д) $x^3\ln x$.

9.3 Разные задачи

Пусть зависимость y от x задана в виде двух функций $y(t)$ и $x(t)$, зависящих от одного параметра t. Тогда производная $\dfrac{dy}{dx}$ может быть вычислена по формуле
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$
или
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

9.24. Вычислить производную функции $y(x)$, заданной параметрически

а) $x(t) = \sin^2 t$, $y(t) = \cos^2 t$;

б) $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$;

в) $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$;

г) $x(t) = \arccos t$, $y(t) = \sqrt{1 - t^2}$.

Логарифмической производной функции $f(x)$ называется производная ее натурального логарифма
$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)},$$
$$f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$$

9.25. Продифференцировать, используя логарифмическую производную

а) x^x;

б) $(\sin x)^{\cos x}$;

в) $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

г) $(x^2 + 1)^{2x}$;

д) $x^{\sin x}$;

е) $x^{\ln x}$.

9.4 Применение производной: промежутки монотонности и экстремумы

9.26. Найти промежутки монотонности и точки экстремума для функции $f(x)$, равной

а) $x^3 - x$;

б) $x^3 - x^2$;

в) $x^3 + 3x^2 - 24x + 5$;

г) $3x^4 - 4x^3 - 72x^2 + 13$;

д) $x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 7$;

е) $x^4 + 4x^3 + 3$;

ж) $3x^5 - 5x^3 + 2$;

з) $12x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 1$.

9.27. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

а) $e^x + 5x$;

б) $e^x - x$;

в) $f(x) = x \cdot e^{-3x}$;

г) $f(x) = (1 + x^2)e^{-\frac{4x}{5}}$;

д) $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2/2}]$;

е) $f(x) = (3 - x^2)e^{-x}$.

9.28. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

а) $x - \ln x$;

б) $\frac{x^2}{10} - \ln x$;

в) $x \ln x$;

г) $x^2 \ln x$;

д) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;

е) $f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}$.

9.29. Найти промежутки монотонности и минимальное значение функции

$$f(x) = e^{2x^4 - 2x^3 - x^2} + 7.$$

9.30. При каких значениях a функция $f(x) = x^3 - ax^2 + 3x - 10$ монотонно возрастает на всей числовой прямой?

9.31. Найти промежутки возрастания функции

$$f(x) = e^{\sqrt{4-x^2}} .$$

9.32. Доказать, что $\operatorname{arctg} x - x$ строго убывает на всей числовой прямой.

9.33. Доказать, что функция $x - \sin x$ строго возрастает на всей числовой прямой.

9.5 Геометрический смысл производной

9.34. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если

а) $f(x) = e^{\sqrt{5-x^2}}$, $x_0 = 2$;

б) $f(x) = \dfrac{3x+5}{x+4}$, $x_0 = -3$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2+5x-3}{x^2+4}$, $x_0 = -1$;

г) $f(x) = \sin x - \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

9.35. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя касательными к $f(x) = 6x + x^2$: в точке минимума и в точке (-2; -8).

9.6 Правило Лопиталя для вычисления пределов

9.36. Вычислить с помощью правила Лопиталя пределы а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10x-3\sin x-x^2}{5\sin x+4x+x^3}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{tg}x}{x-\sin x}$;

и) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(4\pi(\sqrt{x}-1))}{\sin(2\pi(\sqrt[3]{x}-1))}$; к) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(2\pi(\sqrt[4]{x}-1))}{\sin(\pi(\sqrt[3]{x}-1))}$;

л) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(\pi(\sqrt[7]{x}-1))}{\sin(5\pi(\sqrt[3]{x}-1))}$; м) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(2\pi(\sqrt[3]{x}-1))}{\sin(3\pi(\sqrt{x}-1))}$;

н) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2x-1}$; о) $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

9.37. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{1/100}}$.

9.38. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to0+0}x\ln x$; б) $\lim\limits_{x\to0+0}x^2\ln x$;

в) $\lim\limits_{x\to0+0}\sqrt{x}\ln x$; г) $\lim\limits_{x\to0+0}\sqrt[5]{x}\ln x$;

д) $\lim\limits_{x\to0+0}x^{5/2}\ln x$; е) $\lim\limits_{x\to0+0}(8\sqrt{x}+7x+x^2)\ln x$.

9.39. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x/2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x/1000}}{x^{200}+x^{113}}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^{500}+x^{100}}$.

9.40. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x/1000}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x(x^{119}+x^{113})$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-1/x^2}(x^{100})$.

9.7 Формула Тейлора и вычисление пределов

Формула разложения в ряд Тейлора в точке $x = x_0$ до порядка n:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Основные разложения в ряды Маклорена (т. е. в ряды Тейлора для $x_0 = 0$):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \ldots + \\ + \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

9.41. Написать три первых члена разложения в ряд Тейлора в точке $x_0 = 2$ функции

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9x - 11.$$

9.42. Написать три первых члена разложения в ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$ функции

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

9.43. Выписать первые пять членов разложения в ряд Маклорена функции

а) $f(x) = e^{-x}$; б) $f(x) = e^{-x^2/2}$;
в) $f(x) = e^{5x^2}$; г) $f(x) = \sin x^2$;
д) $f(x) = \sin x^4$; е) $f(x) = \ln(1 + x/2)$;
ж) $f(x) = \ln(1 - x^2)$; з) $f(x) = \ln(1 + 3x^2)$;
и) $f(x) = \sqrt{1 + x}$; к) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$;
л) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$; м) $f(x) = (1 + x)^{3/2}$;
н) $f(x) = (1 - 2x)^{5/2}$.

9.44. Выписать первые три члена разложения в ряд Маклорена функции

а) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$;
б) $f(x) = \ln(\cos x)$;
в) $f(x) = \sin(\sin x)$;
г) $f(x) = e^{x^2+x}$;
д) $f(x) = e^{x^2-x}$.

9.45. Вычислить пределы с помощью разложений в ряды Маклорена

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} - \cos x}{\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + \frac{x}{2}) - \sqrt{1 + x} + 1}{\cos x - 1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - \sin 2x - x - 1}{1 - \cos 3x}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^x - 2\sin x - \cos x + \ln(1+x)}$.

9.46. Вычислить пределы с помощью разложений в ряды Маклорена

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x^2}{x - \sin x}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{\cos x \cdot \sin x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\ln(e^{x^2}+1)}$;

д)* $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$.

9.8 Доказательство неравенств с помощью производной

9.47. Доказать, что при $x > 0$

а) $e^x > 1 + x$;

б) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$;

в) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$;

г) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$.

9.48. Доказать, что

а) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$ при $x > 1$;

б) $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ при $x > 0$;

в) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ при $x > 0$.

9.49. Доказать, что $\operatorname{tg} x \geq x + \frac{x^3}{3}$ при $x \in [0; \frac{\pi}{2})$.

9.50. Доказать, что при $x \geq 0$

а) $\ln(1+x) \leq x$;

б) $\ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$;

в) $\ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

9.51.* Что больше e^{π} или π^{e}?

10 Исследование функций с помощью производных, построение графиков

В этом разделе требуется исследовать предложенную функцию и нарисовать эскиз ее графика. При исследовании функции нужно:

• найти область определения функции;

• найти и классифицировать точки разрыва функции;

• исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность;

• найти точку пересечения с осью Oy, если она есть;

• найти нули функции и промежутки знакопостоянства;

• найти экстремумы и промежутки монотонности;

• найти точки перегиба и направления выпуклости;

• найти асимптоты, если они есть (горизонтальные или наклонные при $x \to \pm\infty$ и вертикальные на границе области определения);

• найти область значений функции;

• нарисовать эскиз графика функции, отражающий все полученные выше свойства.

10.1 Простейшие графики

10.1. Исследовать функцию и построить ее график

а) $f(x) = x^2 - 4;$	г) $f(x) = x^2 - 5x - 6;$
б) $f(x) = 9 - x^2;$	д) $f(x) = x^2 - 6x + 8;$
в) $f(x) = x^2 - 5x + 6;$	е) $f(x) = x^2 + 2x - 8.$

10.2. Исследовать функцию и построить ее график

а) $f(x) = x - x^3;$	г) $f(x) = x^3 - 13x + 12;$
б) $f(x) = x^2(x - 4);$	д) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4;$
в) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + 2x^2;$	е) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9.$

10.3. Исследовать функцию и построить ее график

а) $f(x) = x^4 - x$;

б) $f(x) = x^4 - 4x^2$;

в) $f(x) = x^4 - 4x^3$;

г) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$;

д) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2$;

е) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$.

10.4. Исследовать функцию и построить ее график

а) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$;

б) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+1}$;

в) $f(x) = \dfrac{x+1}{3x-6}$;

г) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$;

д) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$;

е) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$.

10.5. Найти асимптоты к графику ее функции

а) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-3}{5x-1}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{2x^2-8}$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x+2}$;

г) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{3x+2}$.

10.6. Исследовать функцию и построить ее график

а) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x+2}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x+2}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x+1}$;

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$;

g) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$;

h) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

10.7. Исследовать функцию и построить ее график

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$;

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4x+4}$;

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$;

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4x+4}$;

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$;

f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+4x+4}$;

g) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$;

h) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;

i) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

10.2 Графики с логарифмом или с экспонентой

10.8. Исследовать функцию и построить график

a) $f(x) = xe^x$;

b) $f(x) = (x+1)e^{-x}$;

c) $f(x) = (x^2-1)e^x$;

d) $f(x) = x\ln x$;

e) $f(x) = (x+2)\ln x$;

f) $f(x) = (x-2)\ln x$;

g) $f(x) = (x^2-4)\ln(x+1)$;

h) $f(x) = (x^2-7x+12)\ln x$;

i) $f(x) = x^2e^{-x}$.

10.9. Исследовать функцию и построить график

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$;

b) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$;

c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-1}$;

d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+2}$;

f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-2}$;

g) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2-4}$;

h) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-7x+12}$.

10.10. Исследовать функцию и построить график

a) $f(x) = x\,2^x$;

b) $f(x) = (x+1)2^{-x}$;

c) $f(x) = (x^2-1)2^x$;

d) $f(x) = x\log_2 x$;

e) $f(x) = (x+2)\log_2 x$;

f) $f(x) = (x-2)\log_2 x$;

g) $f(x) = (x^2-4)\log_2(x+1)$;

h) $f(x) = (x^2-7x+12)\log_2 x$.

10.11. Исследовать функцию и построить ее график

a) $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$;

b) $f(x) = \dfrac{2^{-x}}{x+1}$;

c) $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2-1}$;

d) $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x}$;

e) $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x+2}$;

f) $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x-2}$;

g) $f(x) = \dfrac{\log_2(x+1)}{x^2-4}$;

h) $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x^2-7x+12}$.

10.12. Исследовать функцию и построить ее график

а) $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$;

б) $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;

в) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}$;

г) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x-e^{-x}}$;

д) $f(x) = \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}$;

е) $f(x) = \dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$;

ж) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$;

з) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^{3x}-e^{-3x}}$.

10.13. Исследовать функцию и построить ее график

а) $f(x) = e^{-x^2}$;

б) $f(x) = e^{-x^2/2}$;

в) $f(x) = e^{-x^2/4}$;

г) $f(x) = e^{-x^2/5}$.

10.3 Различные графики

В следующих задачах требуется исследовать функцию и построить ее график.

10.14. $f(x) = x - \ln(x+1)$.

10.15. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.

10.16. $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$.

10.17. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$.

10.18. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^4}$.

10.19. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

10.20. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+4}$.

10.21. $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

10.22. $f(x) = \sin^2 x$.

10.23. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$.

10.24. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(x-1)(x-2)}$.

10.25. $f(x) = x\sqrt{x-1}$.

10.26. $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$.

10.27. $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x+1}$.

10.28. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

10.29. $f(x) = e^{x^2-2x}$.

10.30. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

10.31. $f(x) = \arcsin\frac{2x}{x^2+1}$.

10.32. $f(x) = (x^2-2x)e^x$.

10.33. $f(x) = |x|\sqrt[3]{1+3x}$.

10.34. $f(x) = 2\sqrt{x^2+x+1} - x$.

Ответы

1.1. $B \subset A$.

1.2. Ни одно из них.

1.3. Не изменятся.

1.4. $B \subset A$.

1.5. $B \subset A$.

1.6. Не изменятся.

1.7. a) Да; b) Нет; c) Нет.

1.8. a) Один; b) Три; c) Три; d) Четыре.

1.9. Множество чисел, делящихся на 10.

1.10. Множество чисел, делящихся на 10.

1.11. $\{3, 9\}, \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}, \{1, 5, 6, 7\}, \{1, 5, 7\}, \{6\}$.

1.12. $\{6\}, \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}, \{1, 3, 9\}, \{1, 2, 3, 7, 9\}, \{1, 3, 5, 9\}$.

1.13. $(1, 2); (1, 5); (1, 7); (1, 10); (3, 2); (3, 5); (3, 7); (3, 10);$
$(5, 2); (5, 5); (5, 7); (5, 10); (9, 2); (9, 5); (9, 7); (9, 10)$.

1.14. $(1, 1); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 5); (2, 6); (4, 1); (4, 5); (4, 6)$.

1.21. $\{\varnothing\}, \{1\}, \{e\}, \{\pi\}, \{3\}$, $\{1, 3\}, \{1, e\}, \{1, \pi\}$,
$\{1, e, 3\}, \{1, e, \pi\}, \{e, 3, \pi\}$, $\{1, 3, \pi\}, \{1, e, 3, \pi\}$.

1.22. 2^n.

1.23. a) $A \subset B$; b) $B, B \setminus A$.

1.24. a) $B \subset A$; b) $A, A \setminus B$.

1.25. a) Круги не имеют общих точек.
b) Все точки двух кругов как для объединения, так и для симметрической разности.

1.30. а) отрезок, соединяющий точки $(2, 2)$ и $(1, 3)$;
б) квадрат с вершинами $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ и $(0, 0)$;
в) отрезок, соединяющий точки $(1, 2)$ и $(2, 1)$;
г) шестиугольник с вершинами $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(1, -1)$ и $(0, -1)$.

2.1. а) Нет; б) Да; в) Нет; г) Нет.

2.2. а) Нет; б) Нет; в) Нет; г) Нет.

2.3. Нет. Да.

2.4. а) $(x+1)^2, x^2+1, x+2, x^4$;
б) $(x-1)^2, x^2-1, x-2, x^4$;
в) $|x|, x, x^4, \sqrt[4]{x}$;
г) $x, x, x^6, \sqrt[9]{x}$;
д) x^2, x^2, x^4, x;
е) $x, |x|, \sqrt[4]{x}, x^4$.
2.5. а) $-\sqrt{x}, x \geq 0; \sqrt{-x}, x \leq 0; \sqrt[4]{x}, x \geq 0; x, \mathbb{R}$;
б) $\sqrt{-x}, x \leq 0; \sqrt{-|x|}, \varnothing; \sqrt[4]{x}, x \geq 0; x, \mathbb{R}$;
в) $x, \mathbb{R}; x, x > 0; e^{e^x}, \mathbb{R}; \ln\ln(x), x > 1$;
г) $\ln(-e^x), \varnothing; -x, x < 0; e^{e^x}\mathbb{R}; \ln(-\ln(-x))$.
2.6. а) $x, [-1,1]; x, \mathbb{R}; \arcsin(\arcsin x), [\sin(-1), \sin 1]; \sin(\sin x), \mathbb{R}$;
б) $\sin(\arccos x), [-1,1]; \arccos(\sin x), \mathbb{R}; \arccos(\arccos x), [\cos(-1), \cos(1)]$; $\sin(\sin x), \mathbb{R}$;
в) $\sin(\operatorname{arctg} x), \mathbb{R}$; $\operatorname{arctg}(\sin x)$, $\mathbb{R}$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)$, $\mathbb{R}$; $\sin(\sin x)$, $\mathbb{R}$;
г) $\sin(-\ln x), x > 0$; $\ln\sin(-x), (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$; $\ln\ln x, x > 1; \sin(-\sin x), \mathbb{R}$.
2.7. а) $(1,4), (2,5), (3,6)$; б) $(1,4), (2,4), (3,4)$; в) Нет.
2.8. а) $(1,5), (2,6), (3,7), (4,7)$; б) $(1,5), (2,5), (3,7), (4,7)$; в) Нет.
2.9. а) $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$; б) $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$; в) $(1,1), (2,1)$, $(3,3), (4,4)$; г) $(1,1), (2,1)$, $(3,3), (4,4)$; д) Нет; е) Нет.
2.10. а) Да. Да; б) Да. Нет; в) Да. Нет.
2.11. а) $(-3/2; -1)$; б) $(0;1)$; в) $(-2, \sqrt[3]{7})$.
2.17. а) $5x-2$; б) $\dfrac{\pi x}{2}$; в) $\ln x$; г) $\dfrac{1}{x}$; д) $\operatorname{tg} x$; е) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; ж) $\operatorname{tg} x$; з) $\operatorname{ctg} x$.
2.18. $0 \to 1, 2 \to 2, -2 \to 3, 4 \to 4, -4 \to 5, 6 \to 6, -6 \to 7, \ldots$.
3.14. Во всех случаях через общие точки проходят все три графика
а) $(0,0)$ и $(3,3)$;
b) $(1,2)$ и $(-1,-2)$;
c) $(0,-2)$ и $(-2,2)$;
d) $(1,-2)$ и $(-2,1)$.
3.15. Во всех трех случаях решение задачи сводится к кубическому уравнению, у которого один из корней нулевой.
a) $(-1, 1/2)$, $(0,0)$ и $(2,2)$;
b) $(-3, -3/2)$, $(-2,-2)$ и $(0,0)$;
c) $(0,4)$, $(2,0)$ и $(3,1)$;

d) $(-3,3)$, $(-1,-1)$ и $(0,0)$;

e) $(-3,-3)$, $(-1,1)$ и $(0,0)$.

3.16. a) $(-1,1/2)$ и $(0,1)$; b) $(0,1)$ и $(1,2)$; c) $(1,2)$ и $(2,4)$; d) $(-2,1/2)$ и $(-1,1)$; e) $(1,1)$ и $(2,2)$; f) $(0,2)$ и $(1,4)$; g) $(1,1)$ и $(2,3)$; h) $(0,1)$ и $(1,3)$.

3.17. a) $(1,0)$ и $(2,1)$; b) $(1,1)$ и $(3,2)$; c) $(-1,0)$ и $(1,1)$; d) $(0,1)$ и $(3,1)$.

3.18. a) $(-1,1/2)$ и $(0,1)$; b) $(0,1)$ и $(1,2)$; c) $(1,2)$ и $(2,4)$; d) $(-1,1)$ и $(0,2)$; e) $(1,1)$ и $(2,2)$; f) $(0,2)$ и $(1,4)$; g) $(1,1)$ и $(2,3)$; h) $(0,1)$ и $(1,3)$.

3.19. a) $(1,0)$ и $(2,1)$; b) $(1,1)$ и $(3,2)$; c) $(0,1)$ и $(3,1)$; d) $(-1,0)$ и $(1,1)$.

4.1. $i, 1, -i$.

4.2. а) $1+18i$; б) $4i$; в) 4; г) -14; д) 24; е) $-39+i$; ж) 36; з) $-12+34i$; и) $50i$; к) $-14i$.

4.3. а) $575+350i$; б) $-1+7i$; в) $14-5i$; г) $10-11i$; д) $5+i$; е) $-666+337.5i$; ж) $366.5-676i$; з) $-333.5+692i$.

4.4. а) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i, -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$; б) $\sqrt{41}-6i, -\sqrt{41}-6i$; в) $0, -1$; г) $3+4i$.

4.5. а) $-1, -2$; б) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i, -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $-1+i, -1-i$; г) $-1+\sqrt{2}i, -1-\sqrt{2}i$.

4.6. а) $5(\cos 0+i\sin 0)$; б) $\cos\pi/2+i\sin\pi/2$; в) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$;
г) $\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)$; д) $\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))$;
е) $2(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)$; ж) $2(\cos 5\pi/6+i\sin 5\pi/6)$;
з) $2(\cos 7\pi/6+i\sin 7\pi/6)$; и) $\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha)$.

4.7. а) 2^{500}; б) $-32+32i$; в) 2^{150}; г) -2^{30}; д) 2^7; е) $2^7\sqrt{3}$; ж) $2^{15}i$;
з) $3^{21}\,2^{10}\,(1-i)$.

4.8. а) $\pm\sqrt{2}(\cos\pi/8+i\sin\pi/8)$; б) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}, -i$;
в) $\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{i}{\sqrt{2}}$; г) $1, i, -1, -i$;
д) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}, i$; е) $\pm\sqrt{5}(\cos(\arcsin(4/5)/2)+i\sin(\arcsin(4/5)/2))$.

4.9. а) $-2i, \pm\sqrt{3}+i$; б) $\pm\sqrt{5}(\cos(\arcsin(-4/5)/2)+i\sin(\arcsin(-4/5)/2))$.

4.10. б) $-2i$, $\pm\sqrt{3}+i$.

4.11. а) -1; б) 1; в) -2.

4.12. а) 0; б) 0; в) 0.

4.16. а) $0, -1$; б) $0, 1$; в) $0, -1$; г) $0, 1$; д) $0, -1$ при четных n; $0, 1$ при нечетных n.

4.14. а) $0, 1$; б) $0, 0$; в) $0, 1$; г) $0, 0$; д) $0, 1$ при четных n; $0, 0$ при нечетных n.

4.15. а) $0, -i$; б) $0, i$; в) $0, -i$; г) $0, i$; д) $0, -i$ при четных n; $0, i$ при нечетных n.

4.16. а) $0, i$; б) $0, -i$; в) $0, i$; г) $0, -i$; д) $0, i$ при четных n; $0, -i$ при нечетных n.

4.17. а) окружность, радиуса 1 с центром в точке $(0, 0)$ и уравнением $x^2 + y^2 = 1$; б) точки $(x, 0)$, где $x \in \mathbb{R}$; в) кольцо, ограниченное окружностями радиусов $R = 1$ и $R = 3$ с общим центром в начале координат $(1 < x^2 + y^2 < 9)$; г) $y = x, x \in (0, +\infty)$; д) внешность окружности радиуса $R = 5/2$; е) $z = iy$, где $y \in \mathbb{R}$; ж) область между двумя окружностями с центром $(0, -1)$ и радиусами 1 и 2 $(1 \leq x^2 + (y+1)^2 < 2)$; з) $x < y$.

4.19. а) $x > y$; б) окружность с центром $(2, -1)$ и радиусом $\sqrt{5}$; в) $x > 0$.

4.19. $\sqrt{5}$.

5.31. $k = 3$, $n = 7$.

5.32. Подсказка: a) $2^3 = (1+1)^3$; b) $2^4 = (1+1)^4$; c) $2^n = (1+1)^n$.

5.33. Подсказка: a) $0^3 = (1-1)^3$; b) $0^4 = (1-1)^4$; c) $0^n = (1-1)^n$.

5.34. Подсказка: a) $3^3 = (1+2)^3$; b) $3^4 = (1+2)^4$; c) $3^n = (1+2)^n$.

6.1. a) $10n - 8$; b) $2n - 1$; c) $-2 + 3n$; d) $-1 + 3n$; e) 2^{n-1}; f) 3^{n-1}; g) $2^{n-1} - 1$; h) $3^{n-1} + 1$; i) $(-1)^n$; g) $(-1)^n + 1$; k) $((-1)^n + 1)/2$; l) $2^{n-1} + (-1)^n$; m) $((-1)^n + 1)2^{(n-3)/2}$.

6.2. a) $\frac{100}{2}, \frac{100}{3}, \frac{100}{4}, \frac{100}{5}, \frac{100}{6}$;

b) $-\frac{1}{9}, -\frac{1}{6}, -1, \frac{1}{6}, \frac{1}{25}$;

c) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{526}{6}$;

d) $1, 2, 1/3, 4, 1/5$;

e) $1, 0, -1, 0, 1$;

f) $3, 9, 3^{1/3}, 81, 3^{1/5}$.

6.3. а) не монотонна; б) возрастает; в) убывает; г) убывает.

6.8. a) возрастает; b) возрастает; c) возрастает при $n > 3$; d) возрастает при $n > 2$; e) убывает при $n > 4$; f) убывает; g) убывает; h) убывает; i) убывает при $n > 4$; g) возрастает; k) убывает; l) возрастает; m) убывает при $n > 5$; n) возрастает при $n > 5$; o) убывает.

6.9. a) убывает при $n > 3$; b) убывает; c) убывает; d) убывает; e) возрастает; f) убывает.

6.10. a) возрастает; b) убывает; c) не возрастает; d) убывает при $n > 2$; e) не монотонна; f) не монотонна; g) не монотонна; h) не монотонна; i) не монотонна.

6.7. Убывает.

6.8. a) ограничена снизу, $a_n \geq 1$; b) ограничена снизу, $a_n \geq 2$; c) ограничена снизу, $a_n \geq -36$; d) ограничена снизу, $a_n \geq -16$; e) ограничена сверху, $a_n \leq 25$; f) ограничена, $0 < a_n \leq 1$; g) ограничена, $0 < a_n \leq \dfrac{1}{3}$; h) ограничена, $0 < a_n \leq 50$; i) ограничена, $-2 \leq a_n \leq 2$; g) ограничена, $50 \leq a_n < 100$; k) ограничена, $2 < a_n \leq \dfrac{7}{3}$; l) ограничена, $-1 \leq a_n < 2$; m) ограничена, $-5 \leq a_n \leq 7$; n) ограничена, $-11 \leq a_n \leq 9$; o) ограничена, $1,5 < a_n \leq 5,5$.

6.9. a) ограничена, $-1 \leq a_n \leq \dfrac{1}{6}$; b) ограничена, $0 < a_n \leq 50$; c) ограничена, $0 < a_n \leq \dfrac{2}{3}$; d) ограничена, $0 \leq a_n \leq 50$; e) ограничена снизу, $0,5 \leq a_n$; f) ограничена, $0 < a_n \leq \dfrac{8}{3}$.

6.10. a) ограничена снизу, $3 \leq a_n$; b) ограничена, $0 < a_n \leq 1$; c) ограничена, $0 < a_n \leq 0,5$; d) ограничена, $0 < a_n \leq 1,25$; e) ограничена снизу, $0 < a_n$; f) ограничена, $-1 \leq a_n \leq 1$; g) не ограничена; h) ограничена снизу, $1 \leq a_n$; i) ограничена снизу, $0 < a_n$.

6.11. а) $(-1)^n$; б) $-n$; в) n; г) $(-1)^n n$.

6.12. а) 2, наименьшего нет; б) 1, наименьшего нет; в) $0,05$, наименьшего нет; г) $1,5$, наименьшего нет;

д) 1, наименьшего нет.

6.13. а) -5; б) 20; в) -2.

7.1. a) 2, 11, 101, 1001; b) 1, 8, 98, 998; c) 1, 3, 34, 334; d) $101, 1001, 10001, 100001$; e) $1, 4, 10, 33$; f) $101, 1001$, $10001, 100001$; g) $1, 2, 9, 30$; h) $1, 4, 95, 995$; i) $1, 4$, $7, 10$; j) $4, 7$, $10, 13$; k) $3, 2^{10}+2, 2^{100}+3, 2^{1000}+4$; l) $3, 21, 201, 2001$.

7.2. a) 0; b) 3/2; c) 1; d) 1; e) 0; f) 0.

7.4. a) 1; b) 1; c) -2; d) -3.

7.5. a) 1; b) 2; c) 1; d) 9/2; e) 2; f) 3/2.

7.6. a) 1; b) 1/2; c) 1/3; d) 7/19; e) 15; f) 29/9.

7.7. a) ∞; b) 0; c) ∞; d) 0.

7.8. a) 3; b) $2,4$; c) 9/2; d) -2; e) 4; f) $0,2$.

7.9. a) 3; b) 5; c) 3; d) 1/3; e) 1/3; f) π; g) 0; h) $-\infty$.

7.10. a) 1/2; b) 1; c) 1; d) $+\infty$; e) 0; f) 0.

7.11. a) 1; b) 0; c) 2; d) ∞; e) 1/2; f) 0.

7.12. a) -4; b) 1; c) 0; d) $-1/2$; e) ∞; f) 0; g) ∞.

7.13. a) 0; b) $-\infty$.

7.14. a) e^2; b) e^3; c) 0; d) e^2; e) e; f) e^2; g) $+\infty$; h) e^{-2}; i) e; j) 1.

7.15. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0; e) 2; f) 1/4; g) 1/2; h) -1/6.

7.16. a) 2; b) 1/2; c) 1/4; d) 1/2; e) 1/2; f) 1.

7.17. a) 0; b) 0; c) 0; d) 1; e) 0; f) 0; g) 1/2.

8.1. а) $0,1$; б) $0,1$; в) $0,1$; г) $0,1$; д) $0,1$; е) $0,1$; ж) $0,1$; з) $0,1$; и) $0,1$; к) $0,1$.

8.5. a) 1; b) 1; c) -2; d) $-1,5$.

8.6. a) 1; b) 4/3; c) 1; d) 3; e) 2; f) 3/2; g) 1/3; h) 7/19; i) 15; j) 29/9.

8.7. a) ∞; b) 0; c) ∞; d) 0.

8.8. a) 3; b) $2,4$; c) 9/2; d) -2; e) 4; f) $0,2$.

8.9. a) 3; b) 5; c) 1/3; d) π.

8.10. a) 1/2; b) 1; c) 1; d) 0.

8.11. a) 1; b) 0; c) 2; d) ∞.

8.12. a) $-7/2$; b) $-1/2$; c) 5/2; d) ∞; e) 0.

8.13. a) 3/2; б) ∞.

8.14. a) 0; b) e^2; c) e; d) e^2.

8.15. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0; e) 1; f) 1/4; g) 1/2; h) $-1/6$; i) -2; j) 2.

8.16. a) 2; b) 1/2; c) 1/4; d) 1/2; e) 1/2; f) 1.

8.17. a) 2/3; b) 4/3; c) m/n; d) 3/5; e) $-5/3$; f) 5.

8.18. a) 9/5; b) 5/7; c) 16/49; d) 4/7; e) 4/17; f) 100; g) 1/2; h) $\sqrt{2}$.

8.20. а) 0; б) 9/2; в) $8\sqrt{2}$; г) $-1/2$; д) $\cos a$; е) $-\sqrt{2}/4$.

8.21. а) e^2; б) $e^{-10/3}$; в) e^{-8}; г) e^{-5020}; д) $e^{-6024/5}$; е) $e^{2/3}$; ж) 0; з) e^2; и) $e^{8/3}$; к) $e^{6/5}$.

8.22. а) 3; б) 2; в) 18; г) 0; д) 1/2; е) 12; ж) $-1/2$.

8.23. а) Да; б) Нет; в) Да; г) Нет.

8.24. а) $x = -2$ первого рода, $x = 2$ первого рода; б) $x = 1$ первого рода, $x = 2$ второго рода; в) $x = -1$ первого рода, $x = -2$ второго рода; г) $x = 1$ первого рода, $x = 2$ второго рода.

8.25. а) 1; б) 1/2.

8.26. В нуле устранимый разрыв; предел на бесконечности равен 1.

8.27. Да. $f(x) = x^2 + 1, x \geq 0; -(x^2 + 1), x < 0$.

8.28. Да. $\dfrac{1}{x}$ и $-\dfrac{1}{x}$.

9.1. а) $2\triangle x$; б) $2x\triangle x + (\triangle x)^2$; в) $3x^2\triangle x + 3x(\triangle x)^2 + (\triangle)^3$; г) $a\triangle x$; д) $2ax\triangle x + a(\triangle x)^2 + b\triangle x$; е) $\sin(x + \triangle x) - \sin x$.

9.2. а) $2x$; б) $3x^2$; в) $-1/x^2$; г) $-1/(2x^3)$; д) $1/(2\sqrt{x})$; ж) $2ax + b$; е) $1/(\sqrt[3]{x^2})$.

9.3. а) $\cos x$; б) $-\sin x$; в) e^x; г) $1/x$; д) $2\cos(2x+1)$; е) $-3\sin(3x-2)$; з) $1/(x+7)$.

9.4. 73.

9.5. а) 215; б) 210.5; в) 210.05; 210.

9.6. а) $4x^3 + 3x^2 - 2,\ \ 5,\ \ -1.75$; б) $2x^7 + 2x^5 + 2x,\ \ 6,\ \ -\dfrac{69}{64}$;

в) $x^2 + x - 2,\ \ 0,\ \ -2.25$; г) $\dfrac{3x^2}{2} + x + 10,\ \ 12.5,\ \ 9.875$;

д) $-\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{x^4}\ \ -6,\ \ -36$; е) $-\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{4}{x^5} - \dfrac{6}{x^7},\ \ -12,\ \ 912$;

ж) $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},\ \ \dfrac{11}{6}$, нет; з) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},\ \ \dfrac{5}{6}$, нет;

и) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$, 3, нет; к) $-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1}{3x^{\frac{4}{3}}},\ \ -\dfrac{11}{6}$, нет;

л) $-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}},\ \ -3$, нет.

9.7. а) $10\,(2x+10)^4$, $207360, 65610$; б) $9\,(3x-12)^2$, $729, 1640.25$; в) $12\ (4x+3)^2$, 588, 12; г) $6x\left(x^2+1\right)^2$, $24, -4.6875$; д) $48x\left(3x^2-7\right)^7$, $-786432, 8940697$; е) $24x^2\left(2x^3+7\right)^3$, $17496, 1845.281$; ж) $(20x+70)\ \left(x^2+7x\right)^9$, 12079595520, -2427177; з) $\left(63x^6+144x\right)\left(x^7+8x^2\right)^8$, $8910671247, -17619.58$.

9.8. а) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $-\dfrac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; в) $-\dfrac{x^2}{(x^3+11)^{\frac{4}{3}}}$; г) $\dfrac{2x^3+3x-4}{\sqrt{x^4+3x^2-8x}}$; д) $\dfrac{3x^2+14x}{2\sqrt{x^3+7x^2}}$; е) $\dfrac{3x^2+14x}{3\,(x^3+7x^2)^{\frac{2}{3}}}$; ж) $\dfrac{5x^4+21x^2}{3\,(x^5+7x^3)^{\frac{2}{3}}}$; з) $\dfrac{3x^2+2}{3\,(x^3+2x)^{\frac{2}{3}}}$; и) $\dfrac{-3x^2-2}{3\,(x^3+2x)^{\frac{4}{3}}}$.

9.9. а) $2x-11$; б) $2x-5$; в) $-a-b+2x$; г) $2x$; д) $(x-6)^3(x-5)^2(7x-38)$; е) $6(2x+1)^2\left(15x^2-13x+2\right)$; ж) $8\left(x^2+4\right)^5\left(x^3+2x\right)^3\left(3x^4+10x^2+4\right)$; з) $28x^3\left(x^2-3\right)^5\left(x^2+4\right)^7$; и) $\dfrac{5x^2+7x+2}{2\sqrt{x+1}}$; к) $\dfrac{3x}{2\sqrt{x+2}}$; л) $\dfrac{5x(x+1)}{2\sqrt{x-1}}$; м) $\dfrac{3x^3}{\sqrt{x^2+1}}$; н) $\dfrac{6x^3}{\sqrt{2x^2+3}}$; о) $\dfrac{15x^5}{\sqrt{x^2+5}}$.

9.10. -8, 0, 0.

9.11. а) $\dfrac{2}{(x-1)^2}$; б) $\dfrac{1}{(x+3)^2}$; в) $\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$; г) $\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$; д) $\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$; е) $\dfrac{4x-2}{(-x^2+x+1)^2}$; ж) $\dfrac{1-2x}{(x^2-x+1)^2}$; з) $\dfrac{2-4x}{(x^2-x+1)^2}$.

9.12. а) $\dfrac{1-5x^2}{(x^2+1)^4}$; б) $-\dfrac{4x\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}{(x^2-1)^5}$; в) $\dfrac{-7x^2-1}{(x^2-1)^5}$; г) $\dfrac{1-9x}{(x+1)^{11}}$; д) $\dfrac{(7-3x)x^6}{(x+1)^{11}}$; е) $-\dfrac{3x^2(x+2)}{(x-2)^7}$; ж) $-\dfrac{2(x-6)(x-1)^4}{(x+1)^8}$; з) $-\dfrac{4x\left(x^2-6\right)\left(x^2-1\right)^4}{(x^2+1)^8}$.

9.13. а) $2\cos(2x)$; б) $3\cos(3x-2)$; в) $2x\cos\left(x^2+11\right)$; г) $3\cos(3x+7)$; д) $-(2x+8)\sin\left(x^2+8x\right)$; е) $2\sin x\cos x$; ж) $6\sin(3x+4)\cos(3x+4)$; з) $2\sin(x+3)\cos(x+3)$; и) $6\sin^2(2x-5)\cos(2x-5)$; к) $4x\sin\left(x^2+2\right)\cos\left(x^2+2\right)$; л) $2x\sin\left(\sqrt{x^2+2}\right)\cos\left(\sqrt{x^2+2}\right)\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$; м) $18x\sin^2\left(3x^2+2\right)\cos\left(3x^2+2\right)$; н) $-12x\sin\left(3x^2+7\right)\cos\left(3x^2+7\right)$;

о) $\operatorname{tg}^2(x+7)+1$; п) $\left(3x^2+6x\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(x^3+3x^2\right)+1\right)$;
р) $14x\left(\operatorname{tg}^2\left(7x^2+8\right)+1\right)$; с) $-\sin(\sin x)\cos x$;
т) $\left(\operatorname{tg}^2 x+1\right)\cos(\operatorname{tg} x)$.

9.14. а) $\dfrac{2}{2x-5}$; б) $\dfrac{2x}{x^2-5}$; в) $\dfrac{6x^2-4x}{2x^3-2x^2}$; г) $\dfrac{2x+10}{x^2+10x}$; д) $\dfrac{3\sqrt[6]{x}+2}{6x\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}$;
е) $\dfrac{3\sqrt[12]{x}+2}{12x\left(\sqrt[12]{x}+1\right)}$; ж) $\dfrac{14x}{(7x^2+9)\ln 2}$; з) $\dfrac{14x^6}{(2x^7+9)\ln 2}$.

9.15. а) $\dfrac{1}{x\ln x}$; б) $\dfrac{1}{x\ln x}$; в) $\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$;
г) $\dfrac{1}{x\ln x\ln(2\ln x)}$; д) $\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)\ln(\ln(\ln x))}$;
е) $\dfrac{1}{x\ln x\ln(4\ln x)\ln(3\ln(4\ln x))}$;
ж) $-\dfrac{\sin(\ln x)}{x\cos(\ln x)}$; з) $\dfrac{\cos x}{\ln(\sin x)\sin x}$.

9.16. а) e^{x+7}; б) $2xe^{x^2+7}$; в) $-4xe^{7-2x^2}$; г) $-xe^{7-\frac{x^2}{2}}$; д) $2xe^{x^2+7}$;
е) $21x^2\ e^{7x^3-21}$; ж) $\dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$; з) $e^{\sin x}\cos x$.

9.17. а) e^x+xe^x; б) $2x^2e^{2x}+2xe^{2x}$; в) x^2e^x; г) $\left(x^2+x+1\right)e^{-x}$;
д) $\left(x^2-7x+13\right)e^{-x}$; е) $x^2e^{\frac{x}{2}}$; ж) $(x^2+1)e^{\frac{x}{2}+1}$; з) x^3e^x.

9.18. а) $\sin xe^{-x}$; б) $5e^{-x}\cos 2x$; в) $(\cos x+\sin x)e^{x/2}$;
г) $(\cos 2x+\sin 2x)e^{x/2}$; д) $e^{-2x}(\cos 3x+\sin 3x)$; е) $(\cos 4x-\sin 4x)e^{-3x}$.

9.19. а) $\dfrac{e^{2x}(4x+5)}{2\sqrt{1+x}}$; б) $\dfrac{e^{-2x}(5-4x)}{2\sqrt{x-1}}$; в) $\dfrac{e^{x/2}(1+x)^2}{2\sqrt{1+x^2}}$;
г) $-e^{-x/2}\dfrac{\left(1-4x+2x^2\right)}{2\sqrt{1+2x^2}}$; д) $e^{x^2}\dfrac{\left(1+2x+4x^2\right)}{\sqrt{1+2x}}$; е) $e^{x^2}x\dfrac{\left(-1+2x^2\right)}{\sqrt{-1+x^2}}$;
ж) $e^{x^2}\dfrac{\left(1+8x+4x^2\right)}{2\sqrt{2+x}}$; з) $e^{x^3}\dfrac{\left(1-9x^2+6x^3\right)}{\sqrt{2x-3}}$.

9.20. а) $\dfrac{1}{x^2-1}$; б) $\dfrac{x}{x^4-1}$; в) $\dfrac{x^2}{x^6-1}$; г) $\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$; д) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$.

9.21. а) $x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x$; б) $e^xx^{n-1}(n+x)$; в) $\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$;
г) $x^2\sin x$; д) $2\cos 3x\sin x$; е) $3\cos 4x\sin^3 x$; ё) $n\cos((n+1)x)\sin^{n-1}x$;
ж) $\dfrac{-1-3\cos^2 x}{4\sin^2 x}$; з) $\dfrac{2}{\sin^2 x}$.

9.22. а) $-3^{-x}(1+\ln 9)\sin x$; б) $-\dfrac{\left(\operatorname{tg}^2 x+1\right)\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}+\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\dfrac{\ln(\operatorname{tg} x)\sin\frac{x}{2}}{2}$;

в) $2\sin(\ln x)$; г) $\sqrt{a^2+b^2}\ e^{ax}\ \sin bx$.

9.23. а) 0; б) 240; в) $2160x$; г) $-\dfrac{120a^5}{(ax+b)^6}$; д) $-\dfrac{6}{x^2}$.

9.24. а) -1; б) $-\operatorname{ctg} x$; в) $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$; г) t.

9.25. а) $x^x(\ln x+1)$;

б) $\left(-\ln(\sin x)\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)\sin^{\cos x} x$;

в) $\left(-\dfrac{\sin x}{x\cos x}-\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)\cos^{\frac{1}{x}} x$;

г) $\left(x^2+1\right)^{2x}\left(\dfrac{4x^2}{x^2+1}+2\ln\left(x^2+1\right)\right)$;

д) $x^{\sin x}\left(\ln x\cdot\cos x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$;

е) $\dfrac{2x^{\ln x}\ln x}{x}$.

9.26. а) нули производной $-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$; б) нули производной $0, 2/3$; в) нули производной $-4, 2$; г) нули производной $-3, 4, 0$; д) нули производной 0 и -3 кратности 2; е) нули производной -3 и 0 кратности 2; ж) нули производной $+1$, -1 и 0 кратности 2; з) нули производной -1, 0 и 1 кратности 2.

9.27. а) возрастает на $(-\infty,+\infty)$; б) возрастает на $(0,+\infty)$ и убывает на $(-\infty,0)$; в) возрастает на $(-\infty,\dfrac{1}{3})$ и возрастает на $(\dfrac{1}{3},+\infty)$; г) возрастает на $(\dfrac{1}{2},2)$, убывает на $(-\infty,\dfrac{1}{2})$ и на $(2,+\infty)$; д) возрастает на $(\infty,-1)$ и на $(0,1)$; убывает на $(-1,0)$ и на $(1,+\infty)$; е) возрастает на $(-\infty,-1)$ и на $(3,+\infty)$, убывает на $(-1,3)$.

9.28. а) Возрастает при $x>1$ и убывает при $0<x<1$. Минимум в точке $x=1$; б) Возрастает при $x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и убывает при $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Минимум в точке $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; в) Возрастает при $x>e$ и убывает при $0<x<e$. Минимум в точке $x=e$; г) Возрастает при $x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ и убывает при $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Минимум в точке $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; д) Возрастает при $x>e$ и убывает при $0<x<e$. Минимум в точке $x=e$; е)

Возрастает при $x > e^2$ и при $0 < x < 1$, убывает при $1 < x < e^2$. Минимум в точке $x = e^2$. Разрыв в точке $x = 1$.

9.29. $x_{min} = -1/4, x_{max} = 0, x_{min} = 1$.

9.30. $a \in (-3; 3)$.

9.31. $[-2; 0]$.

9.32. Подсказка: $\dfrac{-x^2}{1+x^2} \leq 0$.

9.33. Подсказка: $1 + \cos x \geq 0$.

9.34. а) $-2ex + e$; б) $7x + 17$; в) $y = 0.04x - 1.36$; г) $\sqrt{2}(x - \pi/4)$.

9.36. а) a/b; б) a^2/b^2; в) 1; г) a^2/b^2; д) 7/9; е) 1; ж) 1/3; з) -2; и) 3; к) 3/2; л) 3/35; м) 4/9; н) 1/3; о) 1.

9.37. а) 0; б) 0; в) 0; г) 0.

9.38. а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) 0; е) 0.

9.39. а) ∞; б) ∞; в) 0; г) 0.

9.40. а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) ∞.

9.41. $-5 + 5\ (x-2) + 2\ (x-2)^3 + 5\ (x-2)^2 + o\left((x-2)^3\right)$.

9.42. $-6 + 11x - 6x^2 + o\left(x^3\right)$.

9.43. а) $1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$;

б) $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^6}{48} + \dfrac{x^8}{32 \cdot 24} + o(x^8)$;

в)$1 + 5x^2 + \dfrac{25x^4}{2} + \dfrac{125x^6}{6} + \dfrac{625x^8}{24} + \left(x^{10}\right)$;

г) $x^2 - \dfrac{x^6}{3!} + \dfrac{x^{10}}{5!} - \dfrac{x^{14}}{7!} + \dfrac{x^{18}}{9!} + o(x^{18})$;

д) $x^4 - \dfrac{x^{12}}{3!} + \dfrac{x^{20}}{5!} - \dfrac{x^{28}}{7!} + \dfrac{x^{36}}{9!} + o(x^{36})$;

е) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{24} - \dfrac{x^4}{64} + \dfrac{x^5}{160} + o(x^5)$;

ж) $-x^2 - \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^6}{3} - \dfrac{x^8}{4} - \dfrac{x^{10}}{5} + o(x^{10})$;

и) $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} - \dfrac{5x^4}{128} + o(x^4)$;

л) $1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{5x^3}{81} - \dfrac{10x^4}{243} + o(x^4)$.

9.44. а) $x - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$; б) $-\dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$; в) $x + o\left(x^3\right)$;

г) $1 + x + \dfrac{3x^2}{2} + o\left(x^3\right)$; д) $1 - x + \dfrac{3x^2}{2} + o\left(x^3\right)$.

9.45. а) 1; б) 1; в) 2; г) -1; д) ∞; е) 0; ж) ∞; з) 0.

9.46. а) 6; б) 1/3; в) 1/2; г) 0; д) 1.

9.47. Подсказка: исследовать на монотонность разность функций, стоящих слева и справа.

9.48. Подсказка: исследовать на монотонность разность функций, стоящих слева и справа.

9.49. Подсказка: исследовать на монотонность разность функций, стоящих слева и справа.

9.50. Подсказка: исследовать на монотонность разность функций, стоящих слева и справа.

9.51. Подсказка: исследовать на монотонность $e^x - x^e$.

Оглавление

1 Множества и операции над ними 5
2 Отображения и их простейшие свойства 10
2.1 Определение отображения, композиция отображений 10
2.2 Инъекция, сюръекция, биекция 11
3 Графики элементарных функций, общие точки графиков 15
3.1 Простейшие графики 15
3.2 Сдвиги, растяжения, отражения 17
3.3 Общие точки графиков 18
4 Комплексные числа 21
4.1 Алгебраическая форма комплексного числа 21
4.2 Тригонометрическая форма комплексного числа, формула Муавра 22
4.3 Корни из комплексных чисел 23
4.4 Геометрическая интерпретация комплексного числа 24
5 Метод математической индукции 26
5.1 Доказательство равенств 26
5.2 Доказательство неравенств 28
5.3 Разные задачи 29

5.4 Бином Ньютона 30
6 Последовательности 32
6.1 Способы задания 32
6.2 Монотонность 33
6.3 Ограниченность последовательности 34
7 Предел последовательности 37
7.1 Последовательности, сходящиеся к 0 (бесконечно малые последовательности) 37
7.2 Определение предела последовательности . 37
7.3 Вычисление пределов 38
8 Предел функции 45
8.1 Определение предела функции 45
8.2 Простейшие пределы 46
8.3 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ и 1^∞ с помощью замечательных пределов . 51
8.4 Классификация точек разрыва 53
9 Производная 56
9.1 Приращение функции и определение производной 56
9.2 Техника дифференцирования 57
9.3 Разные задачи 63
9.4 Применение производной: промежутки монотонности и экстремумы 64
9.5 Геометрический смысл производной 65
9.6 Правило Лопиталя для вычисления пределов 65
9.7 Формула Тейлора и вычисление пределов . 67
9.8 Доказательство неравенств с помощью производной 69
10 Исследование функций с помощью производных, построение графиков 71

10.1 Простейшие графики 71
10.2 Графики с логарифмом или с экспонентой 73
10.3 Различные графики 75

Ответы **76**

Учебное издание

Ивин Евгений Александрович
Курбацкий Алексей Николаевич
Мироненков Алексей Алексеевич
Попеленский Федор Юрьевич
Словеснов Алексей Викторович
Хизгияев Семен Владимирович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Учебное пособие для вузов

Подписано в печать 25.02.2020 г.
Формат $60 \times 84/_{16}$. Печать цифровая.
Усл.печ.л. 5,23. Тираж 110 экз. Заказ № 54.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Вологодский научный центр Российской академии наук»
(ФГБУН ВолНЦ РАН)

Россия, 160014, г. Вологда, ул. Горького, 56а
Тел. (8172) 59-78-03, e-mail: common@vscc.ac.ru

ISBN 978-5-93299-459-7