

Metody rozwiązywania układów równań liniowych

Metoda eliminacji Gaussa - wybór częściowy (ang. partial pivoting)

Metoda eliminacji Gaussa działa dopóki na przekątnej macierzy nie ma wartości zera. Aby rozwiązać problem „0” na przekątnej można zastosować wybór częściowy (z ang. partial pivoting), który polega na zamianie kolejności wierszy w macierzy tak, by element na diagonalu przez który dzielimy wyliczając mnożnik, był największym elementem w danej kolumnie w sensie wartości bezwzględnej.

Przykład rozwiązywania układu równań z wyborem częściowym dla kilku pierwszych iteracji:

Układ równań:

2	4	2	1	10
2	2	3	3	6
4	2	2	1	6
0	2	1	1	4
4	2	2	1	6
2	2	3	3	6
2	4	2	1	10
0	2	1	1	4
4	2	2	1	6
0	1	2	2.5	3
2	4	2	1	10
0	2	1	1	4
4	2	2	1	6
0	1	2	2.5	3
0	3	1	0.5	7
0	2	1	1	4
4	2	2	1	6
0	3	1	0.5	7
0	1	2	2.5	3
0	2	1	1	4

Układ równań po postępowaniu prostym:

Postępowanie proste:

4	2	2	1	6
0	3	1	0.5	7
0	0	1.66667	2.33333	0.666667
0	0	0	0.2	-0.8

Eliminacja Gaussa-Crouta

Ulepszeniem algorytmu eliminacji Gaussa jest również metoda Crouta:

- na początku eliminacji wyszukujemy w wierszu macierzy AB element o największym module
- zamieniamy miejscami kolumnę ze znalezionym elementem z kolumną zawierającą element głównej przekątnej
- w ten sposób dzielnik będzie posiadał największą wartość ze względu na moduł
- pozbędziemy się sytuacji, gdy może on posiadać wartość 0 (chyba że cały wiersz macierzy AB jest zerowy – ale wtedy równania i tak nie da się rozwiązać).

Zmodyfikowany algorytm eliminacji Gaussa wymaga zapamiętania, które kolumny zostały zamienione – na etapie wyznaczania niewiadomych musimy znać numery wyliczanych niewiadomych.

Wprowadzamy do algorytmu dodatkowy wektor przechowujący informację o numerach kolumn – zamiana miejscami kolumn nie wymaga faktycznego ich przemieszczania w pamięci – wystarczy odwoływać się do nich poprzez wektor kolumn.

Zad 1. Napisz funkcję do rozwiązywania układu n równań liniowych o n niewiadomych z wyborem częściowym (zmiana po wierszach). Rozwiąż następujący układ równań podany w postaci macierzy rozszerzonej (plik MN-6-1.txt):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Wymagania:

- a) Dane pobierane są z pliku.
- b) W wyniku działania program wypisuje:
 - Macierz rozszerzoną (przed obliczeniami)
 - Macierz rozszerzoną (po pierwszym etapie obliczeń – postępowanie proste)
 - Rozwiązanie układu równań ($x_0 - x_n$)

Poprawność działania programu zweryfikować danymi, które podano w przykładzie wyżej.

Zad 2. Napisz funkcję do rozwiązywania układu n równań liniowych o n niewiadomych z wyborem częściowym (zmiana po kolumnach - Eliminacja Gaussa-Crouta). Rozwiąż układ równań podany w pliku tekstowym (MN-6-2.txt).

Wymagania:

- c) Dane pobierane są z pliku.
- d) W wyniku działania program wypisuje:
 - Macierz rozszerzoną (przed obliczeniami)
 - Macierz rozszerzoną (po pierwszym etapie obliczeń – postępowanie proste)
 - wektor przechowujący informację o numerach kolumn
 - Rozwiązanie układu równań ($x_0 - x_n$)

Za każde zadanie można otrzymać 5 pkt.

Zadanie należy oddać na zajęciach (10p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-6 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-6).