Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Московская школа экономики
Кафедра эконометрики и математических методов экономики

Е. А. Ивин, Ф. Ю. Попеленский

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Учебное пособие для вузов

Вологда
ВолНЦ РАН
2020

УДК 512.6(075.8)
ББК 22.143я73
И25

Рецензент
Артамонов Н.В., к.ф.-м.н., заведующий кафедрой
математики, эконометрики и информационных технологий
МГИМО МИД России

Ивин, Е. А.

И25 Сборник задач по линейной алгебре. Первый семестр : учебное пособие для вузов / Е. А. Ивин, Ф. Ю. Попеленский ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московская школа экономики, Кафедра эконометрики и математических методов экономики. – Вологда : ВолНЦ РАН, 2020. – 90 с.: ил.

ISBN 978-5-93299-460-3

В сборнике задач представлены задачи и некоторые примеры решений, которые разбирались на семинарских занятиях в осенних семестрах 2008-2019 учебных годов в Московской школе экономики МГУ имени М.В. Ломоносова со студентами бакалавриата программы «Экономика».

Рекомендуется студентам экономических и инженерно-технических специальностей. Может быть полезна также студентам, обучающимся на естественно-научных направлениях.

УДК 512.6(075.8)
ББК 22.143я73

ISBN 978-5-93299-460-3

Светлой памяти

Евгения Александровича Ивина

посвящается

Линейная алгебра
Первый семестр

1. Элементы аналитической геометрии плоскости

1.1. Декартова система координат. Задание фигур уравнениями и неравенствами.

В задачах этого раздела на плоскости выбрана декартова система координат.

1.1.1. Изобразить на плоскости точки $A(-1,-2)$, $B(1,-1)$, $C(2,1)$, $D(-1,2)$, $E(1,3)$. Найти длины отрезков AB, BC, CD, AD, AC, BD.

1.1.2. Изобразить на плоскости точки $A(1,3)$, $B(2,2)$, $C(1,0)$, $D(-1,-2)$, $E(-2,-1)$. Найти длины отрезков AE, BE, BD, CB, EC, DC.

1.1.3. Изобразить на координатной плоскости прямую

a) $y = 2x + 1$;

b) $y = \dfrac{1}{2}\,x + 1$;

c) $y = -2x + 1$;

d) $y = -\dfrac{1}{3}\,x - 1$.

1.1.4. Изобразить на координатной плоскости прямую

a) $2x + 3y = 6$;

b) $2x + 3y = 1$;

c) $x = -1$;

d) $y = 3$.

1.1.5. Изобразить (одновременно) на координатной плоскости прямые $y = x - 1$, $y = 1$, $y = -x - 2$, $x = -2$.

1.1.6. Задать уравнениями изображенные на рисунке 1 прямые

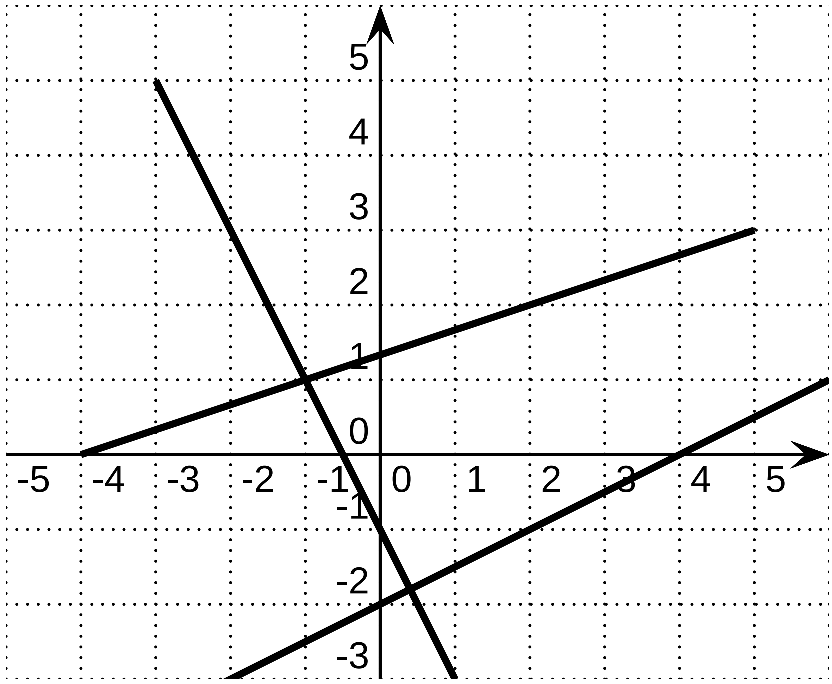


Рис. 1.

1.1.7. Изобразить на координатной плоскости полуплоскость

a) $y - x - 1 \le 0$;
b) $x - 3y + 1 \le 0$;
c) $x - 2 \le 0$;
d) $y + 3 \ge 0$;
e) $x - 2y - 4 \ge 0$;
f) $2x + y + 1 \ge 0$.

1.1.8. Изобразить на координатной плоскости фигуры, заданные неравенствами

a) $(x-1)^2 + (y-6)^2 \ge 5$;
b) $(x+2)^2 + (y+1)^2 \ge 5$;
c) $y \ge -2x + 3$;
d) $y \le 5$;
e) $y \ge 2x - 1$;
f) $x \le 2y + 3$.

1.1.9. Изобразить на координатной плоскости фигуры, заданные системами неравенств

a) $\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ 2x - y \leq 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} -2x + y \leq 0 \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ y - x \leq 2 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 2 \\ 2x - y \geq 0 \\ 2x + y \leq 8 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x^2 - 2x + y^2 \geq 0 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4y + 3 \geq 0 \end{cases}$.

1.2. Общие точки фигур

1.2.1. Систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y - 8 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

решить графически и аналитически. Ответы сравнить.

1.2.2. Систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

решить графически и аналитически. Ответы сравнить.

1.2.3. Систему уравнений

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

решить графически и аналитически. Ответы сравнить.

1.2.4. Систему уравнений

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

решить графически и аналитически. Ответы сравнить.

1.2.5. Аналитически и графически найти общие точки окружности $x^2-2x+y^2-2y-3=0$ с каждой из прямых $x-2y-4=0$, $x-3y-3=0$, $x-y-6=0$. Ответы сравнить.

1.2.6. Аналитически и графически найти общие точки окружности $x^2-6x+y^2-4y+8=0$ и каждой из прямых $y=-x+2$ и $y=3x-2$. Ответы сравнить.

1.2.7. Аналитически и графически найти общие точки окружности $x^2-4x+y^2-4y+7=0$ и каждой из прямых $y=x+1$ и $y=-x+5$. Ответы сравнить.

1.2.8. Аналитически и графически найти общие точки окружностей $x^2-8x+y^2+11=0$ и $x^2-4x+y^2+4y+7=0$. Ответы сравнить.

1.2.9. Аналитически и графически найти общие точки окружностей $x^2+2x+y^2-2y=0$ и $x^2+y^2-2y=0$. Ответы сравнить.

1.2.10. Систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y-4=0 \\ x^2-6x+y^2-2y+8=0 \end{cases}$$

решить графически и аналитически. Ответы сравнить.

1.2.11. Аналитически найти общие точки окружностей $x^2+2x+y^2+2y=0$ и $x^2+y^2-2y=0$. Что можно сказать об общих точках этих окружностей, если решать задачу графически?

1.2.12. Аналитически и графически найти общие точки для каждой пары окружностей: $x^2+y^2-2y=0$, $x^2+y^2-6y+8=0$, $x^2+2x+y^2-2y=0$, $x^2+2x+y^2+2y=0$. Ответы сравнить.

1.2.13. Найти уравнения касательных к окружности $x^2-2x+y^2-4y=0$, проходящих черех точку $(2,-1)$.

1.2.14. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$, проходящих черех точку $(-4, -3)$.

1.2.15. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$, проходящих черех точку $(3, 1)$.

1.2.16. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$, проходящих черех точку $(2, 1)$.

1.2.17. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$, параллельных прямой $y = -2x + 7$.

1.2.18. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$, перпендикулярных прямой $y = x/2 + 1$.

1.2.19. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 3 = 0$, параллельных прямой $y = x$.

1.2.20. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 3 = 0$, перпендикулярных прямой $y = x$.

1.2.21. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$, параллельных прямой $y = -x$.

1.2.22. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$, перпендикулярных прямой $y = -x$.

1.2.23. Найти уравнения касательных к окружности $x^2 - 4x + y^2 - 4y + 7 = 0$, проходящих через точку $(1, 1)$.

2. Системы линейных уравнений

2.3. Элементарные преобразования, приведение матрицы к ступенчатому виду, ранг матрицы

Напомним, что под элементарными преобразованиями строк матрицы мы понимаем такие:

• *перестановка двух строк матрицы*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

• *умножение некоторой строки на ненулевое число*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\cdot(1)} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

• *прибавление к некоторой строке матрицы другой ее строки, умноженной на некотое число*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2\cdot(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Пример. Привести к ступенчатому виду матрицу $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и найти ее ранг.

Решение. Проделаем следующие элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[(2)-4\cdot(1)]{(3)-7\cdot(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-2\cdot(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица имеет ступенчатый вид. Ранг исходной матрицы равен 2.

В следующих задачах привести матрицу к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк, найти ранг матрицы.

Сравнивая свой ответ с ответом, приведенным в задачнике, помните, что результат приведения матрицы к ступенчатому виду неоднозначен, однако форма ступенек должна совпадать с ответом.

2.3.1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3.2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2.3.3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2.3.4. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

2.3.5. $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$.

2.3.6. $\begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 7 & 25 \end{pmatrix}$.

2.3.7. $\begin{pmatrix} -3 & -11 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

2.3.8. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

2.3.9. $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

2.3.10. $\begin{pmatrix} 7 & 14 & 11 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

2.3.11. $\begin{pmatrix} 7 & 14 & 7 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

2.3.12. $\begin{pmatrix} -3 & -6 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3.13. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -6 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$.

2.3.14. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 11 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$.

2.3.15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.3.16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

2.3.17. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -1 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

2.3.18. $\begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 \\ -2 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

2.3.19. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

2.3.20. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

2.3.21. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

2.3.22. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

2.3.23. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3.24. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -3 & 6 & -6 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

2.3.25. $\begin{pmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

2.3.26. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

2.3.27. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.3.28. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 12 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.

2.3.29. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.3.30. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & -8 \\ -2 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.3.31. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.3.32. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2.3.33. $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 & -8 \\ -1 & 1 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2.3.34. $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 & -8 \\ -5 & 5 & 3 & 14 \\ 2 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

2.3.35. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & -8 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2.4. Системы линейных уравнений

В этом разделе сначала нужно решать системы линейных уравнений, у которых матрица уже приведена к ступенчатому виду. Для единообразия будем считать, что переменные обозначаются x_1, x_2 и т. д.

Пример. Найти общее решение системы уравнений, заданной расширенной матрицей ступенчатого вида

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Решение. Из ступенчатого вида следует, что x_3 и x_4 — свободные переменные, а x_1 и x_2 – базисные. Находим общее решение системы $x_4 = C_1$, $x_3 = C_2$, $x_2 = 2 + 3C_1 - C_2$, $x_1 = 1 - C_1 + C_2$, где

C_1 и C_2 — произвольные вещественные числа. Удобно записать это решение в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - C_1 + C_2 \\ 2 + 3C_1 - C_2 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2 — любые числа.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - C_1 + C_2 \\ 2 + 3C_1 - C_2 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2 — любые числа.

2.4.1. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right)$.

2.4.2. $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 16 \end{array}\right)$.

2.4.3. $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.4. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.5. $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.6. $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$.

2.4.8. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

2.4.9. $\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.10. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.11. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.12. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.13. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.14. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.15. $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$.

2.4.16. $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$.

2.4.17. $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.18. $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.19. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$.

2.4.20. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$.

2.4.21. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.22. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$.

2.4.23. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

2.4.24. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

2.4.25. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$.

2.4.26. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 10 \end{array}\right)$.

2.4.27. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right)$.

2.4.28. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right)$.

2.4.29. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$.

2.4.30. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$.

2.4.31. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$.

2.4.32. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$.

2.4.33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. **2.4.36.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right)$.

2.4.34. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

2.4.35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right)$.

В следующих задачах решать системы линейных уравнений, у которых расширенная матрица не приведена к ступенчатому виду. Для единообразия будем считать, что переменные обозначаются x_1, x_2 и т. д.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 4 \\ x + 3y + 4z & = & 5 \\ 3x + 7y + 10z & = & 13 \end{array}\right.$$

Решение. Запишем расширеную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-2\cdot(1)]{(2)-1\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{(3)-1\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, свободная переменная — z, а базисные — x и y. Находим общее решение: $z = C$, $y = 1 - z = 1 - C$, $x = 4 - 2y - 3z = 2 - C$, где C — любое число. Запишем его в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - C \\ 1 - C \\ C \end{pmatrix}.$$

Ответ. Общее решение имеет вид $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - C \\ 1 - C \\ C \end{pmatrix}$, где C — любое число.

2.4.37. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 11 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$.

2.4.38. $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$.

2.4.39. $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -8 \\ 2 & -3 & 21 \end{array}\right)$.

2.4.40. $\left(\begin{array}{cc|c} -5 & -17 & -18 \\ 3 & 10 & 11 \end{array}\right)$.

2.4.41. $\left(\begin{array}{cc|c} -5 & -19 & 13 \\ 3 & 11 & -7 \end{array}\right)$.

2.4.42. $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 12 & -21 \\ -2 & 7 & -12 \end{array}\right)$.

2.4.43. $\left(\begin{array}{cc|c} -5 & 7 & 19 \\ -2 & 3 & 8 \end{array}\right)$.

2.4.44. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -9 \end{array}\right)$.

2.4.45. $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & -11 \\ -14 & -7 & -77 \end{array}\right)$.

2.4.46. $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ -10 & 5 & 10 \end{array}\right)$.

2.4.47. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

2.4.48. $\left(\begin{array}{cc|c} 16 & 8 & -9 \\ -14 & -7 & 7 \end{array}\right)$.

2.4.49. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 21 \\ -4 & -2 & -7 \end{array}\right)$.

2.4.50. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -7 & 19 \\ -3 & 7 & -16 \\ -2 & 4 & -10 \end{array}\right).$

2.4.51. $\left(\begin{array}{cc|c} -23 & 2 & -25 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & -5 \end{array}\right).$

2.4.52. $\left(\begin{array}{cc|c} 10 & 7 & 13 \\ 3 & -2 & 8 \\ -2 & -3 & -1 \end{array}\right).$

2.4.53. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 21 & -53 \\ 3 & 5 & -9 \\ -2 & -9 & 23 \end{array}\right).$

2.4.54. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & -6 & 14 \end{array}\right).$

2.4.55. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -7 & 10 \end{array}\right).$

2.4.56. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 5 & -7 & 9 \\ 2 & -6 & 15 & -8 \end{array}\right).$

2.4.57. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -3 & 7 & -6 & 1 \\ 3 & -11 & 19 & 8 \end{array}\right).$

2.4.58. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & -2 & -6 & -17 \\ 5 & 3 & 12 & 30 \end{array}\right).$

2.4.59. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right).$

2.4.60. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & -4 & 4 & 12 \\ 2 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right).$

2.4.61. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 9 & -9 \\ 2 & -2 & 6 & -6 \\ 2 & -2 & 6 & -6 \end{array}\right).$

2.4.62. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -3 \end{array}\right).$

2.4.63. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 10 & 29 \\ -2 & 14 & -11 & -7 \\ -1 & 6 & -5 & -4 \\ 1 & 4 & 2 & 15 \end{array}\right).$

2.4.64. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 8 & 21 \\ -1 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & 13 \end{array}\right).$

2.4.65. $\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 15 & -7 \\ 6 & -2 & 9 & -9 \\ -3 & 2 & -4 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 8 \end{array}\right).$

2.4.66. $\left(\begin{array}{rrr|r} 8 & -4 & 13 & -9 \\ 6 & -1 & 13 & -4 \\ -3 & 1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right).$

2.4.67. $\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & -2 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & -10 & -12 \\ 2 & 0 & 2 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right).$

2.4.68. $\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & 5 & -5 & -19 \\ -1 & 1 & -4 & 12 & 11 \\ 1 & 1 & 3 & -9 & -11 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right).$

2.4.69. $\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 3 & 17 & -9 & -20 \\ 1 & -1 & -8 & 4 & 10 \\ -1 & 2 & 5 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right).$

2.4.70. $\left(\begin{array}{rrrr|r} -3 & 2 & 3 & 7 & 14 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -7 \\ -2 & 3 & 5 & 3 & 17 \\ -2 & 2 & 2 & 5 & 11 \end{array}\right).$

2.4.71. $\left(\begin{array}{rrrr|r} -3 & 2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 5 & 0 & 14 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right).$

2.4.72. $\left(\begin{array}{rrrrr|r} -2 & 4 & 1 & 1 & -1 & 10 \\ 2 & -4 & -3 & 1 & -1 & -10 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right).$

2.4.73. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 6 & 1 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & -6 & -1 & -1 & 1 & -9 \\ 3 & -9 & -1 & -2 & 2 & -11 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$

2.4.74. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & -4 & 1 & -1 & -9 \\ 2 & -6 & -3 & 1 & -1 & -5 \\ 3 & -9 & -2 & -1 & 1 & -15 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right).$

2.4.75. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -5 & 9 & -4 & 15 \\ 2 & -6 & -3 & 4 & -1 & -5 \\ -1 & 3 & -4 & 9 & -5 & 30 \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 2 & -15 \end{array}\right).$

2.4.76. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 6 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 5 & 5 \end{array}\right).$

2.5. Однородные системы линейных уравнений

Пример. Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений, заданной расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 8 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Решение. Приведем матрицу к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 8 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)-3\cdot(2)]{(1)-2\cdot(2)} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[(4)+(3)]{(1)-3\cdot(3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)\leftrightarrow(3)]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, x_3 и x_4 — свободные переменные, а x_1 и x_2 — базисные. Находим общее решение системы $x_4 = C_1$, $x_3 = C_2$, $x_2 = 2x_4 - 2x_3 = 2C_1 - 2C_2$, $x_1 = -x_3 - x_4 = -C_1 - C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные вещественные числа. Удобно записать это решение в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 - C_2 \\ 2C_1 - 2C_2 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2 — любые числа. Для $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ имеем первое фундаментальное решение $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; для $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ — второе $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ответ. Общее решение $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 - C_2 \\ 2C_1 - 2C_2 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$, где C_1 и C_2 — произвольные числа. Фундаментальная система решений состоит из двух векторов $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.5.1. В задачах **2.4.37.** — **2.4.76.** заменить правую часть на нулевую, решить полученную однородную систему уравнений и найти соответствующую фундаментальную систему решений

2.5.2. Решить систему однородных линейных уравнений, заданную матрицей $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right)$, а также найти соответствующую фундаментальную систему решений.

2.5.3. Решить систему однородных линейных уравнений, заданную матрицей $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$, а также найти соответствующую фундаментальную систему решений.

2.5.4. Решить систему однородных линейных уравнений, заданную матрицей $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$, а также найти соответствующую фундаментальную систему решений.

2.5.5. Решить систему однородных линейных уравнений, заданную матрицей $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 2 & 2 & 18 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$, а также найти соответствующую фундаментальную систему решений.

3. Определители

3.6. Определители второго порядка

В следующей группе задач требуется вычислить определитель второго порядка. Проще всего это сделать по формуле

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{1}$$

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Применим формулу (1):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-5) \cdot 3 = 17.$$

Ответ. 17.

3.6.1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

3.6.2. $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$.

3.6.3. $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

3.6.4. $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$.

3.6.5. $\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ -10 & 25 \end{vmatrix}$.

3.6.6. $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$.

3.6.7. $\begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{vmatrix}$.

3.6.8. $\begin{vmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{vmatrix}$.

3.6.9. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

3.6.10. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

3.6.11. $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$.

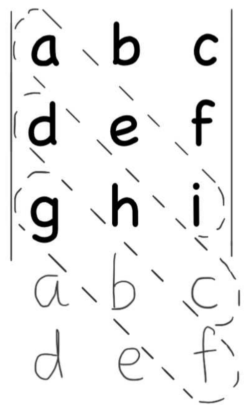
3.7. Определители порядка три и выше

В следующих задачах требуется вычислить определитель третьего порядка тремя способами: по формуле, приведением к ступенчатому виду элементарными преобразованиями, разложением по какой–либо строке или какому–либо столбцу (для определенности можно разлагать по второй строке).

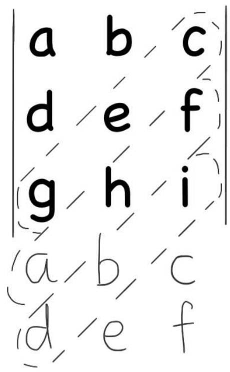
• Формула, по которой вычисляется определитель третьего порядка, имеет вид

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + d \cdot h \cdot c - \\ - (g \cdot e \cdot c + d \cdot b \cdot i + h \cdot f \cdot a). \quad (2)$$

Ее можно запомить с помощью следующей схемы. Нужно дописать снизу матрицы первые ее две строки. Тогда произведения чисел, стоящих в «овалах»



параллельных главной диагонали, берутся со знаком «плюс», а произведения чисел, стоящих в «овалах»



параллельных побочной диагонали, берутся со знаком «минус»

• Определитель любого порядка при элементарных преобразованиях строк (столбцов) подчиняется следующим правилам.

(a) При перестановке любых двух строк (столбцов), не обязательно соседних, определитель меняет знак:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

(b) При умножении строки или столбца на некоторое число весь определитель умножается на это число:

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 20 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

(c) При прибавлении к некоторой строке другой строки, умноженной на произвольное число, определитель не меняется (аналогично для столбцов):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{(2)+3\cdot(1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления определителя с помощью элементарных преобразований полезны еще два свойства.

(d) При транспонировании матрицы ее определитель не меняется:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

(e) Определитель верхнетреугольной (или нижнетреугольной) матрицы равен произведению ее диагональных элементов

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24.$$

• Определитель любого порядка может быть вычислен разложением по i-му столбцу:

$$\det A = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni}$$

или i-ой строке:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Здесь i может быть выбрано произвольным образом.

Эти же формулы можно описать словесно: определитель равен сумме всех произведений элементов некоторой строки (или некоторого столбца) на их алгебраические дополнения.

Напомним, что *алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij}, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца, называется определитель, полученный вычеркиванием элемента a_{ij} вместе со строкой и столбцом, содержащими этот элемент, доможенный на $(-1)^{i+j}$.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. 1-й способ, вычисление по формуле.

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot 5 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \cdot 1 -$$
$$- \Big(1 \cdot 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + (-4) \cdot (-3) \cdot (-2) \Big) =$$
$$= -20 + 2 - 3 - (5 - 1 - 24) = -1.$$

2-й способ, разложение по строке (столбцу). Мы воспользуемся разложением по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{3+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 + 5 \cdot (-5) + 3 \cdot 7 = 3 - 25 + 21 = -1.$$

3-й способ, приведение к ступенчатому виду.

$$\begin{vmatrix}-4 & -1 & 1\\ 1 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{1+4\cdot(2)} \begin{vmatrix}0 & 19 & -7\\ 1 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{(2)-(3)} \begin{vmatrix}0 & 19 & -7\\ 0 & 8 & -3\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix} \xlongequal{(1)\leftrightarrow(3)}$$

$$= -\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 8 & -3\\ 0 & 19 & -7\end{vmatrix} \xlongequal{(3)-2\cdot(2)} -\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 8 & -3\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix} \xlongequal{(2)-3\cdot(3)}$$

$$= -\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix} \xlongequal{(3)-3\cdot(2)} -\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = -1\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$$

Ответ. Определитель равен -1.

3.7.1. $\begin{vmatrix}-2 & 3 & 2\\ -3 & 5 & 3\\ 1 & -3 & -2\end{vmatrix}.$

3.7.2. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}.$

3.7.3. $\begin{vmatrix}-7 & 4 & 2\\ -7 & 3 & 2\\ -3 & 1 & 1\end{vmatrix}.$

3.7.4. $\begin{vmatrix}-7 & -2 & 2\\ 16 & 3 & -5\\ -8 & -3 & 2\end{vmatrix}.$

3.7.5. $\begin{vmatrix}-5 & -2 & 2\\ 11 & 3 & -5\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}.$

3.7.6. $\begin{vmatrix}-1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ -3 & -1 & 2\end{vmatrix}.$

3.7.7. $\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ -3 & -1 & 2\end{vmatrix}.$

3.7.8. $\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ -2 & 6 & 4\end{vmatrix}.$

3.7.9. $\begin{vmatrix}6 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}.$

3.7.10. $\begin{vmatrix}8 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 4\end{vmatrix}.$

3.8. Определитель с параметром

В следующих задачах требуется вычислить определитель и указать все значения параметра, при которых он обращается в 0.

3.8.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}.$

3.8.2. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & 1 & x \\ x^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

3.8.3. $\begin{vmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ x-1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}.$

3.8.4. $\begin{vmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ x-1 & 1 & x+1 \\ 0 & x+1 & 1 \end{vmatrix}.$

3.8.5. $\begin{vmatrix} -1 & x-1 & 1 \\ x-1 & 4x^2 & x+1 \\ 1 & x+1 & -1 \end{vmatrix}.$

3.8.6. $\begin{vmatrix} 1 & x-1 & 1 \\ x-1 & 4x^2 & x+1 \\ 1 & x+1 & 1 \end{vmatrix}.$

3.9. Комбинированные методы

В следующих задачах требуется вычислить определитель, комбинируя элементарные преобразования строк (и/или столбцов), а также разложение по строке (столбцу).

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & -5 & -1 & -7 \\ 1 & -4 & -7 & -1 \\ -1 & 4 & 11 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. Эту задачу удобнее всего решать приведением определителя к ступенчатому виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & -5 & -1 & -7 \\ 1 & -4 & -7 & -1 \\ -1 & 4 & 11 & 4 \end{vmatrix} \overset{(2)+4\cdot(1)}{\underset{(3)-(1),(4)+(1)}{=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -3 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \end{vmatrix} \overset{(3)+2\cdot(2)}{\underset{(4)-2\cdot(2)}{=\!=\!=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} \overset{(4)+3\cdot(3)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-2)\cdot 1 = -6.$$

Ответ. -6.

3.9.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

3.9.2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

3.9.3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 103 & 202 & 301 \\ 1001 & 2002 & 3004 \end{vmatrix}$.

3.9.4. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -104 & 203 & -302 & 401 \\ -1005 & 2005 & -3005 & 4006 \\ 11111 & -22220 & 33331 & -44440 \end{vmatrix}$.

3.9.5. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 & d \\ 3 & b & 7 & 3 \\ 2 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

3.9.6. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 3 & c & 0 & 1 \\ 4 & -3 & d & 7 \\ b & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$

3.9.7. $\begin{vmatrix} w & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & y & 6 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & z \end{vmatrix}.$

3.9.8. $\begin{vmatrix} 5 & x & 7 & x \\ 9 & 0 & y & 7 \\ 0 & 0 & 0 & w \\ z & 0 & 0 & z \end{vmatrix}.$

3.9.9. $\begin{vmatrix} a & b & c & d+1 \\ a & b & c+1 & d \\ a & b+1 & c & d \\ a+1 & b & c & d \end{vmatrix}.$

3.10. $\begin{vmatrix} a-1 & b & c & d \\ a & b-1 & c & d \\ a & b & c-1 & d \\ a & b & c & d-1 \end{vmatrix}.$

3.10. Разные задачи.

3.10.1. Все элементы квадратной матрицы порядка n умножили на -1. Как изменился ее определитель, если

а) $n = 2$,

б) $n = 3$,

в) $n = 4$,

г) n произвольно?

3.10.2. Как изменится определитель квадратной матрицы порядка n, если в ней столбцы переставить по циклу: первый поставить на место второго, второй — на место третьего, и т. п., а последний — на место первого? Рассмотреть случаи

а) $n = 2$,

б) $n = 3$,

в) $n = 4$,

г) n произвольно.

3.10.3. Доказать по индукции, что

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = n + 1.$$

3.10.4. Доказать по индукции, что

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^n + (-1)^{n+1}.$$

3.10.5. Доказать по индукции, что

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2^{n+1} - 1.$$

3.11. Правило Крамера

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ 4x + 3ay = 2 \end{cases}$$

в зависимости от параметра a.

Решение. Воспользуемся правилом Крамера. Вычислим определители Δ, Δ_x и Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 4 & 3a \end{vmatrix} = 3a^2 - 12,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3a \end{vmatrix} = 3a - 6,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 4.$$

Определитель Δ отличен от 0 при $a \neq \pm 2$. Поэтому при таких a по правилу Крамера получаем решение

$$x = \frac{3a-6}{3a^2-12} = \frac{1}{a+2},$$
$$y = \frac{2a-4}{3a^2-12} = \frac{2}{3a+6}.$$

Оставшиеся два значения параметра a исследуем по-отдельности.

Для $a = -2$ имеем равенства $\Delta = 0$, $\Delta_x = -12$ и $\Delta_y = -8$. Поэтому по правилу Крамера при $a = -2$ наша система решений не имеет. Напомним, что в данном случае можно было ограничиться проверкой одного из неравенств $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$.

Для $a = 2$ имеем равенства $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. В данном случае правило Крамера предписывает проделать дополнительный анализ, а именно решить систему в явном виде:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-2\cdot(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Откуда $y = C$, а $x = \dfrac{1-3C}{2}$, где C — произвольное число.

Ответ. $x = \dfrac{1}{a+2}$, $y = \dfrac{2}{3a+6}$ при $a \neq \pm 2$; $x = \dfrac{1-3C}{2}$, $y = C$, где C — произвольное число, при $a = 2$; при $a = -2$ решений нет.

3.11.1. Решить систему, заданную матрицей

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 3 \end{array}\right),$$

с помощью правила Крамера. Если получится единственное решение, то проверить его подстановкой.

3.11.2. Решить систему, заданную матрицей

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right),$$

с помощью правила Крамера. Если получится единственное решение, то проверить его подстановкой.

3.11.3. Решить систему, заданную матрицей

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 6 \\ 9 & -15 & 10 \end{array}\right),$$

с помощью правила Крамера. Если получится единственное решение, то проверить его подстановкой.

3.11.4. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = 14 \end{cases}$$

с помощью правила Крамера. Если получится единственное решение, то проверить его подстановкой.

3.11.5. Решить систему, заданную матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

с помощью правила Крамера. Если получится единственное решение, то проверить его подстановкой.

3.11.6. Решить систему, заданную матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

с помощью правила Крамера. Если получится единственное решение, то проверить его подстановкой.

3.11.7. Решить систему, заданную матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

с помощью правила Крамера. Если получится единственное решение, то проверить его подстановкой.

3.11.8. Решить систему, заданную матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

с помощью правила Крамера. Если получится единственное решение, то проверить его подстановкой.

3.11.9. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$$

с помощью правила Крамера. Если получится единственное решение, то проверить его подстановкой.

3.11.10. Для каждого значения параметра a найти решение системы

$$\begin{cases} ax + 2y = 2, \\ 2x + ay = 3. \end{cases}$$

3.11.11. Для каждого значения параметра a найти решение системы

$$\begin{cases} ax - 2y = 2, \\ 2x + ay = 3. \end{cases}$$

3.11.12. Для каждого значения параметра a найти решение системы

$$\begin{cases} 3x + ay = 3, \\ ax + 3y = 3. \end{cases}$$

3.11.13. Для каждого значения параметра a найти решение системы

$$\begin{cases} ax + 4y = 7, \\ x + ay = 8. \end{cases}$$

3.11.14. Для каждого значения параметра a найти решение системы

$$\begin{cases} ax - 4y = 1, \\ x + ay = 2. \end{cases}$$

3.11.15. Для каждого значения параметра a найти решение системы

$$\begin{cases} ax + 4y = 2, \\ x + ay = 1. \end{cases}$$

3.11.16. Для каждого значения параметра a найти решение системы

$$\begin{cases} ax - 4y = 4, \\ x - ay = 2. \end{cases}$$

4. Матрицы

4.12. Умножение матрицы на число, сложение, вычитание и умножение матриц

4.12.1. Вычислить $2A+7B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

4.12.2. Вычислить $3A-4B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\\ -5 & 6\end{pmatrix}$.

4.12.3. Вычислить $3A-2B+C$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 4 & -5 & 6\end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

4.12.4. Вычислить произведение матриц

a) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

4.12.5. Вычислить произведения матриц AB и BA, если

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

4.12.6. Вычислить произведения матриц AB и BA, если

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.12.7. Вычислить произведения матриц $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$, если

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.12.8. Вычислить произведения матриц $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$, если

a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4.12.9. Доказать по индукции равенство для всех натуральных n

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

4.12.10. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Вычислить $A^2 - (a+d)\,A + (ad - bc)\,E$.

4.13. Обратная матрица, методы вычисления

• Для квадратной матрицы второго порядка обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Если $ad-bc=0$, то правая часть этой формулы не имеет смысла. В этом случае обратной матрицы не существует.

• Для квадратной матрицы A произвольного порядка n обратная матрица может быть найдена следующим образом. Нужно составить матрицу $(A|E)$, затем элементарными преобразованиями над строками привести ее к виду $(E|B)$. Тогда матрица A^{-1} и есть B. Если же к виду $(E|B)$ матрицу $(A|E)$ привести нельзя, то это значит, что у матрицы A ранг меньше n (или, что то же самое, $\det A = 0$) и обратной для нее не существует.

• Для квадратной матрицы A произвольного порядка n обратная матрица может быть найдена еще одним способом. Сначала вычислим матрицу $\tilde{A}$, состоящую из алгебраических дополнений элементов матрицы A. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\tilde{A}^T. \qquad (4)$$

Если $\det A = 0$, то правая часть этой формулы не имеет смысла. В этом случае обратной матрицы для A не существует.

Пример. Вычислить матрицу, обратную $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Задача проще всего решается с помощью формулы (3)

В нашем случае получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 4 - 2\cdot 3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Обратная матрица равна $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Пример. Вычислить матрицу, обратную $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \\ -7 & 8 & -10 \end{pmatrix}$.

Решение. Решим задачу с помощью формулы (4)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\widetilde{A}^T.$$

Сначала вычислим элементы матрицы $\widetilde{A}$, состоящей из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = 18$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -7 & -10 \end{vmatrix} = 32$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = 13$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -10 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = -7$$

Итак, матрица алгебраических дополнений вычислена:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 18 & 32 & 13 \\ -4 & -11 & -6 \\ -7 & -14 & -7 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A удобно найти разложением по какой–нибудь строке, потому что все алгебраические дополнения уже вычислены. Мы разложим определитель по первой строке:

$$\det A = (-1) \cdot 18 + 2 \cdot 32 + (-3) \cdot 13 = -18 + 64 - 39 = 7.$$

Теперь транспонируем матрицу $\widetilde{A}$, поделим все ее элементы на определитель матрицы A, т. е. на 7, и получим

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\widetilde{A}^T = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 18 & -4 & -7 \\ 32 & -11 & -14 \\ 13 & -6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18/7 & -4/7 & -1 \\ 32/7 & -11/7 & -2 \\ 13/7 & -6/7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 18/7 & -4/7 & -1 \\ 32/7 & -11/7 & -2 \\ 13/7 & -6/7 & -1 \end{pmatrix}$.

4.13.1. Найти обратную для матрицы A размера 2×2 (т.е. для квадратной матрицы второго порядка) по формуле (3)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

4.13.2. Найти обратную матрицу для матрицы A с помощью элементарных преобразований над матрицей $(A|E)$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4.13.3. Найти A^{-1} с помощью формулы (4), т. е. с помощью формулы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, \widetilde{A}^T,$$

для матриц из предыдущей задачи.

4.13.4. Найти обратную к матрице $\begin{pmatrix} 25 & 5 & 3 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.13.5. Найти обратную к матрице $\begin{pmatrix} 11 & 3 & 2 \\ 14 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.13.6. Найти обратную к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 13 & 21 \\ 2 & 9 & 17 \end{pmatrix}$

4.13.7. Найти обратную к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 11 & 10 \\ 5 & 8 & 25 \end{pmatrix}$

4.13.8. Найти обратную к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.13.9. Найти обратную к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.14. Матричные уравнения

В следующих задачах требуется решить матричное уравенение.

4.14.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$.

4.14.2. $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$.

4.14.3. $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

4.14.4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

4.14.5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

4.14.6. $A\,A^T\,X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4.14.7. $A\,A^T\,X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4.14.8. $A\,A^T\,X = B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и

a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Векторные пространства

5.15. Линейная зависимость векторов

5.15.1. Исследовать на линейную зависимость векторы

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\10\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\2\\4\end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix}4\\-5\\2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-3\\3\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\5\\6\end{pmatrix}.$

5.15.2. Исследовать векторы $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ на линейную зависимость. Если они линейно зависимы, найти для них две линейные комбинации, равные нулю.

5.15.3. При каком m данные векторы линейно независимы в $\mathbb{R}^2$:

a) $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix}m\\0\end{pmatrix};$

b) $\overrightarrow{a}_1 = (1, 2), \overrightarrow{a}_2 = (2, m);$

c) $\overrightarrow{a}_1 = (1, 2), \overrightarrow{a}_2 = (2, m), \overrightarrow{a}_3 = (3, m^2);$

5.15.4. Найти все значения параметра t, при которых следующие векторы линейно зависимы:

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\t\end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\6\end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\10\\11\\t\end{pmatrix};$

5.16. Выражение вектора в виде линейной комбинации других векторов

Пример. Представить вектор $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

Решение. Требуемое разложение имеет вид $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{b}$, то есть

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$$

Это равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + 4\lambda_2 = -1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде и решим методом Гаусса

$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-3\cdot(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -14 & -7 \end{array}\right)$$

откуда $-14\lambda_2 = -7, \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ и $\lambda_1 + \dfrac{5}{2} = 4, \lambda_1 = \dfrac{3}{2}$.

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$$

Ответ.

$$\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$$

Пример. Для каких значений параметра m вектор $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}m\\5\\8\end{pmatrix}$ представляется в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{a}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$?

Решение. Нам следует выяснить, при каких значениях параметра m векторное уравнение

$$\lambda_1\overrightarrow{a}_1+\lambda_2\overrightarrow{a}_2+\lambda_3\overrightarrow{a}_3=\overrightarrow{b}$$

имеет решение. Запишем матрицу этой системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&m\\2&-1&0&5\\3&-2&-1&8\end{array}\right)\xrightarrow{(3)-(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&m\\2&-1&0&5\\1&-1&-1&3\end{array}\right)\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&3\\2&-1&0&5\\1&1&3&m\end{array}\right)\to\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-2\cdot(1)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&3\\0&1&2&-1\\0&2&4&m-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)-2\cdot(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&3\\0&1&2&-1\\0&0&0&m-1\end{array}\right)$$

По теореме Кронекера—Капелли рассматриваемая система имеет решение тогда и только тогда, когда $m=1$.

Ответ. Вектор $\overrightarrow{b}$ можно выразить в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, $\overrightarrow{a}_3$ только при $m=1$.

5.16.1. Выражается ли вектор $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

5.16.2. При каких значениях параметра m вектор $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ выражается в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$?

5.16.3. При каких значения параметра m вектор $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ m \end{pmatrix}$ выражается в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$?

5.16.4. Для векторов $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ выяснить, при каком значении параметра m вектор $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 7 \end{pmatrix}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$ и $\overrightarrow{a}_3$.

5.16.5. Можно ли представить в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ вектор $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

5.16.6. Даны два вектора $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. При каких m вектор $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ выражается в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a}_1$ и $\overrightarrow{a}_2$? Тот же вопрос про вектор $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

5.17. Базис, координаты вектора в базисе

5.17.1. Проверить, что векторы $\overrightarrow{e}_1$ и $\overrightarrow{e}_2$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$ и найти координаты вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ в этом базисе, если

a) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

c) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

d) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$;

e) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.17.2. Проверить, что векторы $\overrightarrow{e}_1$ и $\overrightarrow{e}_2$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$. Для всех m найти координаты вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ в этом базисе.

a) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.17.3. Проверить, что векторы $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^2$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

5.17.4. Проверить, что векторы $\overrightarrow{e}_1 = (1, 2)$, $\overrightarrow{e}_2 = (-2, 3)$ образуют базис $\mathbb{R}^2$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{v} = (-5, 11)$ в этом базисе.

5.17.5. Проверить, что векторы $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{a}$ в этом базисе.

a) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$;

c) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix}$;

d) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$.

5.17.6. Проверить, что векторы $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{a}$ в этом базисе.

a) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5.17.7. В пространстве $\mathbb{R}^2$ выбраны два вектора $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$, показанные на рисунке 2:

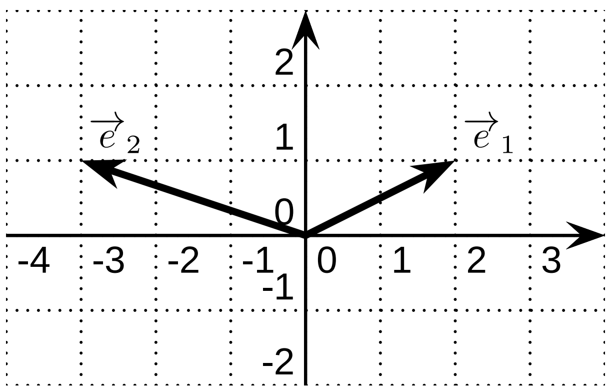


Рис. 2.

Проверить, что они образуют базис $\mathbb{R}^2$ и найти в этом базисе координаты вектора $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5.17.8. На рисунке 3 показаны векторы $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{b}$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{b}$ в базисе, составленном из векторов $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$.

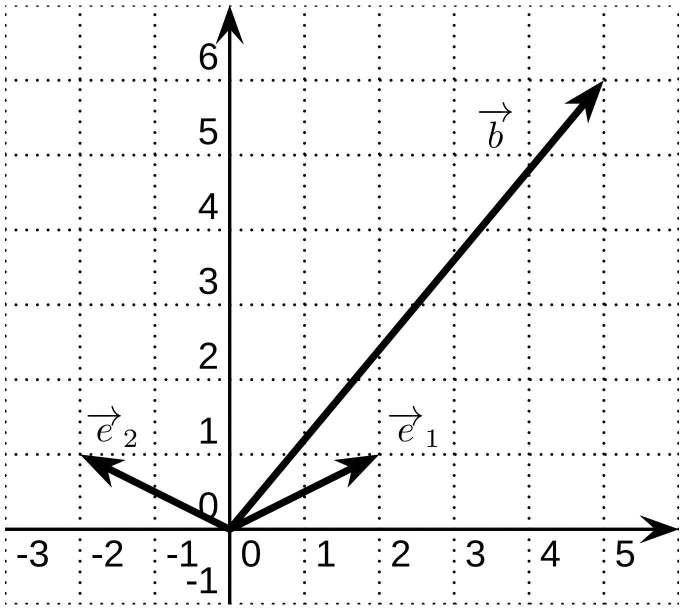


Рис. 3.

5.17.9. На рисунке 4 показаны векторы $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{b}$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{b}$ в базисе, составленном из векторов $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$.

5.17.10. В пространстве $\mathbb{R}^2$ выбраны векторы

a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}m\\7\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}m\\8\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}2-m\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2-m\end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix}1-m\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1-m\end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix}2-m\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1-2m\end{pmatrix}$.

При каком m эти векторы образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^2$?

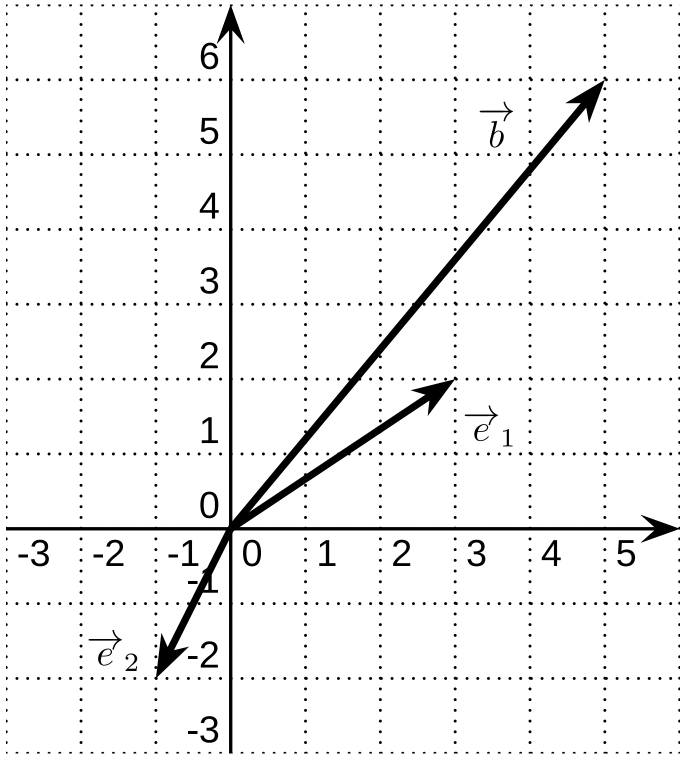


Рис. 4.

5.17.11. В пространстве $\mathbb{R}^3$ выбраны векторы

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7\\8\\t\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7\\8\\t\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\5\\t\end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}$;

При каком значении параметра t они образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$:

5.17.12. В $\mathbb{R}^2$ выбраны векторы

a) $\overrightarrow{a}_1 = (1, m)$;

b) $\overrightarrow{a}_1 = (1, 2)$, $\overrightarrow{a}_2 = (2, m)$;

c) $\overrightarrow{a}_1 = (1, 2)$, $\overrightarrow{a}_2 = (2, 4)$, $\overrightarrow{a}_3 = (3, m^3)$.

Найти все значения m, при которых они образуют базис в $\mathbb{R}^2$.

5.18. Ранг и база набора векторов

5.18.1. Найти ранг и базу набора векторов

a) $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.18.2. Найти все возможные базы набора векторов

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5.19. Дополнение набора векторов до базиса

5.19.1. Дополнить каким-либо образом набор векторов до базиса соответствующего пространства

a) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

c) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

d) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

5.19.2. Дополнить каким-либо образом набор векторов до базиса соответствующего пространства

a) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

b) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$;

c) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$;

d) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$;

e) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$;

f) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$;

g) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$;

h) $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

5.19.3. Выяснить, можно ли дополнить до базиса пространства наборы векторов

a)

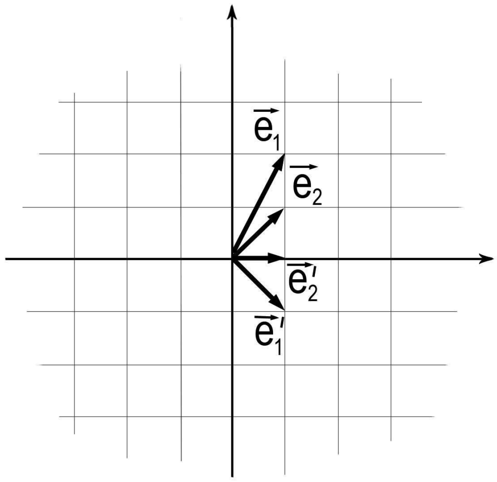
$$\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix};$$

b)

$$\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{e}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

5.20. Матрица перехода

Пример. На рисунке изображены векторы $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}'_1$, $\overrightarrow{e}'_2$. Найти матрицу перехода от $(\overrightarrow{e})$ к $(\overrightarrow{e}')$ и матрицу перехода от $(\overrightarrow{e}')$ к $(\overrightarrow{e})$.



Решение. Пусть C – матрица перехода от $(\overrightarrow{e})$ к $(\overrightarrow{e}')$, тогда $(e') = (e)C$, где (e') и (e) – это матрицы со столбцами, составленными из координат векторов $\overrightarrow{e}'_1$, $\overrightarrow{e}'_2$ и $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ соответственно, а C^{-1} будет матрицей перехода от $(\overrightarrow{e}')$ к $(\overrightarrow{e})$. По рисунку определяем их координаты $\overrightarrow{e}'_1 = (1;-1)$, $\overrightarrow{e}'_2 = (1;0)$ и $\overrightarrow{e}_1 = (1;2)$, $\overrightarrow{e}_2 = (1;1)$ и, значит, $(e') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $(e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (e)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Теперь вычисляем матрицу перехода

$$C = (e)^{-1}(e') = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица перехода равна

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример. Дан базис $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Матрица перехода от базиса $(\overrightarrow{e})$ к базису $(\overrightarrow{e}')$ известна:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти векторы $\overrightarrow{e}'_1$, $\overrightarrow{e}'_2$ и $\overrightarrow{e}'_3$.

Решение. В силу равенства $(e') = (e)C$, где (e') и (e) – это матрицы со столбцами, составленными из координат векторов $\overrightarrow{e}'_1$, $\overrightarrow{e}'_2$, $\overrightarrow{e}'_3$ и $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}_3$ соответственно, имеем

$$(e') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ. $\overrightarrow{e}'_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}'_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.20.1. В $\mathbb{R}^2$ выбраны два базиса: $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{e}'_1 = 2\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}'_2 = \overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2$. Разложить вектор $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2$ в базисе $(\overrightarrow{e}')$.

5.20.2. Матрица перехода от $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ к $(\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2)$ равна $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Найти координаты векторов ($\overrightarrow{e}_1$ и $\overrightarrow{e}_2$) в базисе ($\overrightarrow{e}'_1$, $\overrightarrow{e}'_2$) и координаты векторов ($\overrightarrow{e}'_1$ и $\overrightarrow{e}'_2$) в базисе ($\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$).

5.20.3. Найти матрицу перехода от базиса $(\overrightarrow{e})$ к базису $(\overrightarrow{e}')$, если известно, что $\overrightarrow{e}'_1 = \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3$, $\overrightarrow{e}'_2 = \overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}'_3 = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2$.

5.20.4. Даны два базиса:

$$\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

и

$$\overrightarrow{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы перехода от $(\overrightarrow{e})$ к $(\overrightarrow{e}')$ и наоборот.

5.20.5. Дан базис

$$\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Известна матрица перехода от $(\overrightarrow{e})$ к $(\overrightarrow{e}')$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти векторы $\overrightarrow{e}'_1$, $\overrightarrow{e}'_2$ и $\overrightarrow{e}'_3$.

5.20.6. В пространстве $\mathbb{R}^2$ выбраны базисы $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$, показанные на рисунке 5:

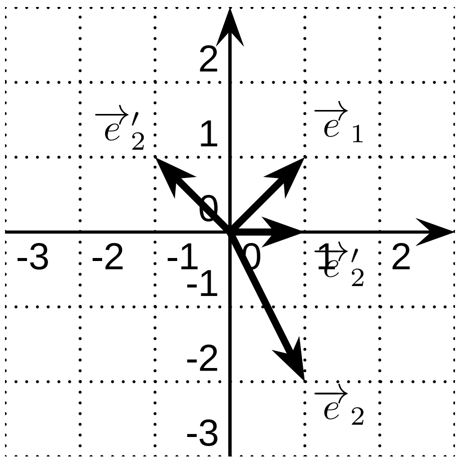


Рис. 5.

Найти матрицу перехода C от базиса $(\overrightarrow{e})$ к базису $(\overrightarrow{e}')$.

5.20.7. В пространстве $\mathbb{R}^2$ выбраны базисы $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$, показанные на рисунке 6:

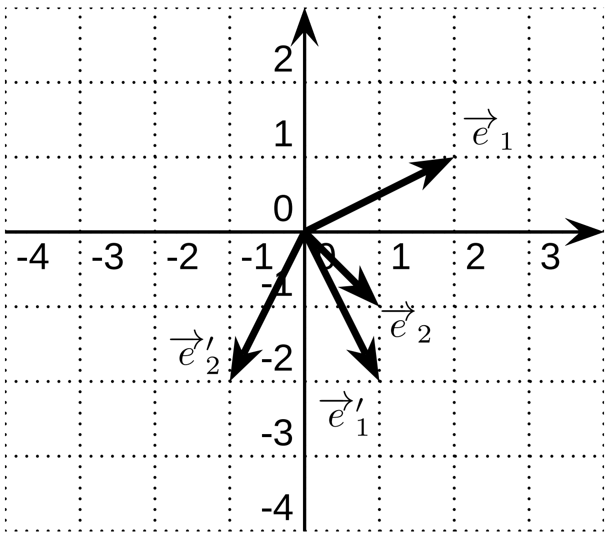


Рис. 6.

Найти матрицу перехода C от базиса $(\overrightarrow{e})$ к базису $(\overrightarrow{e}')$.

5.20.8. В пространстве $\mathbb{R}^2$ выбраны базисы $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$, показанные на рисунке 7:

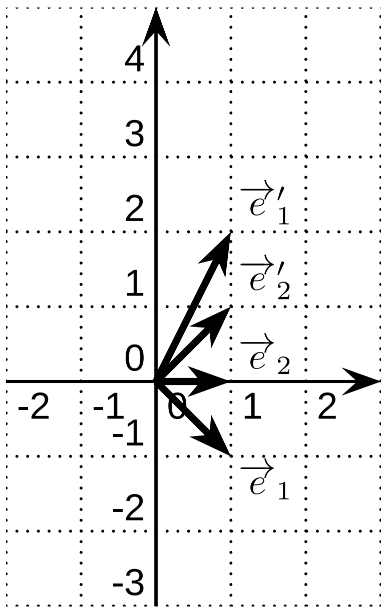


Рис. 7.

Найти матрицы перехода от базиса $(\overrightarrow{e})$ к базису $(\overrightarrow{e}')$ и наоборот.

Также задан вектор $\overrightarrow{v}$: его координаты в базисе $(\overrightarrow{e})$ равны $(3, -1)$. Найти его координаты в базисе $(\overrightarrow{e}')$.

5.20.9. В пространстве $\mathbb{R}^2$ выбраны базисы $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$, показанные на рисунке 8:

Найти матрицы перехода от базиса $(\overrightarrow{e})$ к базису $(\overrightarrow{e}')$ и наоборот.

Также задан вектор $\overrightarrow{v}$: его координаты в базисе $(\overrightarrow{e})$ равны $(-1, 2)$. Найти его координаты в базисе $(\overrightarrow{e}')$.

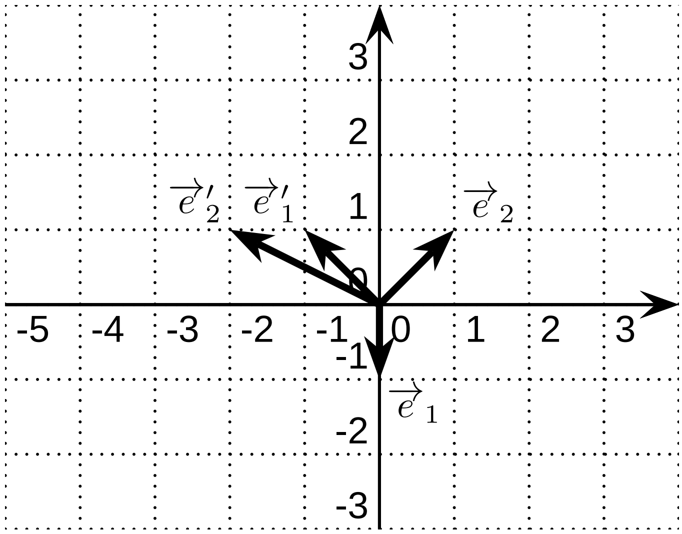


Рис. 8.

5.20.10. В пространстве $\mathbb{R}^2$ выбраны базисы $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$, показанные на рисунке 9:

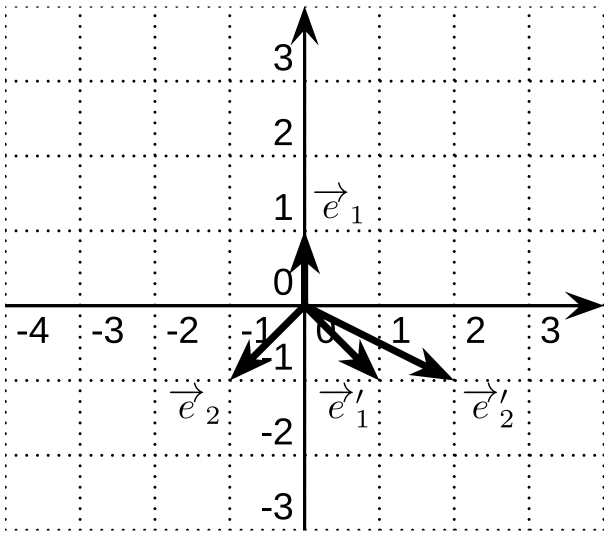


Рис. 9.

Найти матрицы перехода от базиса $(\overrightarrow{e})$ к базису $(\overrightarrow{e}')$ и наоборот.

Также задан вектор $\overrightarrow{v}$: его координаты в базисе $(\overrightarrow{e}')$ равны $(4, -3)$. Найти его координаты в базисе $(\overrightarrow{e})$.

6. Линейное программирование

6.21. Линейное программирование, графический метод

6.21.1. При ограничениях $x \geq 0, y \geq 0, x \leq 3, y \leq 2$ найти

a) максимум функции $x + y$;

b) максимум функции $x - y$;

c) максимум функции $y - 2x$.

6.21.2. При ограничениях $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 6, x + 2y \leq 6$ найти

a) максимум функции $x + y$;

b) максимум функции $x - y$;

c) максимум функции $y - 2x$.

6.21.3. При ограничениях $x \geq 0, y \geq 0, 3x + y \leq 9, x + 2y \leq 8$ найти

a) максимум функции $x + y$;

b) максимум функции $x - y$;

c) максимум функции $y - 2x$.

6.21.4. При ограничениях $x \geq 0, y \geq 0, 3x + y \leq 9, x + 2y \leq 8$ найти

a) максимум функции $x + y$;

b) максимум функции $x - y$;

c) максимум функции $y - 2x$.

6.21.5. При ограничениях $-x + 2y \geq 0, 2x - y \geq 0, x + y \leq 3$ найти

a) максимум и минимум функции $x + y$;

b) максимум и минимум функции $x - 4y$;

c) максимум и минимум функции $y - 4x$.

6.21.6. При ограничениях $2x - y \geq 0, x + 2y \leq 5, -x + y + 2 \geq 0$ найти

a) максимум и минимум функции $x + y$;

b) максимум и минимум функции $x - 4y$;

c) максимум и минимум функции $4x - y$.

7. Знакомство с кривыми второго порядка

7.22. Эллипс, гипербола, парабола

7.22.1. Задать уравнением эллипс, показанный на рисунке 10.

7.22.2. Задать уравнением эллипс, показанный на рисунке 11.

7.22.3. Задать уравнением эллипс, показанный на рисунке 12.

7.22.4. Задать уравнением эллипс, показанный на рисунке 13.

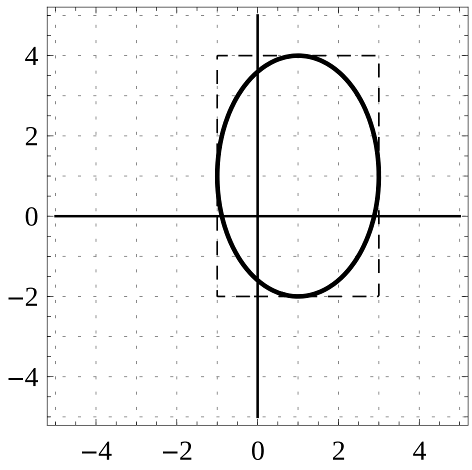


Рис. 10.

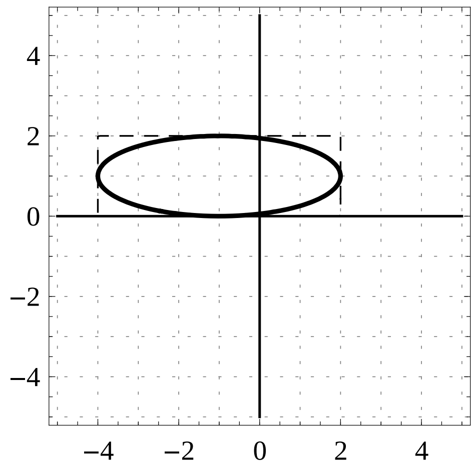


Рис. 11.

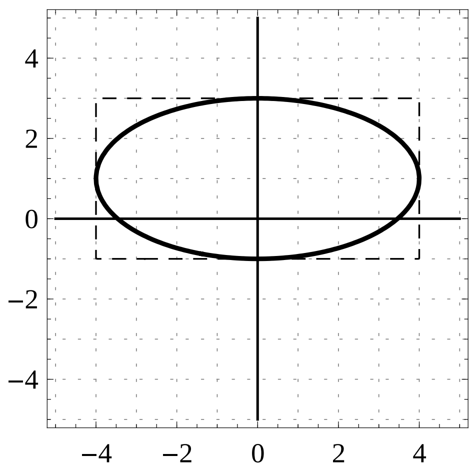


Рис. 12.

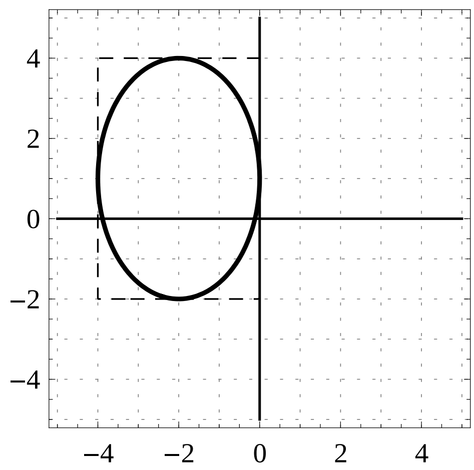


Рис. 13.

7.22.5. Задать уравнением гиперболу, показанную на рисунке 14.

7.22.6. Задать уравнением гиперболу, показанную на рисунке 15.

7.22.7. Задать уравнением гиперболу, показанную на рисунке 16.

7.22.8. Задать уравнением гиперболу, показанную на рисунке 17.

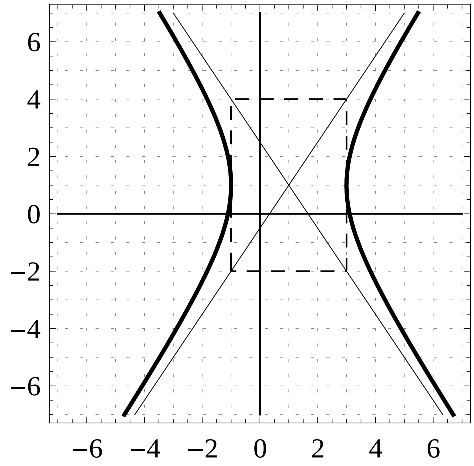


Рис. 14.

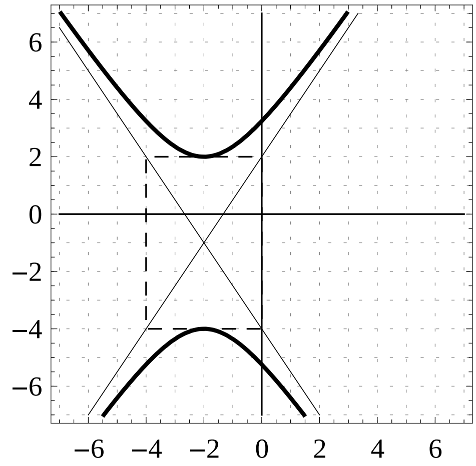


Рис. 15.

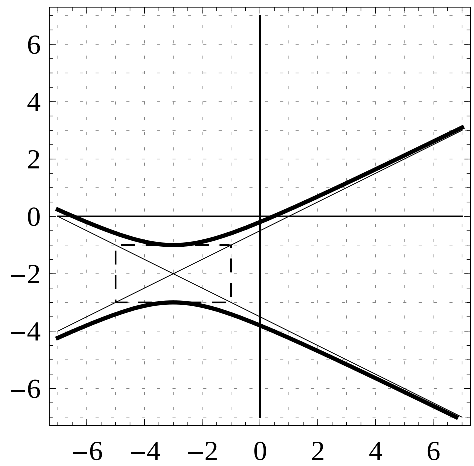


Рис. 16.

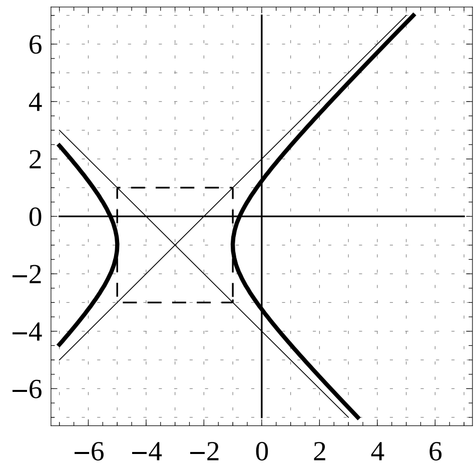


Рис. 17.

7.22.9. Задать уравнением параболу, показанную на рисунке 18.

7.22.10. Задать уравнением параболу, показанную на рисунке 19.

7.22.11. Задать уравнением параболу, показанную на рисунке 20.

7.22.12. Задать уравнением параболу, показанную на рисунке 21.

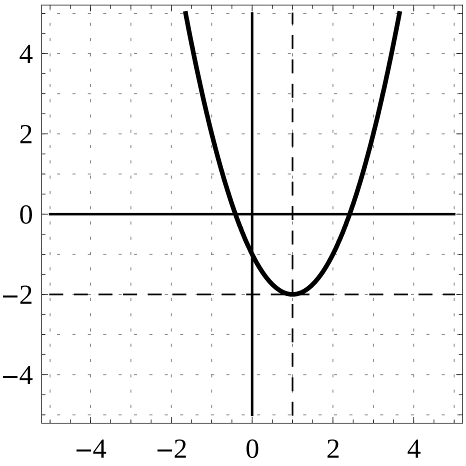


Рис. 18.

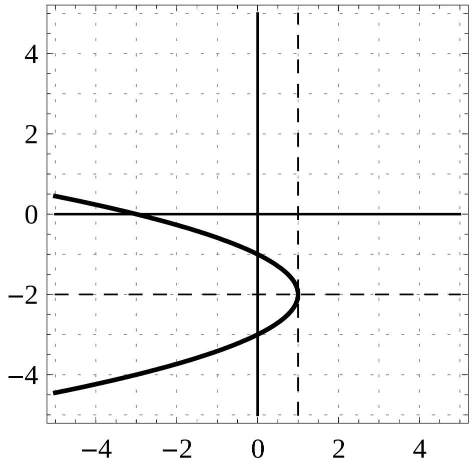


Рис. 19.

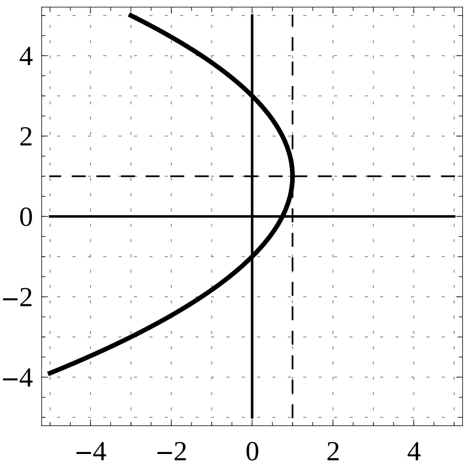


Рис. 20.

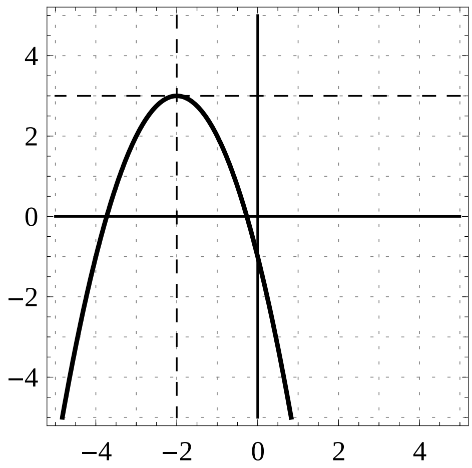


Рис. 21.

В следующем блоке задач требуется привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и сделать соответствующий рисунок.

7.22.13. $4x^2 - 8x + y^2 - 2y + 1 = 0.$

7.22.14. $x^2 + 9y^2 + 2x - 18y + 1 = 0.$

7.22.15. $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0.$

7.22.16. $x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 4 = 0.$

7.22.17. $x^2 - 2x - 4y^2 + 8y - 7 = 0.$

7.22.18. $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 1.$

7.22.19. $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0.$

7.22.20. $-4x^2 + 16x + 9y^2 - 18y - 43 = 0.$

7.22.21. $-2x^2 + 4x + y - 4 = 0.$

7.22.22. $-x^2 - 6x + y - 8 = 0.$

7.22.23. $x^2 - 4x + y + 7 = 0.$

7.22.24. $x + y^2 - 6y + 7 = 0.$

7.22.25. $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0.$

7.22.26. $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0.$

7.22.27. $x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 1 = 0.$

7.22.28. $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y - 19 = 0.$

7.22.29. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка, указать центр, полуоси, асимптоты и т. п. (если есть):

a) $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0;$

b) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0;$

c) $x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 1 = 0.$

7.22.30. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка, указать центр, полуоси, асимптоты и т. п. (если есть):

a) $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y - 19 = 0$;
b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - 7 = 0$;
c) $-4x^2 + y^2 + 24x - 2y - 39 = 0$.

7.23. Кривые второго порядка и касательные

7.23.1. Найти уравнения касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{32} + \dfrac{y^2}{18} = 1$, проходящих через точку $(12, -3)$.

7.23.2. Найти уравнения касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8} = 1$, проходящих через точку
a) $(-6, 0)$;
b) $(2, 7\sqrt{7})$;
c) $(-4, -2\sqrt{2}/3)$;
d) $(3, -3)$.

7.23.3. Найти уравнения касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$, параллельных прямой $3x - y - 17 = 0$.

7.23.4. Найти уравнения касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$, перпендикулярных прямой $2x + 5y + 11 = 0$.

7.23.5. Найти уравнения касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{36} = 1$, проходящих через точку
a) $(-2, -2)$;
b) $(1, 4)$;
c) $(4, \sqrt{3})$;
d) $(4, 1)$;
e) $(8, 4)$;
f) $(0, 0)$.

7.23.6. Найти уравнения касательных к параболе $y^2 = 16x$, проходящих через точку

a) $(1, -2)$;

b) $(1, 4)$;

c) $(1, 5)$.

7.23.7. Найти уравнения касательных к кривой второго порядка $2x^2 + 7xy + 6y^2 + 3x + 5y - 26 = 0$, проходящих через точку

a) $(1, 1)$;

b) $(-8, 5)$;

c) $(-7, 6)$.

7.23.8. Дан эллипс $4x^2 - 8x + y^2 - 8y = 0$. Найти уравнения касательных к нему,

a) проходящих через точку $(4, 2)$;

b) перпендикулярных прямой $x - 4y + 6 = 0$.

7.23.9. Дан эллипс $4x^2 - 16x + y^2 + 4y = 0$. Найти уравнения касательных к нему,

a) проходящих через точку $(3, 4)$;

b) перпендикулярных прямой $x - 4y + 9 = 0$.

7.23.10. Дан эллипс $4x^2 + 16x + y^2 + 2y = 0$. Найти уравнения касательных к нему,

a) проходящих через точку $(-3, 4)$;

b) перпендикулярных прямой $x + 4y - 3 = 0$.

7.23.11. Дан эллипс $4x^2 + 16x + y^2 + 4y = 0$. Найти уравнения касательных к нему,

a) проходящих через точку $(1, 0)$;

b) перпендикулярных прямой $x - 4y + 3 = 0$.

В следующих задачах найти уравнения касательных к данной кривой второго порядка, проходящих через точку A, и сделать соответствующий рисунок.

7.23.12. Эллипс $x^2 - 4x + 4y^2 - 12 = 0$, точка $A(0, -1)$.

7.23.13. Эллипс $2x^2 - 4x + 9y^2 + 18y - 4 = 0$, точка $A(0, 0)$.

7.23.14. Эллипс $x^2 - 6x + 4y^2 - 8y + 5 = 0$, точка $A(1, 2)$.

7.23.15. Эллипс $x^2 - 4x + 4y^2 - 8y + 3 = 0$, точка $A(1, 2)$.

7.23.16. Гипербола $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$, точка $A(2, 1)$.

7.23.17. Гипербола $-\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, точка $A(1, 3)$.

7.23.18. Гипербола $-x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, точка $A(3, -2)$.

7.23.19. Гипербола $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$, точка $A(4, 2)$.

7.23.20. Парабола $y^2 = 16x$, точка $A(1, -2)$.

7.23.21. Парабола $2y = x^2$, точка $A(2, 4)$.

7.23.22. Парабола $y^2 = 16x$, точка $A(1, 4)$.

7.23.23. Парабола $y^2 = 16x$, точка $A(1, 5)$.

В следующих задачах найти уравнения касательных к эллипсу, перпендикулярных указанной прямой, и сделать соответствующий рисунок.

7.23.24. Эллипс $x^2+6x+9y^2-36y+27 = 0$, прямая $-3x+y+2 = 0$.

7.23.25. Эллипс $4x^2+8x+y^2-8y+12 = 0$, прямая $x-2y-123 = 0$.

7.23.26. Эллипс $4x^2 - 8x + y^2 - 12y + 20$, прямая $x + y = 13$.

7.23.27. Эллипс $4x^2 - 4x + y^2 - 6y + 5$, прямая $x + y = -7$.

7.23.28. Эллипс $x^2 - 8x + 4y^2 - 8y$, прямая $x - y = 21$.

7.23.29. Эллипс $x^2 - 12x + 9y^2 - 18y$, прямая $3x - 2y + 19 = 0$.

В следующих задачах найти уравнение эллипса, если известны его центр O и две его вершины A и B.

7.23.30. $O(1, 2)$, $A(-1, 1)$, $B(3, 2)$.

7.23.31. $O(1, 2)$, $A(1, 1)$, $B(3, 2)$.

7.23.32. $O(0,2)$, $A(-1,1)$, $B(4,2)$.

7.23.33. $O(2,1)$, $A(0,0)$, $B(3,3)$.

7.23.34. $O(1,2)$, $A(0,0)$, $B(4,2)$.

7.23.35. $O(3,1)$, $A(1,0)$, $B(-1,1)$.

8. Ответы

1.1.1. $|AB| = \sqrt{5}$, $|BC| = \sqrt{5}$, $|CD| = \sqrt{10}$, $|AD| = 4$, $|AC| = 3\sqrt{2}$, $|BD| = \sqrt{13}$.

1.1.2. $|AE| = 5$, $|BE| = 5$, $|BD| = 5$, $|CB| = \sqrt{5}$, $|EC| = \sqrt{10}$, $|DC| = 2\sqrt{2}$.

1.1.6. $y = -2x - 1$, $y = \dfrac{1}{2}x - 2$, $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$

1.2.1. $(-10, 6)$.

1.2.2. $x = 2$, $y = 2$.

1.2.3. Прямая $x - y - 1 = 0$, иначе говоря, x — любое число, а $y = x - 1$.

1.2.4. Решений нет.

1.2.5. См. рис. 22.

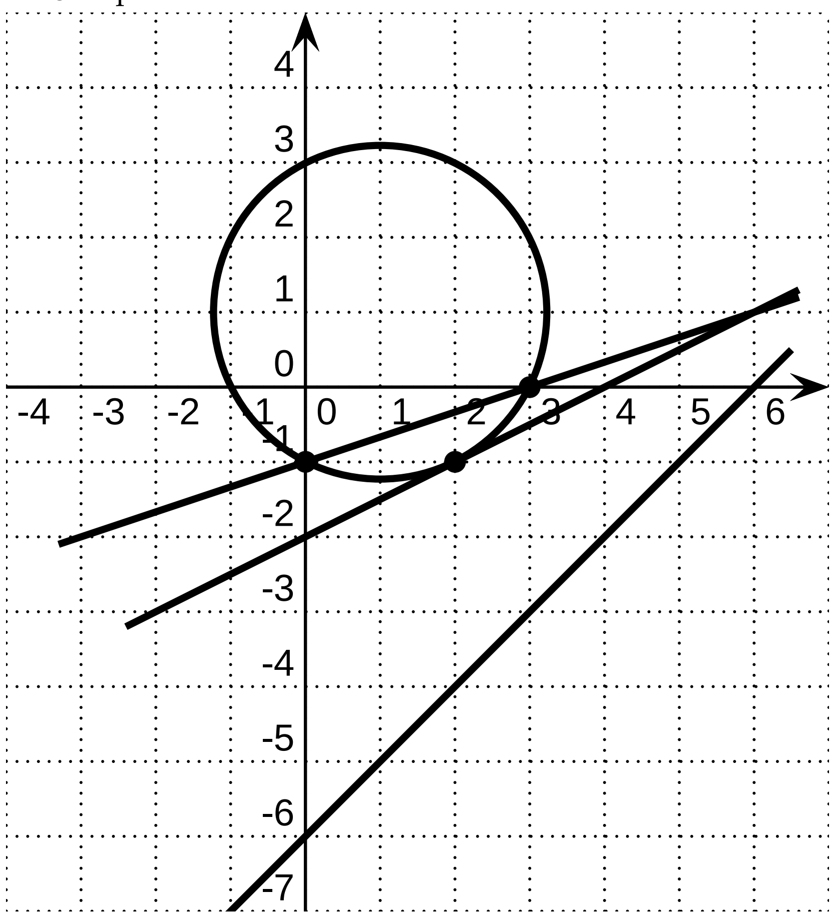


Рис. 22. Ответ к задаче **1.2.5.**

1.2.7. См. рис. 23.

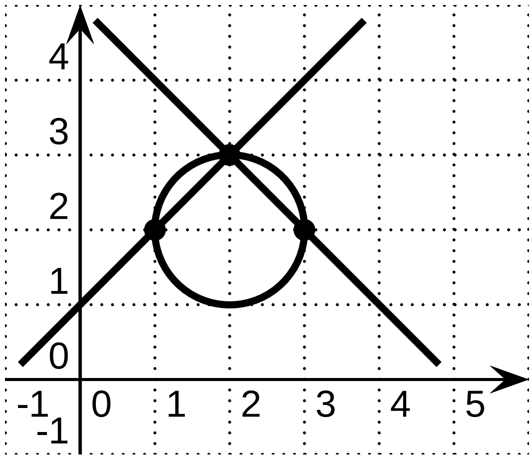


Рис. 23. Ответ к задаче **1.2.7.**

1.2.8. См. рис. 24.

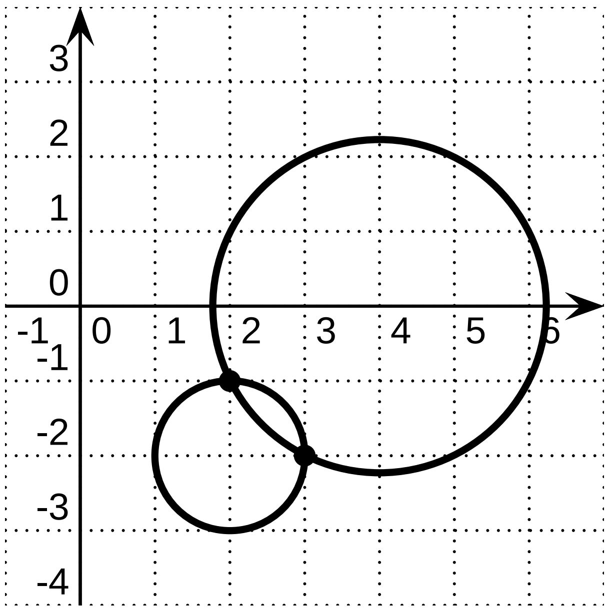


Рис. 24. Ответ к задаче **1.2.8.**

1.2.9. $(0, 0)$ и $(0, 2)$.

1.2.6. См. рис. 25.

1.2.12. См. рис. 26.

1.2.13. $y = 2x - 5$ и $y = -x/2$

1.2.14. $y = 2x + 5$ и $y = x/2 - 1$

1.2.15. $y = 2x - 5$

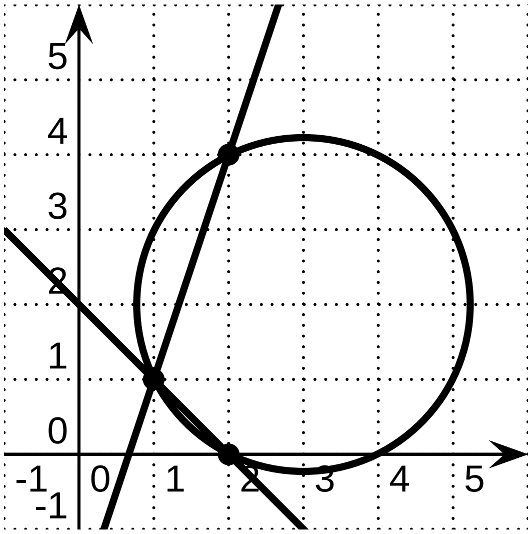


Рис. 25. Ответ к задаче **1.2.6.**

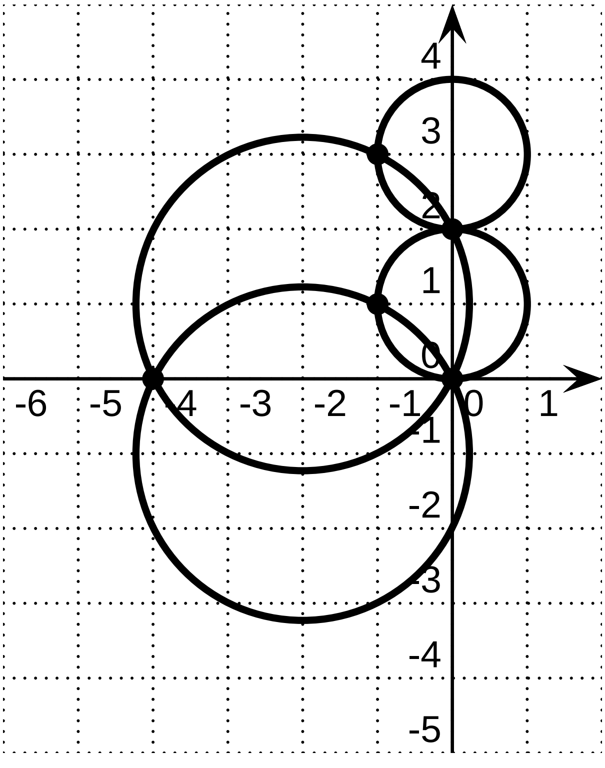


Рис. 26. Ответ к задаче **1.2.12.**

1.2.16. касательных нет

1.2.17. $y = 2x + 2$ и $y = -2x - 8$

1.2.18. $y = 2x + 2$ и $y = -2x - 8$

1.2.19. $y = x + 1$ и $y = x - 3$

1.2.20. $y = -x + 1$ и $y = -x + 5$

1.2.21. $y = -x$ и $y = -x + 4$.

1.2.22. $y = x + 2$ и $y = x - 2$

1.2.23. $y = 1$ и $x = 1$.

2.3.1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3.4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3.5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3.6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3.7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3.8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3.9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3.10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3.11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.17. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.18. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.19. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.21. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.22. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.23. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.24. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.25. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.26. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.27. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.28. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 12 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.

2.3.29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3.30. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3.31. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3.32. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.33. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.34. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.35. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4.1. $x_1 = 1, x_2 = -2.$

2.4.2. $x_1 = 3, x_2 = 4.$

2.4.3. $x_1 = 2C - 5, x_2 = C$, C — любое.

2.4.4. $x_1 = 5C - 7, x_2 = C$, C — любое.

2.4.5. $x_1 = C, x_2 = 2$, C — любое.

2.4.6. $x_1 = C, x_2 = -2$, C — любое.

2.4.7. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$

2.4.8. $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3.$

2.4.9. $x_1 = \frac{3x_3}{5} + \frac{11}{5}, x_2 = C, x_3 = C$, C — любое.

2.4.10. $x_1 = 3 - 2C, x_2 = C - 4, x_3 = C$, C — любое.

2.4.11. $x_1 = 3 - 3C, x_2 = C, x_3 = 2$, C — любое.

2.4.12. $x_1 = 3C - 2, x_2 = C, x_3 = 2$, C — любое.

2.4.13. $x_1 = 3C_1 - C_2 - 2$, $x_2 = C_1$, $x_3 = C_2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.14. $x_1 = -4C_1 - 5C_2 - 3$, $x_2 = C_1$, $x_3 = C_2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.15. $x_1 = C, x_2 = -1, x_3 = 1$, C — любое.

2.4.16. $x_1 = C, x_2 = -1, x_3 = 1$, C — любое.

2.4.17. $x_1 = C_1, x_2 = \frac{3C_2}{4} - \frac{7}{4}, x_3 = C_2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.18. $x_1 = C_1, x_2 = 1 - 2C_2, x_3 = C_2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.19. $x_1 = 2C, x_2 = C + 1, x_3 = 2C - 1, x_4 = C$, C — любое.

2.4.20. $x_1 = 1 - 2C, x_2 = 5C + 1, x_3 = 2C - 1, x_4 = C$, C — любое.

2.4.21. $x_1 = 1 - C, x_2 = -1, x_3 = C, x_4 = 0$, C — любое.

2.4.22. $x_1 = 1 - 3C, x_2 = -1, x_3 = C, x_4 = 2$, C — любое.

2.4.23. $x_1 = 3C_1 - 3C_2 + 4, x_2 = 2C_1 - C_2 + 1, x_3 = C_1, x_4 = C_2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.24. $x_1 = 4C_1 - 3, x_2 = 2C_1 - C_2 + 1, x_3 = C_1, x_4 = C_2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.25. $x_1 = 2C_1 + 2C_2, x_2 = C_1, x_3 = 1, x_4 = C_2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.26. $x_1 = 3C_1 + \frac{5C_2}{2} + \frac{1}{2}, x_2 = C_1, x_3 = \frac{5}{2} - \frac{C_2}{2}, x_4 = C_2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.27. $x_1 = -C_1 + 2C_2 - 6, x_2 = C_1, x_3 = 1, x_4 = C_2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.28. $x_1 = -2C_1 - 4C_2 + 2, x_2 = C_1, x_3 = -2, x_4 = C_2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.29. $x_1 = C_1, x_2 = C_2 + 6, x_3 = 2C_2 + 4, x_4 = C_2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.30. $x_1 = C_1, x_2 = 2 - C_2, x_3 = 2C_2 + 4, x_4 = C_2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.31. $x_1 = C_1, x_2 = 2C_2 + 4, x_3 = C_2, x_4 = -2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.32. $x_1 = C_1, x_2 = 3C_2 - 5, x_3 = C_2, x_4 = -2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.33. $x_1 = C_1, x_2 = 2C_2 - 3C_3 - 14, x_3 = C_2, x_4 = C_3$, где C_1, C_2, C_3 — любые.

2.4.34. $x_1 = C_1, x_2 = 3C_2 - C_3 - 11, x_3 = C_2, x_4 = C_3$, где C_1, C_2, C_3 — любые.

2.4.35. $x_1 = C_1, x_2 = C_2, x_3 = 1, x_4 = -2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.36. $x_1 = C_1, x_2 = C_2, x_3 = 1, x_4 = -2$, где C_1, C_2 — любые.

2.4.37. $x_1 = 1, x_2 = -2$.

2.4.38. $x_1 = 3, x_2 = -2$.

2.4.39. $x_1 = 3, x_2 = -5$.

2.4.40. $x_1 = 7, x_2 = -1$.

2.4.41. $x_1 = 5, x_2 = -2$.

2.4.42. $x_1 = -1, x_2 = -2$.

2.4.43. $x_1 = -1, x_2 = 2$.

2.4.44. $x_1 = 3 - C, x_2 = C$.

2.4.45. $x_1 = (11 - C)/2, x_2 = C$.

2.4.46. $x_1 = (C - 2)/2, x_2 = C$.

2.4.47. $x_1 = (1 - C)/2, x_2 = C$.

2.4.48. Нет решений.

2.4.49. Нет решений.

2.4.50. $x_1 = 3, x_2 = -1$.

2.4.51. $x_1 = 1, x_2 = -1$.

2.4.52. $x_1 = 2, x_2 = -1$.

2.4.53. $x_1 = 2, x_2 = -3$.

2.4.54. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1.$

2.4.55. $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = -1.$

2.4.56. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0.$

2.4.57. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1.$

2.4.58. $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1.$

2.4.59. $x_1 = 1 - C, x_2 = 2C - 1, x_3 = C.$

2.4.60. $x_1 = -C_1 + C_2 + 3, x_2 = C_2, x_3 = C_1.$

2.4.61. $x_1 = -3C_1 + C_2 - 3, x_2 = C_2, x_3 = C_1.$

2.4.62. Нет решений.

2.4.63. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$

2.4.64. $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1.$

2.4.65. $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -1.$

2.4.66. $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1.$

2.4.67. $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -1, x_4 = 1.$

2.4.68. $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = -1, x_4 = 1.$

2.4.69. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = 1.$

2.4.70. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 1.$

2.4.71. $x_1 = C, x_2 = 3 - C, x_3 = C + 1, x_4 = C.$

2.4.72. $x_1 = -5 + 2C_3 + C_2 - C_1, x_2 = C_3, x_3 = C_2 - C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_1.$

2.4.73. $x_1 = -2 + 3C_3 + C_2 - C_1, x_2 = C_3, x_3 = 5 + C_2 - C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_1.$

2.4.74. $x_1 = -7 + 3C_3 + C_2 - C_1, x_2 = C_3, x_3 = -3 + C_2 - C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_1.$

2.4.75. $x_1 = -10 + 3C_3 + C_2 - C_1, x_2 = C_3, x_3 = -5 + 2C_2 - C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_1.$

2.4.76. $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1.$

3.6.1. 1.

3.6.2. 2.

3.6.3. 3.

3.6.4. 4.

3.6.5. 5.

3.6.6. 6.

3.6.7. 1.

3.6.8. -5.

3.7.1. 1.

3.7.2. -8.

3.7.3. 1.

3.7.4. -1.

3.7.5. -2.

3.7.6. -3.

3.7.7. -6.

3.7.8. 4.

3.7.9. 10.

3.7.10. 6.

3.8.2. $1 - x^2$.

3.8.3. $2x - 2x^2$.

3.8.4. $-2x^2 - 1$.

3.8.5. $4x^2$.

3.8.6. -4.

3.9.1. 8.

3.9.2. 11.

3.9.3. -4.

3.9.4. -10.

3.9.5. $-abcd$.

3.9.6. $-abcd$.

3.9.7. $-xyzw$.

3.9.8. $-xyzw$.

3.9.9. $1 + a + b + c + d$.

3.9.10. $1 - a - b - c - d$.

4.12.1. $\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 22 & -5 \end{pmatrix}$

4.12.2. $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 28 \\ -5 & 42 \end{pmatrix}$

4.12.3. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 16 \\ 3 & 26 & 5 \end{pmatrix}$

4.12.4. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

4.12.5. a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; b) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4.12.6. a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4.12.7. a) $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; b) $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$, $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

4.12.8. a) $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$, $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$, $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

4.12.10. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.13.4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -6 & 13 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

4.13.5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4.13.6. $\begin{pmatrix} 32 & -23 & 19 \\ -9 & 7 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4.13.7. $\begin{pmatrix} -195 & 59 & -8 \\ 50 & -15 & 2 \\ 23 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

4.13.8. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.13.9. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4.14.1. $X = \begin{pmatrix} -11 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

4.14.2. $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{19}{2} \end{pmatrix}$

4.14.3. $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

4.14.4. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4.14.5. $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

4.14.6. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & 5/4 \end{pmatrix}$

4.14.7. $X = \begin{pmatrix} 1/8 & 5/8 \\ 5/8 & 9/8 \end{pmatrix}$

5.15.3. a) линейно независимы при $m \neq 0$; b) векторы линейно независимы при $m \neq 4$; c) векторы линейно зависимы при всех m.

5.15.4. a) линейно зависимы при $t = 6$, b) векторы линейно зависимы при всех t, c) векторы линейно зависимы при $t = 12$.

5.16.6. Вектор $\overrightarrow{b}$ для всех m представляется в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{a}_1$ и $\overrightarrow{a}_2$, вектор $\overrightarrow{c}$ представляется в виде такой линенейной комбинации только для $m \neq 2$.

5.17.3. Координаты вектора $\overrightarrow{v}$ в базисе $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ равны $(2, 1)$.

5.17.4. Координаты $\overrightarrow{v}$ в базисе $(\overrightarrow{e})$ равны $(1, 3)$.

5.17.7. Координаты $\overrightarrow{v}$ в базисе $(\overrightarrow{e})$ равны $(2, 1)$

5.17.8. $\overrightarrow{b} = \frac{17}{4}\overrightarrow{e}_1 + \frac{7}{4}\overrightarrow{e}_2$.

5.17.9. $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2$.

5.17.10. a) ни для каких; b) $m \neq 4$; c) $m \neq 1$ и $m \neq 3$; d) $m \neq -2$ и $m \neq 4$; e) $m \neq -1$ и $m \neq 1/2$.

5.17.11. a) не базис для любого t, b) базис при $t \neq 9$, c) не базис для любого t.

5.17.12. a) ни при каких; b) при $m \neq 2$; c) ни при каких.

5.20.6. $C = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

5.20.7. $C = \begin{pmatrix} -1/3 & -1 \\ 5/3 & 1 \end{pmatrix}$

6.21.1. a) максимум достигается в точке $(3, 2)$; b) максимум достигается в точке $(3, 0)$; c) максимум достигается в точке $(0, 2)$.

6.21.2. a) максимум достигается в точке $(2, 2)$; b) максимум достигается в точке $(3, 0)$; c) максимум достигается в точке $(0, 3)$.

7.22.1. $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$.

7.22.2. $\dfrac{(x+1)^2}{9} + (y-1)^2 = 1$.

7.22.3. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$.

7.22.4. $\dfrac{(x+2)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1.$

7.22.5. $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-1)}{9}^2 = 1.$

7.22.6. $-\dfrac{(x+2)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1.$

7.22.7. $-\dfrac{(x+3)^2}{4} + (y+2)^2 = 1.$

7.22.8. $\dfrac{(x+3)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1.$

7.22.9. $y - x^2 + 2x + 1 = 0.$

7.22.10. $y^2 + 4y + x + 3 = 0.$

7.22.11. $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0.$

7.22.12. $x^2 + 4x + y + 1 = 0.$

7.22.13. $(x-1)^2 + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1.$

7.22.14. $\dfrac{(x+1)^2}{9} + (y-1)^2 = 1.$

7.22.15. $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1.$

7.22.16. $\dfrac{(x-2)^2}{9} + (y+1)^2 = 1.$

7.22.17. $\dfrac{(x-1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1.$

7.22.18. $(x-1)^2 - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1.$

7.22.19. $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1.$

7.22.20. $-\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1.$

7.22.21. $y - 2 = -2(x-1)^2.$

7.22.22. $y + 1 = -(x+3)^2.$

7.22.23. $y + 3 = (x-2)^2.$

7.22.24. $(y-3)^2 = x - 2.$

7.22.25. $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1.$

7.22.26. $\dfrac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1.$

7.22.27. $\dfrac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1.$

7.22.28. $\dfrac{(x-1)^2}{4} - (y-2)^2 = 1.$

7.22.29. a) $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{1} = 1$; b) $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$; c) $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{1} = 1.$

7.22.30. a) $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{1} = 1$; b) $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{1} = 1$; c) $-\dfrac{(x-3)^2}{1} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1.$

7.23.1. $3x + 4y - 24 = 0$ и $3x - 28y - 120 = 0$.

7.23.3. $3x - y + 3\sqrt{5} = 0$ и $3x - y - 3\sqrt{5} = 0$.

7.23.4. $5x - 2y + 9 = 0$ и $5x - 2y - 9 = 0$.

7.23.5. a) $x + 2 = 0$ и $5x + 8y - 6 = 0$; b) $5x \pm 6y - 8 = 0$; c) $x - \sqrt{3}\,y - 1 = 0$; d) нет касательных; e) $17x - 30y - 16 = 0$; f) нет касательных.

7.23.6. a) нет касательных; b) $2x - y + 2 = 0$; c) $x - y + 4 = 0$, $4x - y + 1 = 0$.

7.23.7. a) $11x + 18y - 29 = 0$, $5x + 9y + 4 = 0$; b) $14x + 27y - 23 = 0$; c) нет касательных.

7.23.8. a) $x - y - 2 = 0$, $4x + y - 18 = 0$; b) $4x + y - 18 = 0$ и $4x + y - 8 = 0$.

7.23.9. a) $-x + y - 1 = 0$, $4x + y - 16 = 0$; b) $4x + y - 16 = 0$ и $4x + y + 4 = 0$.

7.23.10. a) $x + y - 1 = 0$, $4x - y + 16 = 0$; b) $4x - y - 4 = 0$ и $4x - y + 16 = 0$.

7.23.11. a) $-x + y + 1 = 0$, $4x + y - 4 = 0$; b) $4x + y + 16 = 0$ и $4x + y - 4 = 0$.

7.23.12. Искомых касательных не существует.

7.23.13. Искомых касательных не существует.

7.23.14. $-x + 2y - 3 = 0$.

7.23.15. $-x + 4y - 7 = 0$.

7.23.16. Искомых касательных не существует.

7.23.17. Искомых касательных не существует.

7.23.18. $6x + 5y - 8 = 0$ и $2 + y = 0$.

7.23.19. $5x - 6y - 8 = 0$.

7.23.20. Искомых касательных не существует.

7.23.21. Искомых касательных не существует.

7.23.22. $2x - y + 4 = 0$.

7.23.23. $x - y + 4 = 0$ и $4x - y + 1 = 0$.

7.23.24. $x + 3y + 3 = 0$ и $x + 3y - 9 = 0$.

7.23.25. $2x + y + 2 = 0$ и $2x + y - 6 = 0$.

7.23.26. $x - y + 10 = 0$ и $x + y = 0$.

7.23.27. $x - y + 5 = 0$ и $x + y = 0$.

7.23.28. $x + y - 10 = 0$ и $x + y = 0$.

7.23.29. $2x + 3y - 30$ и $2x + 3y = 0$.

7.23.30. Такого эллипса не существует.

7.23.31. $\dfrac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$.

7.23.32. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{16/15} = 1$.

7.23.33. $\dfrac{(x-2)^2}{5} + \dfrac{(y-1)^2}{5} = 1$.

7.23.34. $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{9/2} = 1$.

7.23.35. $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{4/3} = 1$.

Оглавление

Учебное издание

Ивин Евгений Александрович,
Попеленский Федор Юрьевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Первый семестр

Учебное пособие для вузов

Подписано в печать 20.02.2020 г.
Формат $60 \times 84/_{16}$. Печать цифровая.
Усл.печ.л. 5,23. Тираж 110 экз. Заказ № 55.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Вологодский научный центр Российской академии наук»
(ФГБУН ВолНЦ РАН)

Россия, 160014, г. Вологда, ул. Горького, 56а
Тел. (8172) 59-78-03, e-mail: common@vscc.ac.ru

ISBN 978-5-93299-460-3

9 785932 994603