

Całkowanie numeryczne

Kwadratury Gaussa-Legendre'a

Kwadratury Gaussa-Legendre'a to kwadratury interpolacyjne, czyli takie, w których funkcja podcałkowa jest przybliżana wielomianem interpolacyjnym. Wzór ogólny na obliczenie wartości całki za pomocą kwadratury można zapisać jako:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (1)$$

gdzie: A_i – wagi węzłów kwadratury, x_i – węzły kwadratury, n – liczba węzłów.

Ważnym ograniczeniem kwadratur tego typu jest fakt, że przedział całkowania musi być równy $[-1,1]$. Wynika to z zastosowania bazy wielomianów ortogonalnych, które są ortogonalne tylko na takim przedziale. Tę niedogodność można jednak łatwo ominąć. Wystarczy przeskalować odpowiednio zadanie wykorzystując fakt, że całkowanie jest operatorem liniowym, więc możemy zapisać:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(t)dt = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (2)$$

gdzie:

$$t_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i \quad (3)$$

Wagi i węzły dla poszczególnych kwadratur są tablicowane:

Liczba węzłów kwadratury	Węzły kwadratury	Wagi węzłów
2	$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$A_1 = 1$ $A_2 = 1$
3	$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ $x_2 = 0$ $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$	$A_1 = 5/9$ $A_2 = 8/9$ $A_3 = 5/9$
4	$x_1 = -\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$ $x_2 = -\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$ $x_3 = \frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$	$A_1 = \frac{1}{36}(18-\sqrt{30})$ $A_2 = \frac{1}{36}(18+\sqrt{30})$ $A_3 = \frac{1}{36}(18+\sqrt{30})$

	$x_4 = \frac{1}{35} \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}$	$A_4 = \frac{1}{36} (18 - \sqrt{30})$
--	---	---------------------------------------

Przykład obliczeń:

Oblicz wartość całki: $\int_{0.5}^{2.5} \sin(x) dx$.

Schemat dwuwęzłowy:

Węzły kwadratury oraz ich wagi:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.57735 & A_1 &= 1 \\ x_2 &= 0.57735 & A_2 &= 1 \end{aligned}$$

Zamiana zmiennych:

$$t_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i = \frac{0.5+2.5}{2} + \frac{2.5-0.5}{2} * (-0.57735) = 0.92265$$

$$t_2 = 2.07735$$

Wynik:

$$\int_{0.5}^{2.5} \sin(x) dx \approx 1.67163$$

Zadanie

Napisz funkcję, która obliczy całkę z dowolnej funkcji podcałkowej za pomocą metody Gaussa-Legendre'a dla kwadratury dwu-, trzy- i cztero-węzłowej. Funkcja podcałkowa powinna być jednym z argumentów dla funkcji obliczających wartość całki. Oblicz następujące całki:

- $\int_{0.5}^{2.5} \sin(x) dx$
- $\int_{0.5}^5 (x^2 + 2x + 5) dx$
- $\int_{0.5}^5 \exp(x) dx$

Porównaj uzyskane wyniki z metodą prostokątów, trapezów i parabol (dla $n=20$) oraz z wynikiem dokładnym.

W sprawozdaniu zamieścić wyniki w postaci zrzutów ekranu z konsoli (porównanie wyników).

Zadanie należy oddać na zajęciach (10p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-4 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-4).