Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Московская школа экономики
Кафедра эконометрики и математических методов экономики

Е. А. Ивин, Ф. Ю. Попеленский

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Учебное пособие для вузов

Вологда
ВолНЦ РАН
2021

УДК 512.6(075.8)
ББК 22.143я73
И25

Рецензент
Артамонов Н.В., к.ф.-м.н., заведующий кафедрой
математики, эконометрики и информационных технологий
МГИМО МИД России

Ивин, Е. А.
И25 Сборник задач по линейной алгебре. Второй семестр : учебное пособие для вузов / Е. А. Ивин, Ф. Ю. Попеленский ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московская школа экономики, Кафедра эконометрики и математических методов экономики. – Вологда : ВолНЦ РАН, 2021. – 104 с.: ил.
ISBN 978-5-93299-497-9

В сборнике задач представлены задачи и некоторые примеры решений, которые разбирались на семинарских занятиях в весенних семестрах 2008-2020 учебных годов в Московской школе экономики МГУ имени М. В. Ломоносова со студентами бакалавриата программы «Экономика».

Рекомендуется студентам экономических и инженерно-технических специальностей. Может быть полезна также студентам, обучающимся на естественно-научных направлениях.

УДК 512.6(075.8)
ББК 22.143я73

ISBN 978-5-93299-497-9

Светлой памяти

Евгения Александровича Ивина

посвящается

Линейная алгебра
Второй семестр

1. Собственные значения и собственные векторы

1.1. Собственные значения, собственные векторы.

Пусть A — квадратная матрица порядка n.

Определение. Ненулевой вектор (вектор–столбец) называется *собственным вектором* матрицы A, соответствующим *собственному числу* λ, если выполняется равенство $AX = \lambda X$.

Замечание. Данному собственному вектору отвечает в точности одно собственное значение. С другой стороны, данному собственному значению отвечает бесконечное множество собственных векторов.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ вектор $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным с собственным значением 3. В самом деле,

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3X.$$

Напротив, вектор $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ не является собственным для этой матрицы A, так как

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

что не может быть равно $\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ ни при каком λ.

Собственные значения матрицы A ищутся как корни уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Оно называется *характеристическим уравнением* матрицы A.

Выражение $\det(A - \lambda E)$ является многочленом степени n от переменной λ. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом* матрицы A.

У него есть ряд полезных свойств:

• коэффициент при λ^n равен $(-1)^n$;

• свободный член равен $\det A$;

• коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1}\mathrm{tr}\, A$, где $\mathrm{tr}\, A$ — след матрицы A;

• для матрицы A второго порядка

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \mathrm{tr}\, A\, \lambda + \det A;$$

• для матрицы A третьего порядка

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \mathrm{tr}\, A\, \lambda^2 - \Omega\lambda + \det A.$$

Здесь коэффициент Ω равняется сумме миноров элементов, стоящих на главной диагонали матрицы A:

$$\Omega = M_{11} + M_{22} + M_{33} = \\ = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Последние два свойства позволяют находить характеристические многочлены матриц второго и третьего порядков, на раскрывая определитель $\det(A - \lambda E)$.

Пример. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

найти собственные значения и их кратности.

Решение. Найдем характеристический многочлен матрицы A. Это можно сделать двумя способами.

Способ 1. Применим явную формулу для определителя третьего порядка:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (3-\lambda)(3-\lambda)(-\lambda) + 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \cdot (-2) - \\ &\quad - \Big((-2)(-2)(3-\lambda) + 2 \cdot 2 \cdot (3-\lambda) - \lambda\Big) = \\ &= (9 - 6\lambda + \lambda^2)(-\lambda) - 8 - \\ &\quad - \big(12 - 4\lambda + 12 - 4\lambda - \lambda\big) = \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda - 8 - 24 + 9\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32. \end{aligned}$$

Способ 2. Применим формулу

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + \operatorname{tr} A\, \lambda^2 - \Omega\lambda + \det A.$$

Напомним, Ω — это сумма миноров всех элементов, стоящих на главной диагонали матрицы A. Тогда

$$\operatorname{tr} A = 3 + 3 + 0 = 6;$$
$$\Omega = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 8 = 0;$$
$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 - 4 - (12 + 0 + 12) = -32;$$
$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32.$$

Теперь найдем корни многочлена $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32$ и их кратности. Решаем уравнение $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = 0$. Умножим его для удобства на (-1):

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0.$$

Попробуем найти его целочисленные корни. Если такой корень существует, то он обязан быть делителем свободного члена 32. Список этих делителей:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32.$$

Будем подставлять их последовательно в наше уравнение:

$$\begin{aligned}
1: &\quad 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 32 = 27 \neq 0, \text{ т. е. } 1 \text{ — не корень;}\\
-1: &\quad (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 32 = 25 \neq 0, \text{ т. е. } -1 \text{ — не корень;}\\
2: &\quad 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 32 = 16 \neq 0, \text{ т. е. } 2 \text{ — не корень;}\\
-2: &\quad (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 32 = 0, \text{ т. е. } -2 \text{ — } \underline{\text{корень}}.
\end{aligned}$$

Подобрав корень $\lambda = -2$, разделим многочлен $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32$ на $\lambda + 2$ («уголком» или по схеме Горнера) и получим равенство

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 16).$$

Ищем корни квадратного трехчлена $\lambda^2 - 8\lambda + 16$ и разлагаем его на множители:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2.$$

Окончательно получаем

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)^2.$$

Тем самым, собственными значениями матрицы A являются $\lambda = -2$ кратности 1 и $\lambda = 4$ кратности 2.

Ответ. Собственными значениями матрицы A являются $\lambda = -2$ кратности 1 и $\lambda = 4$ кратности 2.

В следующих задачах проверить, является ли X собственным вектором матрицы A; если является, то указать соответствующее собственное значение.

1.1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.1.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.1.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.1.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

В следующих задачах найти значения параметра, при котором вектор X является собственным вектором матрицы A.

1.1.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.1.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ -3 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.1.8. $A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.1.9. $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.1.10. $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.1.11. $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.1.12. $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.1.13. $A = \begin{pmatrix} k & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.1.14. $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$.

В следующих задачах найти собственные числа и собственные векторы для указанной матрицы.

1.1.15. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.16. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.17. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.18. $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.19. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.20. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1.1.21. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1.22. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.23. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.1.24. $\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

1.1.25. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$.

1.1.26. $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$

1.1.27. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$

1.1.28. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

1.1.29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

1.1.30. $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ 4 & -5 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

1.1.31. $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 8 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$

1.1.32. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

1.1.33. $\begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$

1.1.34. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

1.1.35. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.1.36. $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 \\ -4 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$

1.1.37. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -5 \\ -10 & -1 & 5 \\ 10 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$

1.1.38. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

1.1.39. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

1.1.40. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.1.41. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.2. Собственные векторы и собственные значения симметрических матриц

Собственные векторы и собственные значения симметрической матрицы A порядка n обладают следующими важными особенностями:

• Все корни характеристического многочлена $\det(A - \lambda E)$ вещественны; с учетом кратностей их количество в точности равно n.

• Алгебраическая кратность собственного значения равна его геометрической кратности (т. е. для данного собственного значения его кратность как корня характеристического многочлена равна размерности пространства собственных векторов, отвечающих этому собственному значению).

• Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

• В пространстве $\mathbb{R}^n$ существует ортогональный базис, состоящий из собственных векторов рассматриваемой симметрической матрицы.

В следующих задачах найти собственные векторы и собственные значения симметрических матриц. Для проверки убедиться в ортогональности собственных векторов, отвечающих разным собственным значениям.

1.2.1. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

1.2.2. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

1.2.3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1.2.4. $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

1.2.5. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

В следующих задачах найти собственные числа и собственные векторы матрицы, а также найти ортонормированный базис пространства, состоящий из собственных векторов рассматриваемой матрицы.

1.2.6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2.7. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2.8. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2.9. $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2.10. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2.11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2.12. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2.13. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2.14. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2.15. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.2.16. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.2.17. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2.18. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2.19. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2.20. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2.21. $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

1.3. Корни многочленов с целыми коэффициентами

Пример. Найти корни многочлена $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ и указать их кратности.

Решение. Свободный член равен 6. Среди его делителей $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ перебором ищем корень уравнения. Подходит $x = 1$. Разделив $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ на $x - 1$ «уголком» или по схеме Горнера, получим в частном $x^2 - x - 6$, т. е. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$.

Далее, корнями уравнения

$$x^2 - x - 6 = 0$$

являются $x = -2$ и $x = 3$. Таким образом,

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3),$$

поэтому собственными числами являются $x = 1$, $x = -2$ и $x = 3$, а их кратности равны 1.

Ответ. Корнями многочлена $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ являются 1, -2, 3, причем все эти корни имеют кратность 1.

В следующих задачах найти все корни многочленов и их кратности.

1.3.1. $x^3 - 3x^2 + 2x$.

1.3.2. $x^3 - 4x^2 + 3x$.

1.3.3. $x^3 - x^2 - 6x$.

1.3.4. $x^3 - 6x^2 + 9x$.

1.3.5. $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$.

1.3.6. $x^3 + x^2 - 10x + 8$.

1.3.7. $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

1.3.8. $x^3 - x^2 - 8x + 12$.

1.3.9. $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x$.

1.3.10. $x^4 - 5x^3 + 20x - 16$.

1.3.11. $x^4 - x^3 - 12x^2 + 28x - 16$.

1.3.12. $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$.

1.3.13. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5$.

1.3.14. $x^4 - 7x^2 - 4x + 20$.

1.3.15. $x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x - 20$.

1.3.16. $x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4.$

1.3.17. $x^5 - 4x^4 + x^3 + 14x^2 - 20x + 8.$

1.3.18. $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4.$

2. Диагонализация матрицы, применения

2.4. Разложение вида $A = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1}$, диагонализация

Пример. Выяснить, существует ли для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -3 & -5 & 3 \\ -5 & -10 & 8 \end{pmatrix}$ представление $A = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1}$ с диагональной матрицей Λ (т.е. диагонализуется ли матрица A)? Если существует, то найти C и Λ.

Решение. Существование указанного представления равносильно тому, что из собственных векторов матрицы A можно составить базис $\mathbb{R}^3$. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A. Так как след $\operatorname{tr} A$ равен $-1 - 5 + 8 = 2$, определитель $\det A = -6$, а сумма миноров диагональных элементов $\Omega = M_{11} + M_{22} + M_{33}$ равна $-7 - 10 + 12 = -5$, то характеристический многочлен имеет вид $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$.

Решаем уравнение

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$$

или

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Среди делителей свободного члена $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ перебором ищем корень уравнения. Подходит $\lambda = 1$. Разделив

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$ на $\lambda - 1$ «уголком» или по схеме Горнера, получим в частном $\lambda^2 - \lambda - 6$, т. е. $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6)$. Корнями уравнения

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

являются $\lambda = -2$ и $\lambda = 3$. Таким образом, собственными числами являются $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ и $\lambda_3 = 3$.

Находим собственный вектор $\overrightarrow{e}_1$ для $\lambda_1 = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-1 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -5-1 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 8-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 7 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(2)-2\cdot(1)]{\frac{1}{2}\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & -10 & 7 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(3)-5\cdot(1)]{(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(3)-3\cdot(2)]{\frac{1}{3}\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим собственный вектор $\overrightarrow{e}_2$ для $\lambda_2 = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-(-2) & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -5-(-2) & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 8-(-2) & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 10 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(3)+5\cdot(1)]{(2)+3\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -15 & 15 & 0 \\ 0 & -30 & 30 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{15}\cdot(2)]{(3)-2\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Находим собственный вектор $\overrightarrow{e}_1$ для $\lambda_3 = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-3 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -5-3 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 8-3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 5 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(3)-5\cdot(1)]{\frac{1}{4}\cdot(1),(2)-3\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \overrightarrow{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомое представление возможно. Составляем из вектор-столбцов $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ матрицу C:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а из соответствующих собственных чисел — диагональную матрицу Λ:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Представление $A = C \cdot \Lambda C^{-1}$ для данной матрицы A существует, причем можно взять $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Выяснить, существует ли для матрицы $A = \begin{pmatrix} -7 & -25 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$ представление $A = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1}$ с диагональной матрицей Λ (т. е. диагонализуется ли матрица A)? Если существует, то найти C и Λ.

Решение. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A. Так как след $\operatorname{tr} A$ равен $-7 + 13 = 6$, а определитель $\det A = 9$, то характеристический многочлен имеет вид $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^3$.

Тем самым, если искомое представление возможно, то $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Попробуем теперь найти матрицу C. Ее столбцы должны быть собственными векторами матрицы A, отвечающими собственному значению $\lambda = 3$, и должны быть линейно независимыми.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -7-3 & -25 & 0 \\ 4 & 13-3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -10 & -25 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{5}\cdot(1)]{-\frac{1}{2}\cdot(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

У последней системы фундаментальная система решений содержит только один вектор, поэтому двух линейно независимых собственных векторов для $\lambda = 3$ у матрицы A нет. Диагонализация невозможна.

Ответ. Представление $A = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1}$ для данной матрицы A невозможно, поскольку собственных векторов матрицы A не хватает, чтобы составить базис пространства $\mathbb{R}^2$.

В следующих задачах выяснить, существует ли для данной матрицы A представление $A = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1}$, и если существует, то найти его.

2.4.1. $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2.4.2. $A = \begin{pmatrix} 18 & 40 \\ -8 & -18 \end{pmatrix}$.

2.4.3. $A = \begin{pmatrix} -22 & 36 \\ -12 & 20 \end{pmatrix}$.

2.4.4. $A = \begin{pmatrix} 13 & -24 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.

2.4.5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$.

2.4.6. $A = \begin{pmatrix} -16 & -9 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$.

2.4.7. $A = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 8 \\ -7 & 11 & 7 \\ 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

2.4.8. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 7 & -17 & -19 \\ -6 & 12 & 14 \end{pmatrix}$.

2.4.9. $A = \begin{pmatrix} 8 & -12 & -12 \\ 13 & -23 & -25 \\ -7 & 13 & 15 \end{pmatrix}$.

2.4.10. $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 16 \\ 11 & 4 & 23 \\ -6 & -1 & -10 \end{pmatrix}$.

2.5. Возведение матрицы в степень

В этом разделе мы будем возводить диагонализуемые матрицы в степень.

Пример. Возвести матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$ в 22–ю степень.

Решение. Для решении задачи найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A. Так как $\operatorname{tr} A = 5 - 6 = -1$, $\det A = -30 + 30 = 0$, то характеристический многочлен имеет вид

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A = \lambda^2 + \lambda = 0.$$

Откуда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -1$. Находим собственный вектор $\overrightarrow{e}_1$ для $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 10 & -6-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{(2)-2\cdot(1)} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Находим собственный вектор $\overrightarrow{e}_2$ для $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 10 & -6-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[(2)-5\cdot(1)]{\frac{1}{3}\cdot(1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода к базису, составленному из собственных векторов, имеет вид $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, а $C^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, имеем равенство

$$A = C\Lambda C^{-1}.$$

Чтобы возвести матрицу A в 22-ю степень, остается воспользоваться формулой $A^n = C\Lambda^n C^{-1}$:

$$A^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{22} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $A^{22} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$.

В следующих задачах найти представление матрицы A в виде

$$A = C\,\Lambda\,C^{-1},$$

а затем возвести ее в указанную степень по формуле

$$A^k = C\,\Lambda^k\,C^{-1}.$$

2.5.1. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}^6$.

2.5.2. $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^6$.

2.5.3. $\begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -18 & 11 \end{pmatrix}^5$.

2.5.4. $\begin{pmatrix} -25 & -18 \\ 36 & 26 \end{pmatrix}^{9}.$

2.5.5. $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}^{1993}.$

2.5.6. $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}^{2012}.$

2.5.7. $\begin{pmatrix} 9 & -20 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}^{111}.$

2.5.8. $\begin{pmatrix} 9 & -20 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}^{104}.$

2.5.9. $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{1024}.$

2.5.10. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{1111}.$

2.5.11. Диагонализовать и затем возвести в 6-ю степень матрицу

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$

2.5.12. Диагонализовать затем возвести в 4-ю степень матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2.5.13. Найти какой–нибудь корень второй степени из матрицы

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.5.14. Найти какой–нибудь корень третьей степени из матрицы

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.6. Разложение вида $A = DD$

Пример. Выяснить, диагонализуется ли матрица $A = \begin{pmatrix} 19 & -9 \\ 30 & -14 \end{pmatrix}$. Если диагонализуется, найти какую-нибудь матрицу D, для которой $A = D^2$.

Решение. Найдем характеристический многочлен матрицы A, например, по формуле $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A +$

$\det A$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr} A &= 19 - 14 = 5;\\
\det A &= 19 \cdot (-14) - (-9) \cdot 30 = 4;\\
\det(A - \lambda E) &= \lambda^2 - 5\lambda + 4.
\end{aligned}
$$

Собственные числа — корни характеристического многочлена: $\lambda = 1$ и $\lambda = 4$. Оба имеют кратность 1. Поэтому можно найти собственные векторы, которые составляют базис пространства $\mathbb{R}^2$, и следовательно, матрица A диагонализуема.

Чтобы найти D, нам нужно найти сами собственные векторы, образующие базис пространства $\mathbb{R}^2$.

Ищем собственный вектор для $\lambda = 1$:

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 19-1 & -9 & 0 \\ 30 & -14-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 18 & -9 & 0 \\ 30 & -15 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{15}\cdot(2)]{\frac{1}{9}\cdot(1)}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
$$

Фундаментальная система решений этой системы состоит из одного вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ищем собственный вектор для $\lambda = 4$:

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 19-4 & -9 & 0 \\ 30 & -14-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 15 & -9 & 0 \\ 30 & -18 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{6}\cdot(2)]{\frac{1}{3}\cdot(1)}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
$$

Фундаментальная система решений этой системы состоит из одного вектора $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Теперь перейдем к нахождению матрицы D. Из найденных векторов составим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Имеем представление нашей матрицы A в виде

$$A = C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Матрица D теперь может быть найдена по формуле

$$D = C \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix} C^{-1},$$

причем знаки $\pm$ здесь выбираются независимо.

Найдем матрицу C^{-1}:

$$C^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем четыре варианта ответа:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -10 & 4 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -9 \\ 30 & -16 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 9 \\ -30 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\pm \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 17 & -9 \\ 30 & -16 \end{pmatrix}$.

В следующих задачах представить данную матрицу A в виде $A = D \cdot D$.

2.6.1. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.6.2. $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2.6.3. $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

2.6.4. $\begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

2.6.5. $\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$.

2.6.6. $\begin{pmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$.

2.6.7. $\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$.

2.6.8. $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

2.6.9. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

2.6.10. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$.

2.6.11. $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$.

2.6.12. $\begin{pmatrix} \frac{41}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$.

2.7. Разложение $A = D^T \cdot D$

В следующих задачах требуется, используя разложение $A = C \cdot \Lambda \cdot C^T$, где Λ диагональная, а C — ортогональная матрицы, представить данную матрицу в виде $D^T \cdot D$, где $D = \sqrt{\Lambda} \cdot C^T$.

2.7.1. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

2.7.2. $\begin{pmatrix} 13 & -12 \\ -12 & 13 \end{pmatrix}$.

2.7.3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.7.4. $\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$.

2.7.5. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2.7.6. $\begin{pmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$.

3. Линейные операторы

3.8. Линейные операторы, знакомство

Пример. Отображение $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ задано формулой

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1)^2 + 2y - x^2 - 1 \\ 2y + x \\ x - 4y \end{pmatrix}$$

Выяснить, является ли A линейным оператором, и если является, то найти его матрицу в стандартных базисах пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Решение. Упростим формулы, задающие отображение:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1)^2 + 2y - x^2 - 1 \\ 2y + x \\ x - 4y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 + 2x + 1 + 2y - x^2 - 1 \\ 2y + x \\ x - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2y + x \\ x - 4y \end{pmatrix}.$$

Теперь проверим выполнение свойств линейного отображения.

Пусть $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ и $V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$. Тогда

1.

$$A(V_1+V_2)=\begin{pmatrix}2(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)\\2(y_1+y_2)+(x_1+x_2)\\(x_1+x_2)-4(y_1+y_2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2x_1+2y_1\\2y_1+x_1\\x_1-4y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2x_2+2y_2\\2y_2+x_2\\x_2-4y_2\end{pmatrix}=A(V_1)+A(V_2)$$

2. $A(\lambda V_1)=\begin{pmatrix}2\lambda x_1+2\lambda y_1\\2\lambda y_1+\lambda x_1\\\lambda x_1-4\lambda y_1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2x_1+2y_1\\2y_1+x_1\\x_1-4y_1\end{pmatrix}=\lambda\, A(V_1).$

Таким образом, оба свойства из определения линейного отображения выполнены, следовательно, отображение A является линейным оператором.

Матрицей линейного оператора называется матрица, столбцами которой являются образы базисных векторов. Вычислим их:

$$A(\overrightarrow{e}_1)=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$A(\overrightarrow{e}_2)=A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}.$$

Тем самым, матрицей оператора A является $\begin{pmatrix}2&2\\1&2\\1&-4\end{pmatrix}$.

Ответ. Отображение A линейно, его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

В следующих задачах проверить задает ли формула линейный оператор из $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ для подходящих по смыслу задачи k и n.

3.8.1. $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

3.8.2. $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}$.

3.8.3. $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

3.8.4. $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

3.8.5. $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \\ (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix}$.

3.8.6. $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + x_2)^2 - (2x_1 - x_2)^2$.

3.8.7. $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + x_2)^2 - (x_1 - 2x_2)^2$.

3.8.8. $F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2x_3\\x_1x_3\\x_1x_2\end{pmatrix}.$

3.8.9. $F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln(e^{x_2}e^{x_3})\\\ln(e^{x_1}e^{x_3})\\\ln(e^{x_1}e^{x_2})\end{pmatrix}.$

3.8.10. $F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln(e^{x_2}e^{x_3})\\\arcsin(\sin x_1\sin e^{x_3})\\\arccos(\cos x_1\cos x_2)\end{pmatrix}.$

3.8.11. $F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\2x_1+x_3\\x_1x_3\end{pmatrix}.$

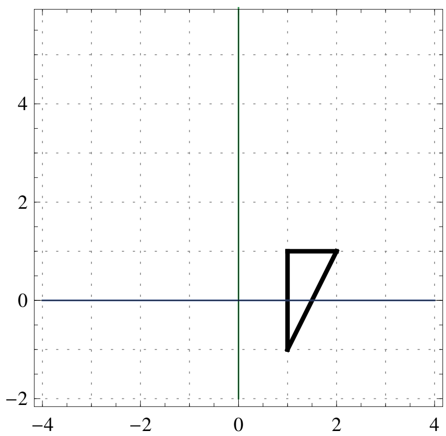
3.8.12. $F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\2x_1+x_3\\x_1x_3\end{pmatrix}.$

3.8.13. Является ли линейным отображение $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, заданное формулой $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_3\\x_3\\x_1-x_2\end{pmatrix}$. Если является, найти его матрицу.

3.8.14. Является ли линейным отображение $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, заданное формулой $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2-x_3\\2x_3\\2x_2+5x_3\end{pmatrix}$. Если является, найти его матрицу.

3.9. Линейные операторы в $\mathbb{R}^2$, графическое представление

Пример. Оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Нарисовать образ под действием этого оператора фигуры, изображенной на рисунке



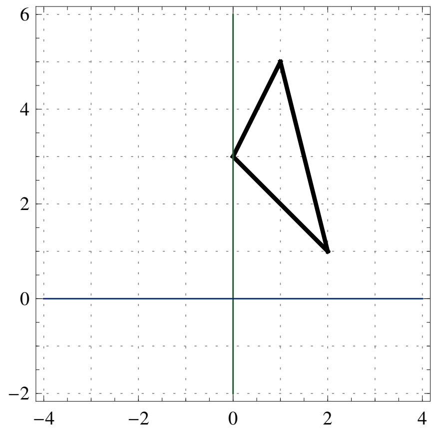
Решение. Наша фигура — треугольник с вершинами в точках $(1, -1)$, $(1, 1)$ и $(2, 1)$. Под действием линейного оператора отрезки переходят в отрезки, поэтому образом является треугольник. Найдем его вершины:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

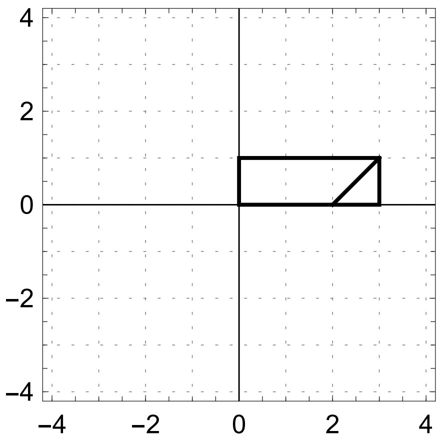
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

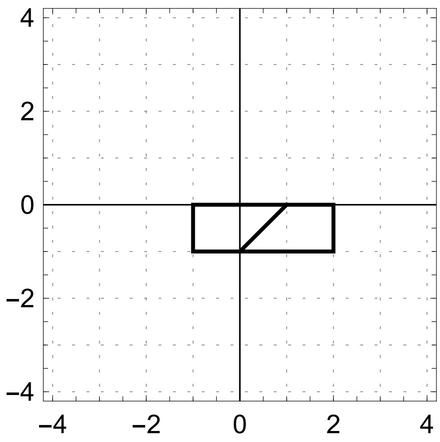
Ответ.



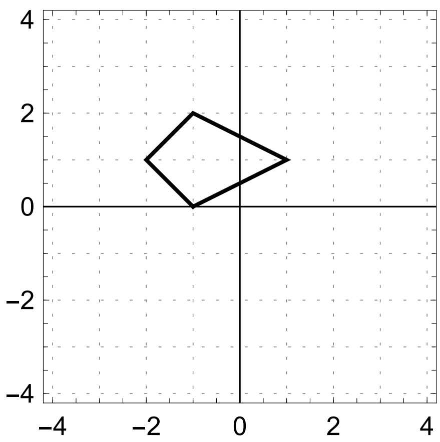
3.9.1. Оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Нарисовать образ под действием этого оператора фигуры, изображенной на рисунке



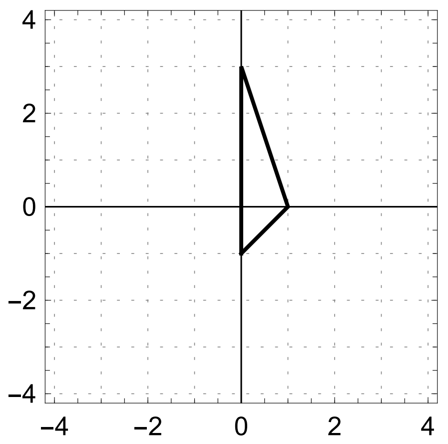
3.9.2. Оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе задается матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Нарисовать образ под действием этого оператора фигуры, изображенной на рисунке



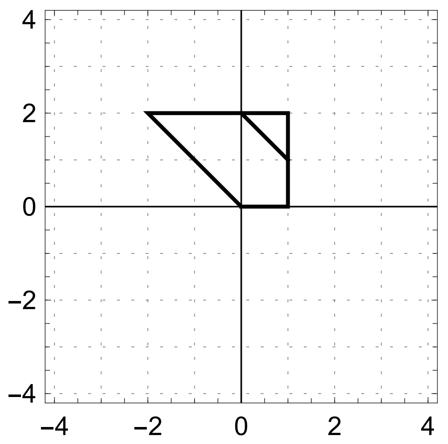
3.9.3. Оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Нарисовать образ под действием этого оператора фигуры, изображенной на рисунке



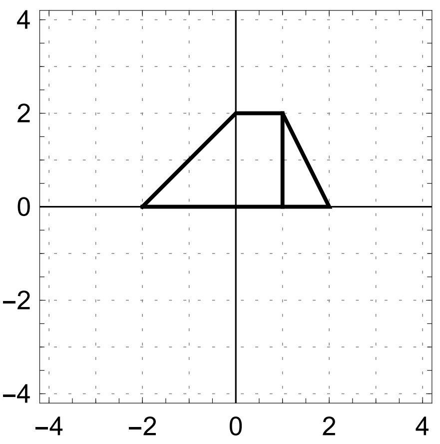
3.9.4. Оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Нарисовать образ под действием этого оператора фигуры, изображенной на рисунке



3.9.5. Оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Нарисовать образ под действием этого оператора фигуры, изображенной на рисунке



3.9.6. Оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе задается матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Нарисовать образ под действием этого оператора фигуры, изображенной на рисунке



3.10. Изменение матрицы оператора при замене базиса пространства

Пример. Оператор $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в стандартном базисе $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -10 & -12 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$. Матрица перехода к базису $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти значение оператора A на векторе $\overrightarrow{e}'_2$ и разложить полученный вектор по базисам $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$.

Решение. Так как $\overrightarrow{e}'_1 = \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}'_2 = -3\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2$, имеем равенства

$$A(\overrightarrow{e}'_2) = -3A(\overrightarrow{e}_1) + 2A(\overrightarrow{e}_2) = -3\begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -12 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 \\ -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 6\overrightarrow{e}_1 - 4\overrightarrow{e}_2.$$

Теперь заметим, что $A(\overrightarrow{e}'_2) = 6\overrightarrow{e}_1 - 4\overrightarrow{e}_2 = -2(-3\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2) = -2\overrightarrow{e}'_2$. Таким образом значение оператора A на векторе $\overrightarrow{e}'_2$ является вектором, который в базисе $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ имеет координаты $(6; -4)$, а в базисе $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$ — координаты $(0; -2)$.

Ответ. $A(\overrightarrow{e}'_2) = 6\overrightarrow{e}_1 - 4\overrightarrow{e}_2 = -2\overrightarrow{e}'_2$.

3.10.1. Линейный оператор A в базисе $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ задается матрицей $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A в базисе $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$, если $\overrightarrow{e}'_1 = \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}'_2 = \overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2$.

3.10.2. Линейный оператор A в базисе $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A в базисе $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$, если $\overrightarrow{e}_1 = 3\overrightarrow{e}'_1 - \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{e}'_1 + \overrightarrow{e}'_2$.

3.10.3. Линейный оператор A в базисе $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ задается матрицей $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A в базисе $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$, если $\overrightarrow{e}'_1 = \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}'_2 = \overrightarrow{e}_1 + 3\overrightarrow{e}_2$.

3.10.4. Линейный оператор A в базисе $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A в базисе $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$, если $\overrightarrow{e}_1 = 3\overrightarrow{e}'_1 - \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}_2 = 2\overrightarrow{e}'_1 - \overrightarrow{e}'_2$.

3.10.5. Линейный оператор A в базисе $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A в базисе $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$, если $\overrightarrow{e}'_1 = \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}'_2 = \overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2$.

3.10.6. Линейный оператор A в базисе $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A в базисе $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2$, если $\overrightarrow{e}_1 = 3\overrightarrow{e}'_1 - \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}_2 = 2\overrightarrow{e}'_1 - \overrightarrow{e}'_2$.

3.10.7. Линейный оператор A в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, если $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}_3 = \vec{e}'_3$.

3.10.8. Линейный оператор A в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, если $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_3$.

3.10.9. Линейный оператор A в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, если $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \vec{e}_3 = \vec{e}'_3$.

3.10.10. Линейный оператор A в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, если $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_3$.

3.11. Ядро и образ линейного оператора, их базисы, ранг и дефект линейного оператора

Пример. Оператор $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ в стандартном базисе задан матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 3 & 6 \\ -4 & 8 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти его ранг, дефект, ядро и образ, а также базисы ядра и образа.

Решение. Найдём ядро, то есть множество векторов $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, для которых $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Для этого запишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 6 & 0 \\ -4 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(4)+(3)]{(1)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 6 & 0 \\ -4 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(3)-4\cdot(1)]{(2)+3\cdot(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(4)-2\cdot(2)]{-\frac{1}{3}\cdot(2),(3)-12\cdot(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда находим $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, $x_3 = -C_2$, $-x_1 + 2C_1 + 2C_2 - 3C_2 = 0$, $x_1 = 2C_1 - C_2$, тем самым, ядром является множество векторов вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 - C_2 \\ C_1 \\ -C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} C_2,$$

где C_1 и C_2 — любые вещественные числа.

Базис ядра состоит из двух векторов $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Дефект равен $\dim(\ker A) = 2$.

Ранг оператора равен $4 - \dim(\ker A) = 2$, поэтому в качестве базиса образа можно выбрать любую пару непропорциональных векторов, образующих матрицу A. Выберем, например, второй и третий столбцы, тогда образ оператора состоит векторов вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} D_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} D_2,$$

где D_1 и D_2 — любые вещественные числа.

Ответ. Ранг и дефект оператора равны 2. Базисы ядра и образа оператора образованы парами векторов

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix};$$

а соответствующие подпространства представляют собой множества векторов вида

$$C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и

$$D_1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + D_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2, D_1 и D_2 — любые вещественные числа.

3.11.1. Пусть $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_4$ — стандартный базис $\mathbb{R}^4$. Известно, что $A(\overrightarrow{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A(\overrightarrow{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A(\overrightarrow{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A(\overrightarrow{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A в базисе $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_4$, его ранг, дефект, указать базисы ядра и образа оператора.

3.11.2. Пусть $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ — стандартный базис $\mathbb{R}^3$. Известно, что $A(\overrightarrow{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A(\overrightarrow{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A(\overrightarrow{e}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора A в базисе $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$, его ранг, дефект, указать базисы ядра и образа оператора.

3.11.3. Пусть в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ линейный оператор A задается матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти для оператора A его ранг, дефект, указать базисы ядра и образа.

3.11.4. Пусть линейный оператор A задан формулой $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 4x+6y \end{pmatrix}$. Найти для оператора A его матрицу, ранг, дефект, указать базисы ядра и образа.

3.11.5. Пусть линейный оператор A задан формулой $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ x+y+z \\ 3x-2y+z \end{pmatrix}$. Найти для оператора A его матрицу, ранг, дефект, указать базисы ядра и образа.

3.11.6. Пусть линейный оператор A задан формулой $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-4y \end{pmatrix}$. Найти для оператора A его матрицу, ранг, дефект, указать базисы ядра и образа.

4. Квадратичные формы

4.12. Матица квадратичной формы

4.12.1. Найти матрицу квадратичной формы $2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

4.12.2. Найти матрицу квадратичной формы

a) $3x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$;

b) $3x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 5x_1x_3$;

c) $2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3$.

4.12.3. Найти матрицу квадратичной формы и ее ранг

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$;

b) $2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3$;

c) $2x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$.

4.12.4. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти соответствующую квадратичную форму.

4.12.5. Дана матрица $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти соответствующую квадратичную форму.

4.12.6. Дана матрица $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти соответствующую квадратичную форму.

4.12.7. Квадратичная форма $Q(x_1, x_2)$ задана симметрической матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ & -2 \end{pmatrix}$. Заполнить пропуск и найти значение квадратичной формы на векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 2m \end{pmatrix}$. При каком значении m оно равно 2?

4.12.8. Квадратичная форма $Q(x_1, x_2)$ задана симметрической матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ & -2 \end{pmatrix}$. Заполнить пропуск и найти значение квадратичной формы на векторе $\begin{pmatrix} -1 \\ 3m \end{pmatrix}$. При каком значении m оно равно 12?

4.12.9. Квадратичная форма $Q(x_1, x_2)$ задана симметрической матрицей $\begin{pmatrix} 5 & \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Заполнить пропуск и найти значение квадратичной формы на векторе $\begin{pmatrix} m \\ -3 \end{pmatrix}$. При каком значении m оно равно 3?

4.12.10. Квадратичная форма $Q(x_1, x_2)$ задана симметрической матрицей $\begin{pmatrix} 2 & \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Заполнить пропуск и найти значение квадратичной формы на векторе $\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$. При каком значении m оно равно -5?

4.13. Замена переменных в квадратичной форме

4.13.1. В квадратичной форме $3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$ сделать замену переменных, заданную в виде $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

4.13.2. В квадратичной форме $3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$ сделать замену переменных, заданную в виде $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

4.13.3. В квадратичной форме $2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2$ сделать замену переменных, заданную в виде $\begin{cases} x_1 = -y_1 + 2y_2, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + y_3, \\ x_3 = -2y_1 - y_2. \end{cases}$

4.13.4. В квадратичной форме $2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$ сделать замену переменных, заданную в виде $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3, \\ x_2 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2. \end{cases}$

4.13.5. В квадратичной форме $4x_1^2 - 4x_1x_2 - 3x_2^2$ сделать замену переменных $\begin{cases} y_1 = -x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 2x_1 - 5x_2. \end{cases}$

4.13.6. В квадратичной форме $5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$ сделать замену переменных $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = -3x_1 + 5x_2. \end{cases}$

4.13.7. В квадратичной форме $4x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2$ сделать замену переменных $\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 \\ y_2 = 5x_1 - 2x_2. \end{cases}$

4.13.8. В квадратичной форме $-5x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2$ сделать замену переменных $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 5x_2 \\ y_2 = x_1 + 3x_2. \end{cases}$

4.13.9. В квадратичной форме $4x_1^2 - 4x_1x_2 - 3x_2^2$ сделать замену переменных $\begin{cases} x_1 = -y_1 + 2y_2 \\ x_2 = 2y_1 - 5y_2. \end{cases}$

4.13.10. В квадратичной форме $5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$ сделать замену переменных $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 \\ x_2 = -3y_1 + 5y_2. \end{cases}$

4.13.11. В квадратичной форме $4x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2$ сделать замену переменных $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2 \\ x_2 = 5y_1 - 2y_2. \end{cases}$

4.13.12. В квадратичной форме $-5x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2$ сделать замену переменных $\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 5y_2 \\ x_2 = y_1 + 3y_2. \end{cases}$

4.14. Знакоопределенные квадратичные формы и матрицы, критерий Сильвестра

Пример. Найти все b, при которых квадратичная форма $x_1^2 + 2bx_1x_2 + 4x_2^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ положительно определена.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ b & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра требуется выяснить, при каких b все угловые миноры этой матрицы положительны. Вычислив миноры, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} \Delta_1 & = & 1 > 0 \\ \Delta_2 & = & 4 - b^2 > 0 \\ \Delta_3 & = & -8b - 20 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in (-2; 2) \\ b < -2.5 \end{cases} \Leftrightarrow b \in \varnothing.$$

Ответ. Ни при каких значениях b не является положительно определенной.

В следующих задачах исследовать матрицу на знакоопределенность.

4.14.1. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.14.2. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4.14.3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

4.14.4. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4.14.5. Исследовать на положительную (отрицательную) определенность квадратичную форму

a) $x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$;

b) $2x_2^2 - x_1^2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$;

c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

d) $3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

4.14.6. Исследовать на положительную (отрицательную) определенность квадратичную форму при всех значения параметра m

a) $mx_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$;

b) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2mx_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

c) $mx_2^2 - x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 10x_2x_3$.

В следующих задачах выяснить, при каких значениях параметра данная матрица положительно определена, а при каких отрицательно определена.

4.14.7. $\begin{pmatrix} m & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.14.8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -m \end{pmatrix}$.

4.14.9. $\begin{pmatrix} 2 & m & 1 \\ m & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4.14.10. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & m & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

4.14.11. $\begin{pmatrix} -4 & m & 3 \\ m & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

4.14.12. $\begin{pmatrix} 4 & m & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.14.13. $\begin{pmatrix} 4 & m & 3 \\ m & 2 & m \\ 3 & m & 4 \end{pmatrix}$.

4.14.14. $\begin{pmatrix} 4 & 2m & 3 \\ 2m & 7 & m \\ 3 & m & 4 \end{pmatrix}$.

4.15. Приведение квадратичной формы к главным осям

Пример. Привести квадратичную форму $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием. Найти соответствующую матрицу замены координат.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$Q_x = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее характеристический многочлен. Это можно сделать двумя способами.

Способ 1. Применим явную формулу для определителя третьего порядка:

$$\det(Q_x{-}\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(3-\lambda)(-\lambda) + 1\cdot 2\cdot(-2) + 1\cdot 2\cdot(-2) -$$
$$- \Big((-2)(-2)(3-\lambda) + 2\cdot 2\cdot(3-\lambda) - \lambda\Big) =$$
$$= (9-6\lambda+\lambda^2)(-\lambda) - 8 -$$
$$- \big(12 - 4\lambda + 12 - 4\lambda - \lambda\big) =$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda - 8 - 24 + 9\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32.$$

Способ 2. Применим формулу $\det(Q_x - \lambda E) = -\lambda^3 + \operatorname{tr} Q_x\, \lambda^2 - \Omega\lambda + \det Q_x$. Здесь Ω — это сумма миноров всех элементов, стоящих на главной диагонали матрицы Q_x. Тогда

$$\operatorname{tr} Q_x = 3 + 3 + 0 = 6;$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 8 = 0;$$

$$\det Q_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 - 4 - (12 + 0 + 12) = -32;$$

$$\det(Q_x - \lambda E) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32.$$

Теперь найдем корни многочлена $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32$ и их кратности. Решаем уравнение $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = 0$. Умножим его для удобства на (-1):

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0.$$

Попробуем найти его целочисленные корни. Если такой корень существует, то он обязан быть делителем свободного члена 32. Список этих делителей:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32.$$

Будем подставлять их последовательно в наше уравнение:

$$\begin{aligned}
\lambda = 1: &\quad 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 32 = 27 \neq 0, \text{ т. е. } 1 \text{ — не корень;}\\
\lambda = -1: &\quad (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 32 = 25 \neq 0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{т. е. } -1 \text{ — не корень;}\\
\lambda = 2: &\quad 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 32 = 16 \neq 0, \text{ т. е. } 2 \text{ — не корень;}\\
\lambda = -2: &\quad (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 32 = 0, \text{ т. е. } -2 \text{ — } \underline{\text{корень}}.
\end{aligned}$$

Подобрав корень $\lambda = -2$, разделим многочлен $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32$ на $\lambda + 2$ («уголком» или по схеме Горнера) и получим равенство

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 16).$$

Ищем корни квадратного трехчлена $\lambda^2 - 8\lambda + 16$ и разлагаем его на множители:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2.$$

Окончательно получаем

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)^2.$$

Тем самым, собственными значениями матрицы Q_x являются $\lambda = -2$ кратности 1 и $\lambda = 4$ кратности 2.

Теперь мы знаем канонический вид квадратичной формы Q: в подходящих переменных y_1, y_2, y_3 она имеет вид

$$Q(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2.$$

Остается найти матрицу C замены координат $X = CY$. Для этого сначала найдем собственные векторы матрицы Q_x.

Ищем собственные векторы для $\lambda = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-(-2) & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3-(-2) & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0-(-2) & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)\leftrightarrow(3)]{\frac{1}{3}\cdot(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(3)+5\cdot(1)]{(2)+(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}\cdot(2)]{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Общее решение этой системы уравнений

$$\begin{pmatrix} C/2 \\ -C/2 \\ C \end{pmatrix}.$$

Ищем собственные векторы для $\lambda = 4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-4 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3-4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)+(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Общим решением этой системы является

$$\begin{pmatrix} C_2 - 2C_1 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}.$$

Теперь остается найти такие собственные векторы, чтобы они образовывали ортонормированный базис $\mathbb{R}^3$.

Ищем $\overrightarrow{e}_1$. Рассмотрим собственный вектор для $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} C/2 \\ -C/2 \\ C \end{pmatrix},$$

где C — любое ненулевое вещественное число. Зафиксируем какое-нибудь C, например, $C = 2$. Соответствующий собственный вектор равен

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Его длина равна $\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$. Разделим этот собственный вектор на его длину и получим вектор

$$\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Оставшиеся два вектора $\overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}_3$ будут собственными для $\lambda = 4$. Найдем сначала $\overrightarrow{e}_2$. Для этого в выражении для произвольного собственного вектора для $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} C_2 - 2C_1 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

зафиксируем C_1 и C_2; напомним, они не могут быть равными нулю одновременно. Для определенности мы возьмем $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$. Получим вектор

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Разделив его на длину $\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, получим вектор

$$\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь среди собственных векторов для $\lambda = 4$ подберем вектор, ортогональный $\overrightarrow{e}_2$. Для этого вычислим скалярное произведение вектора

$$\begin{pmatrix} C_2 - 2C_1 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

и $\overrightarrow{e}_2$. Оно равно

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(C_2 - 2C_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(2C_2 - 2C_1).$$

Собственный вектор для $\lambda = 4$ будет ортогонален $\overrightarrow{e}_2$, если это скалярное произведение будет равно 0, т. е. при

$$C_1 = C_2.$$

Выберем $C_1 = C_2 = 1$. Получим вектор

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

длины $\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$. Нормируя этот вектор, получим

$$\overrightarrow{e}_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Остается вспомнить, что матрица замены координат C состоит из координат векторов $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}_3$, записанных по столбцам:

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Ответ. Канонический вид $Q(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_2^2$. Ортогональная замена координат:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

4.15.1. Привести к главным осям квадратичную форму, заданную матрицей

а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4.15.2. Привести к главным осям квадратичную форму

a) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

c) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

d) $5x_1^2 - 7x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

4.15.3. Привести к главным осям квадратичную форму

a) $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3$;

b) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

c) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$;

d) $-3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3$;

e) $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 + 12x_2x_3$.

5. Разложение Холецкого

5.16. Разложение Холецкого

Пример. Найти разложение Холецкого для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 53 & 30 \\ 1 & 30 & 18 \end{pmatrix}.$$

Решение. Разложение Холецкого для симметрической положительно определенной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

имеет вид $L \cdot L^T$, где матрица L является нижнетреугольной

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

с положительными элементами на диагонали. Элементы матрицы L находятся по формулам:

$$
\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{a_{11}},\\
l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}},\\
l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}},\\
l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2},\\
l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}},\\
l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}.
\end{aligned}
$$

В нашем случае:

$$
\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{1} = 1,\\
l_{21} &= \frac{2}{1} = 2,\\
l_{31} &= \frac{1}{1} = 1,\\
l_{22} &= \sqrt{53 - 2^2} = 7,\\
l_{32} &= \frac{30 - 2 \cdot 1}{7} = 4,\\
l_{33} &= \sqrt{18 - 1^2 - 4^2} = 1.
\end{aligned}
$$

Ответ. $A = L \cdot L^T$, где

$$
L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.
$$

В следующих задачах для данной симметрической положительно определенной матрицы A найти разложение Холецкого, то есть ее представление в виде $A = L \cdot L^T$, где L нижнетреугольная.

5.16.1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.16.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$.

5.16.3. $\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$.

5.16.4. $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.

5.16.5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

5.16.6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix}$.

5.16.7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 13 \end{pmatrix}$.

5.16.8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

5.16.9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 13 & -9 \\ -3 & -9 & 13 \end{pmatrix}$.

5.16.10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -5 \\ -3 & -5 & 15 \end{pmatrix}$.

5.16.11. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & -5 \\ -6 & -5 & 15 \end{pmatrix}$.

5.16.12. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 15 \end{pmatrix}$.

5.16.13. Выяснить, при каком значении параметра a для матрицы $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & a+3 \end{pmatrix}$ существует разложение Холецкого. Найти это разложение

5.16.14. Выяснить, при каком значении параметра a для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & a+8 \end{pmatrix}$ существует разложение Холецкого. Найти это разложение

5.16.15. Выяснить, при каких значениях параметра существует разложение Холецкого матрицы $\begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & m \end{pmatrix}$. НайНайтидите это разложение.

5.16.16. Выяснить, при каких значениях параметра существует разложение Холецкого матрицы $\begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 \\ -4 & 6 & -3 \\ 12 & -3 & m \end{pmatrix}$. Найти это разложение.

5.16.17. Выяснить, при каких значениях параметра существует разложение Холецкого матрицы $\begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & m \end{pmatrix}$. Найти это разложение.

5.16.18. Выяснить, при каких значениях параметра существует разложение Холецкого матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 12 & -3 \\ 2 & -3 & m \end{pmatrix}$. Найти это разложение.

5.17. Решение переопределенных систем уравнений

В следующих задачах проверьте, что система не имеет решений, а затем найдите оптимальные значения переменных (хотя и не удовлетворяющие системе).

5.17.1. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$.

5.17.2. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$.

5.17.3. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$

5.17.4. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right).$

5.17.5. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right).$

5.17.6. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right).$

5.17.7. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right).$

5.17.8. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right).$

6. Подпространства и ортогональные проекторы

6.18. Подпространства, два способа их задания

6.18.1. Найти систему уравнений, задающую подпространство, порожденное векторами

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.18.2. Векторное подпространство W задано системой уравнений с матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Задать W в виде линейной оболочки подходящего набора векторов. Задать W в виде линейной оболочки 4 векторов.

6.18.3. Векторное подпространство W задано системой уравнений с матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Задать W в виде линейной оболочки подходящего набора векторов. Задать W в виде линейной оболочки 5 векторов.

6.18.4. Векторное подпространство W задано системой уравнений с матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ -3 & -6 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Задать W в виде линейной оболочки подходящего набора векторов. Задать W в виде линейной оболочки 3 векторов.

6.18.5. Векторное подпространство W задано системой уравнений с матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Задать W в виде линейной оболочки подходящего набора векторов. Задать W в виде линейной оболочки 5 векторов.

6.18.6. Линейное подпространство W в $\mathbb{R}^3$ задано как линейная оболочка векторов

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задать W системой линейных уравнений. Задать W системой, состоящей из 4 линейных уравнений.

6.18.7. Линейное подпространство W в $\mathbb{R}^3$ задано как линейная оболочка векторов

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задать W системой линейных уравнений. Задать W системой, состоящей из 4 линейных уравнений.

6.18.8. Линейное подпространство W в $\mathbb{R}^3$ задано как линейная оболочка векторов

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задать W системой линейных уравнений. Задать W системой, состоящей из 4 линейных уравнений.

6.18.9. Линейное подпространство W в $\mathbb{R}^3$ задано как линейная оболочка векторов

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задать W системой линейных уравнений. Задать W системой, состоящей из 4 линейных уравнений.

6.19. Оператор ортогонального проектирования на подпространство. Проекция вектора на подпространство

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^3$ подпространство W задано как линейная оболочка векторов $\overrightarrow{w}_1 = (1; -1; 0)$ и $\overrightarrow{w}_2 = (2, 0, 1)$. Найти матрицу ортогонального проектора на подпространство W, её ранг и собственные числа.

Решение. Будем искать матрицу ортогонального проектора по формуле $P = Z(Z^T Z)^{-1} Z^T$, в которой столбцы матрицы Z образованы координатами базисных векторов подпространства, на которое осуществляется проекция. В нашем случае, поскольку исходные векторы $\overrightarrow{w}_1 = (1; -1; 0)$ и $\overrightarrow{w}_2 = (2, 0, 1)$ являются линейно независимыми, мы можем выбрать их в качестве базисных векторов подпространства, а, следовательно, матрица Z будет иметь вид: $Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда в соответствии с приведённой выше формулой, матрица ортогонального проектора ищется как

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы, получим $P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Ранг проектора равен размерности подпространства, на которое осуществляется проекция. В нашем случае размерность равна 2.

Собственными числами проектора являются 1 и 0, причем кратность 1 равна рангу проектора — в нашем случае 2, а кратность 0 — дефекту проектора, в нашем случае это $3 - 2 = 1$.

Ответ. $P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Собственные числа: 1 кратности 2 и 0 кратности 1.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^3$ подпространство W задано как линейная оболочка векторов $\overrightarrow{w}_1 = (1, -1, 0)$, $\overrightarrow{w}_2 = (2, 0, 1)$ и $\overrightarrow{w}_3 = (1, 1, 1)$. Разложить вектор $\overrightarrow{a} = (6, 0, 0)$ в сумму $\overrightarrow{a}_0 + \overrightarrow{a}_\perp$, где $\overrightarrow{a}_0 \in W$ и $\overrightarrow{a}_\perp$ ортогонален W.

Решение. Заметим, что $\overrightarrow{w}_2 - \overrightarrow{w}_1 = \overrightarrow{w}_3$, а векторы $\overrightarrow{w}_1$ и $\overrightarrow{w}_2$ не коллинеарны, поэтому они образуют базис подпространства W. Дальше мы можем решать задачу двумя способами.

Первый способ. В предыдущей задаче была найдена матрица P ортогонального проектора на данное в условии подпространство W (сравните условия задач): $P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда для ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{a}$ на W имеем равенство:

$$\overrightarrow{a}_0 = P(\overrightarrow{a}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

т.е. $\overrightarrow{a}_0 = (5, -1, 2)$ и $\overrightarrow{a}_\perp = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{a}_0 = (6; 0; 0) - (5, -1, 2) = (1, 1, -2)$.

Второй способ. Вектор $\overrightarrow{a}_0$ должен разлагаться в линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{w}_1$ и $\overrightarrow{w}_2$:

$$\overrightarrow{a}_0 = \lambda_1 \overrightarrow{w}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{w}_2$$

и $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_0 + \overrightarrow{a}_\perp$. Перемножив скалярно вектор $\overrightarrow{a}$ на векторы $\overrightarrow{w}_1$ и $\overrightarrow{w}_2$ и учитывая, что $\langle \overrightarrow{a}_\perp, \overrightarrow{w}_1 \rangle = \langle \overrightarrow{a}_\perp, \overrightarrow{w}_2 \rangle = 0$, получим систему уравнений для нахождения коэффициентов λ_1 и λ_2.

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{w}_1 \rangle = \lambda_1 \langle \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \overrightarrow{w}_2, \overrightarrow{w}_1 \rangle + \langle \overrightarrow{a}_\perp, \overrightarrow{w}_1 \rangle \\ \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{w}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2 \rangle + \lambda_2 \langle \overrightarrow{w}_2, \overrightarrow{w}_2 \rangle + \langle \overrightarrow{a}_\perp, \overrightarrow{w}_2 \rangle \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 12 = 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 - \lambda_2 \\ 12 = 2(3 - \lambda_2) + 5\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Отсюда находим $\overrightarrow{a}_0 = 1 \cdot (1;-1;0) + 2 \cdot (2;0;1) = (5,-1,2)$ и $\overrightarrow{a}_\perp = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{a}_0 = (6;0;0) - (5,-1,2) = (1,1,-2)$.

Ответ. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_0 + \overrightarrow{a}_\perp$, где $\overrightarrow{a}_0 = (5,-1,2)$ и $\overrightarrow{a}_\perp = (1,1,-2)$.

Пример. В $\mathbb{R}^4$ подпространство W задано как линейная оболочка двух векторов $\overrightarrow{w}_1 = (1,0,3,5)$ и $\overrightarrow{w}_2 = (1,3,0,-1)$. Перпендикулярен ли подпространству W вектор $\overrightarrow{v} = (-3,1,1,0)$?

Решение. Вектор $\overrightarrow{v}$ перпендикулярен подпространству W тогда и только тогда, когда он перпендикулярен векторам $\overrightarrow{w}_1$ и $\overrightarrow{w}_2$. Поэтому достаточно проверить, равны ли нулю скалярные произведения $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_1 \rangle$ и $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_2 \rangle$. Вычислим их:

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_1 \rangle = 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 0,$$
$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_2 \rangle = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0.$$

Ответ. Да, вектор $\overrightarrow{v}$ перпендикулярен подпространству W.

6.19.1. В пространстве $\mathbb{R}^2$ подпространство W задано как линейная оболочка одного вектора $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу ортогонального проектора на W и проекцию вектора $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ на W.

6.19.2. В пространстве $\mathbb{R}^2$ подпространство W задано как линейная оболочка одного вектора $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу ортогонального проектора на W и проекцию вектора $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ на W.

6.19.3. В пространстве $\mathbb{R}^2$ подпространство W задано как линейная оболочка одного вектора $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу ортогонального проектора на W и проекцию вектора $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ на W.

6.19.4. В пространстве $\mathbb{R}^3$ подпространство W задано как линейная оболочка одного вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу ортогонального проектора на W и проекцию вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ на W.

6.19.5. В пространстве $\mathbb{R}^3$ подпространство W задано как линейная оболочка двух векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу ортогонального проектора на W и проекцию вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ на W.

6.19.6. В пространстве $\mathbb{R}^3$ подпространство W задано как линейная оболочка двух векторов $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу ортогонального проектора на W и проекцию вектора $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ на W.

6.19.7. В пространстве $\mathbb{R}^4$ подпространство W задано как линейная оболочка двух векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу ортогонального проектора на W и проекцию вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ на W.

6.19.8. В пространстве $\mathbb{R}^4$ подпространство W задано как линейная оболочка трех векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу ортогонального проектора на W и проекцию вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ на W.

6.19.9. В пространстве $\mathbb{R}^3$ подпространство W задано уравнением $x_1 + x_1 + x_3 = 0$. Найти матрицу ортогонального проектора на W и проекцию вектора $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ на W.

6.19.10. В пространстве $\mathbb{R}^3$ подпространство W задано как линейная оболочка четырех векторов $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу ортогонального проектора на W и проекцию вектора $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ на W.

6.19.11. В пространстве $\mathbb{R}^3$ подпространство W задано как линейная оболочка пяти векторов $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 112 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу ортогонального проектора на W и проекцию вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ на W.

6.19.12. При каких значениях параметров a и b матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$ является матрицей ортогонального проектора?

6.19.13. При каких значениях параметров a и b матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$ является матрицей ортогонального проектора?

6.19.14. При каких значениях параметров a и b матрица $\begin{pmatrix} \frac{4}{13} & b \\ -\frac{6}{13} & a \end{pmatrix}$ является матрицей ортогонального проектора?

6.19.15. При каких значениях параметров a и b матрица $\begin{pmatrix} \frac{16}{17} & -\frac{4}{17} \\ a & b \end{pmatrix}$ является матрицей ортогонального проектора?

7. Ответы

1.1.1. Да, 5.

1.1.2. Нет.

1.1.3. Да, -3.

1.1.4. Нет.

1.1.5. При $k = 0$. Собственное число 3.

1.1.6. При $k = -4$. Собственное число -1.

1.1.7. При $k = -4$. Собственное число 2.

1.1.8. Таких k не существует.

1.1.9. При $k = 0$. Собственное число 3.

1.1.10. Нет решений.

1.1.11. При $k = -2$. Собственное число -1.

1.1.12. При $k = -1$. Собственное число 0.

1.1.15. Собственные числа: 4, -1. Соответствующие собственные векторы: $\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2C \\ 3C \end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.16. Собственные числа: -2, 2. Соответствующие собственные векторы: $\begin{pmatrix} C \\ 3C \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -C \\ C \end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.17. Собственные числа: 5, -2. Соответствующие собственные векторы: $\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4C \\ 3C \end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.18. Собственные числа: -5, 0. Соответствующие собственные векторы: $\begin{pmatrix} -2C \\ C \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1C \\ 2C \end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.19. Собственные числа: $-1-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}-1$. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-2-\sqrt{5}\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}\sqrt{5}-2\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.20. Собственные числа: $-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}1-\sqrt{\frac{3}{2}}\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1+\sqrt{\frac{3}{2}}\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.21. Собственные числа: $2+i\sqrt{3}$, $2-i\sqrt{3}$. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-\frac{i}{\sqrt{3}}\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{3}}\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.22. Собственные числа: i, $-i$. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-1-i\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1+i\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.23. Собственное число 1 кратности 2. Соответствующие собственные векторы $C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.24. Собственное число 2 кратности 2. Соответствующие собственные векторы $C\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.25. Собственное число -3 кратности 2. Соответствующие собственные векторы $C\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.26. Собственные числа: 2, 1, 0. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-5\\-1\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.27. Собственные числа: -1, 1, 0. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.28. Собственные числа: 3, 2, 1. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.29. Собственные числа: 3, -2, 1. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.30. Собственные числа: 3, 2, -1. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.31. Собственные числа: -2, 2, -1. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.32. Собственные числа: 2, -1, 1. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.33. Собственные числа: -2 кратности 1 и 1 кратности 2. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $C_1\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, где $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое.

1.1.34. Собственные числа: 2 кратности 2 и 1 кратности 1. Соответствующие собственные векторы: $C_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, где $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое.

1.1.35. Собственные числа: 3 кратности 1 и 2 кратности 2. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$,

$C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое.

1.1.36. Собственные числа: 3 кратности 1 и -1 кратности 2. Соответствующие собственные векторы: $C \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое.

1.1.37. Собственные числа: 4 кратности 1 и -1 кратности 2. Соответствующие собственные векторы: $C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое.

1.1.38. Собственные числа: 2 кратности 2 и 1 кратности 1. Собственные векторы: $C \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ для $\lambda = 2$, $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ для $\lambda = 1$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.39. Собственные числа: -3 кратности 1 и 2 кратности

2. Собственные векторы: $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ для $\lambda=-3$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ для $\lambda=2$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.40. Собственные числа: -1, i, $-i$. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-1-i\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-1+i\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.1.41. Собственные числа: 2, i, $-i$. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1+i\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1-i\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.2.1. Собственные числа: -6, -1. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.2.2. Собственные числа: -5, 5. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.2.3. Собственные числа: -4, 1. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.2.4. Собственные числа: 6, -4. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.2.5. Собственные числа: 3, -2. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число.

1.2.6. Собственные числа: 3, -1, 0. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, Собственные векторы, образующие ортонормированный базис где C — любое ненулевое вещественное число. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{2}{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}})\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

1.2.7. Собственные числа: 5, -1, 0. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-5\\-1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{5}{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{30}}\\\sqrt{\frac{2}{15}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\sqrt{\frac{2}{3}})\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

1.2.8. Собственные числа: -4, 2, 0. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix}$.

1.2.9. Собственные числа: -4, -1, 0. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

1.2.10. Собственные числа: -2, -1, 1. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

1.2.11. Собственные числа: -2, 2, 1. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}})\end{pmatrix}$.

1.2.12. Собственные числа: 7, -5, 1. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

1.2.13. Собственные числа: 5, -4, 2. Соответствующие собственные векторы: $C\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, где C — любое ненулевое вещественное число. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

1.2.14. Собственные числа: 6 кратности 1 и 0 кратности 2. Соответствующие собственные векторы — это ненулевые векторы вида $C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $C_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ — любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix} (\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

1.2.15. Собственные числа: -3 кратности 2 и 0 кратности 1. Соответствующие собственные векторы — это ненулевые векторы вида $C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $C_1, C_2, C \in \mathbb{R}$ — любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

1.2.16. Собственные числа: 6 кратности 1 и 0 кратности 2. Соответствующие собственные векторы — это ненулевые векторы вида $C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ — любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \sqrt{\frac{5}{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{15}} \end{pmatrix}$.

1.2.17. Собственные числа: 6 кратности 2 и 0 кратности 1. Соответствующие собственные векторы: $C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$C\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, где $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ — любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}})\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\\sqrt{\frac{5}{6}}\\\sqrt{\frac{2}{15}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$.

1.2.18. Собственные числа: 7 кратности 1 и 1 кратности 2. Соответствующие собственные векторы — это ненулевые векторы вида $C\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, где $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ — любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

1.2.19. Собственные числа: -4 кртаности 1 и 2 кратности 2. Соответствующие собственные векторы — это ненулевые векторы вида $C\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, где $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ — любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

1.2.20. Собственные числа: 2 кратности 2 и -1 кратности 1. Соответствующие собственные векторы — это ненулевые векторы вида $C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, где $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ — любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}})\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

1.2.21. Собственные числа: -5 кратности 2 и 1 кратности 1. Соответствующие собственные векторы — это ненулевые векторы вида $C_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, где $C_1, C_2, C \in \mathbb{R}$ — любые, причем $C \neq 0$, а из C_1 и C_2 хотя бы одно ненулевое. Собственные векторы, образующие ортонормированный базис: $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}})\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

1.3.1. 0, 1, 2, все кратности 1.

1.3.2. 0, 1, 3, все кратности 1.

1.3.3. -2, 0, 3, все кратности 1.

1.3.4. 0 кратности 1, 3 кратности 2.

1.3.5. -3, 1, 4, все кратности 1.

1.3.6. -4, 1, 2, все кратности 1.

1.3.7. 1 кратности 1, 2 кратности 2.

1.3.8. -3 кратности 1, 2 кратности 2.

1.3.9. -2, 0, 2, 4, все кратности 1.

1.3.10. -2, 1, 2, 4, все кратности 1.

1.3.11. -4, 1 — оба кратности 1 и 2 кратности 2.

1.3.12. -3, 2 — оба кратности 1 и 1 кратности 2.

1.3.13. -1, 1, $2-i$, $2+i$, все кратности 1.

1.3.14. 2 кратности 2 и однократные $-2-i$, $-2+i$.

1.3.15. -2, 2, $-2-i$, $-2+i$, все кратности 1.

1.3.16. -2, 2 — оба однократные, 1 кратности 3.

1.3.17. -2 кратности 1, 1 кратности 2, 2 кратности 2.

1.3.18. Однократные: -2, -1, 2, и 1 кратности 2.

2.4.1. Да, $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4.2. Да, $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4.3. Да, $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4.4. Да, $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4.5. Нет.

2.4.6. Нет.

2.4.7. Да, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4.8. Да, $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4.9. Нет.

2.4.10. Нет.

2.5.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5.2. $\begin{pmatrix} 190 & -126 \\ 189 & -125 \end{pmatrix}$.

2.5.3. $\begin{pmatrix} -100 & 66 \\ -198 & 131 \end{pmatrix}$.

2.5.4. $\begin{pmatrix} -4105 & -3078 \\ 6156 & 4616 \end{pmatrix}$.

2.5.5. $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

2.5.6. $\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

2.5.7. $\begin{pmatrix} 9 & -20 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$.

2.5.8. $\begin{pmatrix} 9 & -20 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$.

2.5.9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5.10. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2.6.5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.6.6. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

2.6.7. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.6.8. $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

2.6.9. $\begin{pmatrix} \frac{11}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{14}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

2.6.10. $\begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{17}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

2.6.11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

2.6.12. $\begin{pmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{13}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

2.7.1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

2.7.2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

2.7.3. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.7.4. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

2.7.5. $\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

2.7.6. $\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

3.8.1. Да.

3.8.2. Да.

3.8.3. Нет.

3.8.4. Да.

3.8.5. Нет.

3.8.6. Да.

3.8.7. Нет.

3.8.8. Нет.

3.8.9. Да.

3.8.10. Нет.

3.8.11. Нет.

3.8.12. Нет.

4.14.1. Знаконеопределенная.

4.14.2. Отрицательно определенная.

4.14.3. Положительно определенная.

4.14.4. Положительно определенная.

4.14.7. Положительно определена при $m > 4$; ни для какого m не является отрицательно определенной.

4.14.8. Положительно определена при $m < -4$; ни для какого m не является отрицательно определенной.

4.14.9. Ни для какого m не является знакоопределенной.

4.14.10. Ни для какого m не является знакоопределенной.

4.14.11. Ни для какого m не является положительно определенной; отрицательно определена при $-\frac{5}{2} < m < 1$.

4.14.12. Положительно определена при $-1 < m < \frac{5}{2}$; ни для какого m не является отрицательно определенной.

4.14.13. Положительно определена при $-\sqrt{7} < m < \sqrt{7}$; ни для какого m не является отрицательно определенной.

4.14.14. Положительно определена при $-\frac{7}{2\sqrt{2}} < m < \frac{7}{2\sqrt{2}}$; ни для какого m не является отрицательно определенной.

4.15.1. a) $5y_1^2 - 3y_2^2$; b) $5y_1^2$.

4.15.2. a) $3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$; b) $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; c) $6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$; d) $3y_1^2 - 9y_2^2 + 9y_3^2$.

5.16.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.16.2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5.16.3. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.16.4. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5.16.5. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

5.16.6. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

5.16.7. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

5.16.8. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$.

5.16.9. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ -3 & -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$.

5.16.10. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -3 & -1 & \sqrt{5}\end{pmatrix}$.

5.16.11. $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -3 & -1 & \sqrt{5}\end{pmatrix}$.

5.16.12. $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ -3 & 1 & \sqrt{5}\end{pmatrix}$.

5.16.13. Разложение существует при $a > 13$. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & \sqrt{a-13} \end{pmatrix}$.

5.16.14. Разложение существует при $a > -6$. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{a+6} \end{pmatrix}$.

6.19.1. Матрица проектора $\begin{pmatrix} 9/25 & 12/25 \\ 12/25 & 16/25 \end{pmatrix}$, проекция равна $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6.19.4. Матрица проектора $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, проекция равна нулю.

6.19.5. Матрица проектора $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, проекция равна $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6.19.8. Проекция равна $\begin{pmatrix} -5/4 \\ 5/4 \\ 5/4 \\ -5/4 \end{pmatrix}$

6.19.9. Матрица проектора $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, проекция равна $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

6.19.10. Матрица проектора $\begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & -1/3 \\ -1/6 & 5/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, проекция равна $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

6.19.11. Матрица проектора $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, проекция равна $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6.19.12. $a = \frac{9}{25}$, $b = \frac{12}{25}$.

Оглавление

1. Собственные значения и собственные векторы . . . 5
2. Диагонализация матрицы, применения . . 18
3. Линейные операторы . . . 33
4. Квадратичные формы . . . 49
5. Разложение Холецкого . . . 64
6. Подпространства и ортогональные проекторы . . . 70
7. Ответы . . . 83

Учебное издание

Ивин Евгений Александрович,
Попеленский Федор Юрьевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Второй семестр

Учебное пособие для вузов

Подписано в печать 05.02.2021 г.
Формат $60 \times 84/_{16}$. Печать цифровая.
Усл.печ.л. 6,05. Тираж 110 экз. Заказ № 20.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Вологодский научный центр Российской академии наук»
(ФГБУН ВолНЦ РАН)

Россия, 160014, г. Вологда, ул. Горького, 56а
Тел: (8172) 59-78-03, e-mail: common@vscc.ac.ru

ISBN 978-5-93299-497-9

9 785932 994979