

## 7. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΝ ΑΦΙΞΗΣ

---

Αρκετές τεχνικές μορφοποίησης δέσμης στηρίζονται στην υπόθεση ότι οι κατευθύνσεις άφιξης των εισερχόμενων σημάτων είναι γνωστές στον μορφοποιητή. Αυτό σημαίνει ότι με κάποιον αλγόριθμο γίνεται ο υπολογισμός των κατευθύνσεων άφιξης. Μάλιστα, η παρακολούθηση και εκτίμηση των κατευθύνσεων αυτών θα πρέπει να γίνεται σε πραγματικό χρόνο, γεγονός που σημαίνει ότι, σε ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον όπου οι πηγές εκπομπής σημάτων κινούνται συνεχώς, το σύστημα μορφοποίησης θα πρέπει να ενημερώνεται πολύ γρήγορα για τις νέες κατευθύνσεις άφιξης ώστε να μπορεί να δρα αποτελεσματικά. Οι αλγόριθμοι εκτίμησης των κατευθύνσεων άφιξης (direction of arrival estimation algorithms, DoA estimation algorithms) μπορούν να υλοποιούνται είτε από ξεχωριστά συστήματα είτε από τους ίδιους τους μορφοποιητές δέσμης που χρειάζονται την πληροφορία των κατευθύνσεων άφιξης.

Το θεωρητικό και μαθηματικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίζονται οι αλγόριθμοι αυτοί είναι το ίδιο μ' αυτό των τεχνικών μορφοποίησης δέσμης. Όλοι οι αλγόριθμοι έχουν ως σκοπό την καταγραφή κάποιου όρου ισχύος (π.χ. της μέσης ισχύος εξόδου του συστήματος εκτίμησης) ως συνάρτηση της κατεύθυνσης στο χώρο. Η γραφική παράσταση της ισχύος ως συνάρτηση της κατεύθυνσης ονομάζεται χωρικό φάσμα (spatial spectrum) ή ψευδο-φάσμα (pseudo-spectrum). Προφανώς, οι κατευθύνσεις στις οποίες η ισχύς εμφανίζει μέγιστα είναι οι κατευθύνσεις άφιξης εισερχόμενων σημάτων. Παρακάτω θα δοθεί η περιγραφή των πιο σημαντικών αλγορίθμων εκτίμησης κατευθύνσεων άφιξης εισερχόμενων σημάτων.

### 7.1 Βασικό μοντέλο συστήματος εκτίμησης κατευθύνσεων άφιξης

Σύμφωνα με το βασικό μοντέλο που φαίνεται στο σχήμα 7.1, μια στοιχειοκεραία  $M$  στοιχείων λαμβάνει  $N$  μονοχρωματικά σήματα  $s_n(t)$ ,  $n=1,...,N$ , σε μήκος κύματος  $\lambda$ , ή ισοδύναμα  $N$  αντίστοιχα δείγματα των παραπάνω σημάτων  $s_n(k)$ ,  $n=1,...,N$  που λαμβάνονται ταυτόχρονα. Η παράμετρος  $k$  δηλώνει τον αύξοντα αριθμό δειγματοληψίας (δηλ.  $t=kT_s$ , όπου  $T_s$  η περίοδος δειγματοληψίας). Χωρίς να βλάψουμε τη γενικότητα, η μαθηματική ανάλυση από δω και στο εξής γίνεται θεωρώντας δείγματα των σημάτων. Το κάθε σήμα  $s_n$

εισέρχεται από μια αντίστοιχη κατεύθυνση άφιξης (direction of arrival, DoA) που περιγράφεται στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων είτε από το ζεύγος γωνιών  $(\varphi_n, \vartheta_n)$ , είτε από το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{v}_n = \cos \varphi_n \sin \vartheta_n \vec{x}_o + \sin \varphi_n \sin \vartheta_n \vec{y}_o + \cos \vartheta_n \vec{z}_o. \quad (7.1)$$

Επίσης, κάθε σήμα  $s_n$  αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση διαμόρφωσης πληροφορίας  $g_n$ , καθώς και σε ένα διάνυσμα οδήγησης της μορφής

$$\vec{a}_n = \begin{bmatrix} \exp[j2\pi f_c \tau_1(\varphi_n, \vartheta_n)] \\ \exp[j2\pi f_c \tau_2(\varphi_n, \vartheta_n)] \\ \vdots \\ \exp[j2\pi f_c \tau_M(\varphi_n, \vartheta_n)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_n) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_n) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_n) \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

όπου  $\beta$  η φασική σταθερά διάδοσης σημάτων συχνότητας  $f_c$  στον ελεύθερο χώρο, και

$$\tau_m(\varphi_n, \vartheta_n) = \frac{\vec{r}_m \cdot \vec{v}_n}{c}, \quad m=1, \dots, M \quad (7.3)$$

το χρονικό διάστημα από την στιγμή που το μέτωπο κύματος του  $s_n$  αγγίζει το  $m$ -στο στοιχείο (η θέση του οποίου δηλώνεται από το διάνυσμα θέσης  $\vec{r}_m$ ) μέχρι τη στιγμή που το μέτωπο κύματος αγγίζει την αρχή  $O$  του συστήματος συντεταγμένων. Με βάση τα διανύσματα οδήγησης όλων των εισερχόμενων σημάτων ορίζεται ένας  $M \times N$  πίνακας

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_2) & \cdots & \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_N) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_2) & \cdots & \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_2) & \cdots & \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_N) \end{bmatrix} = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_N], \quad (7.4)$$

που ονομάζεται πίνακας οδήγησης των εισερχόμενων σημάτων. Να σημειωθεί επίσης ότι για κάθε υποθετικό εισερχόμενο σήμα, με κατεύθυνση άφιξης που δηλώνεται είτε από το ζεύγος γωνιών  $(\varphi, \vartheta)$ , είτε από το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{v} = \cos \varphi \sin \vartheta \vec{x}_o + \sin \varphi \sin \vartheta \vec{y}_o + \cos \vartheta \vec{z}_o, \quad (7.5)$$

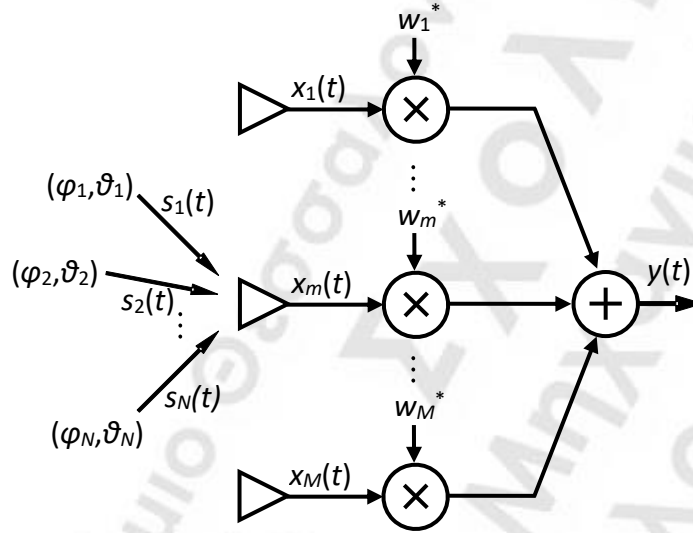
μπορεί να οριστεί ένα διάνυσμα οδήγησης της μορφής

$$\vec{a}(\varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} \exp[j2\pi f_c \tau_1(\varphi, \vartheta)] \\ \exp[j2\pi f_c \tau_2(\varphi, \vartheta)] \\ \vdots \\ \exp[j2\pi f_c \tau_M(\varphi, \vartheta)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}) \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

όπου

$$\tau_m(\varphi, \vartheta) = \frac{\vec{r}_m \cdot \vec{v}}{c}, \quad m=1, \dots, M \quad (7.7)$$

το χρονικό διάστημα από την στιγμή που το μέτωπο κύματος του σήματος αγγίζει το  $m$ -στο στοιχείο μέχρι τη στιγμή που το μέτωπο κύματος αγγίζει την αρχή  $O$  του συστήματος συντεταγμένων.



**Σχήμα 7.1** Βασικό μπλοκ διάγραμμα συστήματος εκτίμησης κατευθύνσεων άφιξης.

Τα εισερχόμενα σήματα  $s_n(k)$  επάγουν στην είσοδο του καθενός στοιχείου της στοιχειοκεραίας σήμα  $x_m(k)$ ,  $m=1,...,M$ . Το κάθε σήμα εισόδου  $x_m$  πολλαπλασιάζεται με τη συζυγή μιγαδική τιμή ενός βάρους  $w_m$ . Τότε η έξοδος από το σύστημα προκύπτει από τη σχέση

$$y(k) = \sum_{m=1}^M w_m^* x_m(k). \quad (7.8)$$

Στην άνω σχέση δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούνται οι συζυγείς μιγαδικές τιμές των βαρών, αλλά οι ίδιες οι τιμές των βαρών. Η χρήση συζυγών τιμών στα βάρη προτιμάται για να υπάρχει ομοιομορφία στην παρακάτω μαθηματική ανάλυση όπου θα γίνει χρήση άλγεβρας πινάκων. Έτσι, η άνω σχέση μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$y(k) = \bar{w}^H \bar{x}(k), \quad (7.9)$$

όπου

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

είναι το διάνυσμα των μιγαδικών βαρών, και

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_M(k) \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

είναι το διάνυσμα των σημάτων εισόδου (ή πιο απλά διάνυσμα εισόδου) των στοιχείων της στοιχειοκεραίας, ενώ ο δείκτης  $H$  δηλώνει την ανάστροφη συζυγή μορφή ενός διανύσματος ή πίνακα. Ουσιαστικά, η (7.9) εκφράζει την έξοδο  $y(k)$  ως εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\bar{w}$  και  $\bar{x}(k)$ . Σύμφωνα με τη θεωρία μορφοποίησης δέσμης, η μέση ισχύς εξόδου του συστήματος θα είναι

$$\hat{P}_y = \bar{w}^H \bar{R}_{xx} \bar{w}, \quad (7.12)$$

όπου

$$\bar{R}_{xx} = E[\bar{x}(k)\bar{x}^H(k)] \quad (7.13)$$

είναι  $M \times M$  ερμιτιανός πίνακας και ονομάζεται *πίνακας συσχέτισης των σημάτων εισόδου* της στοιχειοκεραίας.

Με τη βοήθεια της (6.98), θα έχουμε

$$\bar{x}(k) = \bar{A}\bar{g}(k) + \bar{n}(k) = \bar{x}_s(k) + \bar{n}(k), \quad (7.14)$$

όπου  $\bar{x}_s(k)$  είναι η συνιστώσα του διανύσματος εισόδου που οφείλεται μόνο στα εισερχόμενα σήματα,

$$\bar{g}(k) = \begin{bmatrix} g_1(k) \\ g_2(k) \\ \vdots \\ g_N(k) \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

είναι το διάνυσμα διαμόρφωσης (modulating vector) της πληροφορίας που μεταφέρουν όλα τα εισερχόμενα σήματα, και

$$\bar{n}(k) = \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ \vdots \\ n_M(k) \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

το διάνυσμα των σημάτων θορύβου που αναπτύσσονται στα στοιχεία της στοιχειοκεραίας. Θεωρώντας ότι το κάθε εισερχόμενο σήμα είναι ασυσχέτιστο ως προς τα σήματα θορύβου, από την ανάλυση που έγινε στην παράγραφο 6.2, προκύπτει

$$\bar{R}_{xx} = \bar{A}\bar{R}_{gg}\bar{A}^H + \bar{R}_{nn} = \bar{R}_{ss} + \bar{R}_{nn}, \quad (7.17)$$

όπου  $\bar{R}_{ss}$  είναι ο πίνακας συσχέτισης των συνιστωσών των σημάτων εισόδου που οφείλονται στα εισερχόμενα σήματα,

$$\bar{R}_{gg} = E[\bar{g}(k)\bar{g}^H(k)] \quad (7.18)$$

είναι ο πίνακας συσχέτισης των συναρτήσεων διαμόρφωσης, και

$$\bar{R}_{nn} = E[\bar{n}(k)\bar{n}^H(k)] \quad (7.19)$$

ο πίνακας συσχέτισης των σημάτων θορύβου. Θεωρώντας ότι τα σήματα θορύβου έχουν μηδενική μέση τιμή και διακύμανση (variance)  $\sigma^2$ , και επιπλέον ότι είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους, από την ανάλυση που έγινε στην παράγραφο 6.1, προκύπτει

$$\bar{R}_{nn} = \sigma^2 \bar{I}_{M \times M}, \quad (7.20)$$

όπου  $\bar{I}_{M \times M}$  είναι  $M \times M$  ταυτοτικός πίνακας. Αντικαθιστώντας την (7.17) στην (7.12), παίρνουμε

$$\hat{P}_y = \bar{W}^H \bar{A} \bar{R}_{gg} \bar{A}^H \bar{W} + \bar{W}^H \bar{R}_{nn} \bar{W} = \hat{P}_{ys} + \hat{P}_{yn}, \quad (7.21)$$

όπου

$$\hat{P}_{ys} = \bar{W}^H \bar{A} \bar{R}_{gg} \bar{A}^H \bar{W} \quad (7.22)$$

είναι η μέση ισχύς εξόδου λόγω των εισερχόμενων σημάτων, και

$$\hat{P}_{yn} = \bar{W}^H \bar{R}_{nn} \bar{W} \quad (7.23)$$

είναι η μέση ισχύς εξόδου λόγω των σημάτων θορύβου.

Η παραπάνω ανάλυση μπορεί να επαναληφθεί με τη χρήση μπλοκ δειγματοληψίας. Οι σχέσεις που θα προκύψουν θα έχουν παρόμοια μορφή μ' αυτές που είδαμε πιο πάνω, αλλά οι τιμές που προκύπτουν απ' αυτές ισχύουν μόνο για το συγκεκριμένο μπλοκ δειγματοληψίας. Μπορεί να δει κανείς τέτοιου είδους υπολογισμούς στο κεφάλαιο μορφοποίησης δέσμης.

## **7.2 Αλγόριθμος εκτίμησης Bartlett**

Προκαταβολικά θα πρέπει να αναφέρουμε ότι ο αλγόριθμος αυτός στηρίζεται στην αρχή λειτουργίας του συμβατικού μορφοποιητή δέσμης (conventional beamformer ή delay-and-sum beamformer). Θεωρώντας ότι τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας είναι ισοτροπικές πηγές, το διάγραμμα ακτινοβολίας είναι στην ουσία το μέτρο του παράγοντα διάταξης της στοιχειοκεραίας, ο οποίος εκφράζεται από τη γενική σχέση

$$AF(\varphi, \vartheta) = \bar{W}^H \bar{a}(\varphi, \vartheta), \quad (7.24)$$

όπου το διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}(\varphi, \vartheta)$  προς την τυχαία κατεύθυνση παρατήρησης δίνεται από την (7.6). Είναι ευνόητο ότι ορίζοντας την κατάλληλη τιμή για το  $\bar{W}$ , καθορίζεται η κατεύθυνση στην οποία λαμβάνεται το μέγιστο του κύριου λοβού. Αν η κατεύθυνση αυτή συμπίπτει με την κατεύθυνση άφιξης κάποιου εισερχόμενου σήματος τότε η ισχύς εξόδου του συστήματος μεγιστοποιείται. Με σκοπό να διερευνήσουμε όλες τις δυνατές κατευθύνσεις για πιθανά εισερχόμενα σήματα, θα πρέπει να γίνεται σάρωση ως προς τις γωνίες  $\vartheta$  και  $\varphi$ , και συνεπώς το  $\bar{W}$  θα πρέπει να μεταβάλλεται με συγκεκριμένο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται η σάρωση αυτή. Επιλέγεται λοιπόν διάνυσμα βαρών ίσο με το διάνυσμα οδήγησης της εκάστοτε κατεύθυνσης  $(\varphi_e, \vartheta_e)$  που θέλουμε να διερευνήσουμε, δηλαδή

$$\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{a}}_e = \begin{bmatrix} \exp[j2\pi f_c \tau_1(\varphi_e, \vartheta_e)] \\ \exp[j2\pi f_c \tau_2(\varphi_e, \vartheta_e)] \\ \vdots \\ \exp[j2\pi f_c \tau_M(\varphi_e, \vartheta_e)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_e) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_e) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_e) \end{bmatrix}, \quad (7.25)$$

όπου

$$\vec{v}_e = \cos \varphi_e \sin \vartheta_e \vec{x}_o + \sin \varphi_e \sin \vartheta_e \vec{y}_o + \cos \vartheta_e \vec{z}_o \quad (7.26)$$

είναι το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα της υπό διερεύνηση κατεύθυνσης. Αντικαθιστώντας την (7.25) στην (7.24), παίρνουμε

$$AF(\varphi, \vartheta) = \sum_{m=1}^M \exp[j\beta \vec{r}_m \cdot (\vec{v} - \vec{v}_e)]. \quad (7.27)$$

Εύκολα μπορεί να αντιληφθεί κανείς ότι ο παράγοντας διάταξης παίρνει τη μέγιστη τιμή, ίση με  $M$ , όταν  $\vec{v} = \vec{v}_e$ , δηλ. κατά την κατεύθυνση που δηλώνει το διάνυσμα οδήγησης της (7.25). Αυτό μ' άλλα λόγια σημαίνει ότι, εφαρμόζοντας το διάνυσμα βαρών της (7.25), έχουμε στρέψει τον κύριο λοβό του διαγράμματος ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας κατά την κατεύθυνση  $(\varphi_e, \vartheta_e)$ . Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι, αν απ' αυτή την κατεύθυνση εισέρχεται κάποιο σήμα, τότε η μέση ισχύς εξόδου του συστήματος μεγιστοποιείται. Πράγματι, θεωρώντας ότι έχουμε ένα μόνο εισερχόμενο σήμα  $s_d(k)$ , που αντιστοιχεί σε συνάρτηση διαμόρφωσης πληροφορίας  $g_d(k)$  και έχει διάνυσμα οδήγησης

$$\bar{\mathbf{a}}_d = \begin{bmatrix} \exp[j2\pi f_c \tau_1(\varphi_d, \vartheta_d)] \\ \exp[j2\pi f_c \tau_2(\varphi_d, \vartheta_d)] \\ \vdots \\ \exp[j2\pi f_c \tau_M(\varphi_d, \vartheta_d)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_d) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_d) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_d) \end{bmatrix}, \quad (7.28)$$

τότε το σήμα εξόδου (βλέπε σχέση (6.148)) θα είναι

$$y_d(k) = \bar{\mathbf{a}}_e^H \bar{\mathbf{a}}_d g_d(k) = g_d(k) \sum_{m=1}^M \exp[j\beta \vec{r}_m \cdot (\vec{v}_d - \vec{v}_e)], \quad (7.29)$$

και η αντίστοιχη μέση ισχύς εξόδου ίση με

$$\hat{P}_{yd} = E[|y_d(k)|^2] = E[|g_d(k)|^2] |\bar{\mathbf{a}}_e^H \bar{\mathbf{a}}_d|^2 = \hat{P}_{sd} \left| \sum_{m=1}^M \exp[j\beta \vec{r}_m \cdot (\vec{v}_d - \vec{v}_e)] \right|^2, \quad (7.30)$$

όπου

$$\hat{P}_{sd} = E[|g_d(k)|^2] = E[|s_d(k)|^2] \quad (7.31)$$

είναι η μέση ισχύς του εισερχόμενου σήματος. Προφανώς, ο όρος

$$\bar{a}_e^H \bar{a}_d = \sum_{m=1}^M \exp[j\beta \bar{r}_m \cdot (\bar{v}_d - \bar{v}_e)] \quad (7.32)$$

παίζει το ρόλο μιγαδικού συντελεστή ενίσχυσης, με τον οποίο η εισερχόμενη πληροφορία εμφανίζεται στην έξοδο του συστήματος. Από την άνω σχέση, είναι ευνόητο ότι γενικά ισχύει

$$|\bar{a}_e^H \bar{a}_d| \leq M, \quad (7.33)$$

ενώ ειδικότερα θα έχουμε ισότητα, δηλ. το μέτρο του συντελεστή ενίσχυσης μεγιστοποιείται (ίσο με  $M$ ), όταν  $\bar{w} = \bar{a}_d$  ή ισοδύναμα όταν  $\bar{v}_e = \bar{v}_d$ . Τότε, από την (7.29) προκύπτει σήμα εξόδου με μέγιστο πλάτος

$$|y_d(k)|_{\max} = M |g_d(k)|, \quad (7.34)$$

και επιπλέον, όπως προκύπτει από την (7.30), η ισχύς εξόδου λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της ίση με

$$\hat{P}_{yd, \max} = M^2 \hat{P}_{sd}. \quad (7.35)$$

Στην πιο γενική περίπτωση, όπου έχουμε  $N$  εισερχόμενα σήματα  $s_n(k)$ ,  $n=1, \dots, N$ , από τις (7.9) και (7.25) προκύπτει σήμα εξόδου ίσο με

$$y(k) = \bar{a}_e^H \bar{x}(k), \quad (7.36)$$

το οποίο λόγω της (7.14) παίρνει τη μορφή

$$y(k) = \bar{a}_e^H \bar{A} \bar{g}(k) + \bar{a}_e^H \bar{n}(k). \quad (7.37)$$

Επίσης, από τις (7.12) και (7.25) προκύπτει η μέση ισχύς εξόδου ίση με

$$\hat{P}_y = \bar{a}_e^H \bar{R}_{xx} \bar{a}_e, \quad (7.38)$$

η οποία λόγω της (7.17) και (7.20) παίρνει τη μορφή

$$\hat{P}_y = \bar{a}_e^H \bar{A} \bar{R}_{gg} \bar{A}^H \bar{a}_e + \sigma^2 M. \quad (7.39)$$

Προφανώς ο πρώτος όρος του αθροίσματος της άνω σχέσης εκφράζει τη μέση ισχύ εξόδου λόγω των εισερχόμενων σημάτων, δηλαδή

$$\hat{P}_{ys} = \bar{a}_e^H \bar{A} \bar{R}_{gg} \bar{A}^H \bar{a}_e, \quad (7.40)$$

ενώ ο δεύτερος όρος εκφράζει τη μέση ισχύ εξόδου λόγω των σημάτων θορύβου, δηλαδή

$$\hat{P}_{yn} = \sigma^2 M. \quad (7.41)$$

Όπως φαίνεται, από την τελευταία σχέση, η μέση ισχύς θορύβου ( $\sigma^2$ ) κάθε στοιχείου της στοιχειοκεραίας αθροίζεται στην έξοδο του συστήματος, με αποτέλεσμα να έχουμε μια μέση ισχύ εξόδου λόγω θορύβου ενισχυμένη κατά  $M$  φορές σε σχέση με τη μέση ισχύ θορύβου κάθε στοιχείου της στοιχειοκεραίας. Όσο για τη διερεύνηση της (7.40), μπορούμε

να θεωρήσουμε ότι τα εισερχόμενα σήματα  $s_n(k)$ ,  $n=1,...,N$ , είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους. Τότε για τον πίνακα συσχέτισης των συναρτήσεων διαμόρφωσης θα έχουμε

$$\begin{aligned}\bar{R}_{gg} &= E[\bar{g}(k)\bar{g}^H(k)] = E\left[\begin{bmatrix} g_1(k) \\ g_2(k) \\ \vdots \\ g_N(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1^*(k) & g_2^*(k) & \cdots & g_N^*(k) \end{bmatrix}\right] = \\ &= \begin{bmatrix} E[g_1(k)g_1^*(k)] & E[g_1(k)g_2^*(k)] & \cdots & E[g_1(k)g_N^*(k)] \\ E[g_2(k)g_1^*(k)] & E[g_2(k)g_2^*(k)] & \cdots & E[g_2(k)g_N^*(k)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[g_N(k)g_1^*(k)] & E[g_N(k)g_2^*(k)] & \cdots & E[g_N(k)g_N^*(k)] \end{bmatrix},\end{aligned}$$

και τελικά

$$\bar{R}_{gg} = \begin{bmatrix} \hat{p}_{s1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{p}_{s2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{p}_{sN} \end{bmatrix}, \quad (7.42)$$

όπου

$$\hat{p}_{sn} = E[g_n(k)g_n^*(k)] = E[s_n(k)s_n^*(k)], \quad n=1,...,N \quad (7.43)$$

είναι η μέση ισχύς του  $n$ -οστού εισερχόμενου σήματος. Με τη βοήθεια των (7.4) και (7.42), η (7.40) δίνει

$$\begin{aligned}\hat{p}_{ys} &= \bar{a}_e^H \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_{s1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{p}_{s2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{p}_{sN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_1^H \\ \bar{a}_2^H \\ \vdots \\ \bar{a}_N^H \end{bmatrix} \bar{a}_e = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{a}_e^H \bar{a}_1 & \bar{a}_e^H \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_e^H \bar{a}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_{s1} \bar{a}_1^H \bar{a}_e \\ \hat{p}_{s2} \bar{a}_2^H \bar{a}_e \\ \vdots \\ \hat{p}_{sN} \bar{a}_N^H \bar{a}_e \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N \hat{p}_{sn} \bar{a}_e^H \bar{a}_n \bar{a}_n^H \bar{a}_e,\end{aligned}$$

και τελικά

$$\hat{p}_{ys} = \sum_{n=1}^N \hat{p}_{sn} |\bar{a}_e^H \bar{a}_n|^2. \quad (7.44)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (7.2) και (7.25), η άνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$\hat{p}_{ys} = \sum_{n=1}^N \hat{p}_{sn} |\bar{a}_e^H \bar{a}_n|^2 = \sum_{n=1}^N \left( \hat{p}_{sn} \left| \sum_{m=1}^M \exp[j\beta \vec{r}_m \cdot (\vec{v}_n - \vec{v}_e)] \right|^2 \right), \quad (7.45)$$



και λόγω της (7.39), η ολική μέση ισχύς εξόδου παίρνει αντίστοιχα τη μορφή

$$\hat{P}_y = \sum_{n=1}^N \hat{P}_{sn} |\bar{a}_e^H \bar{a}_n|^2 + \sigma^2 M = \sum_{n=1}^N \left( \hat{P}_{sn} \left| \sum_{m=1}^M \exp[j\beta \vec{r}_m \cdot (\vec{v}_n - \vec{v}_e)] \right|^2 \right) + \sigma^2 M. \quad (7.46)$$

Προφανώς στις δυο άνω σχέσεις, ο όρος

$$|\bar{a}_e^H \bar{a}_n|^2 = \left| \sum_{m=1}^M \exp[j\beta \vec{r}_m \cdot (\vec{v}_n - \vec{v}_e)] \right|^2 \quad (7.47)$$

παίζει ρόλο συντελεστή ενίσχυσης, με τον οποίο η ισχύς του  $n$ -οστού εισερχόμενου σήματος εμφανίζεται στην έξοδο του συστήματος. Από την (7.47) φαίνεται ότι γενικά ισχύει

$$|\bar{a}_e^H \bar{a}_n|^2 \leq M^2, \quad (7.48)$$

ενώ ειδικότερα θα έχουμε ισότητα, δηλ. το μέτρο του συντελεστή ενίσχυσης μεγιστοποιείται (ίσο με  $M^2$ ), όταν  $\bar{w} = \bar{a}_n$  ή ισοδύναμα όταν  $\vec{v}_e = \vec{v}_n$ . Τότε, από την (7.45) προκύπτει τοπικό μέγιστο για την  $\hat{P}_{ys}$ . Εννοείται ότι αντίστοιχο τοπικό μέγιστο θα εμφανίζει και η συνολική μέση ισχύς εξόδου  $\hat{P}_y$ , μόνο που, όπως φαίνεται από την (7.46), το τοπικό αυτό μέγιστο θα υπερτίθεται σε ένα σταθερό υπόβαθρο ισχύος θορύβου ίσο με  $\sigma^2 M$ .

Η διαδικασία, τελικά, που υλοποιεί ο αλγόριθμος Bartlett είναι απλή: Για δεδομένη τιμή του  $\bar{R}_{xx}$ , εκτελούμε σάρωση ως προς τις γωνίες  $\vartheta$  και  $\varphi$ , με συγκεκριμένα βήματα σάρωσης για καθεμιά από τις δυο γωνίες. Για κάθε ζεύγος τιμών  $(\varphi, \vartheta)$ , κατασκευάζουμε το διάνυσμα οδήγησης και το θεωρούμε ως διάνυσμα βάρους του συστήματος, ενώ παράλληλα καταγράφουμε τη μέση ισχύ εξόδου  $\hat{P}_y$  (ή την υπολογίζουμε από την (7.38)). Για κάθε τοπικό μέγιστο της  $\hat{P}_y$ , καταγράφονται το αντίστοιχο διάνυσμα βάρους και οι αντίστοιχες τιμές των γωνιών  $\vartheta$  και  $\varphi$ , οι οποίες εκφράζουν στην ουσία τη ζητούμενη κατεύθυνση άφιξης κάποιου εισερχόμενου σήματος. Η γραφική παράσταση της  $\hat{P}_y$  ως συνάρτηση των γωνιών  $\vartheta$  και  $\varphi$  εκφράζει το χωρικό φάσμα που αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου.

### **7.3 Μέθοδος εκτίμησης Capon**

Η μέθοδος αυτή έχει την ίδια αρχή λειτουργίας μ' αυτή του μορφοποιητή MVDR. Ο αντικειμενικός στόχος της μεθόδου είναι διπλός. Αφενός στοχεύει στο να διατηρήσει το κάθε εισερχόμενο σήμα απαραμόρφωτο (distortionless response) στην έξοδο και αφετέρου στο να ελαχιστοποιήσει τη διακύμανση του σήματος εξόδου (minimum variance) που πρακτικώς μεταφράζεται στην ελαχιστοποίηση της μέσης ισχύος της ανεπιθύμητης συνιστώσας του σήματος εξόδου. Η ανεπιθύμητη συνιστώσα είναι στην ουσία η συνισταμένη όλων των εισερχόμενων σημάτων συμπεριλαμβανομένου του θορύβου πλην του συγκεκριμένου εισερχόμενου σήματος το οποίο ζητούμε να λάβουμε απαραμόρφωτο στην έξοδο.

Έστω ότι  $\bar{w}$  είναι το ζητούμενο διάνυσμα βαρών, το οποίο επιτυγχάνει να διατηρήσει στην έξοδο απαραμόρφωτο ένα συγκεκριμένο εισερχόμενο σήμα  $s_d$ . Σύμφωνα με την (6.148), η συνιστώσα εξόδου που οφείλεται στο  $s_d$  είναι

$$y_d(k) = \bar{w}^H \bar{a}_d g_d(k), \quad (7.49)$$

όπου  $g_d$  η συνάρτηση διαμόρφωσης της πληροφορίας που μεταφέρει το  $s_d$ , και  $\bar{a}_d$  το διάνυσμα οδήγησης του  $s_d$  που εκφράζεται από την (7.28). Επειδή ζητούμε η  $g_d$  να φτάνει στην έξοδο χωρίς παραμόρφωση, θα πρέπει η  $y_d$  να ισούται με την  $g_d$  πολλαπλασιασμένη με έναν σταθερό αριθμό  $G_E$  (estimator gain), δηλαδή

$$y_d(k) = G_E g_d(k). \quad (7.50)$$

Το αν ο  $G_E$  είναι πραγματικός ή μιγαδικός δεν έχει σημασία, αρκεί να είναι σταθερός. Από τη σύγκριση των (7.49) και (7.50), προκύπτει ότι πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$\bar{w}^H \bar{a}_d = G_E. \quad (7.51)$$

Επιπλέον, θα πρέπει να ελαχιστοποιείται η μέση ισχύς  $\hat{P}_y$  (σχέση (7.12)) του συνολικού σήματος εξόδου κάτω από τον περιορισμό που θέτει η (7.51). Δεδομένου του περιορισμού αυτού, η μέση ισχύς της συνιστώσας  $y_d$  θα έχει μια δεδομένη τιμή, η οποία δεν μπορεί να ελαχιστοποιηθεί. Συνεπώς, η ελαχιστοποίηση της  $\hat{P}_y$  ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της μέσης ισχύος της ανεπιθύμητης συνιστώσας του σήματος εξόδου που είχε τεθεί αρχικά.

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε, λοιπόν, είναι η ελαχιστοποίηση της  $\hat{P}_y$  κάτω από τον περιορισμό που θέτει η (7.51). Η λύση βρίσκεται με εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange. Θα πρέπει λοιπόν να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση, η οποία θα περιέχει τον περιορισμό που εκφράζεται μέσω της (7.51). Η συνάρτηση αυτή, όμως, θα πρέπει να είναι πραγματική, οπότε της δίνουμε τη μορφή

$$\Phi(\bar{w}, \bar{w}^H, \lambda) = \hat{P}_y + \lambda (G_E - \bar{w}^H \bar{a}_d) + [\lambda (G_E - \bar{w}^H \bar{a}_d)]^H, \quad (7.52)$$

όπου  $\lambda$  είναι πολλαπλασιαστής Lagrange. Αναλύοντας την άνω σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{w}, \bar{w}^H, \lambda) &= \bar{w}^H \bar{R}_{xx} \bar{w} + \lambda (G_E - \bar{w}^H \bar{a}_d) + \lambda^* (G_E^* - \bar{a}_d^H \bar{w}) = \\ &= \bar{w}^H \bar{R}_{xx} \bar{w} + \lambda G_E - \lambda \bar{w}^H \bar{a}_d + \lambda^* G_E^* - \lambda^* \bar{a}_d^H \bar{w}. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Εφόσον η  $\Phi(\bar{w}, \bar{w}^H, \lambda)$  είναι βαθμωτή πραγματική συνάρτηση, η ελάχιστη τιμή αυτής προκύπτει από εφαρμογή της συνθήκης (βλέπε κεφάλαιο μορφοποίησης δέσμης, σχέση (6.207))

$$\frac{\partial f(\bar{z}, \bar{z}^H)}{\partial \bar{z}^H} = \bar{0}, \quad (7.54)$$

οπότε παίρνουμε

$$\frac{\partial [\Phi(\bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{w}}^H, \lambda)]}{\partial \bar{\mathbf{w}}^H} = \bar{\mathbf{R}}_{xx} \bar{\mathbf{w}} - \lambda \bar{\mathbf{a}}_d = \bar{\mathbf{0}} \quad \text{ή} \quad \bar{\mathbf{R}}_{xx} \bar{\mathbf{w}} = \lambda \bar{\mathbf{a}}_d,$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{\mathbf{w}} = \lambda \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d. \quad (7.55)$$

Να σημειωθεί ότι η άνω παραγωγή έγινε ακολουθώντας διάταξη αριθμητή (numerator layout) και ότι χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες παραγωγίσης (βλέπε κεφάλαιο μορφοποίησης δέσμης, σχέσεις (6.209) και (6.210))

$$\frac{\partial (\bar{\mathbf{z}}^H \bar{\mathbf{a}})}{\partial \bar{\mathbf{z}}^H} = \bar{\mathbf{a}} \quad (7.56)$$

και

$$\frac{\partial (\bar{\mathbf{z}}^H \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{z}})}{\partial \bar{\mathbf{z}}^H} = \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{z}}. \quad (7.57)$$

Λαμβάνοντας την ανάστροφη συζυγή μορφή και στα δυο μέλη της (7.55), και έχοντας υπόψη ότι ο  $\bar{\mathbf{R}}_{xx}$  είναι ερμιτιανός ( $\bar{\mathbf{R}}_{xx} = \bar{\mathbf{R}}_{xx}^H$  και  $\bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} = (\bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1})^H$ ), έχουμε

$$\bar{\mathbf{w}}^H = (\lambda \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d)^H = \lambda^* \bar{\mathbf{a}}_d^H (\bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1})^H,$$

και τελικά

$$\bar{\mathbf{w}}^H = \lambda^* \bar{\mathbf{a}}_d^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}. \quad (7.58)$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και τα δυο μέλη της άνω σχέσης με το  $\bar{\mathbf{a}}_d$  και χρησιμοποιώντας την (7.51), παίρνουμε

$$\lambda^* = \frac{G_E}{\bar{\mathbf{a}}_d^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{G_E^*}{(\bar{\mathbf{a}}_d^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d)^H} = \frac{G_E^*}{\bar{\mathbf{a}}_d^H (\bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1})^H \bar{\mathbf{a}}_d},$$

και τελικά

$$\lambda = \frac{G_E^*}{\bar{\mathbf{a}}_d^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d}. \quad (7.59)$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange. Τελικά, αντικαθιστώντας την (7.59) στην (7.55), βρίσκουμε τα ζητούμενα βάρη τροφοδοσίας ίσα με

$$\bar{\mathbf{w}} = G_E^* \frac{\bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d}{\bar{\mathbf{a}}_d^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d}. \quad (7.60)$$

Αντικαθιστώντας την άνω σχέση στην (7.12), παίρνουμε

$$\hat{\mathbf{P}}_y = \bar{\mathbf{w}}^H \bar{\mathbf{R}}_{xx} \bar{\mathbf{w}} = \left( G_E^* \frac{\bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d}{\bar{\mathbf{a}}_d^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d} \right)^H \bar{\mathbf{R}}_{xx} \left( G_E^* \frac{\bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d}{\bar{\mathbf{a}}_d^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d} \right) = |G_E|^2 \frac{\bar{\mathbf{a}}_d^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{xx} \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d}{(\bar{\mathbf{a}}_d^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d)(\bar{\mathbf{a}}_d^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{a}}_d)},$$

και τελικά

$$\hat{P}_y = \frac{|G_E|^2}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d}. \quad (7.61)$$

Επειδή η παράμετρος  $G_E$  είναι αυθαίρετη μπορούμε να θέσουμε την τιμή της ίση με τη μονάδα ( $G_E = 1$ ), οπότε οι σχέσεις (7.60) και (7.61) γίνονται αντίστοιχα

$$\bar{w} = \frac{\bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d} \quad (7.62)$$

και

$$\hat{P}_y = \frac{1}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d}. \quad (7.63)$$

Προφανώς, η τελευταία σχέση εκφράζει την ελάχιστη τιμή ισχύος που μπορούμε να λάβουμε, διατηρώντας ταυτόχρονα στα αρχικά επίπεδα την ισχύ του οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος που έχει διάνυσμα οδήγησης ίσο με  $\bar{a}_d$ , αρκεί βέβαια τα βάρη τροφοδοσίας να οριστούν όπως ορίζει η (7.62). Αν από την κατεύθυνση  $(\varphi, \vartheta)$  εισέρχεται όντως κάποιο σήμα, τότε η  $\hat{P}_y$  όπως προκύπτει από την (7.63) θα είναι και πάλι η ελάχιστη δυνατή, αλλά συγκρινόμενη με τις τιμές ισχύος στις γειτονικές τιμές των γωνιών  $\vartheta$  και  $\varphi$  θα είναι μεγαλύτερη, δηλαδή θα εμφανίζει τοπικό μέγιστο.

Η διαδικασία, τελικά, που υλοποιεί η μέθοδος Capon είναι η εξής: Για δεδομένη τιμή του  $\bar{R}_{xx}$ , εκτελούμε σάρωση ως προς τις γωνίες  $\vartheta$  και  $\varphi$ , με συγκεκριμένα βήματα σάρωσης για καθεμιά από τις δυο γωνίες. Για κάθε ζεύγος τιμών  $(\varphi, \vartheta)$ , κατασκευάζουμε το αντίστοιχο διάνυσμα οδήγησης και το θεωρούμε ως διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}_d$  υποθετικού εισερχόμενου σήματος  $s_d$ , ενώ παράλληλα εφαρμόζουμε στο σύστημα τιμές βαρών που προκύπτουν από την (7.62) και καταγράφουμε τη μέση ισχύ εξόδου  $\hat{P}_y$  (ή την υπολογίζουμε από την (7.63)). Αν από την κατεύθυνση  $(\varphi, \vartheta)$  δεν εισέρχεται κάποιο σήμα, η  $\hat{P}_y$  θα έχει χαμηλή τιμή. Αντίθετα, αν η κατεύθυνση  $(\varphi, \vartheta)$  είναι πράγματι κατεύθυνση άφιξης εισερχόμενου σήματος, τότε η  $\hat{P}_y$  εμφανίζει τοπικό μέγιστο. Για κάθε τοπικό μέγιστο της ισχύος αυτής, καταγράφονται το αντίστοιχο διάνυσμα βάρους και οι αντίστοιχες τιμές του ζεύγους  $(\varphi, \vartheta)$ , που εκφράζει την κατεύθυνση άφιξης υπαρκτού εισερχόμενου σήματος. Η γραφική παράσταση της  $\hat{P}_y$  ως συνάρτηση των γωνιών  $\vartheta$  και  $\varphi$  εκφράζει το χωρικό φάσμα ισχύος που αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου.

*Παράδειγμα εφαρμογής εκτιμητών κατεύθυνσης άφιξης τύπου Bartlett και Capon:*

Εκτιμητές DoA τύπου Bartlett και Capon χρησιμοποιούν στοιχειοκεραία 5 ιστροπικών στοιχείων ( $M=5$ ) που διατάσσονται στον  $z$ -άξονα του συστήματος συντεταγμένων και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d=\lambda/2$ . Και στους δυο εκτιμητές εισέρχονται δυο ασυσχέτιστα μεταξύ τους σήματα ( $N=2$ ) με αντίστοιχες γωνίες άφιξης ( $\alpha$ )  $\vartheta_1=70^\circ$  και  $\vartheta_2=110^\circ$  ( $1^\circ$  σενάριο άφιξης), και ( $\beta$ )  $\vartheta_1=85^\circ$  και  $\vartheta_2=95^\circ$  ( $2^\circ$  σενάριο άφιξης). Η μέτρηση των γωνιών γίνεται ως

προς τον z-άξονα, δηλ. είναι γωνίες ανύψωσης (elevation angles). Αν το καθένα από τα δυο σήματα είναι ισχύος 0.1W και στα δυο σενάρια άφιξης, ενώ τα σήματα θορύβου είναι μηδενικής μέσης τιμής, ασυσχέτιστα μεταξύ τους και ασυσχέτιστα ως προς τα εισερχόμενα σήματα, και ισχύος 0.001W, να υπολογιστεί το χωρικό φάσμα ισχύος των δυο εκτιμητών για καθένα από τα δυο σενάρια.

Λύση:

Πρακτικώς, αυτό που ζητείται είναι οι γραφικές παραστάσεις ως προς τη γωνία  $\vartheta$  της μέσης ισχύος που περιγράφεται αντίστοιχα από την (7.38) για τον εκτιμητή Bartlett και την (7.63) για τον εκτιμητή Capon. Και στους δυο εκτιμητές γίνεται χρήση του πίνακα  $\bar{R}_{xx}$ , ο οποίος σε πραγματικό χρόνο κατασκευάζεται από δειγματοληψία των σημάτων εισόδου. Εφόσον δεν έχουμε στη διάθεσή μας τέτοια δεδομένα, θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε θεωρητικά τον πίνακα αυτό. Ο πίνακας οδήγησης  $\bar{A}$  για δυο εισερχόμενα σήματα, με γωνίες άφιξης  $\vartheta_1$  και  $\vartheta_2$ , θα έχει με τη βοήθεια της (7.4) τη μορφή

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_2) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_2) \\ \exp(j\beta \vec{r}_3 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta \vec{r}_3 \cdot \vec{v}_2) \\ \exp(j\beta \vec{r}_4 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta \vec{r}_4 \cdot \vec{v}_2) \\ \exp(j\beta \vec{r}_5 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta \vec{r}_5 \cdot \vec{v}_2) \end{bmatrix}, \quad (7.64)$$

όπου

$$\vec{v}_n = \cos \varphi_n \sin \vartheta_n \vec{x}_o + \sin \varphi_n \sin \vartheta_n \vec{y}_o + \cos \vartheta_n \vec{z}_o, \quad n=1,2 \quad (7.65)$$

και

$$\vec{r}_1 = 0 \vec{z}_o, \quad \vec{r}_2 = \frac{\lambda}{2} \vec{z}_o, \quad \vec{r}_3 = \lambda \vec{z}_o, \quad \vec{r}_4 = \frac{3\lambda}{2} \vec{z}_o \quad \text{και} \quad \vec{r}_5 = 2\lambda \vec{z}_o. \quad (7.66)$$

Αντικαθιστώντας τις (7.65) και (7.66) στην (7.64), παίρνουμε τον πίνακα οδήγησης για τα σενάρια που αντιμετωπίζουμε ίσο με

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp(j\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j\pi \cos \vartheta_2) \\ \exp(j2\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j2\pi \cos \vartheta_2) \\ \exp(j3\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j3\pi \cos \vartheta_2) \\ \exp(j4\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j4\pi \cos \vartheta_2) \end{bmatrix}. \quad (7.67)$$

Εφόσον τα εισερχόμενα σήματα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους, θα ισχύει η (7.42), η οποία για την περίπτωση που αντιμετωπίζουμε παίρνει τη μορφή

$$\bar{R}_{gg} = 0.1 \bar{I}_{2 \times 2}. \quad (7.68)$$

Επιπλέον, σύμφωνα με την (7.20), θα ισχύει

$$\bar{R}_{nn} = 0.001 \bar{I}_{5 \times 5}. \quad (7.69)$$

Τελικά, με αντικατάσταση των (7.67), (7.68) και (7.69) στην (7.17), προκύπτει

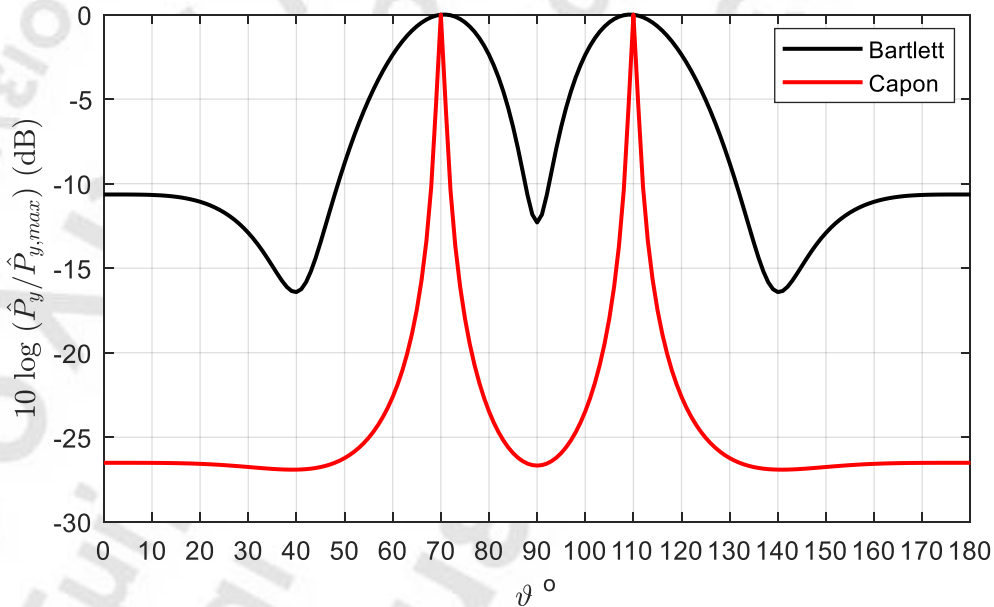
$$\bar{R}_{xx} = 0.1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp(j\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j\pi \cos \vartheta_2) \\ \exp(j2\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j2\pi \cos \vartheta_2) \\ \exp(j3\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j3\pi \cos \vartheta_2) \\ \exp(j4\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j4\pi \cos \vartheta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp(j\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j\pi \cos \vartheta_2) \\ \exp(j2\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j2\pi \cos \vartheta_2) \\ \exp(j3\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j3\pi \cos \vartheta_2) \\ \exp(j4\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j4\pi \cos \vartheta_2) \end{bmatrix}^H + \quad (7.70)$$

$$+ 0.001 \bar{I}_{5 \times 5}.$$

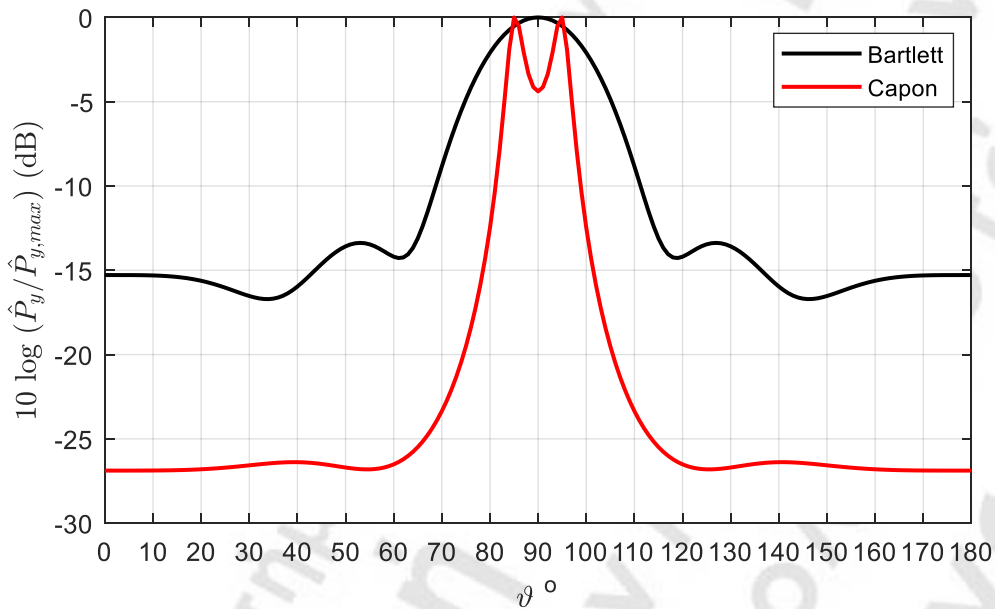
Τα  $\bar{a}_e$  και  $\bar{a}_d$ , αντιστοίχως στις (7.38) και (7.63), είναι τα διανύσματα οδήγησης που προκύπτουν καθώς σαρώνουμε ως προς τη γωνία  $\vartheta$ . Η μορφή των διανυσμάτων αυτών μπορεί να βρεθεί αντικαθιστώντας την (7.5), που εκφράζει την τυχαία κατεύθυνση στο χώρο, και τις (7.66) στην (7.6), οπότε παίρνουμε

$$\bar{a}_e = \bar{a}_d = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\pi \cos \vartheta) \\ \exp(j2\pi \cos \vartheta) \\ \exp(j3\pi \cos \vartheta) \\ \exp(j4\pi \cos \vartheta) \end{bmatrix}. \quad (7.71)$$

Οι γραφικές παραστάσεις των (7.38) και (7.63) για το 1<sup>ο</sup> σενάριο, όπου  $\vartheta_1=70^\circ$  και  $\vartheta_2=110^\circ$ , δίνονται στο σχήμα 7.2, ενώ για το 2<sup>ο</sup> σενάριο, όπου  $\vartheta_1=85^\circ$  και  $\vartheta_2=95^\circ$ , δίνονται στο σχήμα 7.3. Για να υπάρξει αντικειμενική σύγκριση μεταξύ των χωρικών φασμάτων που δίνουν αντίστοιχα οι δυο εκτιμητές, στον κατακόρυφο άξονα των γραφικών παραστάσεων εμφανίζεται η μέση ισχύς εξόδου για κάθε γωνία άφιξης κανονικοποιημένη ως προς τη μέγιστη μέση ισχύ εξόδου (που λαμβάνεται σε κάποια/ες γωνία/ες άφιξης) και εκφρασμένη σε μονάδες dB.



**Σχήμα 7.2** Χωρικά φάσματα ισχύος εκτιμητών Bartlett και Capon για  $\vartheta_1=70^\circ$  και  $\vartheta_2=110^\circ$ .



**Σχήμα 7.3** Χωρικά φάσματα ισχύος εκτιμητών Bartlett και Capon για  $\vartheta_1=85^\circ$  και  $\vartheta_2=95^\circ$ .

Το γενικό συμπέρασμα που μπορεί προκύψει από τα δυο άνω σχήματα αφορά στη διακριτική ικανότητα των δυο μεθόδων. Φαίνεται ότι όταν οι γωνίες άφιξης απέχουν μεταξύ τους ικανή απόσταση, και οι δυο μέθοδοι έχουν την ικανότητα να ξεχωρίσουν μεταξύ τους τα δυο εισερχόμενα σήματα, χωρίς να παραβλέπουμε βέβαια το γεγονός ότι ο εκτιμητής Capon δίνει τοπικά μέγιστα που ξεχωρίζουν μεταξύ τους καλύτερα. Όταν όμως οι γωνίες άφιξης των δυο σημάτων πλησιάζουν ή μια την άλλη, η μέθοδος Capon εξακολουθεί και τις διαχωρίζει μεταξύ τους, ενώ η μέθοδος Bartlett αντιλαμβάνεται ένα ψευδές εισερχόμενο σήμα με γωνία άφιξης ανάμεσα στις πραγματικές γωνίες  $\vartheta_1$  και  $\vartheta_2$ . Η ανικανότητα αυτή του εκτιμητή Bartlett να διαχωρίσει σήματα που έχουν μικρή γωνιακή απόσταση μεταξύ τους, οφείλεται στο άνοιγμα μισής ισχύος (*HPBW*) του κύριου λοβού της στοιχειοκεραίας. Στην ουσία το *HPBW* αποτελεί μέτρο της διακριτικής ικανότητας του εκτιμητή Bartlett. Αν τα σήματα έχουν διαφορά γωνιών άφιξης  $|\vartheta_1 - \vartheta_2| > \text{HPBW}$ , ο εκτιμητής Bartlett μπορεί και τα διαχωρίζει μεταξύ τους. Αυτό όμως δε συμβαίνει σε περιπτώσεις που ισχύει  $|\vartheta_1 - \vartheta_2| \leq \text{HPBW}$ , με αποτέλεσμα να προκύπτει στο χωρικό φάσμα ένα μέγιστο ισχύος ανάμεσα στις γωνίες  $\vartheta_1$  και  $\vartheta_2$ . Φυσικά, η λύση σε περιπτώσεις γωνιών άφιξης που απέχουν λίγο μεταξύ τους είναι η χρήση στοιχειοκεραιών με περισσότερα στοιχεία, έτσι ώστε να μειωθεί το *HPBW*.

#### **7.4 Μέθοδος εκτίμησης μέσω γραμμικής πρόβλεψης**

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην τεχνική της *γραμμικής πρόβλεψης* (linear prediction, LP) που χρησιμοποιείται στην επεξεργασία σήματος. Η τεχνική γραμμικής πρόβλεψης (LP) αναφέρεται πολλές φορές στη βιβλιογραφία και ως *αυτοπαλινδρομική μέθοδος*



(autoregressive method). Για να προσαρμόσουμε την τεχνική αυτή στο σύστημα εκτίμησης κατευθύνσεων άφιξης, αναπτύσσουμε το παρακάτω σκεπτικό (βλέπε σχήμα 7.4):

(α) Θεωρούμε ένα από τα  $M$  στοιχεία της στοιχειοκεραίας του συστήματος, έστω το  $q$ -στο, ως στοιχείο αναφοράς. Αυτό σημαίνει αφενός ότι το θεωρούμε τοποθετημένο στη αρχή του συστήματος συντεταγμένων, άρα ισχύει

$$\vec{r}_q = \vec{0}, \quad (7.72)$$

και αφετέρου ότι λαμβάνει την πληροφορία του οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος  $s_d(k)$  χωρίς προήγηση ή καθυστέρηση φάσης (δηλ.  $x_q(k)=g_d(k)$ ), δεδομένου ότι ισχύει

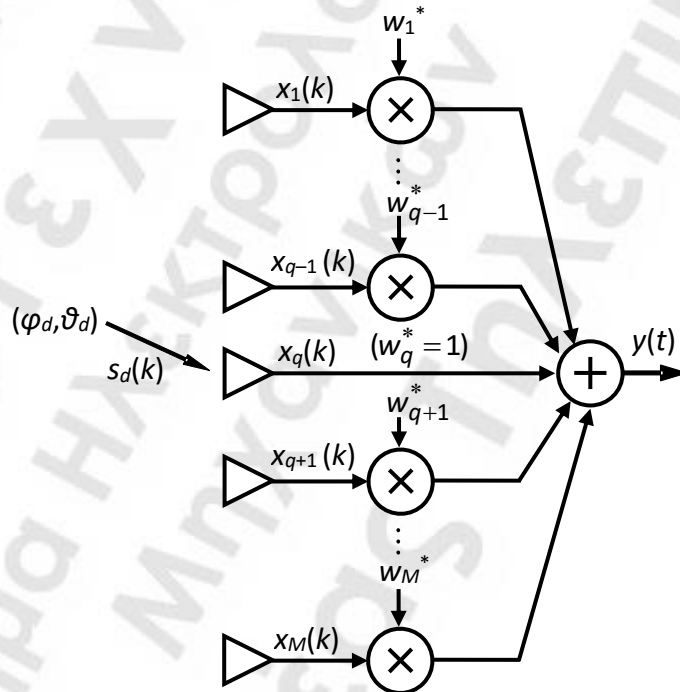
$$\tau_q(\varphi_d, \vartheta_d) = \frac{\vec{r}_q \cdot \vec{v}_d}{c} = 0. \quad (7.73)$$

Επειδή, λοιπόν, η πληροφορία δεν αλλοιώνεται λόγω διαφοράς φάσης, θέλουμε το σήμα εισόδου  $x_q(k)$  του στοιχείου αναφοράς να φτάνει αυτούσιο στην έξοδο του συστήματος, γεγονός που σημαίνει ότι απαιτούμε να ισχύει

$$w_q = 1, \quad (7.74)$$

ή ισοδύναμα

$$w_q^* = 1. \quad (7.75)$$



Σχήμα 7.4 Μπλοκ διάγραμμα εκτιμητή LP.



(β) Θεωρούμε ότι τα υπόλοιπα  $M-1$  στοιχεία της στοιχειοκεραίας επίσης λαμβάνουν την πληροφορία του  $s_d(k)$ , αλλά το κάθε στοιχείο με διαφορετική διαφορά φάσης ως προς το  $q$ -στο στοιχείο, γεγονός που σημαίνει ότι η πληροφορία φτάνει αλλοιωμένη στην έξοδο λόγω των ποικίλων διαφορών φάσης που εισάγουν τα  $M-1$  στοιχεία. Για να το αποφύγουμε αυτό, αναζητούμε κατάλληλες τιμές για τα βάρη των  $M-1$  στοιχείων, έτσι ώστε ο γραμμικός συνδυασμός των σημάτων εισόδου των  $M-1$  στοιχείων με συντελεστές τα βάρη να προσεγγίζει το  $-x_q(k)$  (δηλ. κάνουμε γραμμική πρόβλεψη του  $-x_q(k)$ ). Με άλλα λόγια και επειδή έχουμε θεωρήσει  $w_q=1$ , ζητούμε τις τιμές των υπόλοιπων βαρών  $w_m$ ,  $m=1, \dots, q-1, q+1, \dots, M$ , έτσι ώστε να ισχύει

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq q}}^M w_m^* x_m(k) \cong -x_q(k). \quad (7.76)$$

Τότε η ποσότητα

$$\varepsilon(k) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq q}}^M w_m^* x_m(k) + x_q(k), \quad (7.77)$$

η οποία εκφράζει το σφάλμα της γραμμικής πρόβλεψης του  $-x_q$ , θα ελαχιστοποιείται. Η τελευταία σχέση, με τη βοήθεια της (7.75), δίνει

$$\varepsilon(k) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq q}}^M w_m^* x_m(k) + w_q^* x_q(k) = \sum_{m=1}^M w_m^* x_m(k) = y(k), \quad (7.78)$$

που σημαίνει ότι το σφάλμα της γραμμικής πρόβλεψης του  $-x_q$  ισούται με το σήμα εξόδου του εκτιμητή. Το διαφορετικό, λοιπόν, σ' αυτόν τον εκτιμητή είναι ότι η έξοδος δεν εμφανίζει την εισερχόμενη πληροφορία πολλαπλασιασμένη με κάποιον συντελεστή ενίσχυσης, όπως συμβαίνει στους προηγούμενους εκτιμητές. Αντιθέτως, η έξοδος εκφράζει το σφάλμα της γραμμικής πρόβλεψης του  $-x_q$ , γεγονός που σημαίνει ότι στόχος του εκτιμητή αυτού είναι η ελαχιστοποίηση του σήματος εξόδου (δηλ. του σφάλματος πρόβλεψης). Η μέση τετραγωνική τιμή του σφάλματος αυτού (μέσο τετραγωνικό σφάλμα, mean squared error) θα ισούται με τη μέση ισχύ εξόδου, δηλαδή

$$E[|\varepsilon(k)|^2] = \hat{P}_y = \bar{w}^H \bar{R}_{xx} \bar{w}. \quad (7.79)$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος πρόβλεψης σημαίνει ελαχιστοποίηση της μέσης ισχύος εξόδου. Η ελαχιστοποίηση αυτή θα πρέπει να γίνει κάτω από τον περιορισμό που εκφράζεται από την (7.74) (ή ισοδύναμα την (7.75)), ο οποίος με χρήση διανυσμάτων μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\bar{w}^H \bar{e}_q = 1, \quad (7.80)$$

όπου

$$\bar{e}_q = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \right\} M \text{ στοιχεία} \quad (7.81)$$

είναι μοναδιαίο διάνυσμα της  $q$ -στης διάστασης ενός  $M$ -διάστατου διανυσματικού χώρου (δηλ. το  $q$ -στο στοιχείο του διανύσματος είναι ίσο με τη μονάδα ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδενικά).

Η ελαχιστοποίηση της  $\hat{P}_y$  υπό τον περιορισμό που θέτει η (7.80) πραγματοποιείται με εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange. Θα πρέπει λοιπόν να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση, η οποία θα περιέχει τον περιορισμό που εκφράζεται μέσω της (7.80). Η συνάρτηση αυτή, όμως, θα πρέπει να είναι πραγματική, οπότε της δίνουμε τη μορφή

$$\Phi(\bar{w}, \bar{w}^H, \lambda) = \hat{P}_y + \lambda(1 - \bar{w}^H \bar{e}_q) + [\lambda(1 - \bar{w}^H \bar{e}_q)]^H, \quad (7.82)$$

όπου  $\lambda$  είναι πολλαπλασιαστής Lagrange. Αναλύοντας την άνω σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{w}, \bar{w}^H, \lambda) &= \bar{w}^H \bar{R}_{xx} \bar{w} + \lambda(1 - \bar{w}^H \bar{e}_q) + \lambda^*(1 - \bar{e}_q^H \bar{w}) = \\ &= \bar{w}^H \bar{R}_{xx} \bar{w} + \lambda - \lambda \bar{w}^H \bar{e}_q + \lambda^* - \lambda^* \bar{e}_q^H \bar{w}. \end{aligned} \quad (7.83)$$

Να σημειωθεί ότι στην άνω σχέση χρησιμοποιείται η ανάστροφη συζυγής μορφή του μοναδιαίου διανύσματος  $\bar{e}_q$ . Επειδή το  $\bar{e}_q$  έχει μόνο πραγματικά και όχι μιγαδικά στοιχεία, ισχύει

$$\bar{e}_q^H = \bar{e}_q^T = \overbrace{[0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]}^{M \text{ στοιχεία}}. \quad (7.84)$$

Παρόλα αυτά, γίνεται χρήση της μορφής  $\bar{e}_q^H$  και όχι της  $\bar{e}_q^T$  για λόγους ομοιομορφίας των εκφράσεων. Εφόσον η  $\Phi(\bar{w}, \bar{w}^H, \lambda)$  είναι βαθμωτή πραγματική συνάρτηση, η ελάχιστη τιμή αυτής προκύπτει από εφαρμογή της συνθήκης (7.54), οπότε παίρνουμε

$$\frac{\partial [\Phi(\bar{w}, \bar{w}^H, \lambda)]}{\partial \bar{w}^H} = \bar{R}_{xx} \bar{w} - \lambda \bar{e}_q = \bar{0} \quad \text{ή} \quad \bar{R}_{xx} \bar{w} = \lambda \bar{e}_q,$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{w} = \lambda \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{e}_q. \quad (7.85)$$

Η άνω παραγωγή έγινε ακολουθώντας διάταξη αριθμητή και με βάση τις ιδιότητες που εκφράζονται μέσω των (7.56) και (7.57). Λαμβάνοντας την ανάστροφη συζυγή μορφή και στα δυο μέλη της (7.85), και έχοντας υπόψη ότι ο  $\bar{R}_{xx}$  είναι ερμιτιανός ( $\bar{R}_{xx} = \bar{R}_{xx}^H$  και  $\bar{R}_{xx}^{-1} = (\bar{R}_{xx}^{-1})^H$ ), έχουμε

$$\bar{\mathbf{w}}^H = (\lambda \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q)^H = \lambda^* \bar{\mathbf{e}}_q^H (\bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1})^H,$$

και τελικά

$$\bar{\mathbf{w}}^H = \lambda^* \bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}. \quad (7.86)$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και τα δυο μέλη της άνω σχέσης με το  $\bar{\mathbf{e}}_q$  και χρησιμοποιώντας την (7.80), παίρνουμε

$$\lambda^* = \frac{1}{\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{1}{(\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q)^H} = \frac{1}{\bar{\mathbf{e}}_q^H (\bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1})^H \bar{\mathbf{e}}_q},$$

και τελικά

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q}. \quad (7.87)$$

Αντικαθιστώντας την (7.87) στην (7.85), βρίσκουμε τα ζητούμενα βάρη ίσα με

$$\bar{\mathbf{w}} = \frac{\bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q}{\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q}. \quad (7.88)$$

Τα βάρη αυτά ελαχιστοποιούν το σήμα εξόδου που, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, εκφράζει το σφάλμα της γραμμικής πρόβλεψης του  $-x_q$ . Είναι επομένως ευνόητο ότι η  $\hat{p}_y$  δεν μπορεί να εκφράζει το χωρικό φάσμα ισχύος. Ωστόσο, το φάσμα αυτό μπορεί να προκύψει από τη μέση ισχύ  $\hat{P}_{sd}$  του εισερχόμενου σήματος. Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (7.12), παίρνουμε

$$\hat{p}_y = \bar{\mathbf{w}}^H \bar{\mathbf{R}}_{xx} \bar{\mathbf{w}} = \left( \frac{\bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q}{\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q} \right)^H \bar{\mathbf{R}}_{xx} \left( \frac{\bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q}{\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q} \right) = \frac{\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{xx} \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q}{(\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q)(\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q)} = \frac{\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q}{(\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q)(\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q)},$$

και τελικά

$$\hat{p}_y = \frac{1}{\bar{\mathbf{e}}_q^H \bar{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \bar{\mathbf{e}}_q}. \quad (7.89)$$

Αγνοώντας το θόρυβο και θεωρώντας ότι έχουμε ένα μόνο εισερχόμενο σήμα  $s_d(k)$ , που αντιστοιχεί σε συνάρτηση διαμόρφωσης πληροφορίας  $g_d(k)$  και έχει διάνυσμα οδήγησης

$$\bar{\mathbf{a}}_d = \begin{bmatrix} \exp[j2\pi f_c \tau_1(\varphi_d, \vartheta_d)] \\ \exp[j2\pi f_c \tau_2(\varphi_d, \vartheta_d)] \\ \vdots \\ \exp[j2\pi f_c \tau_M(\varphi_d, \vartheta_d)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \bar{\mathbf{r}}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_d) \\ \exp(j\beta \bar{\mathbf{r}}_2 \cdot \bar{\mathbf{v}}_d) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \bar{\mathbf{r}}_M \cdot \bar{\mathbf{v}}_d) \end{bmatrix}, \quad (7.90)$$

το σήμα εξόδου (βλέπε σχέση (6.148)) θα είναι

$$y(k) = \bar{\mathbf{w}}^H \bar{\mathbf{a}}_d g_d(k), \quad (7.91)$$

και η αντίστοιχη μέση ισχύς εξόδου (βλέπε σχέση (6.158)) ίση με

$$\hat{P}_y = \hat{P}_{sd} \bar{W}^H \bar{a}_d \bar{a}_d^H \bar{W}, \quad (7.92)$$

όπου

$$\hat{P}_{sd} = E[|g_d(k)|^2] = E[|s_d(k)|^2] \quad (7.93)$$

είναι η μέση ισχύς του εισερχόμενου σήματος. Αντικαθιστώντας την (7.88) στην (7.92), παίρνουμε

$$\hat{P}_y = \hat{P}_{sd} \left( \frac{\bar{R}_{xx}^{-1} \bar{e}_q}{\bar{e}_q^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{e}_q} \right)^H \bar{a}_d \bar{a}_d^H \left( \frac{\bar{R}_{xx}^{-1} \bar{e}_q}{\bar{e}_q^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{e}_q} \right) = \hat{P}_{sd} \frac{\bar{e}_q^H \bar{R}_{xx}^{-1}}{\bar{e}_q^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{e}_q} \bar{a}_d \bar{a}_d^H \frac{\bar{R}_{xx}^{-1} \bar{e}_q}{\bar{e}_q^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{e}_q},$$

και τελικά

$$\hat{P}_y = \hat{P}_{sd} \frac{|\bar{e}_q^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d|^2}{(\bar{e}_q^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{e}_q)^2}. \quad (7.94)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των (7.89) και (7.94), καταλήγουμε στην έκφραση

$$\hat{P}_{sd} = \frac{\bar{e}_q^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{e}_q}{|\bar{e}_q^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d|^2}. \quad (7.95)$$

Η γραφική παράσταση της τελευταίας σχέσης ως συνάρτηση των γωνιών  $\vartheta$  και  $\varphi$  εκφράζει το χωρικό φάσμα ισχύος.

Η διαδικασία, τελικά, που διενεργεί ο εκτιμητής LP κάθε φορά που υπολογίζεται η τιμή του  $\bar{R}_{xx}$ , είναι η εξής: Εφαρμόζουμε τις τιμές βαρών που προκύπτουν από την (7.88) ώστε να ελαχιστοποιηθεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης και συνεπώς η μέση ισχύς εξόδου  $\hat{P}_y$ . Επιπλέον, εκτελούμε σάρωση ως προς τις γωνίες  $\vartheta$  και  $\varphi$ , με συγκεκριμένα βήματα σάρωσης για καθεμιά από τις δυο γωνίες. Για κάθε ζεύγος τιμών  $(\varphi, \vartheta)$ , κατασκευάζουμε το αντίστοιχο διάνυσμα οδήγησης, θεωρώντας το ως διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}_d$  υποθετικού εισερχόμενου σήματος  $s_d$ , και εφαρμόζουμε την (7.95) για να υπολογίσουμε τη μέση ισχύ του  $s_d$ . Αν από την κατεύθυνση  $(\varphi, \vartheta)$  δεν εισέρχεται κάποιο σήμα, η  $\hat{P}_{sd}$  θα έχει χαμηλή τιμή. Αντίθετα, αν η κατεύθυνση  $(\varphi, \vartheta)$  είναι πράγματι κατεύθυνση άφιξης υπαρκτού εισερχόμενου σήματος, τότε η  $\hat{P}_{sd}$  εμφανίζει τοπικό μέγιστο. Για κάθε τοπικό μέγιστο της  $\hat{P}_{sd}$ , γίνεται καταγραφή της κατεύθυνσης άφιξης  $(\varphi, \vartheta)$ .

Παρόλο που το στοιχείο αναφοράς επιλέγεται αυθαίρετα, η επιλογή αυτή μπορεί να επηρεάσει τη διακριτική ικανότητα της διαδικασίας εκτίμησης. Έχει βρεθεί ότι όταν επιλέγεται στοιχείο κοντά στο κέντρο της στοιχειοκεραίας, τα υπόλοιπα στοιχεία παρέχουν καλύτερη γραμμική πρόβλεψη. Για το λόγο αυτό προτιμάται στοιχειοκεραία με περιττό αριθμό στοιχείων, ώστε να επιλέγεται το κεντρικό στοιχείο ως στοιχείο αναφοράς. Επίσης,

θεωρείται ότι το ύψος κάθε τοπικού μεγίστου στο χωρικό φάσμα ισχύος είναι ευθέως ανάλογο του τετραγώνου της μέσης ισχύος του αντίστοιχου εισερχόμενου σήματος.

Ο εκτιμητής LP έχει γενικά καλύτερη διακριτική ικανότητα από τους εκτιμητές Bartlett και Caron (όπως θα φανεί εξάλλου στο παρακάτω παράδειγμα), γεγονός που σημαίνει ότι διαθέτει μεγαλύτερη ικανότητα να διαχωρίζει εισερχόμενα σήματα των οποίων οι κατευθύνσεις άφιξης απέχουν πολύ λίγο μεταξύ τους. Ωστόσο, πρέπει να αναφερθεί και ένα σημαντικό μειονέκτημα της τεχνικής αυτής: Επειδή στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση της ισχύος εξόδου (αντιμετωπίζει το σήμα εξόδου ως σφάλμα πρόβλεψης), η τεχνική LP δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέθοδος μορφοποίησης δέσμης παρά μόνο ως μέθοδος εκτίμησης κατευθύνσεων άφιξης. Από την άλλη μεριά, οι μέθοδοι Bartlett και Caron, παρόλο που έχουν χειρότερη διακριτική ικανότητα από τη μέθοδο LP, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως μέθοδοι μορφοποίησης (πρόκειται αντίστοιχα για τις μεθόδους μορφοποίησης delay-and-sum και MVDR).

*Παράδειγμα εφαρμογής εκτιμητών LP και Caron:*

Εκτιμητές DoA LP και Caron χρησιμοποιούν στοιχειοκεραία 5 ιστροπικών στοιχείων ( $M=5$ ) που διατάσσονται στον  $z$ -άξονα του συστήματος συντεταγμένων και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d=\lambda/2$ . Και στους δυο εκτιμητές εισέρχονται δυο ασυσχέτιστα μεταξύ τους σήματα ( $N=2$ ) με αντίστοιχες γωνίες άφιξης ( $\alpha$ )  $\theta_1=85^\circ$  και  $\theta_2=95^\circ$  (1<sup>ο</sup> σενάριο άφιξης), και ( $\beta$ )  $\theta_1=88^\circ$  και  $\theta_2=92^\circ$  (2<sup>ο</sup> σενάριο άφιξης). Η μέτρηση των γωνιών γίνεται ως προς τον  $z$ -άξονα, δηλ. είναι γωνίες ανύψωσης (elevation angles). Αν το καθένα από τα δυο σήματα είναι ισχύος 0.1W και στα δυο σενάρια άφιξης, ενώ τα σήματα θορύβου είναι μηδενικής μέσης τιμής, ασυσχέτιστα μεταξύ τους και ασυσχέτιστα ως προς τα εισερχόμενα σήματα, και ισχύος 0.001W, να υπολογιστεί το χωρικό φάσμα ισχύος των δυο εκτιμητών για καθένα από τα δυο σενάρια. Ως στοιχείο αναφοράς για τον εκτιμητή LP να επιλεγεί το κεντρικό (τρίτο) στοιχείο της στοιχειοκεραίας.

*Λύση:*

Πρακτικώς, αυτό που ζητείται είναι οι γραφικές παραστάσεις ως προς τη γωνία  $\theta$  της μέσης ισχύος που περιγράφεται αντίστοιχα από την (7.63) για τον εκτιμητή Caron και την (7.95) για τον εκτιμητή LP. Και στους δυο εκτιμητές γίνεται χρήση του πίνακα  $\bar{R}_{xx}$ , ο οποίος σε πραγματικό χρόνο κατασκευάζεται από δειγματοληψία των σημάτων εισόδου. Εφόσον δεν έχουμε στη διάθεσή μας τέτοια δεδομένα, θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε θεωρητικά τον πίνακα αυτό. Ως στοιχείο αναφοράς για τον εκτιμητή LP ζητείται να είναι το τρίτο στοιχείο της στοιχειοκεραίας. Επειδή στη μέθοδο Caron δεν παίζει ρόλο ποιο είναι το στοιχείο αναφοράς, μπορούμε να επιλέξουμε το τρίτο στοιχείο ως στοιχείο αναφοράς και για τους δυο εκτιμητές. Συνεπώς, θα ισχύει

$$\bar{r}_1 = -\lambda \bar{z}_o, \quad \bar{r}_2 = -\frac{\lambda}{2} \bar{z}_o, \quad \bar{r}_3 = 0 \bar{z}_o, \quad \bar{r}_4 = \frac{\lambda}{2} \bar{z}_o \quad \text{και} \quad \bar{r}_5 = \lambda \bar{z}_o. \quad (7.96)$$

Ο πίνακας οδήγησης  $\bar{A}$  για δυο εισερχόμενα σήματα, με γωνίες άφιξης  $\theta_1$  και  $\theta_2$ , θα έχει με τη βοήθεια της (7.4) τη μορφή

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_2) \\ \exp(j\beta\vec{r}_2 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta\vec{r}_2 \cdot \vec{v}_2) \\ \exp(j\beta\vec{r}_3 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta\vec{r}_3 \cdot \vec{v}_2) \\ \exp(j\beta\vec{r}_4 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta\vec{r}_4 \cdot \vec{v}_2) \\ \exp(j\beta\vec{r}_5 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta\vec{r}_5 \cdot \vec{v}_2) \end{bmatrix}, \quad (7.97)$$

όπου

$$\vec{v}_n = \cos\varphi_n \sin\vartheta_n \vec{x}_o + \sin\varphi_n \sin\vartheta_n \vec{y}_o + \cos\vartheta_n \vec{z}_o, \quad n=1,2. \quad (7.98)$$

Αντικαθιστώντας τις (7.96) και (7.98) στην (7.97), παίρνουμε τον πίνακα οδήγησης για τα σενάρια που αντιμετωπίζουμε ίσο με

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \exp(-j2\pi \cos\vartheta_1) & \exp(-j2\pi \cos\vartheta_2) \\ \exp(-j\pi \cos\vartheta_1) & \exp(-j\pi \cos\vartheta_2) \\ 1 & 1 \\ \exp(j\pi \cos\vartheta_1) & \exp(j\pi \cos\vartheta_2) \\ \exp(j2\pi \cos\vartheta_1) & \exp(j2\pi \cos\vartheta_2) \end{bmatrix}. \quad (7.99)$$

Εφόσον τα εισερχόμενα σήματα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους, θα ισχύει η (7.42), η οποία για την περίπτωση που αντιμετωπίζουμε παίρνει τη μορφή

$$\bar{R}_{gg} = 0.1 \bar{I}_{2 \times 2}. \quad (7.100)$$

Επιπλέον, σύμφωνα με την (7.20), θα ισχύει

$$\bar{R}_{nn} = 0.001 \bar{I}_{5 \times 5}. \quad (7.101)$$

Τελικά, με αντικατάσταση των (7.99), (7.100) και (7.101) στην (7.17), προκύπτει

$$\bar{R}_{xx} = 0.1 \begin{bmatrix} \exp(-j2\pi \cos\vartheta_1) & \exp(-j2\pi \cos\vartheta_2) \\ \exp(-j\pi \cos\vartheta_1) & \exp(-j\pi \cos\vartheta_2) \\ 1 & 1 \\ \exp(j\pi \cos\vartheta_1) & \exp(j\pi \cos\vartheta_2) \\ \exp(j2\pi \cos\vartheta_1) & \exp(j2\pi \cos\vartheta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-j2\pi \cos\vartheta_1) & \exp(-j2\pi \cos\vartheta_2) \\ \exp(-j\pi \cos\vartheta_1) & \exp(-j\pi \cos\vartheta_2) \\ 1 & 1 \\ \exp(j\pi \cos\vartheta_1) & \exp(j\pi \cos\vartheta_2) \\ \exp(j2\pi \cos\vartheta_1) & \exp(j2\pi \cos\vartheta_2) \end{bmatrix}^H + \quad (7.102)$$

$$+ 0.001 \bar{I}_{5 \times 5}.$$

Το  $\bar{a}_d$  στις (7.63) και (7.95) είναι το διάνυσμα οδήγησης που προκύπτει καθώς σαρώνουμε ως προς τη γωνία  $\vartheta$ . Αντικαθιστώντας τις (7.5) και (7.96) στην (7.6), παίρνουμε

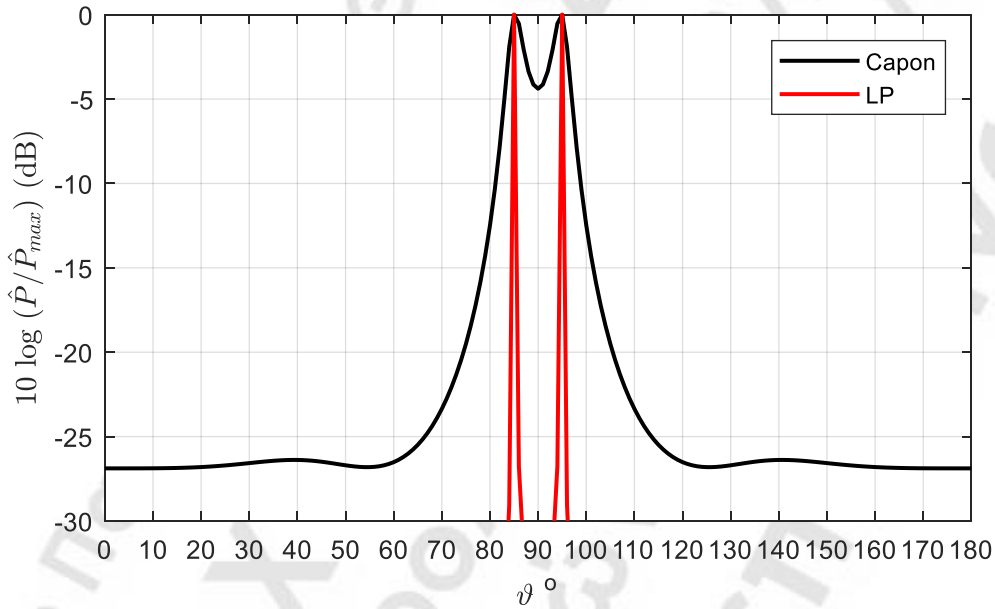
$$\bar{a}_d = \begin{bmatrix} \exp(-j2\pi \cos\vartheta) \\ \exp(-j\pi \cos\vartheta) \\ 1 \\ \exp(j\pi \cos\vartheta) \\ \exp(j2\pi \cos\vartheta) \end{bmatrix}. \quad (7.103)$$

Επίσης, εφόσον το τρίτο στοιχείο είναι στοιχείο αναφοράς ( $q=3$ ), από την (7.81) προκύπτει

$$\bar{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.104)$$

Τότε, η (7.95) παίρνει τη μορφή

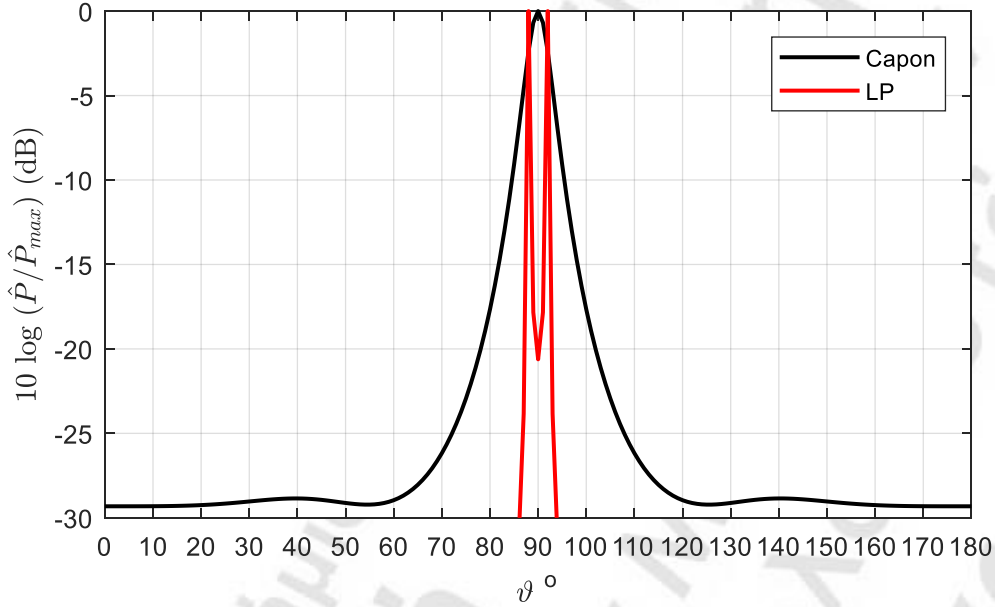
$$\hat{p}_{sd} = \frac{\bar{e}_3^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{e}_3}{|\bar{e}_3^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d|^2}. \quad (7.105)$$



**Σχήμα 7.5** Χωρικά φάσματα ισχύος εκτιμητών Capon και LP για  $\vartheta_1=85^\circ$  και  $\vartheta_2=95^\circ$ .

Οι γραφικές παραστάσεις των (7.63) και (7.105) για το 1<sup>ο</sup> σενάριο, όπου  $\vartheta_1=85^\circ$  και  $\vartheta_2=95^\circ$ , δίνονται στο σχήμα 7.5, ενώ για το 2<sup>ο</sup> σενάριο, όπου  $\vartheta_1=88^\circ$  και  $\vartheta_2=92^\circ$ , δίνονται στο σχήμα 7.6. Για να υπάρχει αντικειμενική σύγκριση μεταξύ των χωρικών φασμάτων που δίνουν αντίστοιχα οι δυο εκτιμητές, στον κατακόρυφο άξονα των γραφικών παραστάσεων εμφανίζεται η μέση ισχύς ( $\hat{P}_y$  ή  $\hat{P}_{sd}$ ) για κάθε γωνία άφιξης κανονικοποιημένη ως προς την αντίστοιχη μέγιστη μέση ισχύ ( $\hat{P}_{y,max}$  ή  $\hat{P}_{sd,max}$ ), που λαμβάνεται σε κάποια/ες γωνία/ες άφιξης, και εκφρασμένη σε μονάδες dB. Όπως φαίνεται από τα σχήματα αυτά, ο εκτιμητής LP έχει καλύτερη διακριτική ικανότητα απ' ό,τι ο εκτιμητής Capon (και προφανώς καλύτερη και από τον εκτιμητή Bartlett, αν λάβουμε υπόψη και το παράδειγμα της παραγράφου 7.3). Όταν οι γωνίες άφιξης των δυο σημάτων πλησιάζουν η μια την άλλη, ο εκτιμητής LP εξακολουθεί και τις διαχωρίζει μεταξύ τους, ενώ ο εκτιμητής Capon αντιλαμβάνεται ένα ψευδές εισερχόμενο σήμα με γωνία άφιξης ανάμεσα στις πραγματικές γωνίες  $\vartheta_1$  και  $\vartheta_2$ .





**Σχήμα 7.6** Χωρικά φάσματα ισχύος εκτιμητών Capon και LP για  $\vartheta_1=88^\circ$  και  $\vartheta_2=92^\circ$ .

### **7.5 Μέθοδος εκτίμησης μέσω αρμονικής αποσύνθεσης Pisarenko**

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην τεχνική της *αρμονικής αποσύνθεσης Pisarenko* (Pisarenko harmonic decomposition, PHD), η οποία προτάθηκε το 1973 από τον Ρώσο μαθηματικό Vladilen Pisarenko και η οποία αποσκοπεί στην εκτίμηση των αρμονικών συνιστωσών ενός σήματος χρησιμοποιώντας ένα πεπερασμένο τμήμα της συνάρτησης συ-μεταβλητότητας (covariance function) του σήματος αυτού. Εφαρμόζοντας κατάλληλα την τεχνική αυτή στον πίνακα συσχέτισης  $\bar{R}_{xx}$  (που αποτελεί έκφραση της συνάρτησης μεταβλητότητας) των σημάτων εισόδου μιας στοιχειοκεραίας, μπορούμε να υπολογίσουμε το χωρικό φάσμα ισχύος και τις κατευθύνσεις άφιξης των εισερχόμενων σημάτων. Παρακάτω δίνεται η απαραίτητη μαθηματική ανάλυση που οδηγεί στον υπολογισμό του χωρικού φάσματος, καθώς και ο τρόπος υπολογισμού των κατευθύνσεων άφιξης.

Από την (7.17) παίρνουμε

$$\bar{R}_{ss} = \bar{A} \bar{R}_{gg} \bar{A}^H. \quad (7.106)$$

Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι  $\bar{R}_{ss}$  είναι ο πίνακας συσχέτισης των σημάτων εισόδου όταν η στοιχειοκεραία είναι απαλλαγμένη από θόρυβο. Θεωρώντας, επίσης, ότι τα εισερχόμενα σήματα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους, ο  $\bar{R}_{gg}$  θα δίνεται από την (7.42) και θα είναι βαθμού (rank)  $N$ . Λόγω της (7.106) και θεωρώντας ότι  $M > N$ , θα είναι επίσης και ο πίνακας  $\bar{R}_{ss}$  βαθμού  $N$ . Αυτό σημαίνει ότι ο  $\bar{R}_{ss}$  έχει  $M$  ιδιοτιμές (πραγματικές επειδή ο  $\bar{R}_{ss}$  είναι ερμιτιανός πίνακας), από τις οποίες οι  $N$  είναι διάφορες του μηδενός και οι υπόλοιπες  $M-N$  είναι ίσες με μηδέν. Αυτό βέβαια με τη σειρά του σημαίνει ότι ο  $\bar{R}_{ss}$  είναι ιδιάζων πίνακας, δηλ. μη αντιστρέψιμος (η ορίζουσα του πίνακα ως γινόμενο ιδιοτιμών προκύπτει



ίση με μηδέν). Αν, λοιπόν, κατατάξουμε τις ιδιοτιμές  $\lambda_i, i=1,\dots,M$  του  $\bar{R}_{ss}$  κατά φθίνουσα σειρά, θα έχουμε

$$\lambda_i \neq 0, \quad i=1,\dots,N \quad \text{και} \quad \lambda_i = 0, \quad i=N+1,\dots,M. \quad (7.107)$$

Επιπλέον, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $\bar{u}_i, i=1,\dots,M$  είναι τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα (δηλ. διανύσματα με μοναδιαίο μήκος) του  $\bar{R}_{ss}$  που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές  $\lambda_i, i=1,\dots,M$ . Επειδή ο  $\bar{R}_{ss}$  είναι ερμιτιανός, ανήκει στην ευρύτερη κατηγορία των κανονικών (normal) πινάκων επειδή επαληθεύει την ιδιότητα

$$\bar{R}_{ss} \bar{R}_{ss}^H = \bar{R}_{ss}^H \bar{R}_{ss}, \quad (7.108)$$

γεγονός που σημαίνει ότι τα  $\bar{u}_i, i=1,\dots,M$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Άρα το σύνολο των  $\bar{u}_i, i=1,\dots,M$  συνιστά ορθοκανονική βάση  $M$ -διάστατου διανυσματικού χώρου. Τότε ο πίνακας

$$\bar{U} = [\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \dots \quad \bar{u}_M], \quad (7.109)$$

που κατασκευάζεται από τα άνω ορθοκανονικά διανύσματα, θα είναι μοναδιαίος (unitary), δηλ. επαληθεύει τη συνθήκη

$$\bar{U}^H = \bar{U}^{-1}, \quad (7.110)$$

ή ισοδύναμα τη συνθήκη

$$\bar{U} \bar{U}^H = \bar{U}^H \bar{U} = I. \quad (7.111)$$

Αν θεωρήσουμε ότι  $\bar{\Lambda}_{ss}$  είναι ο πίνακας που προκύπτει από τη διαγωνιοποίηση του  $\bar{R}_{ss}$ , θα ισχύει

$$\bar{R}_{ss} = \bar{U} \bar{\Lambda}_{ss} \bar{U}^{-1}. \quad (7.112)$$

Λόγω των (7.107), ο  $\bar{\Lambda}_{ss}$  θα είναι της μορφής

$$\bar{\Lambda}_{ss} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \lambda_N & & \vdots \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.113)$$

Επιπλέον, λόγω της (7.110), η (7.112) παίρνει τη μορφή

$$\bar{R}_{ss} = \bar{U} \bar{\Lambda}_{ss} \bar{U}^H. \quad (7.114)$$

Αναλύοντας την άνω σχέση, με τη βοήθεια των (7.109) και (7.113), θα έχουμε

$$\bar{R}_{ss} = [\bar{u}_1 \ \cdots \ \bar{u}_M] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \lambda_N & & \\ \vdots & & & & 0 & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1^H \\ \vdots \\ \bar{u}_M^H \end{bmatrix}, \quad (7.115)$$

και τελικά

$$\bar{R}_{ss} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{u}_i \bar{u}_i^H. \quad (7.116)$$

Από την άνω σχέση προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα διανύσματα  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$ , που αντιστοιχούν στις  $N$  μη-μηδενικές ιδιοτιμές του  $\bar{R}_{ss}$ , συνιστούν ορθοκανονική βάση ενός  $N$ -διάστατου διανυσματικού υποχώρου, που είναι στην ουσία ο υποχώρος των  $N$  εισερχόμενων σημάτων (signal subspace). Τα  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$  ονομάζονται πρωταρχικά ιδιοδιανύσματα (principal eigenvectors) και περιγράφουν πλήρως τον υποχώρο των εισερχόμενων σημάτων. Για να δούμε ποια μεγέθη των εισερχόμενων σημάτων περιγράφονται στην ουσία από τα  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$ , αναλύουμε την (7.106), με τη βοήθεια των (7.4) και (7.42), οπότε παίρνουμε

$$\bar{R}_{ss} = [\bar{a}_1 \ \cdots \ \bar{a}_N] \begin{bmatrix} \hat{P}_{s1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{P}_{sN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_1^H \\ \vdots \\ \bar{a}_N^H \end{bmatrix}, \quad (7.117)$$

και τελικά

$$\bar{R}_{ss} = \sum_{i=1}^N \hat{P}_{si} \bar{a}_i \bar{a}_i^H. \quad (7.118)$$

Συγκρίνοντας τις (7.116) και (7.118), διαπιστώνουμε ότι τα μεγέθη που περιγράφονται πλήρως από τα  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$  στον υποχώρο των εισερχόμενων σημάτων είναι τα διανύσματα οδήγησης των  $N$  εισερχόμενων σημάτων. Με άλλα λόγια, τα στοιχεία του υποχώρου αυτού είναι διανύσματα οδήγησης υπαρκτών εισερχόμενων σημάτων. Εφόσον τα  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$  περιγράφουν πλήρως τον υποχώρο αυτό, κάθε διάνυσμα οδήγησης υπαρκτού εισερχόμενου σήματος μπορεί να περιγραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$ .

Από τη διαγώνια μορφή (7.20) του  $\bar{R}_{nn}$  γίνεται αντιληπτό ότι ο  $\bar{R}_{nn}$  έχει  $M$  μη-μηδενικές ιδιοτιμές ίσες με  $\sigma^2$ , και ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα  $\bar{u}_i$ ,  $i=1, \dots, M$  του  $\bar{R}_{ss}$  είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα και του  $\bar{R}_{nn}$ , δεδομένου ότι επαληθεύεται η συνθήκη

$$\bar{R}_{nn} \bar{u}_i = \sigma^2 \bar{u}_i, \quad i=1, \dots, M. \quad (7.119)$$

Τότε, λόγω της (7.111), επαληθεύεται επιπλέον και η συνθήκη

$$\bar{R}_{nn} = \sigma^2 \bar{U} \bar{U}^H. \quad (7.120)$$

Επειδή ο  $\bar{R}_{nn}$  έχει  $M$  μη-μηδενικές ιδιοτιμές, θα είναι βαθμού  $M$ .

Δεδομένου ότι ο  $\bar{R}_{xx}$  είναι άθροισμα των  $\bar{R}_{ss}$  και  $\bar{R}_{nn}$  (βλέπε σχέση (7.17)), τα  $\bar{u}_i, i=1, \dots, M$  θα είναι επίσης ιδιοδιανύσματα και του  $\bar{R}_{xx}$ . Προσθέτοντας κατά μέλη τις (7.114) και (7.120), και λαμβάνοντας υπόψη την (7.113), θα έχουμε

$$\bar{R}_{xx} = \bar{R}_{ss} + \bar{R}_{nn} = \bar{U} \bar{\Lambda}_{xx} \bar{U}^H, \quad (7.121)$$

όπου ο πίνακας

$$\bar{\Lambda}_{xx} = \bar{\Lambda}_{ss} + \sigma^2 I = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \sigma^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda_N + \sigma^2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \sigma^2 & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (7.122)$$

αντιπροσωπεύει τη διαγώνια μορφή του  $\bar{R}_{xx}$ . Είναι προφανές ότι ο  $\bar{R}_{xx}$  έχει  $M$  μη-μηδενικές ιδιοτιμές, γεγονός που σημαίνει ότι είναι βαθμού ίσου με  $M$ . Αναλύοντας την (7.121) παίρνουμε

$$\bar{R}_{xx} = [\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_M] \begin{bmatrix} \lambda_1 + \sigma^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda_N + \sigma^2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \sigma^2 & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1^H \\ \vdots \\ \bar{u}_M^H \end{bmatrix}, \quad (7.123)$$

και τελικά

$$\bar{R}_{xx} = \sum_{i=1}^N (\lambda_i + \sigma^2) \bar{u}_i \bar{u}_i^H + \sum_{i=N+1}^M \sigma^2 \bar{u}_i \bar{u}_i^H. \quad (7.124)$$

Σε κάθε περίπτωση, οι ιδιοτιμές  $\lambda_i + \sigma^2, i=1, \dots, N$  του πρώτου αθροίσματος της άνω σχέσης είναι μεγαλύτερες από τις ιδιοτιμές  $\sigma^2$  του δεύτερου αθροίσματος. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$  είναι και πάλι πρωταρχικά ιδιοδιανύσματα, εφόσον αντιστοιχούν στις  $N$  μεγαλύτερες ιδιοτιμές του  $\bar{R}_{xx}$ . Η διαφορά από τον  $\bar{R}_{ss}$  είναι ότι οι ιδιοτιμές  $\lambda_i, i=1, \dots, N$  έχουν αντικατασταθεί από τις  $\lambda_i + \sigma^2, i=1, \dots, N$ . Συνεπώς, το πρώτο άθροισμα της άνω σχέσης αντικαθιστά το άθροισμα της (7.116), γεγονός που σημαίνει ότι τα  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$  περιγράφουν και πάλι πλήρως τον υποχώρο των εισερχόμενων σημάτων. Τα υπόλοιπα ιδιοδιανύσματα  $\bar{u}_{N+1}, \dots, \bar{u}_M$ , που προηγουμένως αντιστοιχούσαν στις  $M-N$  μηδενικές ιδιοτιμές του  $\bar{R}_{ss}$ , τώρα

αντιστοιχούν στις  $M-N$  ιδιοτιμές  $\sigma^2$  του δεύτερου αθροίσματος της τελευταίας σχέσης, και για το λόγο αυτό θεωρούμε ότι ορίζουν πλήρως έναν υποχώρο θορύβου (noise subspace)  $M-N$  διαστάσεων. Επειδή τα  $\bar{u}_i$ ,  $i=1,\dots,M$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους, ο υποχώρος θορύβου είναι ορθογώνιος ως προς τον υποχώρο των εισερχόμενων σημάτων. Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του υποχώρου θορύβου είναι ορθογώνιο σε οποιοδήποτε διάνυσμα που ανήκει στον υποχώρο των εισερχόμενων σημάτων. Άρα θα ισχύει

$$\bar{a}_n^H \bar{u}_i = \bar{u}_i^H \bar{a}_n = 0, \quad \forall n=1,\dots,N \quad \& \quad \forall i=N+1,\dots,M, \quad (7.125)$$

όπου  $\bar{a}_n$  είναι διάνυσμα οδήγησης εισερχόμενου σήματος (και συνεπώς αποτελεί στοιχείο του υποχώρου των εισερχόμενων σημάτων), ενώ  $\bar{u}_i$  ένα από τα διανύσματα που περιγράφουν τον υποχώρο θορύβου. Η σχέση αυτή μπορεί να αποδειχτεί πολύ εύκολα αν θεωρήσουμε το  $\bar{a}_n$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N$ , δηλαδή

$$\bar{a}_n = \sum_{q=1}^N c_{nq} \bar{u}_q, \quad (7.126)$$

όπου  $c_{nq}$  είναι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού. Τότε, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και τα δυο μέλη της άνω σχέσης με τη συζυγή μορφή οποιουδήποτε από τα  $\bar{u}_i$ ,  $i=N+1,\dots,M$ , παίρνουμε

$$\bar{u}_i^H \bar{a}_n = \bar{u}_i^H \left( \sum_{q=1}^N c_{nq} \bar{u}_q \right) = \sum_{q=1}^N c_{nq} (\bar{u}_i^H \bar{u}_q) = 0, \quad \forall n=1,\dots,N \quad \& \quad \forall i=N+1,\dots,M. \quad (7.127)$$

Λόγω της (7.2) και θεωρώντας ότι το κάθε  $\bar{u}_i$ ,  $i=N+1,\dots,M$  έχει τη μορφή

$$\bar{u}_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{iM} \end{bmatrix}, \quad (7.128)$$

η (7.125) αναλύεται στην έκφραση

$$\sum_{m=1}^M u_{im} \exp(-j\beta \vec{r}_m \cdot \vec{v}_n) = 0, \quad \forall n=1,\dots,N \quad \& \quad \forall i=N+1,\dots,M. \quad (7.129)$$

Οι εκθετικοί όροι του αθροίσματος της άνω σχέσης είναι της μορφής  $e^{-j\omega}$  και περιέχουν, σύμφωνα με τη μέθοδο του Pisarenko, τις αρμονικές συνιστώσες ενός σήματος που εξελίσσεται στο πεδίο του χρόνου. Στην προκείμενη περίπτωση, το υπό διερεύνηση σήμα εξελίσσεται μέσα στο χώρο και συνεπώς οι αρμονικές συνιστώσες αφορούν τις κατευθύνσεις διάδοσης του σήματος. Έτσι, από την άνω σχέση μπορεί να βρεθεί το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{v}_n$  της κατεύθυνσης άφιξης του  $n$ -στου εισερχόμενου σήματος (δηλ. του σήματος που αντιστοιχεί στο διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}_n$ ). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι μόνο το διάνυσμα οδήγησης υπαρκτού εισερχόμενου σήματος επαληθεύει την (7.125) ή την ισοδύναμη αυτής (7.129). Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}(\varphi, \vartheta)$ , που αντιστοιχεί σε τυχαία κατεύθυνση στο χώρο, δίνει τιμή εσωτερικού γινομένου  $\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_i$

που απέχει από τη μηδενική τιμή. Όταν όμως το  $\bar{a}(\varphi, \vartheta)$  προσεγγίσει το διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}_n$  υπαρκτού εισερχόμενου σήματος, τότε το εσωτερικό γινόμενο  $\bar{a}_n^H \bar{u}_i$  αποκτά τιμή πολύ κοντά στο μηδέν.

Στην πράξη, δεν είναι πάντα γνωστό το πλήθος  $N$  των εισερχόμενων σημάτων και συνεπώς δεν είναι εύκολο να ορίσουμε το πλήθος των διαστάσεων του υποχώρου των σημάτων αυτών. Σύμφωνα λοιπόν με τη μέθοδο του Pisarenko, από τα ιδιοδιανύσματα  $\bar{u}_i$ ,  $i=1, \dots, M$  του  $\bar{R}_{xx}$ , μόνο το  $\bar{u}_M$  (δηλ. αυτό που αντιστοιχεί στην μικρότερη ιδιοτιμή του  $\bar{R}_{xx}$ ) θεωρείται ότι ορίζει τον υποχώρο θορύβου, ενώ όλα τα υπόλοιπα  $\bar{u}_i$ ,  $i=1, \dots, M-1$  θεωρούνται ότι ορίζουν πλήρως τον υποχώρο των εισερχόμενων σημάτων (δηλ. ότι αποτελούν βάση του υποχώρου αυτού). Ουσιαστικά, αυτή είναι η πιο ακραία θεώρηση που μπορούμε να κάνουμε, έτσι ώστε να εξακολουθούμε να έχουμε τους δυο υποχώρους και να εκμεταλλευόμαστε τη μεταξύ τους ορθογωνιότητα. Πρακτικά, έχουμε ελαττώσει στο ελάχιστο το πλήθος των διαστάσεων του υποχώρου θορύβου (δηλ. μια μόνο διάσταση) και έχουμε αυξήσει στο μέγιστο ( $M-1$ ) το πλήθος των διαστάσεων του υποχώρου σημάτων. Με άλλα λόγια, η μέθοδος Pisarenko μπορεί να ανιχνεύσει μέχρι και  $M-1$  εισερχόμενα σήματα. Επομένως, η (7.125) εφαρμόζεται μόνο για το  $\bar{u}_M$  και θα έχει τη μορφή

$$\bar{a}_n^H \bar{u}_M = \bar{u}_M^H \bar{a}_n = 0, \quad \forall n=1, \dots, M-1. \quad (7.130)$$

Το χωρικό φάσμα ισχύος θα προκύπτει λογικά από την αντιστροφή του μέτρου ή του τετραγώνου του μέτρου του εσωτερικού γινομένου  $\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_M$ , λαμβάνοντας υπόψη ότι η τιμή του γινομένου αυτού τείνει το μηδέν όποτε το  $\bar{a}(\varphi, \vartheta)$  προσεγγίζει το διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}_n$  υπαρκτού εισερχόμενου σήματος, γεγονός που συνεπάγεται αντίστοιχο τοπικό μέγιστο στο φάσμα ισχύος. Επομένως, υποψήφιες μορφές του φάσματος είναι

$$P(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{|\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_M|} \quad (7.131)$$

και

$$P(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{|\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_M|^2}. \quad (7.132)$$

Να σημειωθεί ότι καμία από τις δυο άνω μορφές δεν εκφράζει στην πραγματικότητα την ισχύ κάποιου σήματος. Οι σχέσεις αυτές μπορούν απλά να δίνουν τοπικά μέγιστα στις κατευθύνσεις άφιξης υπαρκτών εισερχόμενων σημάτων. Όταν προσεγγίζεται μια τέτοια κατεύθυνση, είναι προφανές ότι η ποσότητα  $|\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_M|^2$  προσεγγίζει περισσότερο το μηδέν απ' ό,τι η ποσότητα  $|\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_M|$ , γεγονός που σημαίνει ότι η (7.132) δίνει ισχυρότερα και στενότερα τοπικά μέγιστα απ' ό,τι η (7.131). Είναι προφανές ότι όσο πιο ισχυρό είναι ένα μέγιστο, τόσο πιο εύκολα διακρίνεται συγκριτικά με τις γειτονικές τιμές. Επιπλέον, όσο πιο στενό είναι ένα μέγιστο, τόσο πιο εύκολα διαχωρίζεται από ένα γειτονικό μέγιστο, γεγονός που σημαίνει καλύτερη διακριτική ικανότητα. Για τους λόγους αυτούς,

προτιμάται το χωρικό φάσμα ισχύος να εκφράζεται μέσω της (7.132), η οποία μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$P(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{|\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_M|^2} = \frac{1}{\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_M \bar{u}_M^H \bar{a}(\varphi, \vartheta)}. \quad (7.133)$$

Βέβαια, στο σημείο αυτό θα μπορούσε κάποιος να προτείνει να υψωθεί η ποσότητα  $|\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_M|$  σε δύναμη μεγαλύτερη της 2<sup>ης</sup>. Αν, για παράδειγμα, στον παρονομαστή της άνω σχέσης είχαμε  $|\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_M|^3$ , τα τοπικά μέγιστα θα ήταν ακόμη πιο στενά, γεγονός που βελτιώνει ακόμη περισσότερο τη διακριτική ικανότητα. Το πρόβλημα όμως που δημιουργείται τότε είναι ότι οι διαφορές ύψους των διαφόρων τοπικών μεγίστων αυξάνονται υπερβολικά, με αποτέλεσμα κάποιες κορυφές να είναι τόσο χαμηλές που δύσκολα ερμηνεύονται ως εισερχόμενο σήμα. Έτσι, η χρήση 2<sup>ης</sup> δύναμης στον παρονομαστή της (7.132) ή της (7.133) θεωρείται ως χρυσή τομή ανάμεσα στην ικανότητα ανίχνευσης εισερχόμενων σημάτων και στην ικανότητα διάκρισης δυο σημάτων με κοντινές κατευθύνσεις άφιξης (διακριτική ικανότητα).

Η διαδικασία, τελικά, που διενεργεί ο εκτιμητής PHD κάθε φορά που υπολογίζεται η τιμή του  $\bar{R}_{xx}$ , είναι η εξής: Υπολογίζονται αρχικά οι ιδιοτιμές του  $\bar{R}_{xx}$  και στη συνέχεια το  $\bar{u}_M$ , δηλ. το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μικρότερη ιδιοτιμή. Έπειτα, εκτελούμε σάρωση ως προς τις γωνίες  $\vartheta$  και  $\varphi$ , με συγκεκριμένα βήματα σάρωσης για καθεμιά από τις δυο γωνίες. Για κάθε ζεύγος τιμών  $(\varphi, \vartheta)$ , κατασκευάζουμε το αντίστοιχο διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}(\varphi, \vartheta)$ , θεωρώντας το ως διάνυσμα οδήγησης υποθετικού εισερχόμενου σήματος, και εφαρμόζουμε την (7.133). Αν από την κατεύθυνση  $(\varphi, \vartheta)$  δεν εισέρχεται κάποιο σήμα, η  $P(\varphi, \vartheta)$  θα έχει χαμηλή τιμή. Αντίθετα, αν η κατεύθυνση  $(\varphi, \vartheta)$  είναι πράγματι κατεύθυνση άφιξης υπαρκτού εισερχόμενου σήματος, τότε η  $P(\varphi, \vartheta)$  εμφανίζει τοπικό μέγιστο. Για κάθε τοπικό μέγιστο της  $P(\varphi, \vartheta)$ , γίνεται καταγραφή της κατεύθυνσης άφιξης  $(\varphi, \vartheta)$ .

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία, οι κατευθύνσεις άφιξης μπορούν να υπολογιστούν πολύ πιο γρήγορα, χωρίς να απαιτείται η γωνιακή σάρωση που πραγματοποιείται στην άνω γενική διαδικασία. Ο τρόπος υπολογισμού εξηγείται παρακάτω. Έστω ότι η στοιχειοκεραία αποτελείται από  $M$  ιστροπικά στοιχεία που διατάσσονται κατά μήκος του  $z$ -άξονα, και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d$ . Επιπλέον, το 1<sup>ο</sup> στοιχείο θεωρείται τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Τότε, θα ισχύει

$$\vec{r}_m = (m-1)d\vec{z}_o, \quad m=1, \dots, M. \quad (7.134)$$

Αντικαθιστώντας την άνω σχέση και την (7.1) στην (7.2), βρίσκουμε ότι το διάνυσμα οδήγησης του  $n$ -στου εισερχόμενου σήματος δίνεται από την έκφραση

$$\bar{a}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\beta d \cos \vartheta_n) \\ \vdots \\ \exp[j(M-1)\beta d \cos \vartheta_n] \end{bmatrix}. \quad (7.135)$$

Επίσης, θεωρούμε ότι το  $\bar{u}_M$  έχει τη μορφή

$$\bar{u}_M = \begin{bmatrix} u_{M1} \\ u_{M2} \\ \vdots \\ u_{MM} \end{bmatrix}. \quad (7.136)$$

Με τη βοήθεια των δυο άνω σχέσεων, η (7.130) αναλύεται στην έκφραση

$$\sum_{m=1}^M u_{Mm} \exp[-j(m-1)\beta d \cos \vartheta_n] = 0 \quad (7.137)$$

ή στην ισοδύναμη αυτής

$$\sum_{m=1}^M u_{Mm} z_n^{m-1} = 0, \quad (7.138)$$

όπου

$$z_n = \exp(-j\beta d \cos \vartheta_n). \quad (7.139)$$

Στην ουσία η (7.138) είναι ένα πολυώνυμο  $M-1$  βαθμού με μιγαδικούς συντελεστές ( $u_{Mm}$ ), γεγονός που σημαίνει ότι θα προκύψουν  $M-1$  μιγαδικές ρίζες. Θεωρητικά, κάθε ρίζα αντιστοιχεί σε μια κατεύθυνση άφιξης, που στην περίπτωση γραμμικών στοιχειοκεραίων ορίζεται μόνο από τη γωνία  $\vartheta_n$  (όπως φαίνεται στην (7.139)). Συνεπώς, μπορούν να βρεθούν μέχρι και  $M-1$  κατευθύνσεις άφιξης. Για να αποτελούν, όμως, κατευθύνσεις άφιξης υπαρκτών εισερχόμενων σημάτων, θα πρέπει οι αντίστοιχες μιγαδικές ρίζες να έχουν μοναδιαίο μέτρο, σύμφωνα με την (7.139). Επομένως, από τις  $M-1$  μιγαδικές ρίζες, δεχόμαστε μόνο αυτές που έχουν μέτρο κοντά στη μονάδα και απορρίπτουμε τις υπόλοιπες. Βέβαια το ζήτημα πόσο κοντά στη μονάδα πρέπει να είναι το μέτρο μιας ρίζας για να γίνει δεκτή είναι καθαρά υποκειμενικό. Συνήθως, οι  $M-1-N$  ρίζες, που δεν αντιστοιχούν σε εισερχόμενα σήματα, αποκλίνουν σε μέτρο πολύ περισσότερο από τη μονάδα απ' όσο αποκλίνουν οι υπόλοιπες  $N$  ρίζες (που αντιστοιχούν σε εισερχόμενα σήματα). Έτσι, η εύρεση των ριζών που αντιστοιχούν σε υπαρκτά σήματα είναι σχετικά εύκολη. Από τη στιγμή που θα γίνει δεκτή μια ρίζα  $z_n$  (δηλ. θα έχει μέτρο κοντά στη μονάδα), μπορεί να γίνει χρήση της (7.139) για να βρεθεί η αντίστοιχη γωνία άφιξης  $\vartheta_n$ . Παίρνοντας τα ορίσματα και στα δυο μέλη της (7.139) βρίσκουμε

$$\angle z_n = -\beta d \cos \vartheta_n, \quad (7.140)$$

και τελικά η γωνία άφιξης υπολογίζεται από τη σχέση

$$\vartheta_n = \cos^{-1} \left( -\frac{\angle z_n}{\beta d} \right). \quad (7.141)$$

*Παράδειγμα εφαρμογής εκτιμητών PHD και LP:*

Εκτιμητές DoA PHD και LP χρησιμοποιούν στοιχειοκεραία 13 ιστροπικών στοιχείων ( $M=13$ ) που διατάσσονται στον  $z$ -άξονα του συστήματος συντεταγμένων και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d=\lambda/2$ . Και στους δυο εκτιμητές εισέρχονται πέντε ασυσχέτιστα μεταξύ

τους σήματα ( $N=5$ ) με αντίστοιχες γωνίες άφιξης  $\vartheta_1=89.7^\circ$ ,  $\vartheta_2=90^\circ$ ,  $\vartheta_3=90.3^\circ$ ,  $\vartheta_4=90.7^\circ$  και  $\vartheta_5=90.8^\circ$ . Η μέτρηση των γωνιών γίνεται ως προς τον z-άξονα, δηλ. είναι γωνίες ανύψωσης (elevation angles). Αν το καθένα από τα πέντε σήματα είναι ισχύος 0.1W, ενώ τα σήματα θορύβου είναι μηδενικής μέσης τιμής, ασυσχέτιστα μεταξύ τους και ασυσχέτιστα ως προς τα εισερχόμενα σήματα, και ισχύος 0.1W (ίση δηλαδή μ' αυτή των σημάτων), να υπολογιστεί το χωρικό φάσμα ισχύος των δυο εκτιμητών. Ως στοιχείο αναφοράς για τον εκτιμητή LP να επιλεγεί το πρώτο στοιχείο της στοιχειοκεραίας.

Λύση:

Πρακτικώς, ζητούνται οι γραφικές παραστάσεις ως προς τη γωνία  $\vartheta$  της μέσης ισχύος που περιγράφεται αντίστοιχα από την (7.95) για τον εκτιμητή LP και την (7.133) για τον εκτιμητή PHD. Και στους δυο εκτιμητές γίνεται χρήση του πίνακα  $\bar{R}_{xx}$ , ο οποίος σε πραγματικό χρόνο κατασκευάζεται από δειγματοληψία των σημάτων εισόδου. Επειδή δεν έχουμε στη διάθεσή μας τέτοια δεδομένα, θα κατασκευάσουμε θεωρητικά τον πίνακα αυτό. Ως στοιχείο αναφοράς για τον εκτιμητή LP ζητείται να είναι το πρώτο στοιχείο της στοιχειοκεραίας, το οποίο θεωρείται τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος. Συνεπώς, θα ισχύει

$$\vec{r}_m = (m-1) \frac{\lambda}{2} \vec{z}_o, \quad m=1, \dots, 13. \quad (7.142)$$

Ο πίνακας οδήγησης  $\bar{A}$ , για πέντε εισερχόμενα σήματα με γωνίες άφιξης  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$  και  $\vartheta_5$ , θα έχει με τη βοήθεια της (7.4) τη μορφή

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_2) & \cdots & \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_5) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_2) & \cdots & \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_5) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_{13} \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta \vec{r}_{13} \cdot \vec{v}_2) & \cdots & \exp(j\beta \vec{r}_{13} \cdot \vec{v}_5) \end{bmatrix}, \quad (7.143)$$

όπου

$$\vec{v}_n = \cos \varphi_n \sin \vartheta_n \vec{x}_o + \sin \varphi_n \sin \vartheta_n \vec{y}_o + \cos \vartheta_n \vec{z}_o, \quad n=1,2,3,4,5. \quad (7.144)$$

Αντικαθιστώντας τις (7.142) και (7.144) στην (7.143), ο πίνακας οδήγησης παίρνει τη μορφή

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \exp(j\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j\pi \cos \vartheta_2) & \cdots & \exp(j\pi \cos \vartheta_5) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j12\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j12\pi \cos \vartheta_2) & \cdots & \exp(j12\pi \cos \vartheta_5) \end{bmatrix}. \quad (7.145)$$

Εφόσον τα εισερχόμενα σήματα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους, θα ισχύει η (7.42), η οποία για την περίπτωση που αντιμετωπίζουμε παίρνει τη μορφή

$$\bar{R}_{gg} = 0.1 \bar{I}_{5 \times 5}. \quad (7.146)$$

Επιπλέον, σύμφωνα με την (7.20), θα ισχύει

$$\bar{R}_{nn} = 0.1 \bar{I}_{13 \times 13}. \quad (7.147)$$



Τελικά, με αντικατάσταση των (7.145), (7.146) και (7.147) στην (7.17), προκύπτει ο πίνακας  $\bar{R}_{xx}$ . Το  $\bar{a}_d$  στην (7.95) και το  $\bar{a}(\varphi, \vartheta)$  στην (7.133) είναι τα διανύσματα οδήγησης που προκύπτουν καθώς σαρώνουμε ως προς τη γωνία  $\vartheta$ . Αντικαθιστώντας τις (7.5) και (7.142) στην (7.6), παίρνουμε

$$\bar{a}_d = \bar{a}(\varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\pi \cos \vartheta) \\ \vdots \\ \exp(j12\pi \cos \vartheta) \end{bmatrix}. \quad (7.148)$$

Επίσης, εφόσον το πρώτο στοιχείο είναι στοιχείο αναφοράς ( $q=1$ ), από την (7.81) προκύπτει

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.149)$$

Τότε, η (7.95) παίρνει τη μορφή

$$\hat{P}_{sd} = \frac{\bar{e}_1^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{e}_1}{|\bar{e}_1^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d|^2}. \quad (7.150)$$

Αντικαθιστώντας τον  $\bar{R}_{xx}$ , την (7.148) και την (7.149) στην (7.150), παίρνουμε το φάσμα ισχύος του εκτιμητή LP. Όσον αφορά τον εκτιμητή PHD, θα πρέπει να υπολογιστεί η μικρότερη ιδιοτιμή (από τις 13 συνολικά ιδιοτιμές) του  $\bar{R}_{xx}$ , η οποία προκύπτει ίση με 0.1, ενώ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα υπολογίζεται ίσο με

$$\bar{u}_{13} = \begin{bmatrix} 0.158 + j0.023 \\ -0.225 - j0.037 \\ -0.187 - j0.013 \\ -0.007 + j0.029 \\ 0.714 + j0 \\ -0.446 + j0.015 \\ 0.158 - j0.032 \\ -0.143 - j0.002 \\ -0.272 + j0.055 \\ 0.182 - j0.022 \\ 0.074 - j0.049 \\ 0.072 + j0.037 \\ -0.079 - j0.004 \end{bmatrix}. \quad (7.151)$$

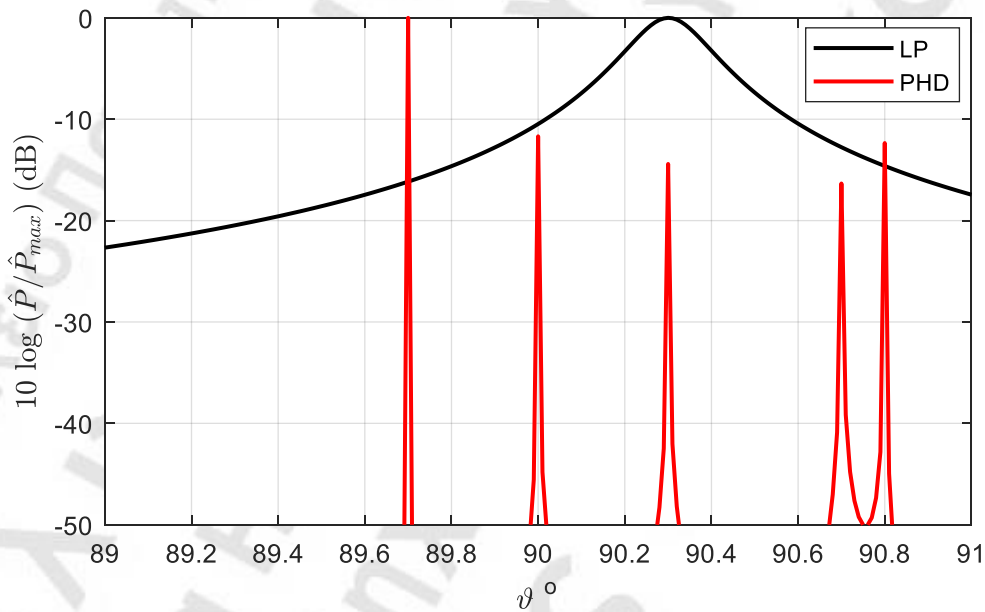
Τότε, η (7.133) παίρνει τη μορφή

$$P(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{|\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_{13}|^2} = \frac{1}{\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_{13} \bar{u}_{13}^H \bar{a}(\varphi, \vartheta)}, \quad (7.152)$$

η οποία με τη βοήθεια των (7.148) και (7.151) δίνει το φάσμα ισχύος του εκτιμητή PHD.

Τα φάσματα ισχύος των δυο εκτιμητών δίνονται στο σχήμα 7.7. Είναι εμφανής η διαφορά στη διακριτική ικανότητα των δυο εκτιμητών. Ο εκτιμητής PHD έχει τη δυνατότητα να ανιχνεύει γωνίες που απέχουν μεταξύ τους  $0.1^\circ$ , γεγονός που είναι παντελώς αδύνατο για τον εκτιμητή LP και προφανώς και για τους δυο προηγούμενους (Bartlett και Capon). Θα πρέπει βέβαια να σημειώσουμε ότι στην πράξη, όπου ο  $\bar{R}_{xx}$  κατασκευάζεται σε πραγματικό χρόνο από δειγματοληψία των σημάτων εισόδου, η διακριτική ικανότητα του εκτιμητή PHD χειροτερεύει. Επίσης, χειροτερεύει και στις περιπτώσεις που τα εισερχόμενα σήματα παρουσιάζουν συσχέτιση μεταξύ τους. Σε κάθε περίπτωση όμως, ο εκτιμητής PHD έχει πολύ καλύτερη διακριτική ικανότητα από τους υπόλοιπους εκτιμητές που είδαμε μέχρι στιγμής.

Το πρακτικό πλεονέκτημα της μεθόδου PHD είναι ότι δεν απαιτείται να γνωρίζουμε τον πραγματικό αριθμό των εισερχόμενων σημάτων. Ωστόσο, το πλεονέκτημα αυτό έχει ως τίμημα την πιθανότητα να προκύψουν τοπικά μέγιστα σε κατευθύνσεις που δεν αντιστοιχούν σε υπαρκτά σήματα. Βέβαια τα μέγιστα αυτά δημιουργούνται επιπροσθέτως των μεγίστων που αντιστοιχούν σε υπαρκτά σήματα και με αρκετά μικρότερο ύψος. Επομένως, αν θέσουμε κάποιο κατώφλι ύψους, τα μέγιστα αυτά μπορούν να επισημανθούν και να απορριφθούν. Επιπλέον, υπάρχει η πιθανότητα να υπάρξει μικρή μετατόπιση των τοπικών μεγίστων, δηλ. να παρατηρηθούν στο χωρικό φάσμα ελαφρώς μετατοπισμένα ως προς την πραγματική κατεύθυνση άφιξης.



**Σχήμα 7.7** Χωρικά φάσματα ισχύος εκτιμητών PHD και LP για γωνίες άφιξης  $89.7^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $90.3^\circ$ ,  $90.7^\circ$  και  $90.8^\circ$ .

Εφόσον στο παράδειγμα που εξετάζουμε, ο εκτιμητής PHD χρησιμοποιεί ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία, μπορούμε να εφαρμόσουμε την (7.141), ώστε να υπολογίσουμε κατευθείαν τις γωνίες άφιξης (δηλ. χωρίς να προηγηθεί η γωνιακή σάρωση που πραγματοποιείται για την παραγωγή του φάσματος ισχύος). Για το λόγο αυτό θα πρέπει να

υπολογιστούν οι ρίζες που πολυωνύμου που κατασκευάζεται από τα στοιχεία του  $\bar{u}_{13}$ . Με βάση την (7.151), το πολυώνυμο αυτό έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} & (-0.079 - j0.004)z_n^{12} + (0.072 + j0.037)z_n^{11} + (0.074 - j0.049)z_n^{10} + \\ & (0.182 - j0.022)z_n^9 + (-0.272 + j0.055)z_n^8 + (-0.143 - j0.002)z_n^7 + \\ & (0.158 - j0.032)z_n^6 + (-0.446 + j0.015)z_n^5 + 0.714z_n^4 + (-0.007 + j0.029)z_n^3 + \\ & (-0.187 - j0.013)z_n^2 + (-0.225 - j0.037)z_n + (0.158 + j0.023). \end{aligned} \quad (7.153)$$

Το άνω πολυώνυμο έχει 12 ( $M-1$ ) ρίζες, οι οποίες σε πολική μορφή δίνονται στον πίνακα 7.1. Όπως φαίνεται στον πίνακα, οι τελευταίες πέντε ρίζες έχουν μοναδιαίο μέτρο, ενώ το μέτρο των υπόλοιπων οκτώ ριζών αποκλίνει αρκετά από τη μονάδα (οι αποκλίσεις κυμαίνονται από 15.4% μέχρι 69.1%). Αυτό σημαίνει ότι μόνο οι τελευταίες πέντε ρίζες αντιστοιχούν σε υπαρκτά εισερχόμενα σήματα. Η (7.141) εφαρμόστηκε σε όλα τα ορίσματα των ριζών και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στη δεξιότερη στήλη του πίνακα. Προφανώς οι οκτώ πρώτες γωνίες άφιξης είναι ψευδείς και δεν αντιστοιχούν σε εισερχόμενα σήματα. Όσο για τις τελευταίες πέντε γωνίες άφιξης, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ταυτίζονται με τις γωνίες που δόθηκαν στην αρχή του παραδείγματος αυτού.

**Πίνακας 7.1** Μέτρο και όρισμα ριζών του πολυωνύμου (7.151), και αντίστοιχες γωνίες άφιξης.

$n$	$ z_n $	$\angle z_n$	$\vartheta_n$
1	1.691	121.67	132.53
2	1.475	-130.22	43.66
3	1.262	178.27	172.06
4	1.117	-84.70	61.93
5	1.154	90.06	120.02
6	0.703	141.33	141.74
7	0.712	-135.88	40.99
8	1.000	-0.94	89.70
9	1.000	2.51	90.80
10	1.000	2.20	90.70
11	1.000	0.00	90.00
12	1.000	0.94	90.30

## 7.6 Μέθοδος εκτίμησης MUSIC

Το ακρωνύμιο MUSIC προέρχεται από τον όρο Multiple Signal Classification και προτάθηκε ως μέθοδος εκτίμησης κατευθύνσεων άφιξης από τον Ralph Schmidt το 1986. Στην ουσία πρόκειται για τροποποίηση-επέκταση της μεθόδου PHD. Αντίθετα από τη μέθοδο PHD, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς να είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τον πραγματικό αριθμό των εισερχόμενων σημάτων, η μέθοδος MUSIC μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν γνωρίζουμε το πλήθος  $N$  των σημάτων που προσπίπτουν στη στοιχειοκεραία.

Από την ανάλυση που έγινε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι εμφανές ότι, λόγω της πρόσπτωσης  $N$  σημάτων σε στοιχειοκεραία  $M$  στοιχείων, δημιουργούνται δυο υποχώροι: Ο υποχώρος των σημάτων  $N$  διαστάσεων και ο υποχώρος θορύβου  $M-N$  διαστάσεων. Όπως εξηγήθηκε, οι δυο υποχώροι είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους, γεγονός που σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του υποχώρου θορύβου είναι ορθογώνιο σε οποιοδήποτε διάνυσμα του υποχώρου των σημάτων. Άρα, για κάθε διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}_n$  εισερχόμενου σήματος (που είναι στοιχείο του υποχώρου των σημάτων) και καθένα από τα ιδιοδιανύσματα  $\bar{u}_i$ ,  $i=N+1, \dots, M$  (που περιγράφουν πλήρως τον υποχώρο θορύβου) θα ισχύει η (7.125). Στην ουσία, η (7.125) περιγράφει για κάθε  $\bar{a}_n$  ένα σετ  $M-N$  εξισώσεων, οι οποίες μπορούν συγχωνευτούν σε μια και μόνο εξίσωση που έχει τη μορφή

$$\bar{a}_n^H [\bar{u}_{N+1} \quad \bar{u}_{N+2} \quad \dots \quad \bar{u}_M] = \bar{0}, \quad \forall n=1, \dots, N, \quad (7.154)$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{a}_n^H \bar{U}_{M-N} = \bar{0}, \quad \forall n=1, \dots, N, \quad (7.155)$$

όπου

$$\bar{U}_{M-N} = [\bar{u}_{N+1} \quad \bar{u}_{N+2} \quad \dots \quad \bar{u}_M] \quad (7.156)$$

είναι  $M \times (M-N)$  πίνακας που περιέχει τα  $M-N$  ιδιοδιανύσματα του υποχώρου θορύβου. Η (7.155) είναι διανυσματική έκφραση και μπορεί να μετατραπεί σε αριθμητική αν πάρουμε το τετράγωνο του μήκους (norm) του διανύσματος  $\bar{a}_n^H \bar{U}_{M-N}$ , οπότε θα έχουμε

$$\|\bar{a}_n^H \bar{U}_{M-N}\|^2 = \bar{a}_n^H \bar{U}_{M-N} \bar{U}_{M-N}^H \bar{a}_n = 0, \quad \forall n=1, \dots, N. \quad (7.157)$$

Είναι προφανές ότι η (7.157) συνεπάγεται την (7.155) και το αντίστροφο. Η άνω σχέση είναι η βασική συνθήκη της μεθόδου MUSIC. Εν ολίγοις, η μέθοδος PHD εκμεταλλεύεται την ορθογωνιότητα των δυο υποχώρων (σημάτων και θορύβου) κάνοντας χρήση ενός και μόνο ιδιοδιανύσματος του υποχώρου θορύβου (αυτού που αντιστοιχεί στη μικρότερη ιδιοτιμή), ενώ η μέθοδος MUSIC εκμεταλλεύεται την ίδια ακριβώς ορθογωνιότητα κάνοντας χρήση όλων των ιδιοδιανυσμάτων του υποχώρου θορύβου. Για το λόγο αυτό και μόνο, στη μέθοδο MUSIC πρέπει να γνωρίζουμε ποιος είναι ο αριθμός  $N$  των εισερχόμενων σημάτων. Αυτό πρακτικώς είναι μειονέκτημα της μεθόδου, αλλά αντισταθμίζεται από το γεγονός ότι δεν προκύπτουν τόσο εύκολα «ψευδή» τοπικά μέγιστα (δηλ. μέγιστα σε κατευθύνσεις που δεν αντιστοιχούν σε υπαρκτά σήματα) όπως στη μέθοδο PHD.

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι αν έχουμε  $M-1$  εισερχόμενα σήματα, ο υποχώρος θορύβου θα περιγράφεται από ένα και μόνο ιδιοδιάνυσμα, το  $\bar{u}_M$ , γεγονός που σημαίνει ότι η (7.157) μεταπίπτει στην (7.130) και συνεπώς η μέθοδος MUSIC ταυτίζεται με τη μέθοδο PHD.

Παρόμοια με τη μέθοδο PHD, το φάσμα προκύπτει από την αντιστροφή της άνω σχέσης, άρα θα έχει τη μορφή

$$P(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{\|\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_{M-N}\|^2} = \frac{1}{\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_{M-N} \bar{u}_{M-N}^H \bar{a}(\varphi, \vartheta)}, \quad (7.158)$$

όπου  $\bar{a}(\varphi, \vartheta)$  το τυχαίο διάνυσμα οδήγησης. Όποτε, λοιπόν, το  $\bar{a}(\varphi, \vartheta)$  προσεγγίζει το διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}_n$  υπαρκτού εισερχόμενου σήματος, από την άνω σχέση θα προκύπτει αντίστοιχο τοπικό μέγιστο στο φάσμα ισχύος.

Η διαδικασία, τελικά, που διενεργεί ο εκτιμητής MUSIC κάθε φορά που υπολογίζεται η τιμή του  $\bar{R}_{xx}$ , είναι η εξής: Υπολογίζονται αρχικά οι ιδιοτιμές του  $\bar{R}_{xx}$  και στη συνέχεια τα  $\bar{u}_{N+1}, \dots, \bar{u}_M$ , δηλ. τα  $M-N$  ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μικρότερες  $M-N$  ιδιοτιμές. Έπειτα, γίνεται σάρωση ως προς τις γωνίες  $\vartheta$  και  $\varphi$ , με συγκεκριμένα βήματα σάρωσης για καθεμιά από τις δυο γωνίες. Για κάθε ζεύγος τιμών  $(\varphi, \vartheta)$ , κατασκευάζεται το αντίστοιχο διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}(\varphi, \vartheta)$ , θεωρώντας το ως διάνυσμα οδήγησης υποθετικού εισερχόμενου σήματος, και εφαρμόζεται η (7.158). Αν από την κατεύθυνση  $(\varphi, \vartheta)$  δεν εισέρχεται κάποιο σήμα, η  $P(\varphi, \vartheta)$  θα έχει χαμηλή τιμή. Αντίθετα, αν η κατεύθυνση  $(\varphi, \vartheta)$  είναι πράγματι κατεύθυνση άφιξης υπαρκτού εισερχόμενου σήματος, τότε η  $P(\varphi, \vartheta)$  εμφανίζει τοπικό μέγιστο. Για κάθε τοπικό μέγιστο της  $P(\varphi, \vartheta)$ , γίνεται καταγραφή της κατεύθυνσης άφιξης  $(\varphi, \vartheta)$ .

*Παράδειγμα εφαρμογής εκτιμητών MUSIC και PHD:*

Εκτιμητές DoA MUSIC και PHD χρησιμοποιούν στοιχειοκεραία 10 ιστροπικών στοιχείων ( $M=10$ ) που διατάσσονται στον  $z$ -άξονα του συστήματος συντεταγμένων και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d=\lambda/2$ . Και στους δυο εκτιμητές εισέρχονται πέντε ασυσχέτιστα μεταξύ τους σήματα ( $N=5$ ) με αντίστοιχες γωνίες άφιξης ως προς τον  $z$ -άξονα  $\vartheta_1=89.2^\circ$ ,  $\vartheta_2=89.3^\circ$ ,  $\vartheta_3=90.3^\circ$ ,  $\vartheta_4=90.4^\circ$  και  $\vartheta_5=90.7^\circ$ . Αν το καθένα από τα πέντε σήματα είναι ισχύος 0.1W, ενώ τα σήματα θορύβου είναι μηδενικής μέσης τιμής, ασυσχέτιστα μεταξύ τους και ασυσχέτιστα ως προς τα εισερχόμενα σήματα, και ισχύος 0.1W (ίση δηλαδή μ' αυτή των σημάτων), να υπολογιστεί το χωρικό φάσμα ισχύος των δυο εκτιμητών.

*Λύση:*

Ο πίνακας  $\bar{R}_{xx}$  θα κατασκευαστεί θεωρητικά με τη βοήθεια της (7.17). Θεωρώντας το πρώτο στοιχείο της στοιχειοκεραίας τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος, θα ισχύει

$$\vec{r}_m = (m-1) \frac{\lambda}{2} \vec{z}_o, \quad m=1, \dots, 10. \quad (7.159)$$

Κατ' αντιστοιχία με την (7.145), ο πίνακας οδήγησης  $\bar{A}$  για πέντε εισερχόμενα σήματα που λαμβάνονται από στοιχειοκεραία 10 στοιχείων θα έχει τη μορφή

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \exp(j\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j\pi \cos \vartheta_2) & \cdots & \exp(j\pi \cos \vartheta_5) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j9\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j9\pi \cos \vartheta_2) & \cdots & \exp(j9\pi \cos \vartheta_5) \end{bmatrix}. \quad (7.160)$$

Εφόσον τα εισερχόμενα σήματα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους, θα ισχύει η (7.42), η οποία για την περίπτωση που αντιμετωπίζουμε παίρνει τη μορφή

$$\bar{R}_{gg} = 0.1 \bar{I}_{5 \times 5}. \quad (7.161)$$

Επιπλέον, σύμφωνα με την (7.20), θα ισχύει

$$\bar{R}_{nn} = 0.1 \bar{I}_{10 \times 10}. \quad (7.162)$$

Τελικά, με αντικατάσταση των (7.160), (7.161) και (7.162) στην (7.17), προκύπτει ο πίνακας  $\bar{R}_{xx}$ . Το  $\bar{a}(\varphi, \vartheta)$  στις (7.133) και (7.158) είναι το διάνυσμα οδήγησης που προκύπτει καθώς σαρώνουμε ως προς τη γωνία  $\vartheta$ . Αντικαθιστώντας τις (7.5) και (7.159) στην (7.6), παίρνουμε

$$\bar{a}(\varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\pi \cos \vartheta) \\ \vdots \\ \exp(j9\pi \cos \vartheta) \end{bmatrix}. \quad (7.163)$$

Όσον αφορά τον εκτιμητή PHD, θα πρέπει να υπολογιστεί η μικρότερη ιδιοτιμή (από τις 10 συνολικά ιδιοτιμές) του  $\bar{R}_{xx}$  και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $\bar{u}_{10}$ , οπότε το φάσμα ισχύος υπολογίζεται με βάση τη σχέση

$$P(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{|\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{u}_{10}|^2}. \quad (7.164)$$

Όσον αφορά τον εκτιμητή MUSIC, θα πρέπει να υπολογιστούν τα πέντε ιδιοδιανύσματα  $\bar{u}_6, \dots, \bar{u}_{10}$  που αντιστοιχούν στις πέντε μικρότερες ιδιοτιμές του  $\bar{R}_{xx}$ , οπότε το φάσμα ισχύος υπολογίζεται με βάση τη σχέση

$$P(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{U}_5 \bar{U}_5^H \bar{a}(\varphi, \vartheta)}, \quad (7.165)$$

όπου

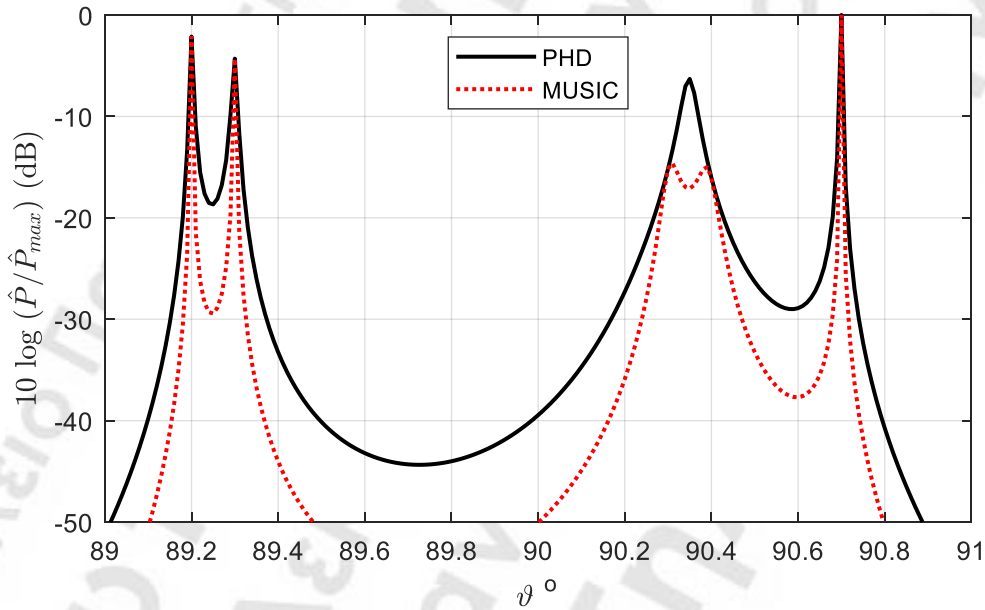
$$\bar{U}_5 = [\bar{u}_6 \quad \bar{u}_7 \quad \cdots \quad \bar{u}_{10}] \quad (7.166)$$

Τα φάσματα ισχύος των δυο εκτιμητών δίνονται στο σχήμα 7.8. Όπως παρατηρούμε, η μέθοδος MUSIC παρουσιάζει καλύτερη διακριτική ικανότητα απ' αυτή της PHD, δεδομένου ότι οι κορυφές που παράγει η MUSIC είναι πιο στενές. Επιπλέον, η μέθοδος PHD αδυνατεί να διαχωρίσει μεταξύ τους τις γωνίες άφιξης  $90.3^\circ$  και  $90.4^\circ$  (εμφανίζει ένα μέγιστο ανάμεσα στις δυο αυτές γωνίες). Η αδυναμία διαχωρισμού δυο γειτονικών γωνιών άφιξης οφείλεται συνήθως στο φαινόμενο μετατόπισης των κορυφών που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Η μέθοδος MUSIC πάσχει λιγότερο, συγκριτικά με την PHD, από



το φαινόμενο μετατόπισης κορυφών, επειδή εξετάζει την ορθογωνιότητα  $M-N$  ιδιοδιανυσμάτων (του υποχώρου θορύβου) ως προς κάθε διάνυσμα οδήγησης, ενώ η PHD εξετάζει την ορθογωνιότητα ενός μόνο ιδιοδιανύσματος θορύβου ως προς τα διανύσματα οδήγησης. Θα πρέπει και πάλι να σημειώσουμε ότι στην πράξη, όπου ο  $\bar{R}_{xx}$  κατασκευάζεται σε πραγματικό χρόνο από δειγματοληψία των σημάτων εισόδου, η διακριτική ικανότητα και των δυο μεθόδων χειροτερεύει. Επίσης, μπορεί να χειροτερεύσει ακόμη περισσότερο όταν τα εισερχόμενα σήματα παρουσιάζουν συσχέτιση μεταξύ τους. Βέβαια σε κάθε περίπτωση, οι εκτιμητές PHD και MUSIC έχουν πολύ καλύτερη διακριτική ικανότητα από τους υπόλοιπους εκτιμητές που είδαμε μέχρι στιγμής.

Το πρακτικό μειονέκτημα της μεθόδου MUSIC είναι ότι απαιτείται να γνωρίζουμε τον πραγματικό αριθμό των εισερχόμενων σημάτων, απαίτηση που δεν ισχύει στη μέθοδο PHD. Ωστόσο, το μειονέκτημα αυτό αντισταθμίζεται από το γεγονός ότι, συγκριτικά με την PHD, η μέθοδος MUSIC δίνει λιγότερα και πιο εξομαλυμένα «ψευδή» τοπικά μέγιστα (δηλ. μέγιστα σε κατευθύνσεις που δεν αντιστοιχούν σε υπαρκτά σήματα).



**Σχήμα 7.8** Χωρικά φάσματα ισχύος εκτιμητών MUSIC και PHD για γωνίες άφιξης 89.2°, 89.3°, 90.3°, 90.4° και 90.7°.

### **7.7 Μέθοδος εκτίμησης Root-MUSIC**

Η μέθοδος Root-MUSIC είναι στην ουσία η MUSIC, που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, αλλά έχει εφαρμογή μόνο σε ομοιόμορφες γραμμικές στοιχειοκεραίες. Προτάθηκε από τον Arthur Barabell το 1983. Η λογική στην οποία στηρίζεται είναι παρόμοια με την εφαρμογή της PHD σε ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία που είδαμε στην παράγραφο 7.5, δηλαδή γίνεται υπολογισμός των ριζών κάποιου πολυωνύμου και από τις ρίζες αυτές γίνεται κατευθείαν εκτίμηση των γωνιών άφιξης χωρίς να χρειάζεται η

κατασκευή του χωρικού φάσματος ισχύος. Αυτό βέβαια αποτελεί πλεονέκτημα της μεθόδου, γιατί επιταχύνεται σημαντικά ο υπολογισμός των γωνιών άφιξης. Ωστόσο, η Root-MUSIC μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν γνωρίζουμε το πλήθος  $N$  των σημάτων που προσπίπτουν στη στοιχειοκεραία, δηλαδή έχει το ίδιο μειονέκτημα που έχει και η συμβατική μέθοδος MUSIC. Επίσης θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην πράξη, όπου ο  $\bar{R}_{xx}$  κατασκευάζεται από δειγματοληψία των σημάτων εισόδου, μπορεί να προκύψει κάποιο σφάλμα στον υπολογισμό των γωνιών άφιξης. Το σφάλμα αυτό μπορεί να χειροτερεύσει περισσότερο όταν τα εισερχόμενα σήματα παρουσιάζουν συσχέτιση μεταξύ τους ή όταν ελαττώνεται η τιμή του λόγου σήματος-προς-θόρυβο.

Η (7.157) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\bar{a}_n^H \bar{C} \bar{a}_n = 0, \quad (7.167)$$

όπου

$$\bar{C} = \bar{U}_{M-N} \bar{U}_{M-N}^H \quad (7.168)$$

είναι  $M \times M$  ερμιτιανός πίνακας (από την άνω σχέση είναι προφανές ότι ισχύει  $\bar{C} = \bar{C}^H$ ). Εφόσον πρόκειται για ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία  $M$  ισοτροπικών στοιχείων, που διατάσσονται κατά μήκος του  $z$ -άξονα και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d$ , και θεωρώντας το πρώτο στοιχείο τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, θα ισχύουν οι (7.134) και (7.135). Αναλύοντας την (7.167) με τη βοήθεια της (7.135), παίρνουμε

$$\bar{a}_n^H \bar{C} \bar{a}_n = \sum_{m=1}^M \left( \exp[-j(m-1)\beta d \cos \vartheta_n] \sum_{m'=1}^M C_{mm'} \exp[j(m'-1)\beta d \cos \vartheta_n] \right) = 0, \quad (7.169)$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{a}_n^H \bar{C} \bar{a}_n = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M C_{mm'} \exp[j(m'-m)\beta d \cos \vartheta_n] = 0, \quad (7.170)$$

και τελικά

$$\bar{a}_n^H \bar{C} \bar{a}_n = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M C_{mm'} z_n^{m'-m} = 0, \quad (7.171)$$

όπου

$$z_n = \exp(j\beta d \cos \vartheta_n). \quad (7.172)$$

Για να γίνει αντιληπτό τι ακριβώς αναλύεται το διπλό άθροισμα της (7.171) μπορούμε να πάρουμε ένα παράδειγμα πίνακα  $\bar{C}$   $3 \times 3$  (δηλ. για  $M=3$ ). Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 \sum_{m'=1}^3 C_{mm'} z_n^{m'-m} &= C_{11}z^0 + C_{12}z^1 + C_{13}z^2 + C_{21}z^{-1} + C_{22}z^0 + C_{23}z^1 + C_{31}z^{-2} + C_{32}z^{-1} + C_{33}z^0 \\ &= C_{31}z^{-2} + (C_{21} + C_{32})z^{-1} + (C_{11} + C_{22} + C_{33})z^0 + (C_{12} + C_{23})z^1 + C_{13}z^2. \end{aligned} \quad (7.173)$$

Παρατηρούμε ότι το διπλό άθροισμα μπορεί να αναχθεί σε απλό άθροισμα δυνάμεων της μεταβλητής  $z$ , όπου οι εκθέτες των δυνάμεων κυμαίνονται από  $-(M-1)$  μέχρι  $M-1$ , ενώ ο



συντελεστής κάθε δύναμης του  $z$  είναι το άθροισμα των στοιχείων της αντίστοιχης διαγωνίου του πίνακα  $\bar{C}$ . Μπορούμε να θεωρήσουμε τον αύξοντα αριθμό κάθε διαγωνίου ως εκθέτη της αντίστοιχης δύναμης του  $z$ , αν αριθμήσουμε κατάλληλα τις διαγωνίους. Έτσι, η κύρια διαγώνιος θεωρείται ότι έχει αύξοντα αριθμό  $\ell=0$ . Οι διαγώνιοι πάνω από την κύρια έχουν αύξοντα αριθμό θετικό ( $\ell = 1, 2, 3$ , κ.ο.κ.), ενώ κάτω από την κύρια έχουν αύξοντα αριθμό αρνητικό ( $\ell = -1, -2, -3$ , κ.ο.κ.). Η αρίθμηση αυτή φαίνεται στην παρακάτω έκφραση ενός πίνακα  $\bar{C}$   $3 \times 3$ :

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \nearrow \ell=2 \\ \nearrow \ell=1 \\ \nearrow \ell=0 \\ \searrow \ell=-1 \\ \searrow \ell=-2 \end{array} \quad (7.174)$$

Είναι προφανές ότι τα στοιχεία μιας διαγωνίου έχουν διαφορά δεικτών στήλης-γραμμής ίση με τον αύξοντα αριθμό της διαγωνίου, δηλαδή

$$\ell = m' - m. \quad (7.175)$$

Τότε, η (7.173) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{m'=1}^3 C_{mm'} z_n^{m'-m} = c_{-2} z^{-2} + c_{-1} z^{-1} + c_0 z^0 + c_1 z^1 + c_2 z^2 = \sum_{\ell=-2}^2 c_{\ell} z_n^{\ell}, \quad (7.176)$$

όπου

$$c_{-2} = C_{31}, \quad c_{-1} = C_{21} + C_{32}, \quad c_0 = C_{11} + C_{22} + C_{33}, \quad c_1 = C_{12} + C_{23} \quad \text{και} \quad c_2 = C_{13}. \quad (7.177)$$

Γενικά, λοιπόν, θα ισχύει

$$c_{\ell} = \sum_{m'-m=\ell} C_{mm'}. \quad (7.178)$$

Επιπλέον, επειδή ο  $\bar{C}$  είναι ερμιτιανός ( $C_{mm'} = C_{m'm}^*$ ), από την άνω σχέση προκύπτει

$$c_{-\ell} = c_{\ell}^*. \quad (7.179)$$

Με βάση τα παραπάνω, η (7.171) μπορεί να απλοποιηθεί στη μορφή

$$\bar{a}_n^H \bar{C} \bar{a}_n = \sum_{\ell=-(M-1)}^{M-1} c_{\ell} z_n^{\ell} = 0, \quad (7.180)$$

ή στην ισοδύναμή της (βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο  $z_n^{-(M-1)}$  έξω από το άθροισμα)

$$P(z) = \sum_{\ell=0}^{2(M-1)} c_{\ell-(M-1)} z_n^{\ell} = 0. \quad (7.181)$$

Επομένως, προκύπτει πολυώνυμο βαθμού  $2M-2$ , άρα θα έχει  $2M-2$  ρίζες. Λόγω της (7.172), μόνο οι ρίζες που έχουν μοναδιαίο μέτρο (ή μέτρο πολύ κοντά στη μονάδα) αντιστοιχούν σε υπαρκτό εισερχόμενο σήμα, και συνεπώς μόνο αυτές οι ρίζες πρέπει να γίνουν δεκτές. Από τη στιγμή που θα γίνει δεκτή μια ρίζα  $z_n$  (δηλ. θα έχει μέτρο κοντά στη μονάδα), μπορεί να

γίνει χρήση της (7.172) για να βρεθεί η αντίστοιχη γωνία άφιξης  $\vartheta_n$ . Παίρνοντας τα ορίσματα και στα δυο μέλη της (7.172) βρίσκουμε

$$\angle z_n = \beta d \cos \vartheta_n, \quad (7.182)$$

και τελικά η γωνία άφιξης υπολογίζεται από τη σχέση

$$\vartheta_n = \cos^{-1} \left( \frac{\angle z_n}{\beta d} \right). \quad (7.183)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το άνω πολυώνυμο έχει την ιδιότητα της αυτο-αμοιβαιότητας (self-reciprocity), επειδή επαληθεύει τη συνθήκη

$$P(z) = P^*(z). \quad (7.184)$$

Πράγματι, αν

$$P(z) = \sum_{\ell=0}^{2(M-1)} c_{\ell-(M-1)} z_n^\ell = c_{-M+1} + c_{-M+2} z_n + \dots + c_{M-2} z_n^{2M-3} + c_{M-1} z_n^{2M-2}, \quad (7.185)$$

τότε

$$P^*(z) = c_{-M+1}^* z_n^{2M-2} + c_{-M+2}^* z_n^{2M-3} + \dots + c_{M-2}^* z_n + c_{M-1}^*, \quad (7.186)$$

αλλά λόγω της (7.179), η άνω σχέση γίνεται

$$P^*(z) = c_{M-1} z_n^{2M-2} + c_{M-2} z_n^{2M-3} + \dots + c_{-M+2} z_n + c_{-M+1}. \quad (7.187)$$

Συγκρίνοντας την (7.187) με την (7.185), επαληθεύεται η (7.184). Πολυώνυμα που έχουν ιδιότητα της αυτο-αμοιβαιότητας παρουσιάζουν το εξής χαρακτηριστικό: Αν  $z_n$  είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε είναι επίσης ρίζα και η  $1/z_n^*$ . Δηλαδή, οι ρίζες του πολυωνύμου αυτού εμφανίζονται κατά ζεύγη με ίσα ορίσματα και αντίστροφα μέτρα. Αυτό σημαίνει ότι αν η μια ρίζα του ζεύγους είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου τότε η άλλη είναι εκτός. Επιπλέον, αν η μια ρίζα του ζεύγους είναι επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, τότε θα είναι και η άλλη (δηλ. θα έχουν και οι δυο μοναδιαίο μέτρο). Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, μόνο οι ρίζες που έχουν μοναδιαίο μέτρο (ή μέτρο πολύ κοντά στη μονάδα) γίνονται δεκτές επειδή θεωρείται ότι αντιστοιχούν σε υπαρκτό εισερχόμενο σήμα. Αλλά ρίζες μπορούν να εμφανίζονται επάνω ή πολύ κοντά στο μοναδιαίο κύκλο κατά ζεύγη και μάλιστα με το ίδιο όρισμα, από το οποίο προκύπτει η γωνία άφιξης με εφαρμογή της (7.183). Συνεπώς, σε κάθε ζεύγος ριζών επάνω ή πολύ κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αντιστοιχεί μια γωνία άφιξης. Άρα, αφού το πολυώνυμο είναι βαθμού  $2M-2$ , μπορεί να προκύψουν το πολύ  $M-1$  ζεύγη ριζών επάνω ή κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, άρα μπορούμε να πάρουμε το πολύ  $M-1$  γωνίες άφιξης.

Τέλος, θα πρέπει να αναφερθεί ότι η (7.158) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή του χωρικού φάσματος ισχύος και στην περίπτωση εφαρμογής της Root-MUSIC.

*Παράδειγμα εφαρμογής εκτιμητή Root-MUSIC:*

Εκτιμητής DoA Root-MUSIC χρησιμοποιεί στοιχειοκεραία 4 ιστροπικών στοιχείων ( $M=4$ ) που διατάσσονται στον  $z$ -άξονα του συστήματος συντεταγμένων και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d=\lambda/2$ . Στο σύστημα εκτίμησης εισέρχονται δυο ασυσχέτιστα μεταξύ τους σήματα

( $N=2$ ) με αντίστοιχες γωνίες άφιξης ως προς τον z-άξονα  $\vartheta_1=88.1^\circ$  και  $\vartheta_2=88.2^\circ$ . Αν το καθένα από τα δυο σήματα είναι ισχύος  $0.1W$ , ενώ τα σήματα θορύβου είναι μηδενικής μέσης τιμής, ασυσχέτιστα μεταξύ τους και ασυσχέτιστα ως προς τα εισερχόμενα σήματα, και ισχύος  $0.1W$ , να κατασκευαστεί το χωρικό φάσμα ισχύος του εκτιμητή και να επαληθευτούν οι γωνίες άφιξης των εισερχόμενων σημάτων.

Λύση:

Ο πίνακας  $\bar{R}_{xx}$  θα κατασκευαστεί θεωρητικά με τη βοήθεια της (7.17). Θεωρώντας το πρώτο στοιχείο της στοιχειοκεραίας τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος, θα ισχύει

$$\vec{r}_1 = 0\vec{z}_o, \quad \vec{r}_2 = \frac{\lambda}{2}\vec{z}_o, \quad \vec{r}_3 = \lambda\vec{z}_o \quad \text{και} \quad \vec{r}_4 = \frac{3\lambda}{2}\vec{z}_o. \quad (7.188)$$

Ο πίνακας οδήγησης  $\bar{A}$ , για δυο εισερχόμενα σήματα με γωνίες άφιξης  $\vartheta_1$  και  $\vartheta_2$ , θα έχει με τη βοήθεια της (7.4) τη μορφή

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_2) \\ \exp(j\beta\vec{r}_2 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta\vec{r}_2 \cdot \vec{v}_2) \\ \exp(j\beta\vec{r}_3 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta\vec{r}_3 \cdot \vec{v}_2) \\ \exp(j\beta\vec{r}_4 \cdot \vec{v}_1) & \exp(j\beta\vec{r}_4 \cdot \vec{v}_2) \end{bmatrix}, \quad (7.189)$$

όπου

$$\vec{v}_n = \cos\varphi_n \sin\vartheta_n \vec{x}_o + \sin\varphi_n \sin\vartheta_n \vec{y}_o + \cos\vartheta_n \vec{z}_o, \quad n=1,2. \quad (7.190)$$

Αντικαθιστώντας τις (7.188) και (7.190) στην (7.189), ο πίνακας οδήγησης παίρνει τη μορφή

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp(j\pi \cos\vartheta_1) & \exp(j\pi \cos\vartheta_2) \\ \exp(j2\pi \cos\vartheta_1) & \exp(j2\pi \cos\vartheta_2) \\ \exp(j3\pi \cos\vartheta_1) & \exp(j3\pi \cos\vartheta_2) \end{bmatrix}. \quad (7.191)$$

Εφόσον τα εισερχόμενα σήματα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους, θα ισχύει η (7.42), η οποία για την περίπτωση που αντιμετωπίζουμε παίρνει τη μορφή

$$\bar{R}_{gg} = 0.1 \bar{I}_{2 \times 2}. \quad (7.192)$$

Επιπλέον, σύμφωνα με την (7.20), θα ισχύει

$$\bar{R}_{nn} = 0.1 \bar{I}_{4 \times 4}. \quad (7.193)$$

Τελικά, με αντικατάσταση των (7.191), (7.192) και (7.193) στην (7.17), προκύπτει ο πίνακας  $\bar{R}_{xx}$ , ίσος με

$$\bar{R}_{xx} = \begin{bmatrix} 0.300 & 0.199 - j0.020 & 0.196 - j0.040 & 0.191 - j0.060 \\ 0.199 + j0.020 & 0.300 & 0.199 - j0.020 & 0.196 - j0.040 \\ 0.196 + j0.040 & 0.199 + j0.020 & 0.300 & 0.199 - j0.020 \\ 0.191 + j0.060 & 0.196 + j0.040 & 0.199 + j0.020 & 0.300 \end{bmatrix}. \quad (7.194)$$

Το  $\bar{a}(\varphi, \vartheta)$  στην (7.158) είναι το διάνυσμα οδήγησης που προκύπτει καθώς σαρώνουμε ως προς τη γωνία  $\vartheta$ . Αντικαθιστώντας τις (7.5) και (7.188) στην (7.6), παίρνουμε

$$\bar{a}(\varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\pi \cos \vartheta) \\ \exp(j2\pi \cos \vartheta) \\ \exp(j3\pi \cos \vartheta) \end{bmatrix}. \quad (7.195)$$

Οι ιδιοτιμές του του  $\bar{R}_{xx}$  υπολογίζονται ίσες με 0.89999, 0.10001, 0.1 και 0.1. Θα πρέπει, λοιπόν, να υπολογιστούν τα δυο ( $M-N$ ) ιδιοδιανύσματα  $\bar{u}_3$  και  $\bar{u}_4$  που αντιστοιχούν στις δυο μικρότερες ιδιοτιμές του  $\bar{R}_{xx}$  (ίσες με 0.1). Αυτά είναι

$$\bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 0.066 + j0.024 \\ -0.488 - j0.005 \\ 0.790 + j0 \\ -0.365 - j0.019 \end{bmatrix} \quad (7.196)$$

και

$$\bar{u}_4 = \begin{bmatrix} -0.536 + j0.058 \\ 0.790 + j0 \\ 0.038 - j0.008 \\ -0.284 - j0.050 \end{bmatrix}. \quad (7.197)$$

Στη συνέχεια, από τα δυο άνω ιδιοδιανύσματα του υποχώρου θορύβου, κατασκευάζουμε τον πίνακα  $\bar{U}_{M-N}$ , ο οποίος θα έχει τη μορφή

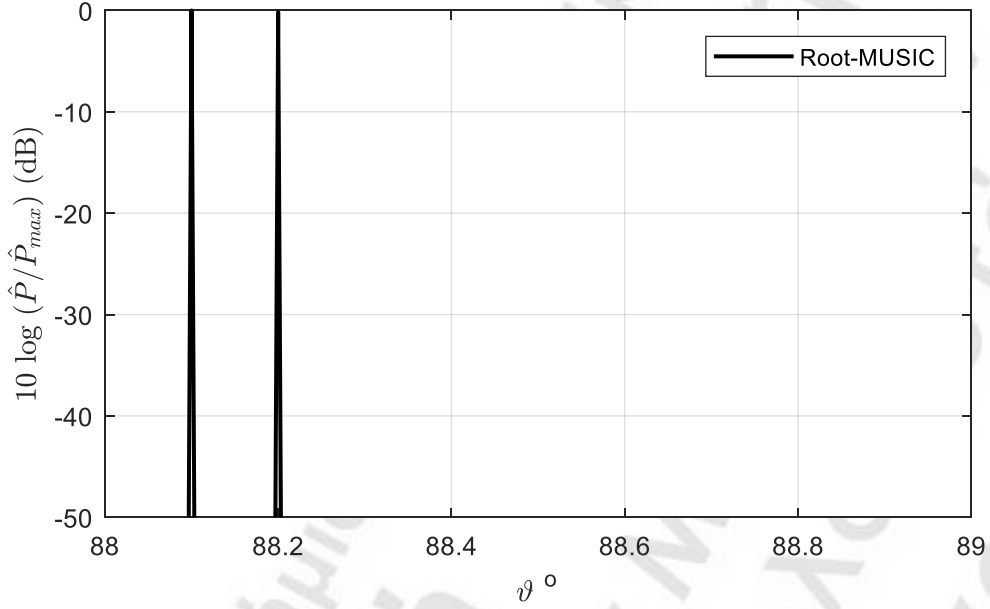
$$\bar{U}_2 = \begin{bmatrix} 0.066 + j0.024 & -0.536 + j0.058 \\ -0.488 - j0.005 & 0.790 + j0 \\ 0.790 + j0 & 0.038 - j0.008 \\ -0.365 - j0.019 & -0.284 - j0.050 \end{bmatrix}. \quad (7.198)$$

Τότε, το φάσμα ισχύος υπολογίζεται με βάση τη σχέση

$$P(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{\bar{a}^H(\varphi, \vartheta) \bar{U}_2 \bar{U}_2^H \bar{a}(\varphi, \vartheta)}, \quad (7.199)$$

όπου το  $\bar{a}(\varphi, \vartheta)$  εκφράζεται από την (7.195) και το  $\bar{U}_2$  από την (7.198). Στην ουσία γίνεται σάρωση ως προς τη γωνία  $\vartheta$ . Το φάσμα ισχύος που προκύπτει φαίνεται στο σχήμα 7.9. Είναι προφανές ότι ο εκτιμητής ανιχνεύει σωστά τις δυο γωνίες άφιξης.

Στην ουσία, μέχρι στιγμής εφαρμόστηκε ο συμβατικός αλγόριθμος MUSIC. Για να υπολογίσουμε τις γωνίες άφιξης με τον αλγόριθμο Root-MUSIC χωρίς να χρειαστεί η κατασκευή του χωρικού φάσματος, κατασκευάζουμε τον πίνακα  $\bar{C}$  με τη βοήθεια της (7.168), οπότε παίρνουμε



**Σχήμα 7.9** Χωρικό φάσμα ισχύος εκτιμητή Root-MUSIC για γωνίες άφιξης 88.1° και 88.2°.

$$\bar{C} = \bar{U}_2 \bar{U}_2^H = \begin{bmatrix} 0.296 & -0.456 + j0.035 & 0.031 + j0.017 & 0.125 - j0.051 \\ -0.456 - j0.035 & 0.863 & -0.355 + j0.002 & -0.046 + j0.033 \\ 0.031 - j0.017 & -0.355 - j0.002 & 0.625 & -0.298 + j0.019 \\ 0.125 + j0.051 & -0.046 - j0.033 & -0.298 - j0.019 & 0.216 \end{bmatrix}. \quad (7.200)$$

Τα αθροίσματα των στοιχείων των διαγωνίων του άνω πίνακα υπολογίζονται από την (7.178), οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} c_{-3} &= 0.125 + j0.051 \\ c_{-2} &= -0.015 - j0.049 \\ c_{-1} &= -1.110 - j0.056 \\ c_0 &= 2 \\ c_1 &= -1.110 + j0.056 \\ c_2 &= -0.015 + j0.049 \\ c_3 &= 0.125 - j0.051 \end{aligned} \quad (7.201)$$

Εφαρμόζοντας την (7.181) με τη βοήθεια των άνω τιμών, κατασκευάζουμε το πολυώνυμο

$$\begin{aligned} P(z) = \sum_{\ell=0}^6 c_{\ell-3} z_n^\ell &= (0.125 - j0.051) z_n^6 + (-0.015 + j0.049) z_n^5 + (-1.110 + j0.056) z_n^4 \\ &+ 2 z_n^3 + (-1.110 - j0.056) z_n^2 + (-0.015 - j0.049) z_n + (0.125 + j0.051). \end{aligned} \quad (7.202)$$

Το άνω πολυώνυμο έχει έξι (2M-2) ρίζες, οι οποίες σε πολική μορφή δίνονται στον πίνακα 7.2. Όπως φαίνεται στον πίνακα, οι τελευταίες τέσσερις ρίζες έχουν μοναδιαίο μέτρο, ενώ το μέτρο των υπόλοιπων δυο ριζών αποκλίνει αρκετά από τη μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι

μόνο οι τελευταίες τέσσερις ρίζες αντιστοιχούν σε υπαρκτά εισερχόμενα σήματα. Επιπλέον, δημιουργούνται ζεύγη ριζών που έχουν το ίδιο όρισμα και συνεπώς θα προκύπτει η ίδια γωνία άφιξης και από τις δυο ρίζες του ζεύγους. Η (7.183) εφαρμόστηκε σε όλα τα ορίσματα των ριζών και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στη δεξιότερη στήλη του πίνακα. Προφανώς, από τις έξι ρίζες προκύπτουν τρεις γωνίες άφιξης. Απ' αυτές, η μια γωνία (160.18) είναι ψευδής και απορρίπτεται γιατί αντιστοιχεί σε ζεύγος ριζών των οποίων τα μέτρα απέχουν από τη μονάδα. Οι άλλες δυο γωνίες (88.10 και 88.20) γίνονται δεκτές γιατί αντιστοιχούν σε ζεύγη ριζών των οποίων τα μέτρα βρίσκονται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Μάλιστα, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι δυο αυτές γωνίες ταυτίζονται με τις γωνίες που δόθηκαν στην αρχή του παραδείγματος αυτού.

**Πίνακας 7.2** Μέτρο και όρισμα ριζών του πολυωνύμου (7.202), και αντίστοιχες γωνίες άφιξης.

$n$	$ z_n $	$\angle z_n$	$\vartheta_n$
1	3.521	-169.34	160.18
2	0.284	-169.34	160.18
3	1.000	5.97	88.10
4	1.000	5.97	88.10
5	1.000	5.65	88.20
6	1.000	5.65	88.20