

Aproksymacja wielomianami Grama dla węzłów równoodległych

W aproksymacji korzystamy ze specjalnej grupy wielomianów ortogonalnych, zwanych wielomianami ortogonalnymi Grama dla równoodległych węzłów aproksymacyjnych. Użycie wielomianów ortogonalnych zapewnia nam, że macierz współczynników w układzie normalnym jest macierzą diagonalną, dzięki czemu nie musimy prowadzić skomplikowanych obliczeń w celu uzyskania współczynników wielomianu. Wielomiany Grama mają następującą postać:

$$F_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{q^{[s]}}{n^{[s]}} \quad (1)$$

$$F_k^{(n)}(0) = 1 \quad (2)$$

We wzorze (1) $F_k^{(n)}$ oznacza wielomian Grama stopnia k na $n + 1$ węzłach równoodległych.

Dwumian Newtona obliczamy ze wzoru:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \quad (3)$$

Wielomian czynnikowy:

$$x^{[n]} = x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1) = \prod_{j=0}^{n-1} (x-j) \quad (4)$$

Wzór aproksymacyjny oparty na wielomianach Grama ma postać:

$$y_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{c_k}{s_k} F_k^{(n)}(q) \quad (5)$$

Gdzie:

$$q = \frac{x - x_0}{h} \quad (6)$$

$$c_k = \sum_{i=0}^n [F_k^{(n)}(i)]^2 \quad (7)$$

$$s_k = \sum_{i=0}^n y_i F_k^{(n)}(i) \quad (8)$$

h - odległość między sąsiadującymi węzłami (stała wartość, bo z założenia węzły są równoodległe), y_m - wielomian aproksymacyjny stopnia m .

Zad 1. Napisz program, który będzie obliczał współczynniki dla wielomianu aproksymującego dowolnego stopnia. Wymagania:

- a) Stopień wielomianu, liczba węzłów, węzły aproksymacji, wartości aproksymowanej funkcji i funkcja wagowa są podawane w kodzie programu.
- b) W wyniku działania program wypisuje:
 - Liczbę węzłów
 - Współczynniki c_k, s_k
 - Podane węzły aproksymacji (x) i wartości w węzłach (y) oraz obliczone wartości funkcji aproksymującej $y_m(x)$
 - Wartość funkcji aproksymującej w podanym z klawiatury węźle aproksymacji

Przeprowadź aproksymację za pomocą funkcji liniowej i kwadratowej dla danych: (1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 5), (5, 6), (6, 9), (7, 11), (8, 11).

Oblicz wartość funkcji dla $x = 2.5$ i $x = 6.5$.

Zadanie należy oddać na zajęciach (10p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-10 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-10).