МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«Национальный исследовательский**

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ)**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

Направление подготовки: «Фундаментальная информатика и информационные

технологии»

Магистерская программа: «Инженерия программного обеспечения»

**ОТЧЕТ**

по лабораторной работе

**«Блочное LU – разложение для квадратной матрицы»**

**Выполнил:** студент группы382006-1м

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_А.А. Солуянов

**Проверил:**

к.ф.-м. н., доц., доцент каф. МОСТ

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_К.А. Баркалов

Нижний Новгород

2021

Оглавление

[Введение 3](#_Toc72358385)

[Постановка задачи 4](#_Toc72358386)

[Описание метода 4](#_Toc72358387)

[Трудоемкость 5](#_Toc72358388)

[Реализация 6](#_Toc72358389)

[Описание алгоритма 6](#_Toc72358390)

[Схема распараллеливания 8](#_Toc72358391)

[Подтверждение корректности алгоритма 8](#_Toc72358392)

[Результаты 10](#_Toc72358393)

[Тестовая инфраструктура 10](#_Toc72358394)

[Эксперименты 10](#_Toc72358395)

[Заключение 13](#_Toc72358396)

[Литература 14](#_Toc72358397)

# Введение

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является достаточно важной вычислительной задачей (примерно 75% всех расчетных математических задач приходится на их решение). С решением СЛАУ связаны такие задачи, как вычисление определителей, обращение матриц, вычисление собственных значений и собственных векторов матриц, интерполирование, аппроксимация по методу наименьших квадратов, решение систем дифференциальных уравнений и многие другие. Современная вычислительная математика располагает большим арсеналом методов решения СЛАУ, а математическое обеспечение ЭВМ – многими пакетами программ и программными системами, позволяющими решать СЛАУ.

Методы решения СЛАУ можно разделить на две группы:

1. Прямые методы позволяют найти точное решение системы (метод Крамера, разложение Холецкого, метод Гаусса, LU – разложение и т.д.)
2. Итерационные – позволяют получить решение в результате последовательных приближений (методы Зейделя и Якоби,

Очень важно знать методы решения СЛАУ и уметь их применять.

В данной работе рассматривается прямой метод решения СЛАУ – метод LU – разложения.

# Постановка задачи

## Описание метода

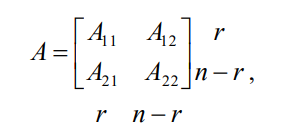
LU-разложение — это представление матрицы в виде , где — нижнетреугольная матрица с единичной диагональю, а — верхнетреугольная матрица. – разложение является модификацией метода Гаусса.

LU-разложение существует только в том случае, когда матрица  {\displaystyle A} обратима, а все ведущие (угловые) главные [миноры](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D1%80_(%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0)) матрицы  {\displaystyle A}[невырождены](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%B2%D1%8B%D1%80%D0%BE%D0%B6%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0).

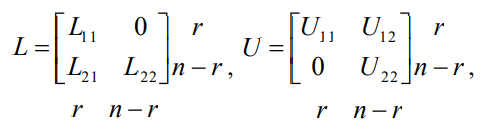
Недостаток стандартного алгоритма LU-разложения обусловлен тем, что его вычисления плохо соответствует правилам использования кэш-памяти − быстродействующей дополнительной памяти компьютера, используемой для хранения копии наиболее часто используемых областей оперативной памяти.

Это связано с тем, что при больших размерах матрицы во время арифметических операций над матрицами зачастую приходится обращаться к элементам, не лежащим вблизи в памяти, что приводит к неэффективному использованию кэша. Возможный способ улучшения ситуации – укрупнение вычислительных операций, приводящее к последовательной обработке некоторых прямоугольных подматриц матрицы

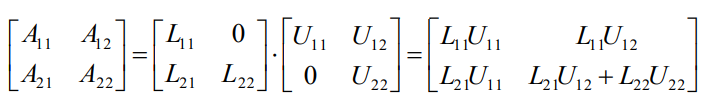
LU-разложение можно организовать так, что матричные операции (реализация которых допускает эффективное использование кэш-памяти) станут основными. Для этого представим матрицу в блочном виде

**

где r – блочный параметр, − подматрица матрицы размера , − размера , − размера , − размера . Компоненты и искомого разложения также запишем в блочном виде



де , , , , , − соответствующего размера подматрицы матриц и . Рассмотрим теперь связь между исходной матрицей и ее разложением в блочном виде.



Блоки и можно найти, применив стандартный метод Гаусса .Затем, решая треугольные системы с несколькими правыми частями будет получено решение для блоков и .

Следующий шаг алгоритма состоит в вычислении редуцированной матрицы , в процессе которого используются ставшие известными блоки и и соотношение .

=

Как следует из данной формулы, LU-разложение редуцированной матрицы совпадает с искомыми блоками матрицы , и для его нахождения можно применить описанный алгоритм рекурсивно.

## Трудоемкость

Приведенная блочная схема требует порядка операций. Оценим долю матричных операций.

Пусть размер матрицы кратен размеру блоку, т.е. .

Операции, не являющиеся матричными, используются при выполнении разложения матрицы на и и требуют операций.

В процессе блочного разложения потребуется решать подобных систем, поэтому доля матричных операций можно оценить как

# Реализация

## Описание алгоритма

Входными параметрами алгоритма является указатель на массив, в котором по строкам хранится матрица и размерность матрицы .

Формат выхода должен выглядеть как два указателя на массивы, в которых по строкам записаны матрицы и .

Весь итерационный процесс можно условно разделить на 4 секции:

1. Подсчет матриц для блоков, располагающихся на диагонали.
2. Вычисление подматрицы , решая верхнюю систему уравнений.
3. Вычисление подматрицы , решая нижнюю систему уравнений.
4. Вычисление редуцированной матрицы

Поэтому удобно выделить эти пункты в отдельные функции (Листинг 1-4).

Листинг 1. Выполнение разложения для диагональных блоков

void DiagonalMatrixDecomposition(int offset, int size, int &N, double\* A, double\* L, double\* U) {

for (int i = 0; i < size; i++) {

for (int j = 0; j < size; j++) {

U[N \* (offset + i) + offset + j] = A[N \* (offset + i) + offset + j];

}

}

for (int i = 0; i < size; i++) {

L[N \* (offset + i) + offset + i] = 1;

for (int k = i + 1; k < size; k++) {

double mu = U[N \* (offset + k) + offset + i] / U[N \* (offset + i) + offset + i];

for (int j = i; j < size; j++) {

U[N \* (offset + k) + offset + j] -= mu \* U[N \* (offset + i) + offset + j];

}

L[N \* (offset + k) + offset + i] = mu;

L[N \* (offset + i) + offset + k] = 0;

}

}

for (int i = 1; i < size; i++) {

for (int j = 0; j < i; j++) {

U[N \* (offset + i) + offset + j] = 0;

}

}

}

Листинг 3. Решение нижней системы уравнений

void SolveLower(int offset, int size, int& N, double\* A, double\* L, double\* U) {

int row\_num;

int col\_num;

#pragma omp parallel for private(row\_num, col\_num)

for (int k = 0; k < N - offset - BLOCK\_SIZE; k++) {

row\_num = (offset + BLOCK\_SIZE + k) \* N;

col\_num = offset;

L[row\_num + col\_num] = A[row\_num + col\_num] / U[offset \* N + col\_num];

for (int i = 1; i < size; i++) {

L[row\_num + col\_num + i] = A[row\_num + col\_num + i];

for (int j = 0; j < i; j++) {

L[row\_num + col\_num + i] -= L[row\_num + j + offset] \* U[(offset + j) \* N + col\_num + i];

}

L[row\_num + col\_num + i] /= U[(offset + i) \* N + col\_num + i];

}

}

}

Листинг 2. Решение верхней системы уравнений

void SolveUpper(int offset, int size, int& N, double\* A, double\* L, double\* U) {

int row\_num;

int col\_num;

#pragma omp parallel for private(row\_num, col\_num)

for (int k = 0; k < N - offset - BLOCK\_SIZE; k++) {

row\_num = offset \* N;

col\_num = offset + BLOCK\_SIZE;

U[row\_num + col\_num + k] = A[row\_num + col\_num + k];

for (int i = 1; i < size; i++) {

U[row\_num + i \* N + col\_num + k] = A[row\_num + i \* N + col\_num + k];

for (int j = 0; j < i; j++) {

U[row\_num + i \* N + col\_num + k] -= L[row\_num + i \* N + j + offset] \* U[row\_num + j \* N + col\_num + k];

}

}

}

}

Листинг 4. Вычисление редуцированной матрицы

void UpdateDiagonalSubmatrix(int offset, int size, int& N, double\* A, double\* L, double\* U) {

int row\_offset;

#pragma omp parallel for if (N - offset > 400) private(row\_offset)

for (int i = 0; i < N - offset - BLOCK\_SIZE; i++) {

row\_offset = (offset + BLOCK\_SIZE + i) \* N;

for (int j = 0; j < N - offset - BLOCK\_SIZE; j++) {

double sum = 0;

for (int k = 0; k < BLOCK\_SIZE; k++) {

sum += L[row\_offset + k + offset] \* U[(offset + k) \* N + offset + BLOCK\_SIZE + j];

}

A[row\_offset + offset + BLOCK\_SIZE + j] -= sum;

}

}

}

В конечном счете целевую функцию можно определить последовательным вызовом всех 4 функций N раз.

## Схема распараллеливания

Так как большая часть алгоритма состоит циклов по обходу матриц, целесообразно применить механизма их распараллеливания.

Для этого была использована библиотека OpenMP, а именно директива «#pragma omp parallel for», с помощью которой циклы были поделены между несколькими потоками для независимого исполнения.

## Подтверждение корректности алгоритма

Для проверки корректности рабы блочного LU – разложения был разработан метод, сравнивающий модуль разности соответствующих значений матрицы и результата перемножения матриц с некоторой малой константой (Листинг 5).

Листинг 5. Проверка корректности алгоритма

#define num(row,col) ((col) + (row) \* size)

void IsCorrect(double\* A, double\* L, double\* U, int size, double eps) {

for (int i = 0; i < size; ++i)

for (int j = 0; j < size; ++j)

{

double sum = 0.;

for (int k = 0; k < size; ++k)

sum += L[num(i, k)] \* U[num(k, j)];

if (abs(A[num(i, j)] - sum) <= eps) {

continue;

}

else {

std::cout << "LU decomposition isn't correct (Error > eps)" << std::endl;

return;

}

}

std::cout << "Correct!" << std::endl;

}

# Результаты

## Тестовая инфраструктура

Вычислительные эксперименты проводились с использованием следующей инфраструктуры (Таблица 1).

|  |  |
| --- | --- |
| Процессор | 4 ядра, Intel(R) Core(TM) i7-8550U CPU @ 1.80GHz 1.99 GHz |
| Память (RAM, Cache) | 8,00 ГБ, L1 – 256 Kb, L2 – 1 Mb, L3 – 8 Mb |
| Операционная система | Windows 10 |
| Среда разработки | Visual Studio 2019 |
| Компилятор | Intel(R) oneAPI DPC++/C++ Compiler 2021.1 |
| Библиотеки | OpenMP |

Таблица 1. Тестовая инфраструктура

## Эксперименты

Опытным путем было установлено для данной тестовой инфраструктуры оптимальным значением размером блока является значение 128 (Таблица 2).

Далее с этим значением были проведены испытания (Таблица 3) зависимости времени выполнения алгоритма с разным числом потоков (от 1 до 4 по числу имеющихся физических ядер).

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
| 1000 | 0,2375 | 0,120495 | 0,107233 | 0,110736 | 0,100439 | 0,156114 |
| 2000 | 1,1369 | 1,12101 | 1,09944 | 1,02716 | 1,14272 | 1,45883 |
| 3000 | 3,28771 | 3,33355 | 3,2762 | 3,09814 | 3,90548 | 5,10591 |
| 4000 | 8,04812 | 8,02063 | 8,0707 | 7,4997 | 10,7184 | 16,7397 |
| 5000 | 19,5974 | 15,3946 | 15,9139 | 14,8915 | 22,6361 | 28,9361 |

Таблица 2. Зависимость времени алгоритма от размера блока

Рисунок 1. Зависимость времени алгоритма от размера блока

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1000 | 0,43813 | 0,290818 | 0,214973 | 0,168785 |
| 2000 | 3,22723 | 1,80779 | 1,54497 | 1,46131 |
| 3000 | 10,3489 | 5,89579 | 4,83923 | 3,95649 |
| 4000 | 25,7261 | 13,6968 | 11,9213 | 11,46 |
| 5000 | 51,8605 | 33,5792 | 25,7835 | 21,5718 |

Таблица 3. Зависимость времени алгоритма от числа потоков при

размере блока 128

Рисунок 2. Зависимость времени алгоритма от числа потоков при размере блока 128

# Заключение

В ходе данной лабораторной работы был изучен прямой метод решения СЛАУ - алгоритм блочного LU – разложения, применяемый к обратимой матрице А с невырожденными главными минорами.

В отличие от стандартного алгоритма LU – разложения, его модификация путем применения блочного разбиения позволила ускорить время работы программы за счет более эффективного использования кэш – памяти и удобного процесса распараллеливания вычислений.

В результате анализа производительности параллельной версии блочного разложения по сравнению с последовательной отмечается ее рост, что говорит об эффективности применяемой схемы.

# Литература

1. Баркалов К.А. Образовательный комплекс «Параллельные численные методы». - Н.Новгород, Изд-во ННГУ 2011.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
3. Белов С.А., Золотых Н.Ю. Численные методы линейной алгебры. – Н.Новгород, Изд-во ННГУ, 2005
4. Вербицкий В.В., Реут В.В. Введение в численные методы алгебры: учебное пособие/ В.В. Вербицкий, В.В. Реут. - Одесса: Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, 2015. - 165 с