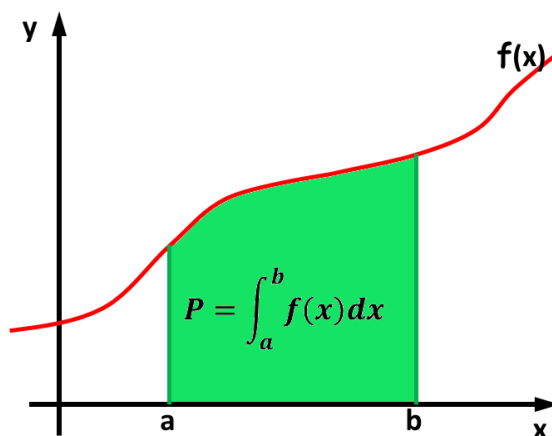


Całkowanie numeryczne

1. Metoda prostokątów

Metoda prostokątów to metoda całkowania, która oparta jest na geometrycznej interpretacji całki (Rys. 1).



Rys. 1. Geometryczna interpretacja całki oznaczonej

Metoda prostokątów polega na przybliżeniu obszaru ograniczonego wykresem funkcji na przedziale $\langle a, b \rangle$ za pomocą n elementarnych prostokątów. Wartość całki w zadanym przedziale $\langle a, b \rangle$ otrzymujemy sumując pola wszystkich prostokątów:

$$\int_a^b f(x) \approx s \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{1}{2}s) \quad (1)$$

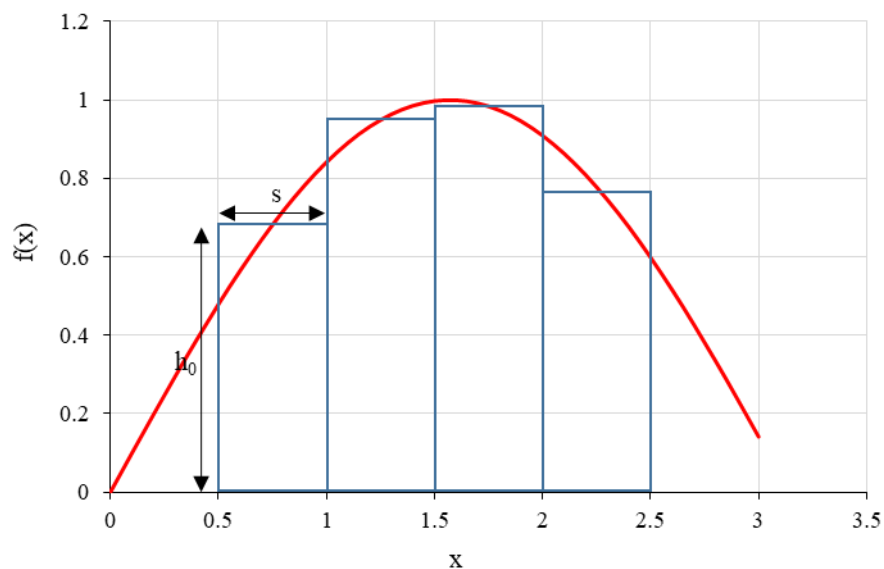
$$s = \frac{b-a}{n} \quad (2)$$

Gdzie: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} = b$

Przykład obliczeń

Dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ oblicz całkę metodą prostokątów na przedziale $\langle 0.5, 2.5 \rangle$ dla $n = 4$.

Podział przybliżanego obszaru na przedziale $\langle 0.5, 2.5 \rangle$ na 4 prostokąty schematycznie przedstawiono na Rys. 2.



Rys. 2. Podział przybliżonego obszaru na prostokąty.

Obliczamy:

$$s = \frac{2.5 - 0.5}{4} = 0.5$$

$$h_0 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}s\right) = \sin(0.5 + 0.25) = 0.682$$

$$h_1 = f\left(x_1 + \frac{1}{2}s\right) = \sin(1 + 0.25) = 0.949$$

$$h_2 = f\left(x_2 + \frac{1}{2}s\right) = \sin(1.5 + 0.25) = 0.984$$

$$h_3 = f\left(x_3 + \frac{1}{2}s\right) = \sin(2.0 + 0.25) = 0.778$$

$$\int_{0.5}^{2.5} \sin(x) dx \approx s(0.682 + 0.949 + 0.984 + 0.778) = 1,6963$$

2. Metoda trapezów

Obliczenie całki metodą trapezów:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b) \quad (3)$$

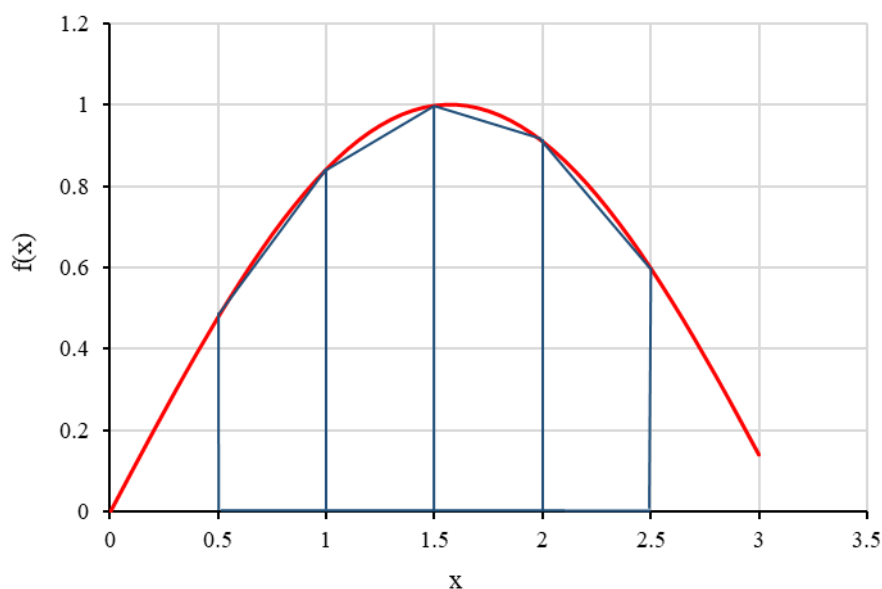
lub

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \quad (4)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx Q(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \cdot (f(x_i) + f(x_{i+1})) \right) \quad (5)$$

Dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ na przedziale $< 0.5, 2.5 >$ oraz dla $n = 4$ otrzymamy:

$$\int_{0.5}^{2.5} \sin(x)dx \approx 1,6436$$



Rys. 3. Podział przybliżanego obszaru na trapezy.

3. Metoda Simpsona (parabol)

Obliczenie całki metodą Simpsona:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (6)$$

Zad 1.

Napisz program, który obliczy całkę z dowolnej funkcji podcałkowej za pomocą metody prostokątów, trapezów i parabol (trzy funkcje). Funkcja podcałkowa powinna być jednym z argumentów dla funkcji obliczających wartość całki daną metodą (8p).

Program powinien wyświetlać:

- Wzór całkowanej funkcji
- Przedział całkowania
- Liczbę przedziałów
- Wynik obliczony metodą prostokątów, trapezów i parabol.

Oblicz następujące całki (dla $n=4$):

- $\int_{0.5}^{2.5} \sin(x) dx$
- $\int_{0.5}^5 (x^2 + 2x + 5) dx$
- $\int_{0.5}^5 \exp(x) dx$

Zad 2.

Przeprowadź analizę zbieżności wymienionych wyżej metod całkowania dla całek z zad1 (2p). Wykonaj wykres uzyskanych wartości w zależności od liczby przedziałów n (jeden wykres na całkę).

W sprawozdaniu zamieścić wyniki w postaci zrzutów ekranu z konsoli i wykres.

Zadanie należy oddać na zajęciach (10p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-3 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-3).