

## 6. ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ ΔΕΣΜΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΩΝ

---

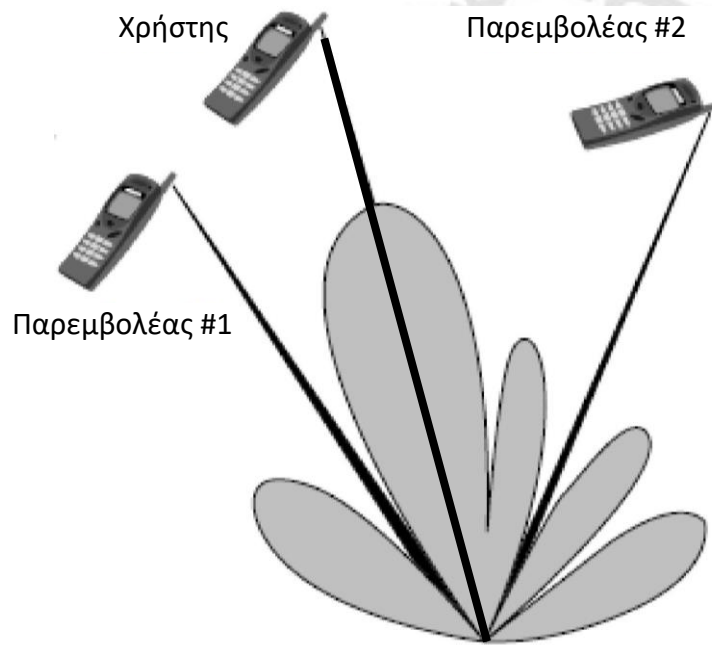
Οι παραδοσιακές (συμβατικές) στοιχειοκεραίες κατασκευάζονται με σκοπό το διάγραμμα ακτινοβολίας να ικανοποιεί συγκεκριμένες απαιτήσεις. Τέτοιες απαιτήσεις αφορούν κατά κύριο λόγο τον κύριο λοβό και είναι συνήθως η επίτευξη κύριου λοβού με συγκεκριμένη κατεύθυνση, συγκεκριμένο κέρδος ή συγκεκριμένο άνοιγμα μισής ισχύος σε κάποιο επίπεδο αναφοράς. Επιπρόσθετα, μπορούν να τεθούν απαιτήσεις που αφορούν το υπόλοιπο διάγραμμα ακτινοβολίας, όπως η επίτευξη πλευρικών λοβών ή και οπίσθιου λοβού με επίπεδα ισχύος που δεν θα υπερβαίνουν κάποιο επιθυμητό όριο σε σχέση με τον κύριο λοβό, ή η επίτευξη μηδενισμών (τοπικών ελαχίστων κέρδους) σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις. Η επίτευξη των παραπάνω απαιτήσεων επιτυγχάνεται με την εφαρμογή καταλλήλων σχετικών πλατών τροφοδοσίας εφόσον αυτό είναι εφικτό, αλλά οπωσδήποτε με την εφαρμογή κατάλληλων διαφορών φάσης μεταξύ των στοιχείων της διάταξης γεγονός που υλοποιείται με τη χρήση φασιθετών (phase shifters). Για το λόγο αυτό, οι παραπάνω στοιχειοκεραίες ονομάζονται στοιχειοκεραίες φάσης (phased arrays). Το βασικό όμως χαρακτηριστικό των στοιχειοκεραιών, έτσι όπως περιεγράφηκαν πιο πάνω, είναι ότι τα διαγράμματα ακτινοβολίας είναι στατικά ως προς το χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι η κατεύθυνση και γενικά τα χαρακτηριστικά του κύριου λοβού και των υπολοίπων λοβών, όπως επίσης και οι κατευθύνσεις στις οποίες λαμβάνονται μηδενισμοί (τοπικά ελάχιστα) κέρδους δεν μεταβάλλονται ως προς το χρόνο. Ουσιαστικά, αυτό υποδηλώνει ότι τα σχετικά πλάτη και οι διαφορές φάσης στις τροφοδοσίες των στοιχείων της διάταξης είναι αμετάβλητα ως προς το χρόνο.

Οι πρόσφατες εξελίξεις στο χώρο των ασύρματων επικοινωνιών δημιουργούν ανάγκη για την ανάπτυξη κεραιών με διάγραμμα ακτινοβολίας που μεταβάλλεται ως προς το χρόνο. Πρόκειται για στοιχειοκεραίες, των οποίων το διάγραμμα ακτινοβολίας δεν είναι στατικό ως προς το χρόνο αλλά μεταβάλλεται ανάλογα με τις απαιτήσεις που ισχύουν στο τηλεπικοινωνιακό κανάλι σε κάθε χρονική στιγμή. Οι στοιχειοκεραίες αυτές έχουν την ονομασία *έξυπνες κεραίες* επειδή μπορούν να ανταποκρίνονται με δυναμικό τρόπο στις ανάγκες επικοινωνίας του χώρου ή περιοχής που εξυπηρετούν (service area). Συνεπώς, το διάγραμμα ακτινοβολίας μιας τέτοιας στοιχειοκεραίας μορφοποιείται δυναμικά σύμφωνα

με κάποια κριτήρια, όπως ο προσανατολισμός του κύριου λοβού προς κάποια κατεύθυνση με σκοπό την βελτιστοποίηση της επικοινωνίας με τερματική συσκευή χρήστη που βρίσκεται σ' αυτή την κατεύθυνση σε κάποια χρονική στιγμή, ή η δημιουργία μηδενισμού κέρδους προς κάποια άλλη κατεύθυνση με σκοπό τον αποκλεισμό της επικοινωνίας με κάποια άλλη τερματική συσκευή που βρίσκεται σ' αυτή την κατεύθυνση. Ουσιαστικά, αυτό υποδηλώνει ότι τα σχετικά πλάτη και οι διαφορές φάσης στις τροφοδοσίες των στοιχείων της διάταξης μεταβάλλονται δυναμικά ως προς το χρόνο από κάποιο σύστημα ελέγχου, που έχει ως στόχο να ικανοποιεί τα κριτήρια που τίθενται σε κάθε χρονική στιγμή. Οι έξυπνες κεραίες προσφέρουν τη δυνατότητα βελτιωμένων συστημάτων ραντάρ, αυξημένης χωρητικότητας σε ασύρματα δίκτυα κινητών επικοινωνιών και γενικότερα καλύτερη ποιότητα ζεύξης στις ασύρματες επικοινωνίες, επειδή παρέχουν πλέον τη δυνατότητα υλοποίησης *πολυπλεξίας διαίρεσης χώρου* (space division multiple access, SDMA).

Στην πράξη, οι έξυπνες κεραίες ελέγχονται μέσω αλγορίθμων, οι οποίοι βασίζονται σε πιο σύνθετα κριτήρια σε σχέση μ' αυτά που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Τέτοια είναι η μεγιστοποίηση του λόγου σήματος-προς-παρεμβολή (signal-to-interference ratio, *SIR*), η μεγιστοποίηση του λόγου σήματος-προς-παρεμβολή-και-θόρυβο (signal-to-interference-plus-noise ratio, *SINR*), η ελαχιστοποίηση της μεταβλητότητας κάποιου σήματος ή ενός συνόλου σημάτων, και η ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (mean squared error, *MSE*) ενός συνόλου σημάτων σε σχέση με κάποιο σήμα αναφοράς.

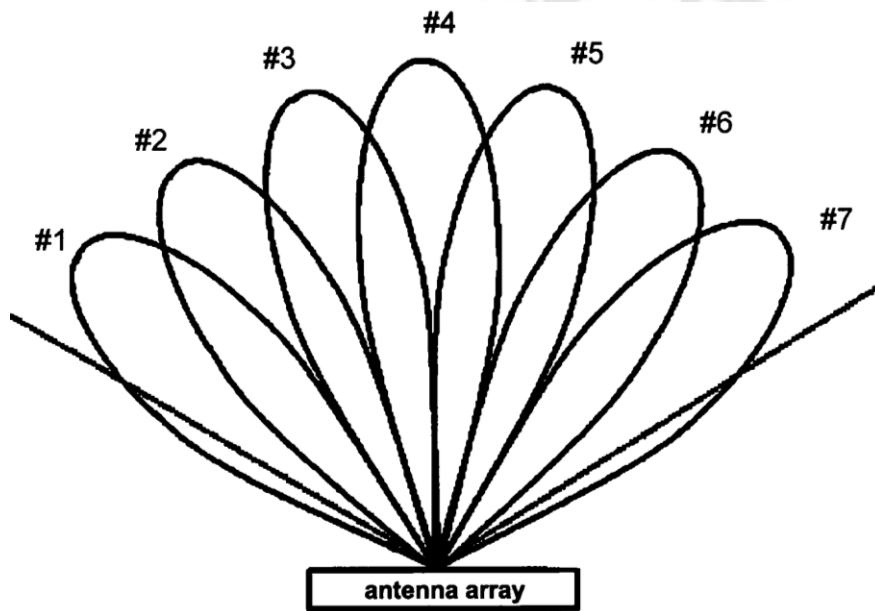
Μέχρι στιγμής, έγινε προσπάθεια να διατυπωθούν σωστά οι διαφορές μεταξύ συμβατικών και έξυπνων στοιχειοκεραιών). Είναι πλέον κατανοητό ότι η βασική διαφορά βρίσκεται στη *μορφοποίηση* (beamforming) του διαγράμματος ακτινοβολίας ή της δέσμης ακτινοβολίας, η οποία είναι *σταθερή* ή *στατική* (fixed beamforming) στις συμβατικές στοιχειοκεραίες και *προσαρμοστική* (adaptive beamforming) στις εκάστοτε απαιτήσεις στις έξυπνες στοιχειοκεραίες. Συνεπώς, το σύστημα ελέγχου που επιτυγχάνει στατική μορφοποίηση δέσμης ακτινοβολίας έχει ως στόχο να κρατήσει σταθερά τα σχετικά πλάτη και τις διαφορές φάσης στις τροφοδοσίες των στοιχείων της στοιχειοκεραίας, επειδή τα κριτήρια που καλείται να ικανοποιήσει δεν μεταβάλλονται χρονικά. Αντιθέτως, το σύστημα ελέγχου που επιτυγχάνει προσαρμοστική μορφοποίηση δέσμης ακτινοβολίας πρέπει να μεταβάλλει συνεχώς τα πλάτη και τις φάσεις τροφοδοσίας των στοιχείων επειδή καλείται να ικανοποιήσει κάποιο κριτήριο σε ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο περιβάλλον. Η βασική παράμετρος που ευθύνεται για το μεταβαλλόμενο περιβάλλον είναι συνήθως η κίνηση, π.χ. των τερματικών συσκευών που επικοινωνούν με έναν σταθμό βάσης κινητής τηλεφωνίας, των ασύρματων αισθητήρων που επικοινωνούν με ένα σταθερό σημείο πρόσβασης, ή των κόμβων σε ένα ad hoc ασύρματο δίκτυο. Στο σχήμα 6.1 φαίνεται μια περίπτωση προσαρμοστικής μορφοποίησης, η οποία έχει ως σκοπό σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή να δημιουργήσει κύριο λοβό το μέγιστο του οποίου στοχεύει κάποιον χρήστη και δυο μηδενισμούς σε δυο αντίστοιχες κατευθύνσεις ώστε να αποκλείσει την επικοινωνία σε δυο παρεμβολείς. Καθώς ο χρήστης και οι παρεμβολείς κινούνται, ο αλγόριθμος μορφοποίησης μεταβάλλει το διάγραμμα ακτινοβολίας κατάλληλα ώστε το μέγιστο του κύριου λοβού να στοχεύει πάντα το χρήστη και οι δυο μηδενισμοί να είναι πάντα στις κατευθύνσεις των δυο παρεμβολέων.



**Σχήμα 6.1** Προσαρμοστική μορφοποίηση δέσμης.

Πρέπει να αναφερθεί ότι υπάρχει και ένας τρίτος τύπος μορφοποίησης που ονομάζεται *μεταγόμενη* μορφοποίηση δέσμης (switched beamforming). Στη μορφοποίηση αυτή το διάγραμμα ακτινοβολίας μπορεί να πάρει συγκεκριμένες προκαθορισμένες μορφές, οι οποίες προκύπτουν από αντίστοιχα προκαθορισμένα σεντ πλατών και διαφορών φάσης (σχήμα 6.2). Σε πραγματικό χρόνο, επιλέγεται το διάγραμμα ακτινοβολίας που ικανοποιεί καλύτερα το κριτήριο που ισχύει σε κάθε χρονική στιγμή. Για παράδειγμα, αν το κριτήριο είναι η στόχευση του κύριου λοβού προς κάποια κινούμενη συσκευή ώστε να βελτιστοποιηθεί η ζεύξη, τότε θα επιλέγεται σε κάθε χρονική στιγμή από τα προκαθορισμένα διαγράμματα ακτινοβολίας εκείνο το διάγραμμα του οποίου ο κύριος λοβός έχει την ελάχιστη γωνιακή απόκλιση από την ευθεία που ενώνει στοιχειοκεραία και συσκευή.

Επιπλέον, η μορφοποίηση (είτε στατική είτε προσαρμοστική είτε μεταγόμενη) μπορεί να είναι αναλογική (analog beamforming) ή ψηφιακή (digital beamforming). Η διαφορά έγκειται στον τρόπο που διενεργείται η επεξεργασία των σημάτων από τον αντίστοιχο αλγόριθμο μορφοποίησης. Η επεξεργασία είναι καθαρά αναλογική στην πρώτη περίπτωση και επιτυγχάνεται με τη χρήση κατάλληλων αναλογικού τύπου μονάδων, ενώ στη δεύτερη περίπτωση εμπλέκονται και ψηφιακές μονάδες εκτός από αναλογικές (π.χ. μικροεπεξεργαστές). Εννοείται ότι για την υλοποίηση ψηφιακής μορφοποίησης θα πρέπει να γίνει υποβιβασμός των συχνοτήτων του σήματος σε ενδιαμέση ή στη βασική ζώνη και στη συνέχεια δειγματοληψία του σήματος αυτού. Σε χρονομεταβαλλόμενο περιβάλλον επικοινωνίας, τα δείγματα του σήματος που λαμβάνονται σε πραγματικό χρόνο είναι αυτά που χρησιμοποιούνται από τον αλγόριθμο προσαρμοστικής ψηφιακής μορφοποίησης. Η ψηφιακή μορφοποίηση τείνει πλέον να αντικαταστήσει την αναλογική στο μεγαλύτερο μέρος των εφαρμογών.



Σχήμα 6.2 Μεταγόμενη μορφοποίηση δέσμης.

Σε περιπτώσεις ψηφιακής μορφοποίησης που εφαρμόζεται σε στοιχειοκεραία εκπομπής, ο αντίστοιχος αλγόριθμος θα πρέπει να μεταβάλλει κατάλληλα τα πλάτη και τις φάσεις τροφοδοσίας των στοιχείων της διάταξης ώστε να παραχθεί μέσα στον πραγματικό χώρο ένα διάγραμμα ακτινοβολίας που ανταποκρίνεται στα κριτήρια που τέθηκαν από την αρχή, π.χ. κύριος λοβός και μηδενισμοί προσανατολισμένα σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις. Αν όμως πρόκειται για ψηφιακή μορφοποίηση που εφαρμόζεται σε στοιχειοκεραία λήψης, τότε δεν καταβάλλεται στην πραγματικότητα κάποια προσπάθεια να μεταβληθούν τα πλάτη και οι φάσεις τροφοδοσίας των στοιχείων. Η μεταβολή πλατών κα φάσεων είναι στην ουσία μια υπολογιστική διαδικασία που εφαρμόζεται στα ψηφιοποιημένα δεδομένα (δείγματα του σήματος λήψης).

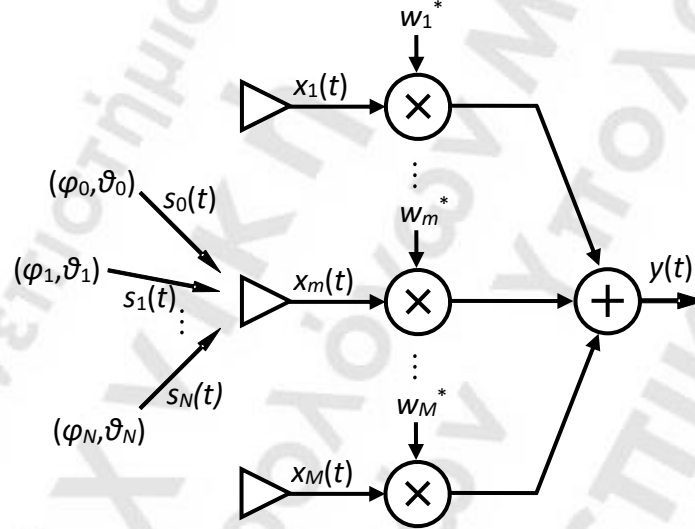
Στις επόμενες παραγράφους θα δοθεί η περιγραφή του απαραίτητου μαθηματικού υποβάθρου στο οποίο στηρίζονται οι μέθοδοι μορφοποίησης δέσμης και στη συνέχεια θα γίνει η περιγραφή των σημαντικότερων από τις μεθόδους αυτές.

### 6.1 Βασικό μοντέλο μορφοποίησης δέσμης

Σύμφωνα με το βασικό μοντέλο μορφοποίησης δέσμης που φαίνεται στο σχήμα 6.3, μια στοιχειοκεραία  $M$  στοιχείων λαμβάνει  $N+1$  μονοχρωματικά σήματα  $s_n(t)$ ,  $n=0,1,...,N$ , σε μήκος κύματος  $\lambda$ , ή ισοδύναμα  $N+1$  αντίστοιχα δείγματα των παραπάνω σημάτων  $s_n(k)$ ,  $n=0,1,...,N$  που λαμβάνονται ταυτόχρονα εφόσον αναφερόμαστε σε ψηφιακή μορφοποίηση. Το κάθε σήμα  $s_n$  εισέρχεται από μια αντίστοιχη κατεύθυνση άφιξης (direction of arrival, DoA) που περιγράφεται στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων από το ζεύγος γωνιών  $(\varphi_n, \theta_n)$ , όπου  $\varphi_n$  είναι η *αζιμουθιακή γωνία* (azimuth angle) και  $\theta_n$  η *γωνία ανύψωσης* (elevation angle). Η παράμετρος  $k$  δηλώνει τον αύξοντα αριθμό δειγματοληψίας

(δηλ.  $t=kT_s$ , όπου  $T_s$  η περίοδος δειγματοληψίας). Χωρίς να βλάψουμε τη γενικότητα, η μαθηματική θεμελίωση του μοντέλου μορφοποίησης θα γίνει θεωρώντας ψηφιακή μορφοποίηση. Ουσιαστικά, το μόνο που αλλάζει είναι ότι στις μαθηματικές εκφράσεις αντί να συμβολίζουμε την τιμή των χρονοεξαρτώμενων μεγεθών τη χρονική  $t$ , θα συμβολίζουμε την τιμή του δείγματος του μεγέθους κατά την  $k$ -στη δειγματοληψία. Τα εισερχόμενα σήματα  $s_n(k)$  επάγουν στην είσοδο του καθενός στοιχείου της στοιχειοκεραίας σήμα  $x_m(k)$ ,  $m=1,\dots,M$ . Το κάθε σήμα εισόδου  $x_m$  πολλαπλασιάζεται με τη συζυγή μιγαδική τιμή ενός βάρους  $w_m$ . Τότε η έξοδος από το σύστημα μορφοποίησης προκύπτει από τη σχέση

$$y(k) = \sum_{m=1}^M w_m^* x_m(k). \quad (6.1)$$



**Σχήμα 6.3** Βασικό μπλοκ διάγραμμα συστήματος μορφοποίησης δέσμης.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην άνω σχέση δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούνται οι συζυγείς μιγαδικές τιμές των βαρών, αλλά οι ίδιες οι τιμές των βαρών. Ο λόγος που γίνεται χρήση συζυγών τιμών στα βάρη είναι για να υπάρχει ομοιομορφία στην παρακάτω μαθηματική ανάλυση όπου θα γίνει χρήση άλγεβρας πινάκων. Η άνω σχέση μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$y(k) = \bar{w}^H \bar{x}(k), \quad (6.2)$$

όπου

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

είναι το διάνυσμα των μιγαδικών βαρών, και

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_M(k) \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

είναι το διάνυσμα των σημάτων εισόδου στα στοιχεία της στοιχειοκεραίας, ενώ ο δείκτης  $H$  δηλώνει γενικά την ανάστροφη συζυγή μορφή ενός διανύσματος ή πίνακα. Ουσιαστικά, η (6.2) εκφράζει την έξοδο  $y(k)$  ως εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\bar{w}$  και  $\bar{x}(k)$ .

Η ισχύς εξόδου από το σύστημα μορφοποίησης θα είναι

$$P_y(k) = |y(k)|^2 = y(k)y^*(k). \quad (6.5)$$

Λόγω της (6.2), η άνω σχέση γίνεται

$$P_y(k) = |y(k)|^2 = \bar{w}^H \bar{x}(k) \bar{x}^H(k) \bar{w}. \quad (6.6)$$

Αν θεωρήσουμε τα σήματα εισόδου  $x_m(k)$ ,  $m=1, \dots, M$ , ως στατικά (stationary) σήματα μηδενικής μέσης τιμής, τότε από την άνω σχέση μπορεί να προκύψει η μέση ισχύς εξόδου

$$\hat{P}_y = E[P_y(k)] = E[\bar{w}^H \bar{x}(k) \bar{x}^H(k) \bar{w}] = \bar{w}^H E[\bar{x}(k) \bar{x}^H(k)] \bar{w} = \bar{w}^H \bar{R}_{xx} \bar{w}, \quad (6.7)$$

όπου

$$\bar{R}_{xx} = E[\bar{x}(k) \bar{x}^H(k)] \quad (6.8)$$

είναι ο πίνακας συσχέτισης των σημάτων εισόδου της στοιχειοκεραίας. Ο πίνακας αυτός είναι τετραγωνικός  $M \times M$ , και κάθε στοιχείο του  $R_{x_i x_j}$  εκφράζει τη συσχέτιση μεταξύ δυο σημάτων εισόδου  $x_i$  και  $x_j$ . Από τη μορφή της (6.8) προκύπτει ότι

$$R_{x_i x_j} = R_{x_j x_i}^*, \quad (6.9)$$

γεγονός που σημαίνει ότι ο  $\bar{R}_{xx}$  είναι ερμιτιανός, δηλαδή

$$\bar{R}_{xx} = \bar{R}_{xx}^H. \quad (6.10)$$

Η ακριβής στατιστική των σημάτων εισόδου δεν είναι γνωστή. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι η διαδικασία μορφοποίησης είναι *εργοδική ως προς τη συσχέτιση* (correlation-ergodic process). Έτσι, μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συσχέτιση χρησιμοποιώντας χρονική μέση τιμή συσχέτισης σημάτων. Για το λόγο αυτό, τα δείγματα του σήματος ομαδοποιούνται σε μπλοκ (ομάδες)  $K$  δειγμάτων και στο τέλος λήψης όλου του μπλοκ γίνεται ο υπολογισμός του πίνακα συσχέτισης (να σημειωθεί ότι ο αριθμός  $K$  των δειγμάτων ονομάζεται *εύρος του μπλοκ*). Αυτό βέβαια σημαίνει ότι, όταν κάνουμε προσέγγιση πίνακα συσχέτισης, η διαδικασία μορφοποίησης δεν μπορεί να υπολογίσει τον πίνακα αυτό σε κάθε δειγματοληψία (δηλ. ανά περίοδο δειγματοληψίας  $T_s$ ), αλλά στο τέλος λήψης κάθε  $K$  δειγματοληψιών (δηλ. ανά χρόνο  $KT_s$ ) που είναι ο χρόνος λήψης όλου του

μπλοκ. Αν  $b$  είναι ο αύξων αριθμός του μπλοκ που μόλις έχει λάβει το σύστημα μορφοποίησης (έχουν περάσει άλλα  $b-1$  μπλοκ), τότε ο πίνακας συσχέτισης που αντιστοιχεί σ' αυτό το μπλοκ μπορεί να προσεγγιστεί από την έκφραση

$$\tilde{R}_{xx}(b) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \bar{x}(k + (b-1)K) \bar{x}^H(k + (b-1)K). \quad (6.11)$$

Για να έχουμε εξ ολοκλήρου εκφράσεις πινάκων χωρίς αθροίσματα, θα δοθεί μια διαφορετική μορφοποίηση στα σήματα εισόδου. Σε κάθε επιμέρους σήμα εισόδου  $x_m$  αντιστοιχίζουμε ένα διάνυσμα γραμμής, που έχει ως στοιχεία τα  $K$  δείγματα του σήματος που περιέχονται στο  $b$ -στο μπλοκ, δηλαδή

$$\bar{x}_m(b) = [x_m(1 + (b-1)K) \quad x_m(2 + (b-1)K) \quad \cdots \quad x_m(K + (b-1)K)], \quad m=1, \dots, M. \quad (6.12)$$

Τότε, στο σύνολο των σημάτων εισόδου, αντί του διανύσματος εισόδου  $\bar{x}$  αντιστοιχίζουμε τον  $M \times K$  πίνακα εισόδου, που κατασκευάζεται από τα παραπάνω διανύσματα γραμμής:

$$\bar{X}(b) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(b) \\ \bar{x}_2(b) \\ \vdots \\ \bar{x}_M(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(1 + (b-1)K) & x_1(2 + (b-1)K) & \cdots & x_1(K + (b-1)K) \\ x_2(1 + (b-1)K) & x_2(2 + (b-1)K) & \cdots & x_2(K + (b-1)K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_M(1 + (b-1)K) & x_M(2 + (b-1)K) & \cdots & x_M(K + (b-1)K) \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Με τη βοήθεια της (6.13), η (6.11) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\tilde{R}_{xx}(b) = \frac{1}{K} \bar{X}(b) \bar{X}^H(b). \quad (6.14)$$

Θα πρέπει να έχουμε υπόψη ότι αν δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των σημάτων, τότε ο πίνακας συσχέτισης είναι διαγώνιος. Αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των σημάτων, τότε ο πίνακας είναι ομαλός (non-singular), δηλ. αντιστρέψιμος. Τέλος, αν τα σήματα είναι σύμφωνα μεταξύ τους, τότε ο πίνακας συσχέτισης γίνεται ιδιάζων (singular), δηλ. μη-αντιστρέψιμος, επειδή οι γραμμές του πίνακα προκύπτουν ως γραμμικοί συνδυασμοί άλλων γραμμών. Συχνά στη βιβλιογραφία, ο πίνακας συσχέτισης αναφέρεται ως *πίνακας συμμεταβλητότητας* (covariance matrix). Η ονομασία αυτή μπορεί να δοθεί μόνο αν οι μέσες τιμές των σημάτων είναι όλες μηδέν. Σ' αυτή την περίπτωση, ο πίνακας συσχέτισης συμπίπτει με τον πίνακα συμμεταβλητότητας.

Κάποιο από τα εισερχόμενα σήματα  $s_n(k)$ ,  $n=0,1,\dots,N$ , έστω το  $s_0(k)$ , λαμβάνεται ως *επιθυμητό σήμα*, ενώ τα υπόλοιπα θεωρούνται *σήματα παρεμβολής*. Επίσης, η λήψη όλων αυτών των σημάτων γίνεται υπό την παρουσία θορύβου (θόρυβος περιβάλλοντος και ηλεκτρονικός θόρυβος). Συνεπώς, κάθε σήμα εισόδου μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα ενός όρου (desired) που οφείλεται στο επιθυμητό σήμα και ενός (undesired) που οφείλεται στα ανεπιθύμητα σήματα, ο οποίος με τη σειρά του μπορεί να θεωρηθεί άθροισμα ενός όρου (interference) που οφείλεται στα σήματα παρεμβολής και ενός σήματος θορύβου (noise):

$$x_m(k) = x_{dm}(k) + x_{um}(k) = x_{dm}(k) + x_{im}(k) + n_m(k), \quad m=1, \dots, M. \quad (6.15)$$



Με όμοιο τρόπο, το διάνυσμα εισόδου μπορεί να εκφραστεί μέσω της σχέσης

$$\bar{x}(k) = \bar{x}_d(k) + \bar{x}_u(k) = \bar{x}_d(k) + \bar{x}_i(k) + \bar{n}(k), \quad (6.16)$$

όπου

$$\bar{x}_d(k) = \begin{bmatrix} x_{d1}(k) \\ x_{d2}(k) \\ \vdots \\ x_{dM}(k) \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

$$\bar{x}_u(k) = \begin{bmatrix} x_{u1}(k) \\ x_{u2}(k) \\ \vdots \\ x_{uM}(k) \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

$$\bar{x}_i(k) = \begin{bmatrix} x_{i1}(k) \\ x_{i2}(k) \\ \vdots \\ x_{iM}(k) \end{bmatrix}, \quad (6.19)$$

και

$$\bar{n}(k) = \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ \vdots \\ n_M(k) \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Όταν αναφερόμαστε στο  $b$ -στο μπλοκ δειγματοληψίας, ορίζονται τα παρακάτω διανύσματα γραμμής για καθεμιά συνιστώσα σήματος:

$$\bar{x}_{dm}(b) = [x_{dm}(1+(b-1)K) \quad x_{dm}(2+(b-1)K) \quad \cdots \quad x_{dm}(K+(b-1)K)], \quad m=1, \dots, M \quad (6.21)$$

$$\bar{x}_{um}(b) = [x_{um}(1+(b-1)K) \quad x_{um}(2+(b-1)K) \quad \cdots \quad x_{um}(K+(b-1)K)], \quad m=1, \dots, M \quad (6.22)$$

$$\bar{x}_{im}(b) = [x_{im}(1+(b-1)K) \quad x_{im}(2+(b-1)K) \quad \cdots \quad x_{im}(K+(b-1)K)], \quad m=1, \dots, M \quad (6.23)$$

$$\bar{n}_m(b) = [n_m(1+(b-1)K) \quad n_m(2+(b-1)K) \quad \cdots \quad n_m(K+(b-1)K)], \quad m=1, \dots, M \quad (6.24)$$

Έτσι, ο πίνακας εισόδου μπορεί να εκφραστεί μέσω της σχέσης

$$\bar{X}(b) = \bar{X}_d(b) + \bar{X}_u(b) = \bar{X}_d(b) + \bar{X}_i(b) + \bar{N}(b), \quad (6.25)$$

όπου

$$\bar{X}_d(b) = \begin{bmatrix} \bar{x}_{d1}(b) \\ \bar{x}_{d2}(b) \\ \vdots \\ \bar{x}_{dM}(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{d1}(1+(b-1)K) & x_{d1}(2+(b-1)K) & \cdots & x_{d1}(K+(b-1)K) \\ x_{d2}(1+(b-1)K) & x_{d2}(2+(b-1)K) & \cdots & x_{d2}(K+(b-1)K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{dM}(1+(b-1)K) & x_{dM}(2+(b-1)K) & \cdots & x_{dM}(K+(b-1)K) \end{bmatrix}, \quad (6.26)$$



$$\bar{X}_u(b) = \begin{bmatrix} \bar{x}_{u1}(b) \\ \bar{x}_{u2}(b) \\ \vdots \\ \bar{x}_{uM}(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{u1}(1+(b-1)K) & x_{u1}(2+(b-1)K) & \cdots & x_{u1}(K+(b-1)K) \\ x_{u2}(1+(b-1)K) & x_{u2}(2+(b-1)K) & \cdots & x_{u2}(K+(b-1)K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{uM}(1+(b-1)K) & x_{uM}(2+(b-1)K) & \cdots & x_{uM}(K+(b-1)K) \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

$$\bar{X}_i(b) = \begin{bmatrix} \bar{x}_{i1}(b) \\ \bar{x}_{i2}(b) \\ \vdots \\ \bar{x}_{iM}(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i1}(1+(b-1)K) & x_{i1}(2+(b-1)K) & \cdots & x_{i1}(K+(b-1)K) \\ x_{i2}(1+(b-1)K) & x_{i2}(2+(b-1)K) & \cdots & x_{i2}(K+(b-1)K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{iM}(1+(b-1)K) & x_{iM}(2+(b-1)K) & \cdots & x_{iM}(K+(b-1)K) \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

και

$$\bar{N}(b) = \begin{bmatrix} \bar{n}_1(b) \\ \bar{n}_2(b) \\ \vdots \\ \bar{n}_M(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1(1+(b-1)K) & n_1(2+(b-1)K) & \cdots & n_1(K+(b-1)K) \\ n_2(1+(b-1)K) & n_2(2+(b-1)K) & \cdots & n_2(K+(b-1)K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_M(1+(b-1)K) & n_M(2+(b-1)K) & \cdots & n_M(K+(b-1)K) \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Για καθένα από τα άνω σήματα στα οποία αναλύεται το σήμα εισόδου, ορίζεται ένας αντίστοιχος πίνακας συσχέτισης:

$$\bar{R}_{dd} = E[\bar{x}_d(k)\bar{x}_d^H(k)] \quad (6.30)$$

$$\bar{R}_{uu} = E[\bar{x}_u(k)\bar{x}_u^H(k)] \quad (6.31)$$

$$\bar{R}_{ii} = E[\bar{x}_i(k)\bar{x}_i^H(k)] \quad (6.32)$$

$$\bar{R}_{nn} = E[\bar{n}(k)\bar{n}^H(k)] \quad (6.33)$$

Κάνοντας προσέγγιση των άνω πινάκων από τη χρονική μέση τιμή συσχέτισης σημάτων, ορίζονται αντίστοιχα:

$$\tilde{R}_{dd}(b) = \frac{1}{K} \bar{X}_d(b) \bar{X}_d^H(b) \quad (6.34)$$

$$\tilde{R}_{uu}(b) = \frac{1}{K} \bar{X}_u(b) \bar{X}_u^H(b) \quad (6.35)$$

$$\tilde{R}_{ii}(b) = \frac{1}{K} \bar{X}_i(b) \bar{X}_i^H(b) \quad (6.36)$$

$$\tilde{R}_{nn}(b) = \frac{1}{K} \bar{N}(b) \bar{N}^H(b) \quad (6.37)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι τέσσερις παραπάνω πίνακες, λόγω της μορφής τους, είναι ερμιτιανοί. Για να βρεθεί η σχέση μεταξύ των πινάκων αυτών, γίνονται οι εξής υποθέσεις:

(α) Δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ δυο οποιωνδήποτε εισερχομένων σημάτων  $s_n$ ,  $n=0,1,...,N$ . Η υπόθεση αυτή αληθεύει στην πράξη υπό την προϋπόθεση ότι δεν προέρχονται δυο ή περισσότερα εισερχόμενα σήματα από την ίδια πηγή, όπως π.χ. σήματα από την ίδια τερματική συσκευή χρήστη που ακολούθησαν διαφορετικές διαδρομές μέσα στον πραγματικό χώρο διάδοσης μέχρι να φτάσουν στη στοιχειοκεραία του συστήματος μορφοποίησης δέσμης. Εννοείται ότι οι πηγές παραγωγής των εισερχομένων σημάτων είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους.

(β) Δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος  $s_n$  και οποιουδήποτε σήματος θορύβου  $n_m$ . Η υπόθεση αυτή αληθεύει στην πράξη επειδή τα εισερχόμενα σήματα δεν θεωρείται ότι έχουν τόσο μεγάλη ισχύ ώστε να επιβαρύνουν το υπόβαθρο θορύβου.

(γ) Δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ δυο οποιωνδήποτε σημάτων θορύβου. Η υπόθεση αυτή αληθεύει στην πράξη επειδή η δημιουργία θορύβου είναι αποτέλεσμα ενός πλήθους πολλών και ανεξάρτητων αιτιών.

Η καθεμιά από τις τρεις άνω υποθέσεις έχει και μια αντίστοιχη συνέπεια:

(α) Οι συνιστώσες  $x_{dm}$ ,  $m=1,...,M$  των σημάτων εισόδου συσχετίζονται μεταξύ τους επειδή όλες οφείλονται στο επιθυμητό εισερχόμενο σήμα  $s_0$ , όπως επίσης συσχετίζονται μεταξύ τους οι συνιστώσες  $x_{im}$ ,  $m=1,...,M$  των σημάτων εισόδου επειδή όλες οφείλονται στα εισερχόμενα σήματα παρεμβολής  $s_n$ ,  $n=1,...,N$ . Εντούτοις, δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιασδήποτε συνιστώσας  $x_{dm}$  και οποιασδήποτε συνιστώσας  $x_{im}$ , επειδή δεν υπάρχει συσχέτιση του  $s_0$  με οποιοδήποτε από τα  $s_n$ ,  $n=1,...,N$ . Αυτό σημαίνει ότι

$$\bar{R}_{di} = \bar{R}_{id} = \bar{0}, \quad (6.38)$$

ή, ισοδύναμα, κάνοντας χρήση της προσεγγιστικής μορφής των πινάκων

$$\tilde{R}_{di}(b) \cong \bar{0} \text{ και } \tilde{R}_{id}(b) \cong \bar{0}. \quad (6.39)$$

(β) Δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιασδήποτε συνιστώσας  $x_{dm}$  και σήματος θορύβου  $n_m$  επειδή το  $s_0$  δε συσχετίζεται με κανένα από τα  $n_m$ ,  $m=1,...,M$ . Επίσης, δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιασδήποτε συνιστώσας  $x_{im}$  και σήματος θορύβου  $n_m$  επειδή δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε από τα  $s_n$ ,  $n=1,...,N$  και οποιουδήποτε από τα  $n_m$ ,  $m=1,...,M$ . Τα παραπάνω σημαίνουν ότι

$$\bar{R}_{dn} = \bar{R}_{nd} = \bar{0} \quad (6.40)$$

και

$$\bar{R}_{in} = \bar{R}_{ni} = \bar{0}, \quad (6.41)$$

ή, ισοδύναμα, κάνοντας χρήση της προσεγγιστικής μορφής των πινάκων

$$\tilde{R}_{dn}(b) \cong \bar{0} \text{ και } \tilde{R}_{nd}(b) \cong \bar{0} \quad (6.42)$$

και

$$\tilde{R}_{in}(b) \cong \bar{0} \text{ και } \tilde{R}_{ni}(b) \cong \bar{0}. \quad (6.43)$$

(γ) Ο πίνακας συσχέτισης των σημάτων θορύβου αναλύεται μέσω της έκφρασης

$$\begin{aligned} \bar{R}_{nn} &= E[\bar{n}(k)\bar{n}^H(k)] = E\left[\begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ \vdots \\ n_M(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^*(k) & n_2^*(k) & \cdots & n_M^*(k) \end{bmatrix}\right] = \\ &= \begin{bmatrix} E[n_1(k)n_1^*(k)] & E[n_1(k)n_2^*(k)] & \cdots & E[n_1(k)n_M^*(k)] \\ E[n_2(k)n_1^*(k)] & E[n_2(k)n_2^*(k)] & \cdots & E[n_2(k)n_M^*(k)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[n_M(k)n_1^*(k)] & E[n_M(k)n_2^*(k)] & \cdots & E[n_M(k)n_M^*(k)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{P}_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{P}_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

και τελικά απλοποιείται στη μορφή

$$\bar{R}_{nn} = \hat{P}_n \bar{I}, \quad (6.44)$$

όπου  $\bar{I}$  είναι  $M \times M$  ταυτοτικός πίνακας, και

$$\hat{P}_n = E[n_m(k)n_m^*(k)] = E[|n_m(k)|^2], \quad \forall m=1, \dots, M \quad (6.45)$$

είναι η μέση ισχύς θορύβου, η οποία είναι η ίδια για κάθε σήμα θορύβου. Αν θεωρήσουμε ότι τα σήματα θορύβου έχουν μηδενική μέση τιμή, τότε η μέση ισχύς αυτών συμπίπτει με τη διακύμανσή τους (variance)  $\sigma^2$ , δηλαδή

$$\hat{P}_n = \sigma^2, \quad (6.46)$$

οπότε η (6.44) παίρνει τη μορφή

$$\bar{R}_{nn} = \hat{P}_n \bar{I} = \sigma^2 \bar{I}. \quad (6.47)$$

Με βάση όλη την παραπάνω ανάλυση μπορούμε πλέον να βρούμε τη σχέση μεταξύ των πινάκων συσχέτισης. Αντικαθιστώντας την (6.16) στην (6.8), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \bar{R}_{xx} &= E[(\bar{x}_d(k) + \bar{x}_i(k) + \bar{n}(k))(\bar{x}_d(k) + \bar{x}_i(k) + \bar{n}(k))^H] = \\ &= E[\bar{x}_d(k)\bar{x}_d^H(k)] + E[\bar{x}_d(k)\bar{x}_i^H(k)] + E[\bar{x}_d(k)\bar{n}^H(k)] + \\ &+ E[\bar{x}_i(k)\bar{x}_d^H(k)] + E[\bar{x}_i(k)\bar{x}_i^H(k)] + E[\bar{x}_i(k)\bar{n}^H(k)] + \\ &+ E[\bar{n}(k)\bar{x}_d^H(k)] + E[\bar{n}(k)\bar{x}_i^H(k)] + E[\bar{n}(k)\bar{n}^H(k)] = \\ &= \bar{R}_{dd}(k) + \bar{R}_{di}(k) + \bar{R}_{dn}(k) + \bar{R}_{id}(k) + \bar{R}_{ii}(k) + \bar{R}_{in}(k) + \bar{R}_{nd}(k) + \bar{R}_{ni}(k) + \bar{R}_{nn}(k). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Λόγω των άνω συνεπειών (α) και (β) και των σχέσεων (6.38), (6.40) και (6.41), μόνο οι πίνακες  $\bar{R}_{dd}$ ,  $\bar{R}_{ii}$  και  $\bar{R}_{nn}$  είναι διάφοροι των μηδενικών πινάκων, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πίνακες συσχέτισης είναι μηδενικοί. Έτσι, η άνω σχέση απλοποιείται στη μορφή

$$\bar{R}_{xx} = \bar{R}_{dd} + \bar{R}_{ii} + \bar{R}_{nn}. \quad (6.49)$$

Με όμοιο τρόπο, ο πίνακας συσχέτισης  $\bar{R}_{uu}$  του ολικού ανεπιθύμητου σήματος ( $x_{um}=x_{im}+n_m$ ,  $m=1,...,M$ ) προκύπτει ως άθροισμα των  $\bar{R}_{ii}$  και  $\bar{R}_{nn}$ , επειδή δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιασδήποτε συνιστώσας  $x_{im}$  και σήματος θορύβου  $n_m$ , σύμφωνα με τη (β) συνέπεια που αναφέρθηκε πιο πάνω (δηλ. οι πίνακες  $\bar{R}_{in}$  και  $\bar{R}_{ni}$  είναι μηδενικοί σύμφωνα με την (6.41)):

$$\bar{R}_{uu} = \bar{R}_{ii} + \bar{R}_{nn}. \quad (6.50)$$

Λόγω της (6.47), οι (6.49) και (6.50) παίρνουν αντίστοιχα τη μορφή

$$\bar{R}_{xx} = \bar{R}_{dd} + \bar{R}_{ii} + \sigma^2 \bar{I} \quad (6.51)$$

και

$$\bar{R}_{uu} = \bar{R}_{ii} + \sigma^2 \bar{I}. \quad (6.52)$$

Κάνοντας προσέγγιση των πινάκων συσχέτισης από τη χρονική μέση τιμή συσχέτισης σημάτων, οι (6.49), (6.50), (6.51) και (6.52) παίρνουν αντίστοιχα τη μορφή

$$\tilde{R}_{xx}(b) = \tilde{R}_{dd}(b) + \tilde{R}_{ii}(b) + \tilde{R}_{nn}(b), \quad (6.53)$$

$$\tilde{R}_{uu}(b) = \tilde{R}_{ii}(b) + \tilde{R}_{nn}(b), \quad (6.54)$$

$$\tilde{R}_{xx}(b) = \tilde{R}_{dd}(b) + \tilde{R}_{ii}(b) + \sigma^2 \bar{I}, \quad (6.55)$$

και

$$\tilde{R}_{uu}(b) = \tilde{R}_{ii}(b) + \sigma^2 \bar{I} \quad (6.56)$$

Στις τέσσερις άνω σχέσεις,  $b$  είναι ο αύξων αριθμός του μπλοκ δειγματοληψίας.

Μέχρι στιγμής είδαμε ότι, σε μια τυχαία  $k$ -στη δειγματοληψία, η έξοδος του συστήματος μορφοποίησης προκύπτει από την (6.2), ενώ η μέση ισχύς του σήματος αυτού από την (6.7). Στην περίπτωση που κάνουμε υπολογισμούς με βάση το  $b$ -στο μπλοκ δειγματοληψίας, αντί του διανύσματος εισόδου  $\bar{X}(k)$  γίνεται χρήση του πίνακα εισόδου  $\bar{X}(b)$  (που ορίζεται από την (6.13)), οπότε η (6.2) παίρνει τη μορφή

$$\bar{y}(b) = \bar{w}^H \bar{X}(b), \quad (6.57)$$

όπου

$$\bar{y}(b) = [y(1+(b-1)K) \quad y(2+(b-1)K) \quad \dots \quad y(K+(b-1)K)] \quad (6.58)$$

διάνυσμα γραμμής που έχει ως στοιχεία τα  $K$  δείγματα του σήματος εξόδου που αντιστοιχούν στο  $b$ -στο μπλοκ. Από τα δείγματα αυτά μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση ισχύ εξόδου, που αντιστοιχεί στο  $b$ -στο μπλοκ, από τη σχέση

$$\hat{P}_y(b) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |y(k+(b-1)K)|^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K y(k+(b-1)K) y^*(k+(b-1)K) = \frac{1}{K} \bar{y}(b) \bar{y}^H(b). \quad (6.59)$$

Αντικαθιστώντας στην άνω σχέση το  $\bar{y}(b)$  από την (6.57), παίρνουμε

$$\hat{P}_y(b) = \frac{1}{K} \bar{w}^H \bar{X}(b) \bar{X}^H(b) \bar{w} = \bar{w}^H \left( \frac{1}{K} \bar{X}(b) \bar{X}^H(b) \right) \bar{w}, \quad (6.60)$$

η οποία λόγω της (6.14) γίνεται

$$\hat{P}_y(b) = \bar{w}^H \tilde{R}_{xx}(b) \bar{w}. \quad (6.61)$$

Η (6.61) αντικαθιστά την (6.7) όταν χρησιμοποιούμε πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων.

Δεδομένων των (6.15) ή (6.16), το σήμα εξόδου μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα ενός όρου που οφείλεται στο επιθυμητό εισερχόμενο σήμα και ενός που οφείλεται στα ανεπιθύμητα σήματα, ο οποίος με τη σειρά του μπορεί να θεωρηθεί άθροισμα ενός όρου που οφείλεται στα σήματα παρεμβολής και ενός που οφείλεται στο θόρυβο:

$$\begin{aligned} y(k) &= y_d(k) + y_i(k) + y_n(k) = \bar{w}^H \bar{x}_d(k) + \bar{w}^H \bar{x}_i(k) + \bar{w}^H \bar{n}(k) \\ \text{ή } y(k) &= y_d(k) + y_u(k) = \bar{w}^H \bar{x}_d(k) + \bar{w}^H \bar{x}_u(k). \end{aligned} \quad (6.62)$$

Θεωρώντας τα  $K$  δείγματα του σήματος εξόδου που αντιστοιχούν στο  $b$ -στο μπλοκ, η άνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \bar{y}(b) &= \bar{y}_d(b) + \bar{y}_i(b) + \bar{y}_n(b) = \bar{w}^H \bar{X}_d(b) + \bar{w}^H \bar{X}_i(b) + \bar{w}^H \bar{N}(b) \\ \text{ή } \bar{y}(b) &= \bar{y}_d(b) + \bar{y}_u(b) = \bar{w}^H \bar{X}_d(b) + \bar{w}^H \bar{X}_u(b), \end{aligned} \quad (6.63)$$

όπου  $\bar{y}_d(b)$ ,  $\bar{y}_u(b)$ ,  $\bar{y}_i(b)$  και  $\bar{y}_n(b)$  είναι διανύσματα γραμμής, τα οποία έχουν ως στοιχεία τα δείγματα των αντίστοιχων συνιστωσών του σήματος εξόδου και ορίζονται αντιστοίχως από τις σχέσεις

$$\bar{y}_d(b) = [y_d(1+(b-1)K) \quad y_d(2+(b-1)K) \quad \cdots \quad y_d(K+(b-1)K)], \quad (6.64)$$

$$\bar{y}_u(b) = [y_u(1+(b-1)K) \quad y_u(2+(b-1)K) \quad \cdots \quad y_u(K+(b-1)K)], \quad (6.65)$$

$$\bar{y}_i(b) = [y_i(1+(b-1)K) \quad y_i(2+(b-1)K) \quad \cdots \quad y_i(K+(b-1)K)], \quad (6.66)$$

και

$$\bar{y}_n(b) = [y_n(1+(b-1)K) \quad y_n(2+(b-1)K) \quad \cdots \quad y_n(K+(b-1)K)]. \quad (6.67)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.49) και (6.50) στην (6.7), παίρνουμε

$$\hat{P}_y = \bar{w}^H \bar{R}_{dd} \bar{w} + \bar{w}^H \bar{R}_{uu} \bar{w} = \bar{w}^H \bar{R}_{dd} \bar{w} + \bar{w}^H \bar{R}_{ii} \bar{w} + \bar{w}^H \bar{R}_{nn} \bar{w}, \quad (6.68)$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{P}_y = \hat{P}_{yd} + \hat{P}_{yu} = \hat{P}_{yd} + \hat{P}_{yi} + \hat{P}_{yn}, \quad (6.69)$$

όπου

$$\hat{P}_{yd} = \bar{w}^H \bar{R}_{dd} \bar{w}, \quad (6.70)$$

$$\hat{P}_{yu} = \bar{w}^H \bar{R}_{uu} \bar{w}, \quad (6.71)$$

$$\hat{P}_{yi} = \bar{w}^H \bar{R}_{ii} \bar{w}, \quad (6.72)$$

και

$$\hat{P}_{yn} = \bar{w}^H \bar{R}_{nn} \bar{w} \quad (6.73)$$

είναι αντίστοιχα η επιθυμητή, η ανεπιθύμητη, λόγω παρεμβολής και λόγω θορύβου μέση ισχύς εξόδου. Θεωρώντας τα  $K$  δείγματα του σήματος εξόδου που αντιστοιχούν στο  $b$ -στο μπλοκ, η (6.69) παίρνει τη μορφή

$$\hat{P}_y(b) = \hat{P}_{yd}(b) + \hat{P}_{yu}(b) = \hat{P}_{yd}(b) + \hat{P}_{yi}(b) + \hat{P}_{yn}(b), \quad (6.74)$$

όπου

$$\hat{P}_{yd}(b) = \bar{w}^H \tilde{R}_{dd}(b) \bar{w}, \quad (6.75)$$

$$\hat{P}_{yu}(b) = \bar{w}^H \tilde{R}_{uu}(b) \bar{w}, \quad (6.76)$$

$$\hat{P}_{yi}(b) = \bar{w}^H \tilde{R}_{ii}(b) \bar{w}, \quad (6.77)$$

και

$$\hat{P}_{yn}(b) = \bar{w}^H \tilde{R}_{nn}(b) \bar{w} \quad (6.78)$$

είναι αντίστοιχα η επιθυμητή, η ανεπιθύμητη, λόγω παρεμβολής και λόγω θορύβου μέση ισχύς εξόδου που υπολογίζεται για το  $b$ -στο μπλοκ δειγμάτων.

Ο λόγος σήματος-προς-παρεμβολή-και-θόρυβο στην έξοδο του συστήματος μορφοποίησης θα είναι

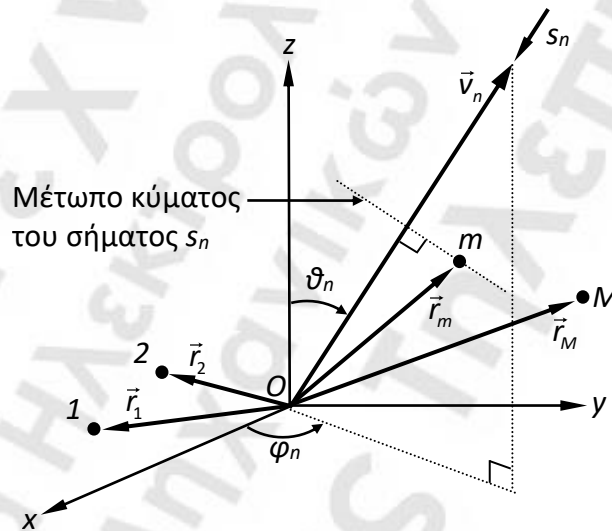
$$SINR = \frac{\hat{P}_{yd}}{\hat{P}_{yu}} = \frac{\hat{P}_{yd}}{\hat{P}_{yi} + \hat{P}_{yn}} = \frac{\bar{w}^H \tilde{R}_{dd} \bar{w}}{\bar{w}^H \tilde{R}_{uu} \bar{w}} = \frac{\bar{w}^H \tilde{R}_{dd} \bar{w}}{\bar{w}^H (\tilde{R}_{ii} + \tilde{R}_{nn}) \bar{w}}. \quad (6.79)$$

Στην περίπτωση που προσεγγίζουμε τον λόγο αυτό από τα  $K$  δείγματα του  $b$ -στου μπλοκ, η άνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$SINR(b) = \frac{\hat{P}_{yd}(b)}{\hat{P}_{yu}(b)} = \frac{\hat{P}_{yd}(b)}{\hat{P}_{yi}(b) + \hat{P}_{yn}(b)} = \frac{\bar{w}^H \tilde{R}_{dd}(b) \bar{w}}{\bar{w}^H \tilde{R}_{uu}(b) \bar{w}} = \frac{\bar{w}^H \tilde{R}_{dd}(b) \bar{w}}{\bar{w}^H [\tilde{R}_{ii}(b) + \tilde{R}_{nn}(b)] \bar{w}}. \quad (6.80)$$

Στην παράγραφο αυτή έγινε προσπάθεια να δοθούν οι βασικές έννοιες που σχετίζονται με τα συστήματα μορφοποίησης, καθώς και οι κύριες σχέσεις μεταξύ των εννοιών αυτών. Ολοκληρώνοντας, θα πρέπει να σημειωθεί ότι σ' όλη την παραπάνω ανάλυση δεν αναφέρθηκε κάποια εξάρτηση των βαρών  $w_m$  ή του διανύσματος  $\bar{w}$  αυτών από το χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα παραπάνω ισχύουν είτε τα βάρη μεταβάλλονται ως προς το χρόνο είτε όχι. Στην περίπτωση προσαρμοστικής μορφοποίησης δέσμης, είτε αναλογικής είτε ψηφιακής, τα βάρη προφανώς θα μεταβάλλονται με το χρόνο, δεδομένου ότι η προσαρμοστική μορφοποίηση είναι μια διαδικασία πραγματικού χρόνου που προσπαθεί να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις που ισχύουν σε κάθε χρονική στιγμή. Σε μια τέτοια

## 6.2 Μοντέλο σήματος

$$\vec{v}_n = \cos \varphi_n \sin \vartheta_n \vec{x}_o + \sin \varphi_n \sin \vartheta_n \vec{y}_o + \cos \vartheta_n \vec{z}_o, \quad (6.81)$$


όπου  $\vec{x}_o$ ,  $\vec{y}_o$  και  $\vec{z}_o$  είναι αντιστοίχως τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων  $x$ ,  $y$  και  $z$  του συστήματος συντεταγμένων. Θεωρώντας ότι τα εισερχόμενα σήματα διαδίδονται υπό τη μορφή επίπεδων ομοιόμορφων κυμάτων, τότε μεσολαβεί κάποιο χρονικό διάστημα από την στιγμή που το μέτωπο κύματος του  $s_n$  αγγίζει το  $m$ -στο στοιχείο μέχρι τη στιγμή που το



μέτωπο κύματος αγγίζει την αρχή  $O$  του συστήματος συντεταγμένων. Αυτό το χρονικό διάστημα είναι

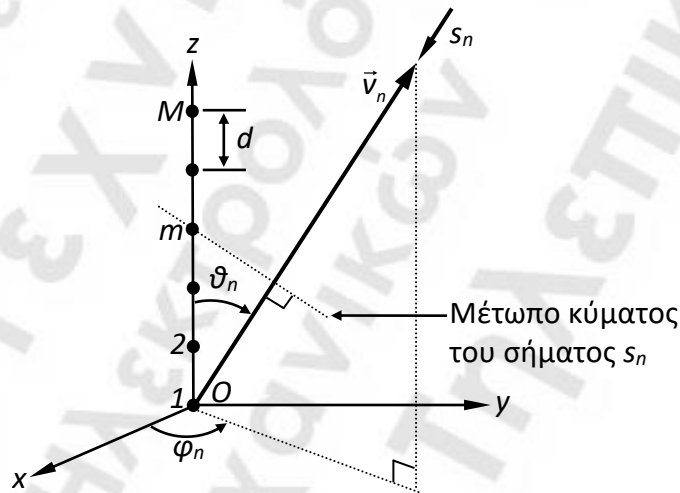
$$\tau_m(\varphi_n, \vartheta_n) = \frac{\vec{r}_m \cdot \vec{v}_n}{c}. \quad (6.82)$$

Στη σχέση αυτή θεωρήθηκε ότι η ταχύτητα διάδοσης των σημάτων στον ελεύθερο χώρο ισούται με την ταχύτητα  $c$  του φωτός στο κενό. Από τη μορφή της (6.82) συμπεραίνουμε ότι όταν  $\tau_m > 0$  τότε το μέτωπο κύματος φτάνει στο  $m$ -στο στοιχείο νωρίτερα απ' ό,τι στην αρχή  $O$  του συστήματος, ενώ όταν  $\tau_m < 0$  τότε το μέτωπο κύματος φτάνει στο στοιχείο αργότερα απ' ό,τι στην αρχή του συστήματος. Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό πιο εύκολα αν θεωρήσουμε ότι τα  $M$  στοιχεία της στοιχειοκεραίας δεν διατάσσονται τυχαία στο χώρο αλλά βρίσκονται όλα στον ίδιο άξονα, π.χ. στον  $z$ -άξονα, και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d$  (σχήμα 6.5). Επιπλέον, το 1<sup>ο</sup> στοιχείο είναι τοποθετημένο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Τότε, ισχύει

$$\vec{r}_m = (m-1)d \vec{z}_o, \quad m=1, \dots, M, \quad (6.83)$$

οπότε, λόγω των (6.81) και (6.83), η (6.82) απλοποιείται στη μορφή

$$\tau_m(\varphi_n, \vartheta_n) = \frac{(m-1)d \cos \vartheta_n}{c}. \quad (6.84)$$



**Σχήμα 6.5** Εισερχόμενο σήμα σε γραμμική στοιχειοκεραία ισαπεχόντων στοιχείων.

Έτσι, για  $\vartheta_n \in [0^\circ, 90^\circ)$  η άνω σχέση δίνει  $\tau_m > 0$  γεγονός που σημαίνει ότι το σήμα αγγίζει το  $m$ -στο στοιχείο νωρίτερα απ' ό,τι την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, ενώ αν  $\vartheta_n \in (90^\circ, 180^\circ]$  η άνω σχέση δίνει  $\tau_m < 0$  γεγονός που σημαίνει ότι το σήμα αγγίζει το  $m$ -στο στοιχείο αργότερα απ' ό,τι την αρχή του συστήματος. Τέλος, αν  $\vartheta_n = 90^\circ$  τότε  $\tau_m = 0$ , γεγονός που σημαίνει ότι το σήμα αγγίζει όλα τα στοιχεία ταυτόχρονα με την αρχή του συστήματος.

Ας θεωρήσουμε ότι το  $n$ -στο εισερχόμενο σήμα, μετρούμενο στη θέση της αρχής  $O$  του συστήματος συντεταγμένων, έχει την τυπική πολική μιγαδική μορφή

$$s_n(O, t) = g_n(t) \exp(j2\pi f_c t), \quad (6.85)$$

όπου  $f_c$  είναι η φέρουσα συχνότητα και  $g_n$  είναι η *συνάρτηση διαμόρφωσης* (modulating function) της πληροφορίας που μεταφέρει το  $s_n$ . Για παράδειγμα, αν είχαμε πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας (frequency division multiple access, FDMA), η συνάρτηση διαμόρφωσης θα είχε τη γενική μορφή

$$g_n(t) = A_n \exp[j\xi_n(t)], \quad (6.86)$$

όπου  $\xi_n(t)$  η συνάρτηση που εμπεριέχει την πληροφορία της  $n$ -στης πηγής. Επίσης, αν είχαμε πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου (time division multiple access, TDMA), η συνάρτηση διαμόρφωσης θα είχε τη γενική μορφή

$$g_n(t) = \sum_k h_n(k) p(t - kT_s), \quad (6.87)$$

όπου  $h_n(k)$  είναι σύμβολα πληροφορίας της  $n$ -στης πηγής,  $p(t)$  η συνάρτηση παλμού δειγματοληψίας και  $T_s$  η περίοδος δειγματοληψίας. Τέλος, αν είχαμε πολυπλεξία διαίρεσης κώδικα (code division multiple access, CDMA), η συνάρτηση διαμόρφωσης θα είχε τη γενική μορφή

$$g_n(t) = h_n(t) u(t), \quad (6.88)$$

όπου  $h_n(t)$  είναι η πληροφορία της  $n$ -στης πηγής και  $u(t)$  είναι ψευδοτυχαία δυαδική ακολουθία θορύβου που παίρνει τιμές  $+1$  και  $-1$ .

Αν η (6.85) περιγράφει το  $s_n$ , μετρούμενο στη θέση της αρχής  $O$  του συστήματος συντεταγμένων, τότε στη θέση του  $m$ -στου στοιχείου θα έχει τη μορφή

$$s_n(\vec{r}_m, t) = g_n(t) \exp(j2\pi f_c [t + \tau_m(\varphi_n, \vartheta_n)]). \quad (6.89)$$

Η έκφραση αυτή προέκυψε θεωρώντας ότι αν  $\tau_m > 0$  (δηλ. το  $s_n$  αγγίζει το  $m$ -στο στοιχείο νωρίτερα απ' ό,τι την αρχή  $O$  του συστήματος) τότε, σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ , η φάση του  $s_n$  στη θέση του  $m$ -στου στοιχείου θα είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι στη θέση  $O$ . Συνεπώς, η (6.89) παράγεται από την (6.85) προσαυξάνοντας τη φάση του  $s_n$  κατά  $2\pi f_c \tau_m$ . Βέβαια, η (6.89) διαφέρει από την (6.85) ως προς το φασικό όρο, αλλά η συνάρτηση  $g_n$  διαμόρφωσης της πληροφορίας θεωρείται ότι έχει την ίδια τιμή και στις δυο θέσεις, παρόλο που μια συγκεκριμένη τιμή της  $g_n$  που λαμβάνεται από το  $m$ -στο στοιχείο θα φτάσει στην αρχή  $O$  μετά από χρόνο  $\tau_m$ . Αυτή η φαινομενική αμεταβλητότητα των τιμών της  $g_n$  είναι προσεγγιστική και ισχύει όταν (α) η πληροφορία είναι στενής συχνοτικής ζώνης, και (β) οι διαστάσεις της στοιχειοκεραίας είναι αρκετά μικρές ώστε η πληροφορία να μην μεταβάλλεται αισθητά σε τιμή καθώς το σήμα διανύει την απόσταση από το  $m$ -στο στοιχείο μέχρι τη θέση  $O$  μέσα στο χρόνο  $\tau_m$ .

Θεωρώντας ότι τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας είναι ιστροπικές πηγές (συνεπώς έχουν κέρδος ακτινοβολούμενης ισχύος ίσο με τη μονάδα προς όλες τις κατευθύνσεις του χώρου), το σήμα εισόδου του  $m$ -στου στοιχείου προκύπτει από τη συνεισφορά όλων των

εισερχόμενων σημάτων  $s_n$ ,  $n=0,1,...,N$ , λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορές φάσης που δημιουργούνται λόγω των διαφορετικών κατευθύνσεων διάδοσης των  $s_n$ . Ουσιαστικά, το  $m$ -στο σήμα εισόδου θα προκύψει από την άθροιση σημάτων της μορφής (6.89), συμπεριλαμβάνοντας επιπλέον και τον θόρυβο, δηλαδή

$$x_m(t) = \sum_{n=0}^N s_n(\vec{r}_m, t) + n_m(t) = \sum_{n=0}^N g_n(t) \exp(j2\pi f_c [t + \tau_m(\varphi_n, \vartheta_n)]) + n_m(t). \quad (6.90)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, αν τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας δεν ήταν ιστροπικές πηγές, τότε η άνω σχέση θα έπρεπε να τροποποιηθεί πολλαπλασιάζοντας κάθε ( $n$ -στο) όρο του αθροίσματος με τη μιγαδική τιμή απόκρισης του  $m$ -στου στοιχείου της στοιχειοκεραίας κατά την κατεύθυνση άφιξης του αντίστοιχου ( $n$ -στου) εισερχόμενου σήματος.

Λόγω της (6.90), το διάνυσμα εισόδου του συστήματος μορφοποίησης θα είναι

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^N g_n(t) \exp(j2\pi f_c [t + \tau_1(\varphi_n, \vartheta_n)]) + n_1(t) \\ \sum_{n=0}^N g_n(t) \exp(j2\pi f_c [t + \tau_2(\varphi_n, \vartheta_n)]) + n_2(t) \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^N g_n(t) \exp(j2\pi f_c [t + \tau_M(\varphi_n, \vartheta_n)]) + n_M(t) \end{bmatrix} \\ &= \exp(j2\pi f_c t) \sum_{n=0}^N g_n(t) \begin{bmatrix} \exp[j2\pi f_c \tau_1(\varphi_n, \vartheta_n)] \\ \exp[j2\pi f_c \tau_2(\varphi_n, \vartheta_n)] \\ \vdots \\ \exp[j2\pi f_c \tau_M(\varphi_n, \vartheta_n)] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_M(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

και τελικά

$$\bar{x}(t) = \exp(j2\pi f_c t) \sum_{n=0}^N g_n(t) \bar{a}_n + \bar{n}(t), \quad (6.91)$$

όπου  $\bar{n}(t)$  είναι το διάνυσμα των σημάτων θορύβου, ενώ το διάνυσμα

$$\bar{a}_n = \begin{bmatrix} \exp[j2\pi f_c \tau_1(\varphi_n, \vartheta_n)] \\ \exp[j2\pi f_c \tau_2(\varphi_n, \vartheta_n)] \\ \vdots \\ \exp[j2\pi f_c \tau_M(\varphi_n, \vartheta_n)] \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (6.92)$$

ονομάζεται *διάνυσμα οδήγησης* (steering vector) του  $n$ -στου εισερχόμενου σήματος. Στη διεθνή βιβλιογραφία, αναφέρεται επίσης και ως *διάνυσμα χώρου* (space vector) ή *διάνυσμα απόκρισης στοιχειοκεραίας* (array response vector). Λαμβάνοντας υπόψη την (6.82) και το ότι η φασική σταθερά διάδοσης σημάτων συχνότητας  $f_c$  στον ελεύθερο χώρο είναι

$$\beta = \frac{\omega_c}{c} = \frac{2\pi f_c}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (6.93)$$

η (6.92) παίρνει τη μορφή

$$\bar{a}_n = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_n) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_n) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_n) \end{bmatrix}, \quad n=0,1,\dots,N. \quad (6.94)$$

Στην περίπτωση γραμμικής στοιχειοκεραίας, όπου τα στοιχεία της διατεταγμένα στον z-άξονα και το 1<sup>ο</sup> στοιχείο είναι τοποθετημένο στην αρχή O του συστήματος συντεταγμένων, θα ισχύει η (6.84), οπότε η (6.92) παίρνει την απλοποιημένη έκφραση

$$\bar{a}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\beta d \cos \vartheta_n) \\ \vdots \\ \exp[j(M-1)\beta d \cos \vartheta_n] \end{bmatrix}, \quad n=0,1,\dots,N. \quad (6.95)$$

Θα πρέπει να σημειωθούν τα εξής:

- (α) Το  $n$ -στο διάνυσμα θέσης εξαρτάται από τις γεωμετρικές θέσεις των στοιχείων της στοιχειοκεραίας καθώς και την κατεύθυνση άφιξης του  $n$ -στου εισερχόμενου σήματος, και είναι ανεξάρτητο του χρόνου.
- (β) Αν το  $m$ -στο στοιχείο της στοιχειοκεραίας είναι τοποθετημένο στην αρχή O του συστήματος, τότε  $\vec{r}_m = \vec{0}$ , οπότε το  $m$ -στο στοιχείο όλων των διανυσμάτων οδήγησης θα είναι ίσο με τη μονάδα.
- (γ) Οι παραπάνω μορφές των διανυσμάτων οδήγησης έχουν προκύψει θεωρώντας στοιχειοκεραία που αποτελείται από ισοτροπικές πηγές. Όπως φαίνεται, όλα τα στοιχεία των διανυσμάτων οδήγησης έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα. Αν όμως τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας δεν είναι ισοτροπικές πηγές, τότε κάθε διάνυσμα οδήγησης πρέπει να τροποποιηθεί πολλαπλασιάζοντας κάθε ( $m$ -στο) στοιχείο του διανύσματος με τη μιγαδική τιμή απόκρισης του  $m$ -στου στοιχείου της στοιχειοκεραίας στην κατεύθυνση άφιξης ( $(\varphi_n, \vartheta_n)$  ή  $\vec{v}_n$ ) που αντιστοιχεί στο διάνυσμα οδήγησης.
- (δ) Η τιμή της απόκρισης είναι γενικά διαφορετική για κάθε στοιχείο της στοιχειοκεραίας και οφείλεται σε δυο λόγους: (i) στο γεγονός ότι τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας μπορεί να είναι διαφορετικά μεταξύ τους, και (ii) στη σύζευξη μεταξύ στοιχείων της στοιχειοκεραίας που διαφοροποιεί την απόκριση από στοιχείο σε στοιχείο, ακόμη κι αν τα στοιχεία είναι όμοια μεταξύ τους. Αν τα στοιχεία είναι όμοια μεταξύ τους και δεν υπάρχει σύζευξη μεταξύ στοιχείων (ή είναι πολύ ασθενής), τότε και μόνο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλα τα στοιχεία έχουν την ίδια τιμή απόκρισης, γεγονός που σημαίνει ότι οι (6.94) και (6.95) τροποποιούνται

πολλαπλασιάζοντας όλα τα στοιχεία του  $\bar{a}_n$  με τη μιγαδική τιμή απόκρισης που είναι ίδια για όλα τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας.

Στην (6.91), ο φασικός όρος  $\exp(j2\pi f_c t)$  μπορεί να παραληφθεί επειδή επηρεάζει με τον ίδιο τρόπο όλους τους όρους του αθροίσματος, οπότε μπορεί να γραφεί

$$\bar{x}(t) = \sum_{n=0}^N g_n(t) \bar{a}_n + \bar{n}(t). \quad (6.96)$$

Επίσης, θεωρώντας ότι γίνεται δειγματοληψία των σημάτων εισόδου, στην άνω σχέση ο χρόνος  $t$  μπορεί να αντικατασταθεί από τον αύξοντα αριθμό δείγματος  $k$ , οπότε θα έχουμε

$$\bar{x}(k) = \sum_{n=0}^N g_n(k) \bar{a}_n + \bar{n}(k). \quad (6.97)$$

Για να διευκολυνθεί ο υπολογισμός των μαθηματικών συσχετίσεων μεταξύ των μεγεθών, είναι προτιμότερο η παράσταση αθροίσματος να μετατραπεί σε παράσταση πινάκων. Έτσι λοιπόν, αναλύοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{x}(k) &= g_0(k) \bar{a}_0 + g_1(k) \bar{a}_1 + \dots + g_N(k) \bar{a}_N + \bar{n}(k) = \\ &= g_0(k) \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_0) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_0) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_0) \end{bmatrix} + g_1(k) \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_1) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_1) \end{bmatrix} + \dots + g_N(k) \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_N) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_N) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_N) \end{bmatrix} + \bar{n}(k) = \\ &= \begin{bmatrix} g_0(k) \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_0) + g_1(k) \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1) + \dots + g_N(k) \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_N) \\ g_0(k) \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_0) + g_1(k) \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_1) + \dots + g_N(k) \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_N) \\ \vdots \\ g_0(k) \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_0) + g_1(k) \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_1) + \dots + g_N(k) \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_N) \end{bmatrix} + \bar{n}(k) = \\ &= \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_0) & \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1) & \dots & \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_N) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_0) & \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_1) & \dots & \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_0) & \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_1) & \dots & \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0(k) \\ g_1(k) \\ \vdots \\ g_N(k) \end{bmatrix} + \bar{n}(k). \end{aligned}$$

Τελικά βρίσκουμε

$$\bar{x}(k) = \bar{A} \bar{g}(k) + \bar{n}(k), \quad (6.98)$$

όπου

$$\bar{g}(k) = \begin{bmatrix} g_0(k) \\ g_1(k) \\ \vdots \\ g_N(k) \end{bmatrix} \quad (6.99)$$

είναι το διάνυσμα διαμόρφωσης (modulating vector) της πληροφορίας που μεταφέρουν όλα τα εισερχόμενα σήματα, και

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_0) & \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1) & \cdots & \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_N) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_0) & \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_1) & \cdots & \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_0) & \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_1) & \cdots & \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_N) \end{bmatrix} = [\bar{a}_0 \quad \bar{a}_1 \quad \cdots \quad \bar{a}_N] \quad (6.100)$$

είναι  $M \times (N+1)$  πίνακας, που κατασκευάζεται από τα διανύσματα οδήγησης όλων των εισερχόμενων σημάτων  $(N+1)$  διατεταγμένα σε σειρά, και ονομάζεται *πίνακας οδήγησης* (steering matrix) των εισερχόμενων σημάτων. Είναι αντιληπτό ότι ο πίνακας αυτός εξαρτάται από τις γεωμετρικές θέσεις των στοιχείων της στοιχειοκεραίας καθώς και τις κατευθύνσεις άφιξης των εισερχόμενων σημάτων, και είναι ανεξάρτητος του χρόνου.

Ο υπολογισμός του πίνακα συσχέτισης  $\bar{R}_{xx}$  των σημάτων εισόδου μπορεί να γίνει με αντικατάσταση της (6.98) στην (6.8), οπότε παίρνουμε

$$\bar{R}_{xx} = E[\bar{x}(k)\bar{x}^H(k)] = E[\bar{A}\bar{g}(k) + \bar{n}(k)][\bar{A}\bar{g}(k) + \bar{n}(k)]^H. \quad (6.101)$$

Αναλύοντας την άνω σχέση θα έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{R}_{xx} &= E[\bar{A}\bar{g}(k) + \bar{n}(k)][\bar{g}^H(k)\bar{A}^H + \bar{n}^H(k)] = \\ &= E[\bar{A}\bar{g}(k)\bar{g}^H(k)\bar{A}^H] + E[\bar{A}\bar{g}(k)\bar{n}^H(k)] + E[\bar{n}(k)\bar{g}^H(k)\bar{A}^H] + E[\bar{n}(k)\bar{n}^H(k)] = \\ &= \bar{A}E[\bar{g}(k)\bar{g}^H(k)]\bar{A}^H + \bar{A}E[\bar{g}(k)\bar{n}^H(k)] + E[\bar{n}(k)\bar{g}^H(k)]\bar{A}^H + E[\bar{n}(k)\bar{n}^H(k)] = \\ &= \bar{A}\bar{R}_{gg}\bar{A}^H + \bar{A}\bar{R}_{gn} + \bar{R}_{ng}\bar{A}^H + \bar{R}_{nn}. \end{aligned} \quad (6.102)$$

Στην άνω έκφραση

$$\bar{R}_{gg} = E[\bar{g}(k)\bar{g}^H(k)] \quad (6.103)$$

είναι ο *πίνακας συσχέτισης των συναρτήσεων διαμόρφωσης*, ο οποίος ουσιαστικά εκφράζει τη συσχέτιση της πληροφορίας που εισέρχεται στο σύστημα μορφοποίησης. Στη γενική περίπτωση, υπάρχει πιθανότητα δυο ή περισσότερες διαφορετικές συναρτήσεις διαμόρφωσης να περιέχουν την ίδια πληροφορία, με αποτέλεσμα να υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των συναρτήσεων αυτών. Αυτό μπορεί συνήθως να συμβεί όταν η ίδια πληροφορία ακολουθεί διαφορετικές διαδρομές μέσα στον πραγματικό χώρο διάδοσης, δημιουργώντας έτσι περισσότερες της μιας αντίστοιχες συναρτήσεις διαμόρφωσης που διακινούν ουσιαστικά την ίδια πληροφορία. Είναι λογικό τότε ότι μεταξύ των συναρτήσεων αυτών θα υπάρχει συσχέτιση. Λόγω της μορφής του, ο  $\bar{R}_{gg}$  είναι ερμιτιανός. Επίσης,

$$\bar{R}_{gn} = E[\bar{g}(k)\bar{n}^H(k)] \quad (6.104)$$

και

$$\bar{R}_{ng} = E[\bar{n}(k)\bar{g}^H(k)] \quad (6.105)$$

είναι οι πίνακες συσχέτισης μεταξύ των συναρτήσεων διαμόρφωσης και των σημάτων θορύβου. Για τους πίνακες αυτούς ισχύει

$$\bar{R}_{gn} = \bar{R}_{ng}^H, \quad (6.106)$$

αλλά επειδή

$$\bar{R}_{gn} \neq \bar{R}_{gn}^H \text{ και } R_{ng} \neq \bar{R}_{ng}^H \quad (6.107)$$

οι πίνακες αυτοί δεν είναι ερμιτιανοί. Τέλος,  $\bar{R}_{nn}$  είναι ο πίνακας συσχέτισης των σημάτων θορύβου, ο οποίος έχει ήδη οριστεί στην (6.33) και όπως έχει ήδη αναφερθεί είναι ερμιτιανός πίνακας. Θεωρώντας ότι δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος και οποιουδήποτε σήματος θορύβου (όπως εξηγήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο), θα ισχύει

$$\bar{R}_{gn} = \bar{R}_{ng} = \bar{0}, \quad (6.108)$$

οπότε η (6.102) καταλήγει στην έκφραση

$$\bar{R}_{xx} = \bar{A} \bar{R}_{gg} \bar{A}^H + \bar{R}_{nn}. \quad (6.109)$$

Η (6.109) είναι η πιο γενική σχέση μεταξύ πινάκων συσχέτισης, όπου η μοναδική θεώρηση που έγινε είναι ότι δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος, είτε επιθυμητού είτε παρεμβολής, και οποιουδήποτε σήματος θορύβου.

Στην περίπτωση που κάνουμε υπολογισμούς με βάση το  $b$ -στο μπλοκ  $K$  δειγμάτων, αντί του διανύσματος εισόδου  $\bar{x}(k)$  γίνεται χρήση του  $M \times K$  πίνακα εισόδου  $\bar{X}(b)$  (που ορίζεται από την (6.13)), οπότε η (6.98) τροποποιείται στη μορφή

$$\bar{X}(b) = \bar{A} \bar{G}(b) + \bar{N}(b), \quad (6.110)$$

όπου  $\bar{N}(b)$  είναι ο  $M \times K$  πίνακας δειγμάτων θορύβου (που ορίζεται από την (6.29)), και

$$\bar{G}(b) = \begin{bmatrix} \bar{g}_0(b) \\ \bar{g}_1(b) \\ \vdots \\ \bar{g}_N(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0(1+(b-1)K) & g_0(2+(b-1)K) & \cdots & g_0(K+(b-1)K) \\ g_1(1+(b-1)K) & g_1(2+(b-1)K) & \cdots & g_1(K+(b-1)K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_N(1+(b-1)K) & g_N(2+(b-1)K) & \cdots & g_N(K+(b-1)K) \end{bmatrix} \quad (6.111)$$

είναι ο  $(N+1) \times K$  πίνακας των δειγμάτων διαμόρφωσης πληροφορίας.

Προσεγγίζοντας τους πίνακες συσχέτισης από τη χρονική μέση τιμή συσχέτισης των αντίστοιχων σημάτων, αντί του  $\bar{R}_{xx}$  χρησιμοποιείται ο  $\tilde{R}_{xx}(b)$  που υπολογίζεται από την (6.14), αντί του  $\bar{R}_{nn}$  χρησιμοποιείται ο  $\tilde{R}_{nn}(b)$  που υπολογίζεται από την (6.37), και τέλος αντί του  $\bar{R}_{gg}$  χρησιμοποιείται ο  $\tilde{R}_{gg}(b)$  που υπολογίζεται με όμοιο τρόπο από τη σχέση

$$\tilde{R}_{gg}(b) = \frac{1}{K} \bar{G}(b) \bar{G}^H(b). \quad (6.112)$$



Τότε, η σχέση που συνδέει τους προσεγγιστικούς πίνακες συσχέτισης μπορεί να βρεθεί με αντικατάσταση της (6.110) στην (6.14), δηλαδή

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_{xx}(b) &= \frac{1}{K} \bar{X}(b) \bar{X}^H(b) = \frac{1}{K} [\bar{A} \bar{G}(b) + \bar{N}(b)] [\bar{A} \bar{G}(b) + \bar{N}(b)]^H = \\
 &= \frac{1}{K} [\bar{A} \bar{G}(b) + \bar{N}(b)] [\bar{G}^H(b) \bar{A}^H + \bar{N}^H(b)] = \\
 &= \bar{A} \left[ \frac{1}{K} \bar{G}(b) \bar{G}^H(b) \right] \bar{A}^H + \bar{A} \left[ \frac{1}{K} \bar{G}(b) \bar{N}^H(b) \right] + \left[ \frac{1}{K} \bar{N}(b) \bar{G}^H(b) \right] \bar{A}^H + \frac{1}{K} \bar{N}(b) \bar{N}^H(b) = \\
 &= \bar{A} \tilde{R}_{gg}(b) \bar{A}^H + \bar{A} \tilde{R}_{gn}(b) + \tilde{R}_{ng}(b) \bar{A}^H + \tilde{R}_{nn}(b),
 \end{aligned} \tag{6.113}$$

όπου

$$\tilde{R}_{gn}(b) = \frac{1}{K} \bar{G}(b) \bar{N}^H(b) \tag{6.114}$$

και

$$\tilde{R}_{ng}(b) = \frac{1}{K} \bar{N}(b) \bar{G}^H(b) \tag{6.115}$$

είναι οι προσεγγιστικοί πίνακες συσχέτισης μεταξύ των συναρτήσεων διαμόρφωσης και των σημάτων θορύβου που αντιστοιχούν στο  $b$ -στο μπλοκ δειγματοληψίας. Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος και οποιουδήποτε σήματος θορύβου, οπότε θα ισχύει

$$\tilde{R}_{gn}(b) \cong \bar{0} \text{ και } \tilde{R}_{ng}(b) \cong \bar{0}, \tag{6.116}$$

και συνεπώς η (6.113) καταλήγει στην έκφραση

$$\tilde{R}_{xx}(b) = \bar{A} \tilde{R}_{gg}(b) \bar{A}^H + \tilde{R}_{nn}(b). \tag{6.117}$$

Ένας άλλος τρόπος περιγραφής του διανύσματος εισόδου είναι να ξεχωρίσουμε τον πρώτο όρο ( $n=0$ ) από τους υπόλοιπους στο άθροισμα της (6.97). Αυτό γίνεται επειδή ο πρώτος όρος περιγράφει το επιθυμητό εισερχόμενο σήμα, οπότε θα ήταν καλό να γνωρίζουμε τη συνεισφορά του σήματος αυτού στα σήματα εισόδου του συστήματος μορφοποίησης. Από την ανάλυση, λοιπόν, της (6.97) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \bar{x}(k) &= g_0(k) \bar{a}_0 + g_1(k) \bar{a}_1 + g_2(k) \bar{a}_2 + \cdots + g_N(k) \bar{a}_N + \bar{n}(k) = \\
 &= g_0(k) \bar{a}_0 + \begin{bmatrix} g_1(k) \exp(j \beta \bar{r}_1 \cdot \bar{v}_1) + g_2(k) \exp(j \beta \bar{r}_1 \cdot \bar{v}_2) + \cdots + g_N(k) \exp(j \beta \bar{r}_1 \cdot \bar{v}_N) \\ g_1(k) \exp(j \beta \bar{r}_2 \cdot \bar{v}_1) + g_2(k) \exp(j \beta \bar{r}_2 \cdot \bar{v}_2) + \cdots + g_N(k) \exp(j \beta \bar{r}_2 \cdot \bar{v}_N) \\ \vdots \\ g_1(k) \exp(j \beta \bar{r}_M \cdot \bar{v}_1) + g_2(k) \exp(j \beta \bar{r}_M \cdot \bar{v}_2) + \cdots + g_N(k) \exp(j \beta \bar{r}_M \cdot \bar{v}_N) \end{bmatrix} + \bar{n}(k) = \\
 &= \bar{a}_0 g_0(k) + \begin{bmatrix} \exp(j \beta \bar{r}_1 \cdot \bar{v}_1) & \exp(j \beta \bar{r}_1 \cdot \bar{v}_2) & \cdots & \exp(j \beta \bar{r}_1 \cdot \bar{v}_N) \\ \exp(j \beta \bar{r}_2 \cdot \bar{v}_1) & \exp(j \beta \bar{r}_2 \cdot \bar{v}_2) & \cdots & \exp(j \beta \bar{r}_2 \cdot \bar{v}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j \beta \bar{r}_M \cdot \bar{v}_1) & \exp(j \beta \bar{r}_M \cdot \bar{v}_2) & \cdots & \exp(j \beta \bar{r}_M \cdot \bar{v}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(k) \\ g_2(k) \\ \vdots \\ g_N(k) \end{bmatrix} + \bar{n}(k),
 \end{aligned}$$

και τελικά

$$\bar{x}(k) = \bar{a}_0 g_0(k) + \bar{A}_i \bar{g}_i(k) + \bar{n}(k), \quad (6.118)$$

όπου

$$\bar{g}_i(k) = \begin{bmatrix} g_1(k) \\ g_2(k) \\ \vdots \\ g_N(k) \end{bmatrix} \quad (6.119)$$

είναι το διάνυσμα διαμόρφωσης (modulating vector) της πληροφορίας παρεμβολής, και

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \bar{r}_1 \cdot \bar{v}_1) & \exp(j\beta \bar{r}_1 \cdot \bar{v}_2) & \cdots & \exp(j\beta \bar{r}_1 \cdot \bar{v}_N) \\ \exp(j\beta \bar{r}_2 \cdot \bar{v}_1) & \exp(j\beta \bar{r}_2 \cdot \bar{v}_2) & \cdots & \exp(j\beta \bar{r}_2 \cdot \bar{v}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j\beta \bar{r}_M \cdot \bar{v}_1) & \exp(j\beta \bar{r}_M \cdot \bar{v}_2) & \cdots & \exp(j\beta \bar{r}_M \cdot \bar{v}_N) \end{bmatrix} = [\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \cdots \quad \bar{a}_N] \quad (6.120)$$

είναι  $M \times N$  πίνακας, που κατασκευάζεται από τα διανύσματα οδήγησης των εισερχόμενων σημάτων παρεμβολής διατεταγμένα σε σειρά, και ονομάζεται *πίνακας οδήγησης των σημάτων παρεμβολής*. Είναι προφανές ότι ο πίνακας αυτός εξαρτάται από τις γεωμετρικές θέσεις των στοιχείων της στοιχειοκεραίας καθώς και τις κατευθύνσεις άφιξης των εισερχόμενων σημάτων παρεμβολής, και είναι ανεξάρτητος του χρόνου. Η (6.118) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\bar{x}(k) = \bar{a}_d g_d(k) + \bar{A}_i \bar{g}_i(k) + \bar{n}(k), \quad (6.121)$$

όπου η αλλαγή δείκτη στα μεγέθη του πρώτου όρου του αθροίσματος έγινε για να δηλώσουμε ότι αφορούν στο επιθυμητό εισερχόμενο σήμα, δηλαδή

$$g_d(k) = g_0(k) \quad (6.122)$$

και

$$\bar{a}_d = \bar{a}_0. \quad (6.123)$$

Λόγω της (6.122), ισχύει ισοδύναμα

$$s_d(k) = s_0(k). \quad (6.124)$$

Συγκρίνοντας την (6.16) με την (6.118) ή την (6.121), προκύπτουν οι σχέσεις των συνιστωσών του διανύσματος εισόδου με τα εισερχόμενα σήματα, και συγκεκριμένα

$$\bar{x}_d(k) = \bar{a}_0 g_0(k) = \bar{a}_d g_d(k), \quad (6.125)$$

$$\bar{x}_i(k) = \bar{A}_i \bar{g}_i(k), \quad (6.126)$$

και

$$\bar{x}_u(k) = \bar{A}_i \bar{g}_i(k) + \bar{n}(k). \quad (6.127)$$

Ο υπολογισμός του  $\bar{R}_{xx}$  μπορεί να επαναληφθεί αντικαθιστώντας την (6.121) στην (6.8), οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}\bar{R}_{xx} &= E[\bar{x}(k)\bar{x}^H(k)] = E\left[\left[\bar{a}_d g_d(k) + \bar{A}_i \bar{g}_i(k) + \bar{n}(k)\right]\left[\bar{a}_d g_d(k) + \bar{A}_i \bar{g}_i(k) + \bar{n}(k)\right]^H\right] \\ &= E\left[\left[\bar{a}_d g_d(k) + \bar{A}_i \bar{g}_i(k) + \bar{n}(k)\right]\left[g_d^*(k)\bar{a}_d^H + \bar{g}_i^H(k)\bar{A}_i^H + \bar{n}^H(k)\right]\right],\end{aligned}$$

και αναλύοντας περισσότερο παίρνουμε

$$\begin{aligned}\bar{R}_{xx} &= \bar{a}_d E[g_d(k)g_d^*(k)]\bar{a}_d^H + \bar{a}_d E[g_d(k)\bar{g}_i^H(k)]\bar{A}_i^H + \bar{a}_d E[g_d(k)\bar{n}^H(k)] + \\ &+ \bar{A}_i E[\bar{g}_i(k)g_d^*(k)]\bar{a}_d^H + \bar{A}_i E[\bar{g}_i(k)\bar{g}_i^H(k)]\bar{A}_i^H + \bar{A}_i E[\bar{g}_i(k)\bar{n}^H(k)] + \\ &+ E[\bar{n}(k)g_d^*(k)]\bar{a}_d^H + E[\bar{n}(k)\bar{g}_i^H(k)]\bar{A}_i^H + E[\bar{n}(k)\bar{n}^H(k)].\end{aligned}\quad (6.128)$$

Για να διευκολυνθεί η ανάλυση θα πρέπει, εκτός της υπόθεσης που έγινε πιο πάνω περί μη-συσχέτισης οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος και σήματος θορύβου, να γίνει χρήση και μιας άλλης υπόθεσης ότι δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος και οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος παρεμβολής. Αυτό μ' άλλα λόγια σημαίνει ότι κάνουμε την υπόθεση ότι δεν υπάρχει περίπτωση η ίδια πληροφορία να διαδοθεί μέσω δυο διαφορετικών κατευθύνσεων από τις οποίες η μια ερμηνεύεται ως κατεύθυνση άφιξης του επιθυμητού σήματος και η δεύτερη ως κατεύθυνση άφιξης σήματος παρεμβολής. Πράγματι, αν συμβεί στην πράξη κάτι τέτοιο, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε τα δυο σήματα (δηλ. επιθυμητό σήμα και σήμα παρεμβολής) ασυσχέτιστα, γιατί μεταφέρουν την ίδια ακριβώς πληροφορία. Με βάση, λοιπόν, τις δυο άνω υποθέσεις, όλοι οι όροι στο δεύτερο μέλος της (6.128) είναι μηδέν εκτός του πρώτου, του πέμπτου και του ένατου. Τότε, η (6.128) απλοποιείται στην έκφραση

$$\bar{R}_{xx} = \hat{P}_{sd} \bar{a}_d \bar{a}_d^H + \bar{A}_i \bar{R}_{gigi} \bar{A}_i^H + \bar{R}_{nn}, \quad (6.129)$$

όπου

$$\hat{P}_{sd} = E[g_d(k)g_d^*(k)] = E[s_d(k)s_d^*(k)] \quad (6.130)$$

είναι η μέση ισχύς του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος, και

$$\bar{R}_{gigi} = E[\bar{g}_i(k)\bar{g}_i^H(k)] \quad (6.131)$$

είναι ο πίνακας συσχέτισης των συναρτήσεων διαμόρφωσης των σημάτων παρεμβολής. Συγκρίνοντας την (6.129) με την (6.49), προκύπτει η σχέση του πίνακα συσχέτισης των επιθυμητών συνιστωσών των σημάτων εισόδου με τη μέση ισχύ του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος, καθώς και η σχέση του πίνακα συσχέτισης των συνιστωσών παρεμβολής των σημάτων εισόδου με τον πίνακα συσχέτισης των συναρτήσεων διαμόρφωσης των εισερχόμενων σημάτων παρεμβολής, δηλαδή

$$\bar{R}_{dd} = \hat{P}_{sd} \bar{a}_d \bar{a}_d^H \quad (6.132)$$

και

$$\bar{R}_{ij} = \bar{A}_i \bar{R}_{gigi} \bar{A}_i^H. \quad (6.133)$$

Επίσης, από τις (6.50) και (6.133) προκύπτει

$$\bar{R}_{uu} = \bar{A}_i \bar{R}_{gigi} \bar{A}_i^H + \bar{R}_{nn}. \quad (6.134)$$

Στην περίπτωση που κάνουμε υπολογισμούς με βάση το  $b$ -στο μπλοκ  $K$  δειγμάτων, η (6.121) τροποποιείται στη μορφή

$$\bar{X}(b) = \bar{a}_d \bar{g}_d(b) + \bar{A}_i \bar{G}_i(b) + \bar{N}(b), \quad (6.135)$$

όπου

$$\bar{g}_d(b) = [g_d(1+(b-1)K) \quad g_d(2+(b-1)K) \quad \cdots \quad g_d(K+(b-1)K)] \quad (6.136)$$

είναι διάνυσμα γραμμής που έχει ως στοιχεία τα  $K$  δείγματα της  $g_d$  που αντιστοιχούν στο  $b$ -στο μπλοκ,

$$\bar{G}_i(b) = \begin{bmatrix} \bar{g}_1(b) \\ \bar{g}_2(b) \\ \vdots \\ \bar{g}_N(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(1+(b-1)K) & g_1(2+(b-1)K) & \cdots & g_1(K+(b-1)K) \\ g_2(1+(b-1)K) & g_2(2+(b-1)K) & \cdots & g_2(K+(b-1)K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_N(1+(b-1)K) & g_N(2+(b-1)K) & \cdots & g_N(K+(b-1)K) \end{bmatrix} \quad (6.137)$$

είναι ο  $N \times K$  πίνακας των δειγμάτων διαμόρφωσης της πληροφορίας παρεμβολής, και  $\bar{N}(b)$  είναι ο  $M \times K$  πίνακας των δειγμάτων θορύβου (που ορίζεται από την (6.29)).

Η σχέση που συνδέει τους προσεγγιστικούς πίνακες συσχέτισης μπορεί να βρεθεί με αντικατάσταση της (6.135) στην (6.14), οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{xx}(b) &= \frac{1}{K} \bar{X}(b) \bar{X}^H(b) = \frac{1}{K} [\bar{a}_d \bar{g}_d(b) + \bar{A}_i \bar{G}_i(b) + \bar{N}(b)] [\bar{a}_d \bar{g}_d(b) + \bar{A}_i \bar{G}_i(b) + \bar{N}(b)]^H = \\ &= \frac{1}{K} [\bar{a}_d \bar{g}_d(b) + \bar{A}_i \bar{G}_i(b) + \bar{N}(b)] [\bar{g}_d^H(b) \bar{a}_d^H + \bar{G}_i^H(b) \bar{A}_i^H + \bar{N}^H(b)], \end{aligned}$$

και αναλύοντας περισσότερο παίρνουμε

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{xx}(b) &= \bar{a}_d \left[ \frac{1}{K} \bar{g}_d(b) \bar{g}_d^H(b) \right] \bar{a}_d^H + \bar{a}_d \left[ \frac{1}{K} \bar{g}_d(b) \bar{G}_i^H(b) \right] \bar{A}_i^H + \bar{a}_d \left[ \frac{1}{K} \bar{g}_d(b) \bar{N}^H(b) \right] + \\ &+ \bar{A}_i \left[ \frac{1}{K} \bar{G}_i(b) \bar{g}_d^H(b) \right] \bar{a}_d^H + \bar{A}_i \left[ \frac{1}{K} \bar{G}_i(b) \bar{G}_i^H(b) \right] \bar{A}_i^H + \bar{A}_i \left[ \frac{1}{K} \bar{G}_i(b) \bar{N}^H(b) \right] + \\ &+ \left[ \frac{1}{K} \bar{N}(b) \bar{g}_d^H(b) \right] \bar{a}_d^H + \left[ \frac{1}{K} \bar{N}(b) \bar{G}_i^H(b) \right] \bar{A}_i^H + \left[ \frac{1}{K} \bar{N}(b) \bar{N}^H(b) \right]. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος και οποιουδήποτε σήματος θορύβου, και επιπλέον δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος και οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος παρεμβολής. Με βάση, λοιπόν, τις δυο άνω υποθέσεις, όλοι οι όροι στο δεύτερο μέλος της

(6.138) είναι μηδέν εκτός του πρώτου, του πέμπτου και του ένατου. Τότε, η (6.138) απλοποιείται στην έκφραση

$$\tilde{R}_{xx}(b) = \hat{P}_{sd}(b) \bar{a}_d \bar{a}_d^H + \bar{A}_i \tilde{R}_{gigi}(b) \bar{A}_i^H + \tilde{R}_{nn}(b), \quad (6.139)$$

όπου

$$\hat{P}_{sd}(b) = \frac{1}{K} \bar{g}_d(b) \bar{g}_d^H(b) = \frac{1}{K} \bar{s}_d(b) \bar{s}_d^H(b) \quad (6.140)$$

είναι η μέση ισχύς των  $K$  δειγμάτων του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος που αντιστοιχεί στο  $b$ -στο μπλοκ, και

$$\tilde{R}_{gigi}(b) = \frac{1}{K} \bar{G}_i(b) \bar{G}_i^H(b) \quad (6.141)$$

είναι η προσεγγιστική μορφή του πίνακα συσχέτισης των συναρτήσεων διαμόρφωσης των σημάτων παρεμβολής. Να σημειωθεί ότι

$$\bar{s}_d(b) = [s_d(1+(b-1)K) \quad s_d(2+(b-1)K) \quad \cdots \quad s_d(K+(b-1)K)] \quad (6.142)$$

είναι διάνυσμα γραμμής που έχει ως στοιχεία τα  $K$  δείγματα του  $s_d$  που αντιστοιχούν στο  $b$ -στο μπλοκ. Συγκρίνοντας την (6.139) με την (6.53), προκύπτει

$$\tilde{R}_{dd}(b) = \hat{P}_{sd}(b) \bar{a}_d \bar{a}_d^H \quad (6.143)$$

και

$$\tilde{R}_{ii}(b) = \bar{A}_i \tilde{R}_{gigi}(b) \bar{A}_i^H. \quad (6.144)$$

Επίσης, από τις (6.54) και (6.144) λαμβάνουμε

$$\tilde{R}_{uu}(b) = \bar{A}_i \tilde{R}_{gigi}(b) \bar{A}_i^H + \tilde{R}_{nn}(b). \quad (6.145)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.98) και (6.121) στην (6.2) παίρνουμε αντίστοιχα

$$y(k) = \bar{w}^H \bar{A} \bar{g}(k) + \bar{w}^H \bar{n}(k) \quad (6.146)$$

και

$$y(k) = \bar{w}^H \bar{a}_d g_d(k) + \bar{w}^H \bar{A}_i \bar{g}_i(k) + \bar{w}^H \bar{n}(k). \quad (6.147)$$

Συγκρίνοντας την (6.147) με την (6.62), βρίσκουμε

$$y_d(k) = \bar{w}^H \bar{a}_d g_d(k), \quad (6.148)$$

$$y_u(k) = \bar{w}^H \bar{A}_i \bar{g}_i(k) + \bar{w}^H \bar{n}(k), \quad (6.149)$$

$$y_i(k) = \bar{w}^H \bar{A}_i \bar{g}_i(k), \quad (6.150)$$

και

$$y_n(k) = \bar{w}^H \bar{n}(k). \quad (6.151)$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και στην περίπτωση που ομαδοποιούμε τα δείγματα των σημάτων σε μπλοκ  $K$  δειγμάτων. Συγκεκριμένα, αντικαθιστώντας τις (6.110) και (6.135) στην (6.57) παίρνουμε αντίστοιχα

$$\bar{y}(b) = \bar{w}^H \bar{A} \bar{G}(b) + \bar{w}^H \bar{N}(b) \quad (6.152)$$

και

$$\bar{y}(b) = \bar{w}^H \bar{a}_d \bar{g}_d(b) + \bar{w}^H \bar{A}_i \bar{G}_i(b) + \bar{w}^H \bar{N}(b). \quad (6.153)$$

Συγκρίνοντας την (6.153) με την (6.63), βρίσκουμε

$$\bar{y}_d(b) = \bar{w}^H \bar{a}_d \bar{g}_d(b), \quad (6.154)$$

$$\bar{y}_u(b) = \bar{w}^H \bar{A}_i \bar{G}_i(b) + \bar{w}^H \bar{N}(b), \quad (6.155)$$

$$\bar{y}_i(b) = \bar{w}^H \bar{A}_i \bar{G}_i(b), \quad (6.156)$$

και

$$\bar{y}_n(b) = \bar{w}^H \bar{N}(b), \quad (6.157)$$

όπου τα  $\bar{y}_d(b)$ ,  $\bar{y}_u(b)$ ,  $\bar{y}_i(b)$  και  $\bar{y}_n(b)$  ορίζονται αντίστοιχα από τις (6.64), (6.65), (6.66) και (6.67).

Οι μέσες τιμές ισχύος των συνιστωσών εξόδου προκύπτουν με αντικατάσταση των (6.132), (6.133) και (6.134) αντιστοίχως στις (6.70), (6.72) και (6.71), οπότε παίρνουμε

$$\hat{P}_{yd} = \hat{P}_{sd} \bar{w}^H \bar{a}_d \bar{a}_d^H \bar{w}, \quad (6.158)$$

$$\hat{P}_{yi} = \bar{w}^H \bar{A}_i \bar{R}_{gigi} \bar{A}_i^H \bar{w}, \quad (6.159)$$

και

$$\hat{P}_{yu} = \bar{w}^H \bar{A}_i \bar{R}_{gigi} \bar{A}_i^H \bar{w} + \bar{w}^H \bar{R}_{nn} \bar{w}. \quad (6.160)$$

Στην περίπτωση που κάνουμε υπολογισμούς με βάση το  $b$ -στο μπλοκ  $K$  δειγμάτων, οι μέσες τιμές ισχύος των συνιστωσών εξόδου προκύπτουν με αντικατάσταση των (6.143), (6.144) και (6.145) αντιστοίχως στις (6.75), (6.77) και (6.76), οπότε παίρνουμε

$$\hat{P}_{yd}(b) = \hat{P}_{sd}(b) \bar{w}^H \bar{a}_d \bar{a}_d^H \bar{w}, \quad (6.161)$$

$$\hat{P}_{yi}(b) = \bar{w}^H \bar{A}_i \tilde{R}_{gigi}(b) \bar{A}_i^H \bar{w}, \quad (6.162)$$

και

$$\hat{P}_{yu}(b) = \bar{w}^H \bar{A}_i \tilde{R}_{gigi}(b) \bar{A}_i^H \bar{w} + \bar{w}^H \tilde{R}_{nn}(b) \bar{w}. \quad (6.163)$$

Τέλος, ο λόγος σήματος-προς-παρεμβολή-και-θόρυβο στην έξοδο του συστήματος μορφοποίησης προκύπτει διαιρώντας κατά μέλη τις (6.158) και (6.160), οπότε έχουμε

$$SINR = \frac{\hat{P}_{yd}}{\hat{P}_{yu}} = \frac{\hat{P}_{sd} \bar{w}^H \bar{a}_d \bar{a}_d^H \bar{w}}{\bar{w}^H \bar{A}_i \bar{R}_{gigi} \bar{A}_i^H \bar{w} + \bar{w}^H \bar{R}_{nn} \bar{w}}. \quad (6.164)$$

Στην περίπτωση που κάνουμε υπολογισμούς με βάση το  $b$ -στο μπλοκ  $K$  δειγμάτων, ο λόγος αυτός προκύπτει διαιρώντας κατά μέλη τις (6.161) και (6.163), οπότε παίρνουμε

$$SINR(b) = \frac{\hat{P}_{yd}(b)}{\hat{P}_{yu}(b)} = \frac{\hat{P}_{sd}(b) \bar{w}^H \bar{a}_d \bar{a}_d^H \bar{w}}{\bar{w}^H \bar{A}_i \tilde{R}_{gigi}(b) \bar{A}_i^H \bar{w} + \bar{w}^H \tilde{R}_{nn}(b) \bar{w}}. \quad (6.165)$$

### 6.3 Συμβατικό σύστημα μορφοποίησης δέσμης

Στην παράγραφο αυτή πραγματοποιείται η μελέτη του συμβατικού μορφοποιητή δέσμης (conventional beamformer), ο οποίος είναι επίσης γνωστός στη βιβλιογραφία με το όνομα *delay-and-sum beamformer* (DSB). Το μπλοκ διάγραμμα του συγκεκριμένου μορφοποιητή είναι όπως αυτό του σχήματος 6.3. Τα βάρη τροφοδοσίας των στοιχείων έχουν ίσα μέτρα, ενώ οι φάσεις τους επιλέγονται κατάλληλα ώστε να οδηγήσουν τον κύριο λοβό του διαγράμματος ακτινοβολίας προς την κατεύθυνση του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος  $s_d$ . Η κατεύθυνση αυτή δηλώνεται είτε από το ζεύγος γωνιών  $(\varphi_d, \vartheta_d) = (\varphi_0, \vartheta_0)$  είτε από το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{v}_d = \vec{v}_0 = \cos \varphi_d \sin \vartheta_d \vec{x}_0 + \sin \varphi_d \sin \vartheta_d \vec{y}_0 + \cos \vartheta_d \vec{z}_0. \quad (6.166)$$

Θεωρώντας ότι

$$\bar{a}_d = \begin{bmatrix} \exp[j2\pi f_c \tau_1(\varphi_d, \vartheta_d)] \\ \exp[j2\pi f_c \tau_2(\varphi_d, \vartheta_d)] \\ \vdots \\ \exp[j2\pi f_c \tau_M(\varphi_d, \vartheta_d)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_d) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_d) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_d) \end{bmatrix} \quad (6.167)$$

είναι το διάνυσμα οδήγησης που αντιστοιχεί στην κατεύθυνση του  $s_d = s_0$  (προκύπτει από τις (6.92) και (6.94) για  $n=0$ ), το διάνυσμα βαρών πρέπει να έχει τη μορφή

$$\bar{w}_{DSB} = \frac{1}{M} \bar{a}_d = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \exp[j2\pi f_c \tau_1(\varphi_d, \vartheta_d)] \\ \exp[j2\pi f_c \tau_2(\varphi_d, \vartheta_d)] \\ \vdots \\ \exp[j2\pi f_c \tau_M(\varphi_d, \vartheta_d)] \end{bmatrix} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_d) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_d) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_d) \end{bmatrix}. \quad (6.168)$$

Τότε, η συνιστώσα εξόδου που οφείλεται στο  $s_d$ , σύμφωνα με την (6.148), θα είναι

$$y_d(k) = \bar{w}_{DSB}^H \bar{a}_d g_d(k) = \frac{1}{M} \bar{a}_d^H \bar{a}_d g_d(k) = \frac{1}{M} (\bar{a}_d^H \bar{a}_d) g_d(k) = \frac{1}{M} M g_d(k) = g_d(k), \quad (6.169)$$

δηλαδή ακριβώς ίση με τη συνάρτηση διαμόρφωσης της πληροφορίας που μεταφέρει το  $s_d$ . Επίσης, η μέση ισχύς εξόδου λόγω του  $s_d$ , σύμφωνα με την (6.158), προκύπτει

$$\hat{P}_{yd} = \hat{P}_{sd} \bar{w}_{DSB}^H \bar{a}_d \bar{a}_d^H \bar{w}_{DSB} = \hat{P}_{sd} \frac{1}{M} \bar{a}_d^H \bar{a}_d \bar{a}_d^H \frac{1}{M} \bar{a}_d = \hat{P}_{sd} \frac{(\bar{a}_d^H \bar{a}_d)(\bar{a}_d^H \bar{a}_d)}{M^2} = \hat{P}_{sd} \frac{MM}{M^2} = \hat{P}_{sd}, \quad (6.170)$$

δηλαδή ακριβώς ίση με τη μέση ισχύ του  $s_d$ .



Η φυσική σημασία της (6.168) γίνεται κατανοητή, αν ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι η έξοδος του συστήματος προκύπτει από πολλαπλασιασμό των εισόδων  $x_m$  των στοιχείων με τη συζυγή τιμή του αντίστοιχου βάρους  $w_m$  (βλέπε σχήμα 6.3). Συνεπώς, αν το  $s_d$  ληφθεί από το  $m$ -στο στοιχείο με χρονική προήγηση ( $\tau_m > 0$ ) ως προς την αρχή Ο του συστήματος (που θεωρείται σημείο αναφοράς υπολογισμού χρονικών διαφορών), τότε ο πολλαπλασιασμός του  $x_m$  με το συζυγές βάρος

$$\bar{w}_{DSB,m}^* = \frac{1}{M} \exp[-j2\pi f_c \tau_m (\varphi_d, \vartheta_d)] \quad (6.171)$$

εισάγει ουσιαστικά χρονική καθυστέρηση  $-\tau_m$  που αναιρεί την άνω χρονική προήγηση. Φυσικά, ισχύει και το αντίθετο, δηλ. αν το  $s_d$  ληφθεί από το  $m$ -στο στοιχείο με χρονική καθυστέρηση ( $\tau_m < 0$ ) ως προς την αρχή Ο, τότε ο πολλαπλασιασμός του  $x_m$  με το συζυγές βάρος όπως δίνεται πιο πάνω εισάγει χρονική προήγηση  $-\tau_m$ . Το τελικό αποτέλεσμα είναι να μηδενιστούν όλες οι χρονικές διαφορές στη λήψη του  $s_d$  απ' όλα τα στοιχεία. Υλοποιούμε έτσι μια ισοδύναμη κατάσταση, όπου  $M$  στοιχεία λαμβάνουν στην ίδια χρονική στιγμή την πληροφορία που μεταφέρει η  $g_d$ . Η υλοποίηση χρονικών καθυστερήσεων ή προηγήσεων γίνεται με τη χρήση φασιθετών. Να σημειωθεί ότι η (6.171) εκφράζει το  $m$ -στο στοιχείο του  $\bar{w}_{DSB}^*$  και προκύπτει λαμβάνοντας τη συζυγή μορφή της (6.168). Ο παράγοντας  $1/M$  χρησιμοποιείται απλά και μόνο για να κάνουμε κλιμάκωση στην τιμή του  $x_m$ , ώστε το συνολικό σήμα που προκύπτει από τα  $M$  στοιχεία στην έξοδο του συστήματος να είναι ακριβώς ίσο με τη συνάρτηση διαμόρφωσης της πληροφορίας που μεταφέρει το  $s_d$  (δηλ. μεταφέρεται η τιμή της  $g_d$  στην έξοδο του μορφοποιητή με μοναδιαία ενίσχυση).

Με σκοπό να διερευνήσουμε ποια επίδραση έχουν τα σήματα παρεμβολής στο συγκεκριμένο μορφοποιητή, ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει μόνο ένα εισερχόμενο σήμα παρεμβολής  $s_i = s_1$  ( $N=1$ ) με κατεύθυνση άφιξης που δηλώνεται είτε από το ζεύγος γωνιών  $(\varphi_i, \vartheta_i) = (\varphi_1, \vartheta_1)$  είτε από το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{v}_i = \vec{v}_1 = \cos \varphi_i \sin \vartheta_i \vec{x}_o + \sin \varphi_i \sin \vartheta_i \vec{y}_o + \cos \vartheta_i \vec{z}_o, \quad (6.172)$$

και αντιστοιχεί σε διάνυσμα οδήγησης

$$\bar{a}_i = \begin{bmatrix} \exp[j2\pi f_c \tau_1(\varphi_i, \vartheta_i)] \\ \exp[j2\pi f_c \tau_2(\varphi_i, \vartheta_i)] \\ \vdots \\ \exp[j2\pi f_c \tau_M(\varphi_i, \vartheta_i)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_i) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_i) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_i) \end{bmatrix}. \quad (6.173)$$

Εφόσον  $N=1$ , ο πίνακας οδήγησης των σημάτων παρεμβολής (σχέση (6.120)) ταυτίζεται με το  $\bar{a}_i$ , δηλαδή

$$\bar{A}_i = \bar{a}_i, \quad (6.174)$$

και, επιπλέον, το διάνυσμα διαμόρφωσης της πληροφορίας παρεμβολής (σχέση (6.119)) εκφυλίζεται σε βαθμωτό μέγεθος, δηλαδή

$$\bar{g}_i(k) = g_i(k). \quad (6.175)$$

Τέλος, ο πίνακας συσχέτισης των συναρτήσεων διαμόρφωσης των σημάτων παρεμβολής (σχέση (6.131)), λόγω της (6.175), γίνεται

$$\bar{R}_{gigi} = E[g_i(k)g_i^*(k)] = E[s_i(k)s_i^*(k)] = \hat{P}_{si}. \quad (6.176)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο εν λόγω πίνακας ταυτίζεται με τη μέση ισχύ  $\hat{P}_{si}$  του σήματος παρεμβολής. Η συνιστώσα εξόδου που οφείλεται στο  $s_i$  υπολογίζεται από την (6.150), η οποία λόγω των (6.174) και (6.175) δίνει

$$y_i(k) = \bar{w}_{DSB}^H \bar{A}_i \bar{g}_i(k) = \frac{1}{M} \bar{a}_d^H \bar{a}_i g_i(k) = \frac{\bar{a}_d^H \bar{a}_i}{M} g_i(k). \quad (6.177)$$

Προφανώς, ο όρος  $\bar{a}_d^H \bar{a}_i / M$  παίζει το ρόλο μιγαδικού συντελεστή ενίσχυσης, με τον οποίο η πληροφορία παρεμβολής εμφανίζεται στην έξοδο του συστήματος. Επειδή

$$\bar{a}_d \neq \bar{a}_i, \quad (6.178)$$

θα ισχύει

$$\left| \frac{\bar{a}_d^H \bar{a}_i}{M} \right| < 1, \quad (6.179)$$

γεγονός που σημαίνει τελικά ότι ένα ποσοστό της πληροφορίας παρεμβολής φτάνει στην έξοδο. Το ποσοστό αυτό εξαρτάται από τη γωνία ανάμεσα στα  $\bar{v}_d$  και  $\bar{v}_i$ . Η μέση ισχύς εξόδου λόγω του σήματος παρεμβολής προκύπτει από την (6.159) και, λόγω των (6.174) και (6.176), θα είναι

$$\hat{P}_{yi} = \bar{w}_{DSB}^H \bar{A}_i \bar{R}_{gigi} \bar{A}_i^H \bar{w}_{DSB} = \frac{1}{M} \bar{a}_d^H \bar{a}_i \hat{P}_{si} \bar{a}_i^H \frac{1}{M} \bar{a}_d = \frac{\bar{a}_d^H \bar{a}_i \bar{a}_i^H \bar{a}_d}{M^2} \hat{P}_{si}. \quad (6.180)$$

Λόγω της (6.178), θα ισχύει η (6.179) και επιπλέον η ανισότητα

$$\left| \frac{\bar{a}_i^H \bar{a}_d}{M} \right| < 1, \quad (6.181)$$

οπότε προκύπτει

$$\left| \frac{\bar{a}_d^H \bar{a}_i \bar{a}_i^H \bar{a}_d}{M^2} \right| < 1. \quad (6.182)$$

Άρα, στην έξοδο του συστήματος εμφανίζεται ένα ποσοστό της μέσης ισχύος του  $s_i$ . Το ποσοστό αυτό εξαρτάται από τη γωνία ανάμεσα στα  $\bar{v}_d$  και  $\bar{v}_i$ .

Η συνιστώσα εξόδου του μορφοποιητή λόγω θορύβου προκύπτει από την (6.62) και θα έχει τη μορφή

$$y_n(k) = \bar{w}_{DSB}^H \bar{n}(k) = \frac{1}{M} \bar{a}_d^H \bar{n}(k). \quad (6.183)$$

Η μέση ισχύς εξόδου λόγω θορύβου προκύπτει από την (6.73) και, λόγω της (6.47), θα είναι

$$\hat{P}_{yn} = \bar{w}_{DSB}^H \bar{R}_{nn} \bar{w}_{DSB} = \frac{1}{M} \bar{a}_d^H \hat{P}_n \bar{I} \frac{1}{M} \bar{a}_d = \frac{\hat{P}_n}{M^2} (\bar{a}_d^H \bar{a}_d) = \frac{\hat{P}_n}{M^2} M = \frac{1}{M} \hat{P}_n, \quad (6.184)$$

δηλαδή προκύπτει ίση με τη μέση ισχύ του θορύβου στην είσοδο των στοιχείων της στοιχειοκεραίας υποβιβασμένη κατά  $M$  φορές, δηλ. κατά τον αριθμό των στοιχείων της στοιχειοκεραίας.

Από τις (6.170), (6.180) και (6.184) προκύπτει ο λόγος σήματος-προς-παρεμβολή-και-θόρυβο στην έξοδο του συστήματος μορφοποίησης ίσος με

$$SNR_{DSB} = \frac{\hat{P}_{yd}}{\hat{P}_{yu}} = \frac{\hat{P}_{yd}}{\hat{P}_{yi} + \hat{P}_{yn}} = \frac{\hat{P}_{sd}}{(1/M^2) \bar{a}_d^H \bar{a}_i \bar{a}_i^H \bar{a}_d \hat{P}_{si} + (1/M) \hat{P}_n}. \quad (6.185)$$

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι στον παρονομαστή της άνω σχέσης ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι αρκετά μεγαλύτερος από τον δεύτερο, γεγονός που εξαρτάται βέβαια από την τιμή του

$$SNR_{si} = \hat{P}_{si} / \hat{P}_n, \quad (6.186)$$

δηλ. του λόγου σήματος-προς-θόρυβο με τον οποίο εκπέμπεται το σήμα παρεμβολής από την αντίστοιχη πηγή. Παραβλέποντας, λοιπόν, προς στιγμή τον όρο  $(1/M) \hat{P}_n$ , είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι ο  $SNR_{DSB}$  έχει γενικά μεγαλύτερη (βελτιωμένη) τιμή σε σχέση μ' αυτή που θα είχε αν δεν υπήρχε ο μορφοποιητής, γεγονός όμως που εξαρτάται, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, από τη γωνία ανάμεσα στα  $\bar{v}_d$  και  $\bar{v}_i$ . Όταν η γωνία αυτή είναι μεγάλη, η (6.185) δείχνει μια σημαντική βελτίωση στην τιμή του  $SNR_{DSB}$ . Όμως, όταν η γωνία μειώνεται (δηλ. το  $\bar{v}_i$  τείνει να συμπίσει στο  $\bar{v}_d$ ), ο όρος  $(1/M^2) \bar{a}_d^H \bar{a}_i \bar{a}_i^H \bar{a}_d$  τείνει στη μονάδα, και τότε ο μορφοποιητής δεν επιφέρει πρακτικά κάποια βελτίωση στον  $SNR$ .

Θεωρώντας ότι δεν υπάρχει σήμα παρεμβολής αλλά μόνο το επιθυμητό σήμα, μπορούμε να υπολογίσουμε το λόγο σήματος-προς-θόρυβο στην έξοδο του συστήματος μορφοποίησης από την (6.185), θέτοντας  $\hat{P}_{si} = 0$ , οπότε παίρνουμε

$$SNR_{DSB} = \frac{\hat{P}_{yd}}{\hat{P}_{yn}} = \frac{\hat{P}_{sd}}{(1/M) \hat{P}_n} = M \frac{\hat{P}_{sd}}{\hat{P}_n} = M SNR_{sd}. \quad (6.187)$$

Η άνω σχέση φανερώνει ότι ο  $SNR_{DSB}$  έχει σαφώς βελτιωμένη τιμή σε σχέση με τον

$$SNR_{sd} = \hat{P}_{sd} / \hat{P}_n, \quad (6.188)$$

δηλ. του λόγου σήματος-προς-θόρυβο με τον οποίο εκπέμπεται το επιθυμητό σήμα από την αντίστοιχη πηγή. Μάλιστα, η βελτίωση είναι σημαντική δεδομένου ότι ο  $SNR_{DSB}$  προκύπτει με πολλαπλασιασμό του  $SNR_{sd}$  με τον αριθμό  $M$  των στοιχείων της στοιχειοκεραίας, γεγονός που με τη σειρά του σημαίνει ότι αυξάνοντας τον αριθμό των στοιχείων έχουμε γραμμική αύξηση στην τιμή του  $SNR_{DSB}$ . Άξιο παρατήρησης είναι επίσης το γεγονός ότι στη βελτίωση παίζει ρόλο μόνο ο αριθμός των στοιχείων και όχι η γεωμετρία της στοιχειοκεραίας.

Συμπερασματικά, ο συγκεκριμένος μορφοποιητής έχει ως μοναδικό στόχο να μεταφέρει στην έξοδό του το επιθυμητό εισερχόμενο σήμα αυτούσιο και χωρίς παραμόρφωση. Από κει και μετά, όλα τα υπόλοιπα είναι συνέπεια αυτού του στόχου. Αυτό σημαίνει ότι δεν λαμβάνει επιπλέον μέριμνα ώστε να ελαχιστοποιήσει στην έξοδό του την επίδραση των σημάτων παρεμβολής ή του θορύβου. Επίσης, θα πρέπει να τονιστεί το γεγονός ότι για τη λειτουργία του μορφοποιητή αυτού απαιτείται η γνώση της κατεύθυνσης άφιξης του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος. Αυτό συμβαίνει επειδή ο υπολογισμός του διανύσματος βαρών στηρίζεται στην εκ των προτέρων κατασκευή του  $\bar{a}_d$ . Συνεπώς, ο εν λόγω μορφοποιητής θα πρέπει να συνεργάζεται πάντα με κάποιον αλγόριθμο εκτίμησης κατευθύνσεων άφιξης (direction of arrival estimation algorithm, DoA estimation algorithm), ο οποίος θα τροφοδοτεί τον μορφοποιητή σε πραγματικό χρόνο.

#### 6.4 Μορφοποιητής οδήγησης μηδενισμών

Ο μορφοποιητής οδήγησης μηδενισμών (null-steering beamformer, NSB) έχει ως στόχο την ακύρωση των σημάτων παρεμβολής, που εισέρχονται από γνωστές κατευθύνσεις άφιξης, με τη παραγωγή διαγράμματος ακτινοβολίας στο οποίο έχουν δημιουργηθεί ισάριθμοι μηδενισμοί που αντιστοιχούν στις παραπάνω κατευθύνσεις. Επειδή με τον τρόπο αυτό μεγιστοποιείται ο *SIR*, ο συγκεκριμένος μορφοποιητής αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως *maximum SIR beamformer*. Το μπλοκ διάγραμμα του μορφοποιητή είναι όπως αυτό του σχήματος 6.3.

Έστω ότι στον μορφοποιητή εισέρχεται ένα επιθυμητό σήμα  $s_d$  με κατεύθυνση άφιξης που δηλώνεται είτε από το ζεύγος γωνιών  $(\varphi_d, \vartheta_d) = (\varphi_0, \vartheta_0)$  είτε από το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{v}_d = \vec{v}_0$  (που εκφράζεται από την (6.166)). Το διάνυσμα οδήγησης που αντιστοιχεί στο  $s_d$  περιγράφεται από την (6.167). Επιπλέον, στον μορφοποιητή εισέρχονται  $N$  σήματα παρεμβολής  $s_n$ ,  $n=1, \dots, N$ , με κατευθύνσεις άφιξης που δηλώνονται είτε από ζεύγη γωνιών  $(\varphi_n, \vartheta_n)$ ,  $n=1, \dots, N$  είτε από ακτινικά μοναδιαία διανύσματα της μορφής

$$\vec{v}_n = \cos \varphi_n \sin \vartheta_n \vec{x}_o + \sin \varphi_n \sin \vartheta_n \vec{y}_o + \cos \vartheta_n \vec{z}_o, \quad n=1, \dots, N. \quad (6.189)$$

Στα σήματα παρεμβολής αντιστοιχούν διανύσματα οδήγησης της μορφής

$$\bar{a}_n = \begin{bmatrix} \exp[j2\pi f_c \tau_1(\varphi_n, \vartheta_n)] \\ \exp[j2\pi f_c \tau_2(\varphi_n, \vartheta_n)] \\ \vdots \\ \exp[j2\pi f_c \tau_M(\varphi_n, \vartheta_n)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(j\beta \vec{r}_1 \cdot \vec{v}_n) \\ \exp(j\beta \vec{r}_2 \cdot \vec{v}_n) \\ \vdots \\ \exp(j\beta \vec{r}_M \cdot \vec{v}_n) \end{bmatrix}, \quad n=1, \dots, N. \quad (6.190)$$

Αν  $\bar{w}_{NSB}$  είναι το ζητούμενο διάνυσμα βαρών, η συνιστώσα εξόδου που οφείλεται στο  $s_d$ , σύμφωνα με την (6.148), θα είναι

$$y_d(k) = \bar{w}_{NSB}^H \bar{a}_d g_d(k), \quad (6.191)$$

όπου  $g_d$  η συνάρτηση διαμόρφωσης της πληροφορίας που μεταφέρει το  $s_d$ . Επειδή ζητούμε η  $g_d$  να φτάνει στην έξοδο χωρίς παραμόρφωση και με μοναδιαία ενίσχυση, δηλαδή

$$y_d(k) = g_d(k), \quad (6.192)$$

προκύπτει η απαίτηση

$$\bar{w}_{NSB}^H \bar{a}_d = 1. \quad (6.193)$$

Επιπλέον, η συνιστώσα εξόδου που οφείλεται στα  $s_n, n=1, \dots, N$ , σύμφωνα με την (6.150), θα είναι

$$y_i(k) = \bar{w}_{NSB}^H \bar{A}_i \bar{g}_i(k), \quad (6.194)$$

όπου  $\bar{g}_i$  το διάνυσμα διαμόρφωσης της πληροφορίας παρεμβολής (που ορίζεται από την (6.119)), και  $\bar{A}_i$  ο πίνακας οδήγησης των σημάτων παρεμβολής (που ορίζεται από την (6.120)). Επειδή ζητούμε, για οποιοδήποτε  $\bar{g}_i$ , η πληροφορία παρεμβολής να μην φτάνει στην έξοδο, δηλαδή

$$y_i(k) = 0, \quad (6.195)$$

δημιουργούνται  $N$  επιπρόσθετες απαιτήσεις που εκφράζονται μέσω της συνθήκης

$$\bar{w}_{NSB}^H \bar{A}_i = \overbrace{[0 \ \dots \ 0]}^{N \text{ στοιχεία}}. \quad (6.196)$$

Οι (6.193) και (6.196) μπορούν να συγχωνευτούν σε μια σχέση της μορφής

$$\bar{w}_{NSB}^H \begin{bmatrix} \bar{a}_d & \bar{A}_i \end{bmatrix} = \overbrace{[1 \ 0 \ \dots \ 0]}^{N+1 \text{ στοιχεία}}, \quad (6.197)$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{w}_{NSB}^H \bar{A} = \bar{e}_1^H, \quad (6.198)$$

όπου

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_d & \bar{A}_i \end{bmatrix} \quad (6.199)$$

είναι ο πίνακας οδήγησης όλων των εισερχόμενων σημάτων, που ορίστηκε από την (6.100), και

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left\{ N+1 \text{ στοιχεία} \right. \quad (6.200)$$

μοναδιαίο διάνυσμα ενός διανυσματικού χώρου  $N+1$  διαστάσεων. Παίρνοντας την ανάστροφη συζυγή μορφή και στα δυο μέλη της (6.198), θα έχουμε

$$\bar{A}^H \bar{w}_{NSB} = \bar{e}_1. \quad (6.201)$$

Πρακτικώς, η άνω σχέση εκφράζει ένα μη-ομογενές σύστημα  $N+1$  εξισώσεων με αγνώστους τα  $M$  μιγαδικά βάρη τροφοδοσίας των στοιχείων της στοιχειοκεραίας. Για την επίλυση του συστήματος αυτού θα πρέπει να ληφθούν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

### 1<sup>η</sup> περίπτωση: $M=N+1$

Η περίπτωση αυτή ισχύει όταν το πλήθος όλων των εισερχόμενων σημάτων ισούται με το πλήθος των στοιχείων της στοιχειοκεραίας. Τότε ο  $\bar{A}$  είναι τετραγωνικός πίνακας, γεγονός που ισχύει και για τον  $\bar{A}^H$ . Αν τα διανύσματα οδήγησης  $\bar{a}_n$ ,  $n=0,1,\dots,N$ , που συνθέτουν τον  $\bar{A}$ , είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους, τότε ο  $\bar{A}$  είναι αντιστρέψιμος, γεγονός που σημαίνει ότι και ο  $\bar{A}^H$  είναι αντιστρέψιμος. Τότε από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$\bar{w}_{NSB} = (\bar{A}^H)^{-1} \bar{e}_1 = (\bar{A}^{-1})^H \bar{e}_1. \quad (6.202)$$

Στην ουσία, λόγω της μορφής του  $\bar{e}_1$ , το ζητούμενο διάνυσμα βαρών είναι η πρώτη στήλη του  $(\bar{A}^H)^{-1}$  (ή ισοδύναμα του  $(\bar{A}^{-1})^H$ ).

Η περίπτωση αυτή είναι σπάνια στην πράξη, γιατί σχεδόν ποτέ δεν τυχαίνει να έχουμε πλήθος εισερχόμενων σημάτων ίσο με τον αριθμό των στοιχείων της στοιχειοκεραίας. Μπορούμε όμως, αν ισχύει  $M > N+1$ , να δημιουργήσουμε πλαστά εισερχόμενα σήματα,  $M - (N+1)$  σε πλήθος, που εισέρχονται από τυχαίες κατευθύνσεις άφιξης διαφορετικές απ' αυτές των  $N+1$  πραγματικών σημάτων, ώστε να έχουμε συνολικά πλήθος εισερχόμενων σημάτων ίσο με τον αριθμό των στοιχείων της στοιχειοκεραίας.

### 2<sup>η</sup> περίπτωση: $M < N+1$

Στην περίπτωση αυτή, τα εισερχόμενα σήματα είναι περισσότερα από το πλήθος των στοιχείων της στοιχειοκεραίας. Είναι προφανές πλέον ότι ο  $\bar{A}$  (άρα και ο  $\bar{A}^H$ ) δεν είναι τετραγωνικός, γεγονός που σημαίνει ότι δεν έχει αντίστροφο. Σε μια τέτοια περίπτωση υπάρχει μόνο ψευδο-αντίστροφος πίνακας (pseudo-inverse matrix ή Moore-Penrose inverse matrix). Ουσιαστικά, έχουμε γραμμικό σύστημα με πλήθος εξισώσεων μεγαλύτερο του πλήθους των αγνώστων. Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται υπερ-προσδιορισμένο (overdetermined) και δεν έχει ακριβή λύση. Μπορεί όμως να βρεθεί μια λύση που ικανοποιεί κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο όλες τις εξισώσεις. Αυτό σημαίνει ότι ζητούμε μια λύση, η οποία θα ελαχιστοποιεί ταυτόχρονα όλα τα στοιχεία του διανύσματος

$$\bar{\varepsilon} = \bar{e}_1 - \bar{A}^H \bar{w}_{NSB}. \quad (6.203)$$

Για το λόγο αυτό κατασκευάζουμε μια πραγματική συνάρτηση που αθροίζει τα τετράγωνα των μέτρων όλων των στοιχείων του άνω διανύσματος, δηλαδή

$$\|\bar{\varepsilon}\|^2 = \|\bar{e}_1 - \bar{A}^H \bar{w}_{NSB}\|^2, \quad (6.204)$$

και η ζητούμενη λύση θα είναι πλέον αυτή που ελαχιστοποιεί το  $\|\bar{\varepsilon}\|^2$ . Ουσιαστικά, πρόκειται για εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων (least squares method). Αναλύοντας την τελευταία σχέση, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \|\bar{\varepsilon}\|^2 &= (\bar{e}_1 - \bar{A}^H \bar{w}_{NSB})^H (\bar{e}_1 - \bar{A}^H \bar{w}_{NSB}) = (\bar{e}_1^H - \bar{w}_{NSB}^H \bar{A}) (\bar{e}_1 - \bar{A}^H \bar{w}_{NSB}) = \\ &= \bar{e}_1^H \bar{e}_1 - \bar{e}_1^H \bar{A}^H \bar{w}_{NSB} - \bar{w}_{NSB}^H \bar{A} \bar{e}_1 + \bar{w}_{NSB}^H \bar{A} \bar{A}^H \bar{w}_{NSB}. \end{aligned} \quad (6.205)$$

Θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι τα στάσιμα σημεία μιας βαθμωτής μιγαδικής συνάρτησης  $f(\bar{z}, \bar{z}^H)$ , με ορίσματα τα μιγαδικά διανύσματα  $\bar{z}$  και  $\bar{z}^H$ , προκύπτουν από την ταυτόχρονη ικανοποίηση των σχέσεων

$$\frac{\partial f(\bar{z}, \bar{z}^H)}{\partial \bar{z}} = \bar{0} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f(\bar{z}, \bar{z}^H)}{\partial \bar{z}^H} = \bar{0}. \quad (6.206)$$

Αν όμως πρόκειται για βαθμωτή πραγματική συνάρτηση  $f(\bar{z}, \bar{z}^H)$ , οι δυο άνω σχέσεις είναι ισοδύναμες (δηλ. η μια συνεπάγεται την άλλη), οπότε η ταυτόχρονη ικανοποίηση και των δυο σχέσεων είναι πλεονασμός. Τότε τα στάσιμα σημεία προκύπτουν από την ικανοποίηση μιας μόνο εκ των δυο σχέσεων. Πιο κάτω, λοιπόν, για τον υπολογισμό των στάσιμων σημείων μιας βαθμωτής πραγματικής συνάρτησης θα χρησιμοποιείται η σχέση

$$\frac{\partial f(\bar{z}, \bar{z}^H)}{\partial \bar{z}^H} = \bar{0}. \quad (6.207)$$

Με δεδομένο ότι η συνάρτηση  $\|\bar{\epsilon}\|^2$  είναι πραγματική, με ορίσματα τα μιγαδικά διανύσματα  $\bar{w}_{NSB}$  και  $\bar{w}_{NSB}^H$ , τα στάσιμα σημεία αυτής θα υπολογιστούν με εφαρμογή της (6.207) στην (6.205), οπότε παίρνουμε

$$\frac{\partial(\|\bar{\epsilon}\|^2)}{\partial \bar{w}_{NSB}^H} = -\bar{A} \bar{e}_1 + \bar{A} \bar{A}^H \bar{w}_{NSB} = \bar{0}. \quad (6.208)$$

Να σημειωθεί ότι η άνω παραγωγή έγινε ακολουθώντας διάταξη αριθμητή (numerator layout) και ότι χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες παραγωγής

$$\frac{\partial(\bar{z}^H \bar{a})}{\partial \bar{z}^H} = \bar{a} \quad (6.209)$$

και

$$\frac{\partial(\bar{z}^H \bar{M} \bar{z})}{\partial \bar{z}^H} = \bar{M} \bar{z}, \quad (6.210)$$

όπου  $\bar{a}$  και  $\bar{z}$  διανύσματα στήλης και  $\bar{M}$  πίνακας, και επιπλέον  $\bar{a}$  και  $\bar{M}$  ανεξάρτητα του  $\bar{z}$ . Λύνοντας την (6.208) ως προς  $\bar{w}_{NSB}$ , παίρνουμε

$$\bar{A} \bar{A}^H \bar{w}_{NSB} = \bar{A} \bar{e}_1,$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{w}_{NSB} = (\bar{A} \bar{A}^H)^{-1} \bar{A} \bar{e}_1. \quad (6.211)$$

Η τελευταία σχέση υποδεικνύει ένα στάσιμο σημείο για τη συνάρτηση  $\|\bar{\epsilon}\|^2$ . Επειδή όμως πρόκειται για θετική συνάρτηση και συνεπώς η μέγιστη τιμή της απειρίζεται, το ένα και



μοναδικό στάσιμο σημείο θα είναι τοπικό και ολικό ελάχιστο της συνάρτησης. Ουσιαστικά, ο πίνακας  $(\bar{A}\bar{A}^H)^{-1}\bar{A}$  είναι ο ψευδο-αντίστροφος του  $\bar{A}^H$  για την περίπτωση όπου  $M < N+1$ .

Η περίπτωση αυτή δεν χρησιμοποιείται στην πράξη, επειδή ουσιαστικά δεν πετυχαίνουμε με ακρίβεια το στόχο (δηλ. δεν ικανοποιούμε ακριβώς τη συνθήκη (6.201)), αλλά τον προσεγγίζουμε.

### 3<sup>η</sup> περίπτωση: $M > N+1$

Στην περίπτωση αυτή, τα εισερχόμενα σήματα είναι λιγότερα από το πλήθος των στοιχείων της στοιχειοκεραίας. Είναι προφανές και πάλι ότι ο  $\bar{A}$  (άρα και ο  $\bar{A}^H$ ) δεν είναι τετραγωνικός, γεγονός που σημαίνει ότι δεν έχει αντίστροφο, αλλά μόνο ψευδο-αντίστροφο. Ουσιαστικά, έχουμε γραμμικό σύστημα με πλήθος αγνώστων μεγαλύτερο του πλήθους των εξισώσεων. Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται υπο-προσδιορισμένο (underdetermined) και έχει άπειρες λύσεις. Μπορεί, λοιπόν, να βρεθεί ένα διάνυσμα βαρών που ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις και έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο. Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι ζητούμε την ελάχιστη τιμή του  $\|\bar{w}_{NSB}\|^2$ , υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η (6.201). Αυτό επιτυγχάνεται με εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange. Θα πρέπει λοιπόν να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση, η οποία θα περιέχει τον περιορισμό που εκφράζεται μέσω της (6.201). Η συνάρτηση αυτή, όμως, θα πρέπει να είναι πραγματική, οπότε της δίνουμε τη μορφή

$$\Phi(\bar{w}_{NSB}, \bar{w}_{NSB}^H, \bar{\lambda}) = \|\bar{w}_{NSB}\|^2 + \bar{\lambda}^H (\bar{e}_1 - \bar{A}^H \bar{w}_{NSB}) + [\bar{\lambda}^H (\bar{e}_1 - \bar{A}^H \bar{w}_{NSB})]^H, \quad (6.212)$$

όπου  $\bar{\lambda}$  είναι διάνυσμα στήλης με στοιχεία πολλαπλασιαστές Lagrange,  $N+1$  σε πλήθος. Αναλύοντας την  $\Phi(\bar{w}_{NSB}, \bar{w}_{NSB}^H, \bar{\lambda})$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{w}_{NSB}, \bar{w}_{NSB}^H, \bar{\lambda}) &= \|\bar{w}_{NSB}\|^2 + \bar{\lambda}^H (\bar{e}_1 - \bar{A}^H \bar{w}_{NSB}) + (\bar{e}_1^H - \bar{w}_{NSB}^H \bar{A}) \bar{\lambda} = \\ &= \bar{w}_{NSB}^H \bar{w}_{NSB} + \bar{\lambda}^H \bar{e}_1 - \bar{\lambda}^H \bar{A}^H \bar{w}_{NSB} + \bar{e}_1^H \bar{\lambda} - \bar{w}_{NSB}^H \bar{A} \bar{\lambda}. \end{aligned} \quad (6.213)$$

Εφαρμόζοντας την (6.207) στην άνω έκφραση, παίρνουμε

$$\frac{\partial [\Phi(\bar{w}_{NSB}, \bar{w}_{NSB}^H, \bar{\lambda})]}{\partial \bar{w}_{NSB}^H} = \bar{w}_{NSB} - \bar{A} \bar{\lambda} = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{w}_{NSB} = \bar{A} \bar{\lambda}. \quad (6.214)$$

Να σημειωθεί ότι η άνω παραγωγή έγινε ακολουθώντας και πάλι διάταξη αριθμητή, και επίσης ότι χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα παραγωγίσης που ορίστηκε στην (6.209) καθώς και η ιδιότητα

$$\frac{\partial (\bar{z}^H \bar{z})}{\partial \bar{z}^H} = \bar{z}. \quad (6.215)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (6.214) με  $\bar{A}^H$ , παίρνουμε

$$\bar{A}^H \bar{w}_{NSB} = \bar{A}^H \bar{A} \bar{\lambda}, \quad (6.216)$$

η οποία, λόγω της (6.201), γίνεται

$$\bar{e}_1 = \bar{A}^H \bar{A} \bar{\lambda}. \quad (6.217)$$

Με τον τρόπο αυτό έχουμε υπολογίσει την τιμή των πολλαπλασιαστών Lagrange, που δίνεται από την έκφραση

$$\bar{\lambda} = (\bar{A}^H \bar{A})^{-1} \bar{e}_1. \quad (6.218)$$

Τελικά, αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (6.214), υπολογίζουμε το ζητούμενο διάνυσμα βαρών ίσο με

$$\bar{w}_{NSB} = \bar{A} (\bar{A}^H \bar{A})^{-1} \bar{e}_1. \quad (6.219)$$

Ουσιαστικά, ο πίνακας  $\bar{A} (\bar{A}^H \bar{A})^{-1}$  είναι ο ψευδο-αντίστροφος του  $\bar{A}^H$  για την περίπτωση όπου  $M > N+1$ .

Ο υπολογισμός του διανύσματος βαρών από την (6.219) βασίζεται στην αντιστροφή του πίνακα  $\bar{A}^H \bar{A}$ , ο οποίος ως τετραγωνικός μπορεί θεωρητικά να αντιστραφεί, αλλά μπορεί τελικά να προκύψει ιδιάζων (singular), δηλαδή  $\det(\bar{A}^H \bar{A}) = 0$ , ή κακώς ορισμένος (ill-conditioned), δηλαδή κάποια ή κάποιες από τις ιδιοτιμές του είναι πολύ κοντά στο μηδέν οπότε  $\det(\bar{A}^H \bar{A}) \approx 0$ . Ο ιδιάζων πίνακας δεν αντιστρέφεται και ο κακώς ορισμένος, λόγω ακρίβειας των πράξεων, μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλες αποκλίσεις από τη σωστή λύση. Για να βελτιώσουμε την κατάσταση, προσθέτουμε έναν μικρό όρο στα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα  $\bar{A}^H \bar{A}$ , με αποτέλεσμα οι ιδιοτιμές του να αυξηθούν κατά την τιμή του όρου αυτού και συνεπώς να απέχουν σημαντικά από το μηδέν, αφήνοντας συγχρόνως τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα αμετάβλητα. Ο μικρός αυτός όρος που προστίθεται στα στοιχεία της διαγωνίου του  $\bar{A}^H \bar{A}$  είναι η μέση ισχύς  $\hat{P}_n$  του θορύβου ( $\hat{P}_n = \sigma^2$  λόγω της (6.46)). Τότε, αντί της (6.219) χρησιμοποιείται η έκφραση

$$\bar{w}_{NSB} = \bar{A} (\bar{A}^H \bar{A} + \hat{P}_n \bar{I})^{-1} \bar{e}_1 = \bar{A} (\bar{A}^H \bar{A} + \sigma^2 \bar{I})^{-1} \bar{e}_1. \quad (6.220)$$

Οι ιδιοτιμές του  $\bar{A}^H \bar{A} + \sigma^2 \bar{I}$  είναι οι ιδιοτιμές του  $\bar{A}^H \bar{A}$  προσαυξημένες κατά  $\sigma^2$ , οπότε η  $\det(\bar{A}^H \bar{A} + \sigma^2 \bar{I})$  απέχει σαφώς από το μηδέν. Τότε ο αντίστροφος πίνακας  $(\bar{A}^H \bar{A} + \sigma^2 \bar{I})^{-1}$  υπολογίζεται με πολύ καλή ακρίβεια. Η διαδικασία αυτή πρόσθεσης μικρού όρου στα διαγώνια στοιχεία ενός ιδιάζοντος ή κακώς ορισμένου πίνακα εντοπίζεται στη βιβλιογραφία με τις ονομασίες *ομαλοποίηση* (regularization) ή διαγώνια φόρτωση (diagonal loading) πίνακα. Το σφάλμα υπολογισμού του  $\bar{w}_{NSB}$  λόγω της ομαλοποίησης είναι αρκετά μικρότερο από το σφάλμα που εισάγει η αντιστροφή κακώς ορισμένου πίνακα. Επιπλέον, είναι δυνατός ο υπολογισμός του  $\bar{w}_{NSB}$  ακόμη και στην περίπτωση που ο  $\bar{A}^H \bar{A}$  είναι ιδιάζων.

Παράδειγμα εφαρμογής της 3<sup>ης</sup> περίπτωσης:

Μορφοποιητής τύπου NSB χρησιμοποιεί στοιχειοκεραία 5 ιστροπικών στοιχείων ( $M=5$ ) που διατάσσονται στον  $z$ -άξονα του συστήματος συντεταγμένων και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d=\lambda/2$ . Στον μορφοποιητή εισέρχονται ένα επιθυμητό σήμα ( $n=0$ ) με γωνία άφιξης  $\vartheta_0=90^\circ$  και δυο σήματα παρεμβολής ( $N=2$ ) με αντίστοιχες γωνίες άφιξης  $\vartheta_1=65^\circ$  και  $\vartheta_2=105^\circ$ . Η μέτρηση των γωνιών γίνεται ως προς τον  $z$ -άξονα, δηλ. είναι γωνίες ανύψωσης (elevation angles). Αν η ισχύς θορύβου είναι  $\hat{P}_n=0.001$ , να υπολογιστεί το διάνυμα βαρών τροφοδοσίας και να σχεδιαστεί το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας.

Λύση:

Με τη βοήθεια της (6.81), τα μοναδιαία διανύσματα που καταδεικνύουν τις κατευθύνσεις άφιξης των τριών σημάτων θα είναι

$$\vec{v}_n = \cos \varphi_n \sin \vartheta_n \vec{x}_o + \sin \varphi_n \sin \vartheta_n \vec{y}_o + \cos \vartheta_n \vec{z}_o, \quad n=0,1,2. \quad (6.221)$$

Από την (6.83) και για  $d=\lambda/2$  προκύπτει

$$\vec{r}_1 = 0 \vec{z}_o, \quad \vec{r}_2 = \frac{\lambda}{2} \vec{z}_o, \quad \vec{r}_3 = \lambda \vec{z}_o, \quad \vec{r}_4 = \frac{3\lambda}{2} \vec{z}_o \quad \text{και} \quad \vec{r}_5 = 2\lambda \vec{z}_o. \quad (6.222)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.221) και (6.222) στην (6.100), παίρνουμε τον πίνακα οδήγησης για την περίπτωση που αντιμετωπίζουμε ίσο με

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \exp(j\pi \cos \vartheta_0) & \exp(j\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j\pi \cos \vartheta_2) \\ \exp(j2\pi \cos \vartheta_0) & \exp(j2\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j2\pi \cos \vartheta_2) \\ \exp(j3\pi \cos \vartheta_0) & \exp(j3\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j3\pi \cos \vartheta_2) \\ \exp(j4\pi \cos \vartheta_0) & \exp(j4\pi \cos \vartheta_1) & \exp(j4\pi \cos \vartheta_2) \end{bmatrix}. \quad (6.223)$$

Ο άνω πίνακας οδήγησης, για τις τιμές των γωνιών άφιξης  $\vartheta_0=90^\circ$ ,  $\vartheta_1=65^\circ$  και  $\vartheta_2=105^\circ$ , παίρνει τη μορφή

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \exp(j\pi \cos 65^\circ) & \exp(j\pi \cos 105^\circ) \\ 1 & \exp(j2\pi \cos 65^\circ) & \exp(j2\pi \cos 105^\circ) \\ 1 & \exp(j3\pi \cos 65^\circ) & \exp(j3\pi \cos 105^\circ) \\ 1 & \exp(j4\pi \cos 65^\circ) & \exp(j4\pi \cos 105^\circ) \end{bmatrix}. \quad (6.224)$$

Η εφαρμογή της (6.219), όπου

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.225)$$

μπορεί να δώσει αποτέλεσμα, επειδή  $|\bar{A}^H \bar{A}| = 95.9727 \neq 0$  και συνεπώς ο πίνακας  $\bar{A}^H \bar{A}$  είναι αντιστρέψιμος. Έτσι, λοιπόν, παίρνουμε:

$$\bar{\mathbf{w}}_{NSB} = \begin{bmatrix} 0.2640 - j0.1119 \\ 0.1710 - j0.0773 \\ 0.1299 \\ 0.1710 + j0.0773 \\ 0.2640 + j0.1119 \end{bmatrix}. \quad (6.226)$$

Να σημειωθεί ότι η εφαρμογή της (6.220), όπου λαμβάνεται υπόψη και η ισχύς του θορύβου, θα οδηγούσε σε αποτέλεσμα

$$\bar{\mathbf{w}}_{NSB} = \begin{bmatrix} 0.2639 - j0.1119 \\ 0.1710 - j0.0772 \\ 0.1299 \\ 0.1710 + j0.0772 \\ 0.2639 + j0.1119 \end{bmatrix}, \quad (6.227)$$

το οποίο αποκλίνει πολύ λίγο απ' αυτό που φαίνεται στην (6.226). Τέλος, αφού τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας είναι ιστροπικές πηγές, το διάγραμμα ακτινοβολίας είναι στην ουσία το μέτρο του παράγοντα διάταξης (array factor) της στοιχειοκεραίας, ο οποίος είναι

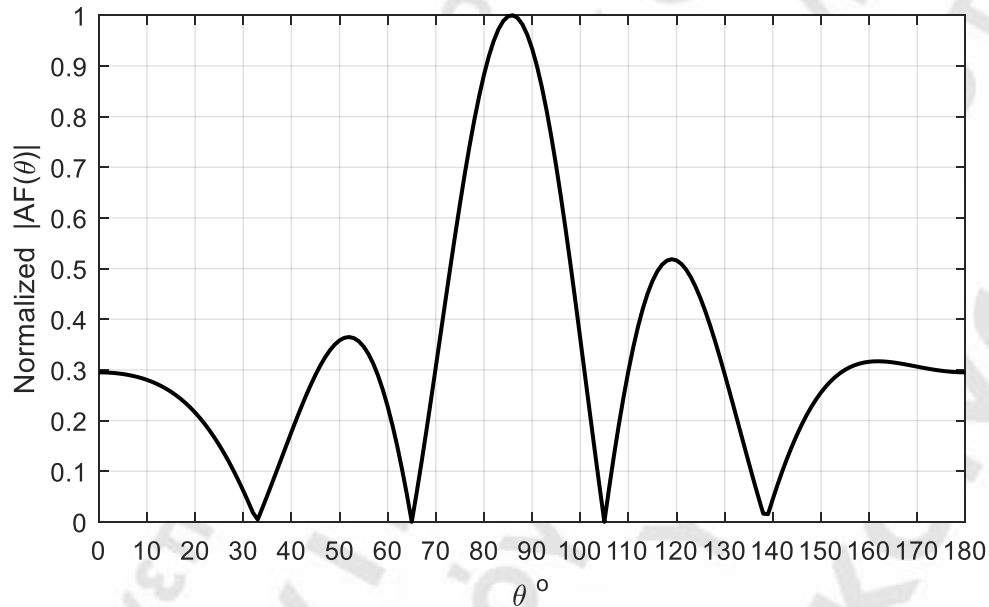
$$AF(\vartheta) = \bar{\mathbf{w}}_{NSB}^H \bar{\mathbf{a}}(\vartheta), \quad (6.228)$$

όπου

$$\bar{\mathbf{a}}(\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\pi \cos \vartheta) \\ \exp(j2\pi \cos \vartheta) \\ \exp(j3\pi \cos \vartheta) \\ \exp(j4\pi \cos \vartheta) \end{bmatrix} \quad (6.229)$$

είναι το διάνυσμα οδήγησης που αντιστοιχεί στην τυχαία γωνία παρατήρησης  $\vartheta$ . Επίσης να σημειωθεί ότι, επειδή στον μορφοποιητή τα σήματα εισόδου πολλαπλασιάζονται με τη συζυγή τιμή των βαρών τροφοδοσίας, στον υπολογισμό του παράγοντα διάταξης (σχέση (6.228)) χρησιμοποιείται επίσης η συζυγή τιμή των βαρών και όχι τα ίδια τα βάρη. Διαιρώντας το μέτρο του παράγοντα διάταξης με τη μέγιστη τιμή αυτού, παίρνουμε το κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας, που είναι στην ουσία το κανονικοποιημένο μέτρο του παράγοντα διάταξης, και το οποίο φαίνεται στο σχήμα 6.6. Παρατηρούμε ότι ο μορφοποιητής πετυχαίνει να δημιουργήσει δυο μηδενισμούς αντιστοίχως στις κατευθύνσεις άφιξης των δυο σημάτων παρεμβολής. Εντούτοις, δεν καταφέρνει να βρει ακριβώς την κατεύθυνση του επιθυμητού σήματος. Όπως φαίνεται το μέγιστο του διαγράμματος εμφανίζεται σε γωνία  $\vartheta=86^\circ$ , γεγονός που σημαίνει ότι έχουμε απόκλιση  $4^\circ$  από την επιθυμητή κατεύθυνση ( $\vartheta_0=90^\circ$ ). Παρόλα αυτά, για  $\vartheta=90^\circ$  η τιμή του κανονικοποιημένου παράγοντα διάταξης είναι 0.934, γεγονός που σημαίνει ότι τελικά το σφάλμα στην κατεύθυνση του επιθυμητού σήματος δεν είναι και τόσο κρίσιμο. Γενικά θα πρέπει να έχουμε υπόψη, ότι οι τεχνικές μορφοποίησης χωλαίνουν ως προς την σωστή τοποθέτηση του κύριου λοβού. Αυτό οφείλεται κατά κάποιο τρόπο στο ότι η κλίση του διαγράμματος ακτινοβολίας γύρω από την κορυφή του κύριου λοβού δεν είναι μεγάλη

(δηλ. αντίθετα από τους μηδενισμούς γύρω από τους οποίους η κλίση είναι πολύ μεγάλη). Συνεπώς, ο αλγόριθμος, στην προσπάθειά του να ικανοποιήσει κάποιο κριτήριο που αντιστοιχεί στο επιθυμητό σήμα, μπορεί να εισάγει ένα μικρό σφάλμα ως προς την εύρεση της κορυφής του κύριου λοβού.



**Σχήμα 6.6** Κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας στοιχειοκεραίας πέντε ισαπεχόντων ιστροπικών στοιχείων, με μηδενισμούς στις γωνίες  $\theta_1=65^\circ$  και  $\theta_2=105^\circ$ .

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι ο συγκεκριμένος μορφοποιητής είναι πιο αποδοτικός από τον συμβατικό (DSB) μορφοποιητή δέσμης. Ωστόσο, έχει δυο βασικά μειονεκτήματα:

(α) Απαιτεί γνώση του πλήθους των εισερχομένων σημάτων, καθώς και των κατευθύνσεων άφιξης αυτών. Αυτό συμβαίνει επειδή, και στις τρεις περιπτώσεις που εξετάσαμε πιο πάνω, ο υπολογισμός του διανύσματος βαρών στηρίζεται στην εκ των προτέρων κατασκευή του πίνακα  $\bar{A}$  που απαιτεί τη γνώση των κατευθύνσεων άφιξης όλων των εισερχόμενων σημάτων. Συνεπώς, ο εν λόγω μορφοποιητής θα πρέπει να συνεργάζεται πάντα με κάποιον αλγόριθμο εκτίμησης των κατευθύνσεων άφιξης, ο οποίος θα τροφοδοτεί τον μορφοποιητή σε πραγματικό χρόνο.

(β) Δεν λήφθηκε υπόψη η μείωση του θορύβου στην έξοδο του μορφοποιητή, γεγονός που σημαίνει ότι μεγιστοποιεί τον  $SIR$ , αλλά όχι τον  $SINR$ .

### **6.5 Μορφοποιητής μεγιστοποίησης $SINR$**

Από την ονομασία του (maximum  $SINR$  beamformer) καταλαβαίνουμε ότι ο μορφοποιητής αυτός έχει ως στόχο τη μεγιστοποίηση του  $SINR$ . Το μπλοκ διάγραμμα του

μορφοποιητή είναι και πάλι όπως αυτό του σχήματος 6.3. Στην παρακάτω ανάλυση γίνεται η υπόθεση ότι το επιθυμητό εισερχόμενο σήμα δεν συσχετίζεται ούτε με τα σήματα παρεμβολής αλλά ούτε και με τα σήματα θορύβου. Από την (6.79) προκύπτει

$$\bar{w}^H \bar{R}_{dd} \bar{w} = SINR \bar{w}^H \bar{R}_{uu} \bar{w} ,$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{w}^H (\bar{R}_{dd} \bar{w} - SINR \bar{R}_{uu} \bar{w}) = 0 . \quad (6.230)$$

Επειδή γενικά ισχύει  $\bar{w} \neq 0$  , που σημαίνει ότι ισχύει επίσης  $\bar{w}^H \neq 0$  , η τελευταία σχέση δίνει

$$\bar{R}_{dd} \bar{w} - SINR \bar{R}_{uu} \bar{w} = \bar{0} \quad \text{ή} \quad \bar{R}_{dd} \bar{w} = SINR \bar{R}_{uu} \bar{w} ,$$

ή ισοδύναμα

$$(\bar{R}_{uu}^{-1} \bar{R}_{dd}) \bar{w} = SINR \bar{w} . \quad (6.231)$$

Η τελευταία σχέση είναι της μορφής

$$\bar{M} \bar{x} = \lambda \bar{x} , \quad (6.232)$$

όπου  $\lambda$  ιδιοτιμή του πίνακα  $\bar{M}$  και  $\bar{x}$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Συνεπώς, στην (6.231) ο  $SINR$  αποτελεί ιδιοτιμή του πίνακα  $\bar{R}_{uu}^{-1} \bar{R}_{dd}$  και το  $\bar{w}$  είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Εφόσον μας ενδιαφέρει η μεγιστοποίηση του  $SINR$ , βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $\bar{R}_{uu}^{-1} \bar{R}_{dd}$  και επιλέγουμε τη μεγαλύτερη εξ αυτών, η οποία θα εκφράζει τον μέγιστο  $SINR$  ( $SINR_{max}$ ). Λογικά, το ζητούμενο διάνυσμα βαρών  $\bar{w}_{opt}$  που μεγιστοποιεί τον  $SINR$  θα είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή του  $\bar{R}_{uu}^{-1} \bar{R}_{dd}$  . Δηλαδή θα ισχύει

$$(\bar{R}_{uu}^{-1} \bar{R}_{dd}) \bar{w}_{opt} = SINR_{max} \bar{w}_{opt} . \quad (6.233)$$

Ο μορφοποιητής αυτός έχει ένα πλεονέκτημα και ένα μειονέκτημα σε σχέση με τους προηγούμενους: Το πλεονέκτημα είναι ότι δεν απαιτεί τη γνώση των κατευθύνσεων άφιξης των εισερχόμενων σημάτων. Το μειονέκτημα είναι ότι απαιτεί τον υπολογισμό δυο πινάκων συσχέτισης, των  $\bar{R}_{dd}$  και  $\bar{R}_{uu}$  , που αντιστοιχούν στις συνιστώσες  $x_{dm}$  και  $x_{um}(k)$  των σημάτων εισόδου  $x_m(k)$ ,  $m=1,...,M$ . Το πρόβλημα στον υπολογισμό των πινάκων αυτών είναι ότι ο μορφοποιητής δεν μπορεί να ξεχωρίσει τις δυο αυτές συνιστώσες μέσα από κάθε σήμα εισόδου. Μια λύση στο πρόβλημα αυτό είναι να αναδιαμορφώσουμε την τελευταία σχέση ώστε να εμφανίζεται ο πίνακας συσχέτισης των σημάτων εισόδου, δηλ. ο  $\bar{R}_{xx}$  . Για το λόγο αυτό, ξαναγράφουμε την (6.79) με τη μορφή

$$SINR = \frac{\bar{w}^H \bar{R}_{dd} \bar{w}}{\bar{w}^H \bar{R}_{uu} \bar{w}} = \frac{\bar{w}^H (\bar{R}_{xx} - \bar{R}_{uu}) \bar{w}}{\bar{w}^H \bar{R}_{uu} \bar{w}} = \frac{\bar{w}^H \bar{R}_{xx} \bar{w}}{\bar{w}^H \bar{R}_{uu} \bar{w}} - 1 ,$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{w}^H \bar{R}_{xx} \bar{w} = \bar{w}^H (SINR + 1) \bar{R}_{uu} \bar{w} ,$$

και τελικά

$$\bar{\mathbf{w}}^H [\bar{\mathbf{R}}_{xx} \bar{\mathbf{w}} - (SINR + 1) \bar{\mathbf{R}}_{uu} \bar{\mathbf{w}}] = 0. \quad (6.234)$$

Επειδή και πάλι ισχύει  $\bar{\mathbf{w}} \neq 0$ , άρα ισχύει και  $\bar{\mathbf{w}}^H \neq 0$ , η τελευταία σχέση δίνει

$$\bar{\mathbf{R}}_{xx} \bar{\mathbf{w}} - (SINR + 1) \bar{\mathbf{R}}_{uu} \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{0}} \quad \text{ή} \quad \bar{\mathbf{R}}_{xx} \bar{\mathbf{w}} = (SINR + 1) \bar{\mathbf{R}}_{uu} \bar{\mathbf{w}},$$

και τελικά

$$(\bar{\mathbf{R}}_{uu}^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{xx}) \bar{\mathbf{w}} = (SINR + 1) \bar{\mathbf{w}}. \quad (6.235)$$

Συνεπώς, στην άνω σχέση η ποσότητα  $SINR+1$  αποτελεί ιδιοτιμή του πίνακα  $\bar{\mathbf{R}}_{uu}^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{xx}$  και το  $\bar{\mathbf{w}}$  είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Εφόσον μας ενδιαφέρει η μεγιστοποίηση του  $SINR$ , βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $\bar{\mathbf{R}}_{uu}^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{xx}$  και επιλέγουμε τη μεγαλύτερη εξ αυτών, η οποία θα είναι  $\lambda_{\max} = SINR_{\max} + 1$ . Λογικά, το ζητούμενο διάνυσμα βαρών  $\bar{\mathbf{w}}_{opt}$  που μεγιστοποιεί τον  $SINR$  θα είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή του  $\bar{\mathbf{R}}_{uu}^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{xx}$ . Δηλαδή θα ισχύει

$$(\bar{\mathbf{R}}_{uu}^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{xx}) \bar{\mathbf{w}}_{opt} = (SINR_{\max} + 1) \bar{\mathbf{w}}_{opt}. \quad (6.236)$$

Ο πίνακας  $\bar{\mathbf{R}}_{xx}$  κατασκευάζεται πολύ εύκολα από τα σήματα εισόδου  $x_m(k)$ ,  $m=1, \dots, M$ . Φυσικά, το πρόβλημα υπολογισμού του  $\bar{\mathbf{R}}_{uu}$  παραμένει, αλλά ο  $\bar{\mathbf{R}}_{uu}$  μπορεί να υπολογιστεί με σχετικά καλή ακρίβεια με την εφαρμογή ειδικών διαδικασιών ανάλογα με την περίπτωση.

*Παράδειγμα εφαρμογής:*

Μορφοποιητής μεγιστοποίησης  $SINR$  χρησιμοποιεί στοιχειοκεραία 5 ισοτροπικών στοιχείων ( $M=5$ ) που διατάσσονται στον  $z$ -άξονα του συστήματος συντεταγμένων και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d=\lambda/2$ . Στον μορφοποιητή εισέρχονται ένα επιθυμητό σήμα ( $n=0$ ) με γωνία άφιξης  $\theta_0=60^\circ$  και δυο σήματα παρεμβολής ( $N=2$ ) με αντίστοιχες γωνίες άφιξης  $\theta_1=45^\circ$  και  $\theta_2=120^\circ$ . Η μέτρηση των γωνιών γίνεται ως προς τον  $z$ -άξονα, δηλ. είναι γωνίες ανύψωσης (elevation angles). Αν η ισχύς θορύβου είναι  $\hat{P}_n = 0.001$ , να υπολογιστεί το διάνυσμα βαρών τροφοδοσίας και να σχεδιαστεί το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας.

*Λύση:*

Οι πίνακες  $\bar{\mathbf{R}}_{xx}$  και  $\bar{\mathbf{R}}_{uu}$  κατασκευάζονται από δειγματοληψία των σημάτων εισόδου σε πραγματικό χρόνο, όπως έχει ήδη περιγραφεί στην παράγραφο 6.1. Εφόσον δεν έχουμε στη διάθεσή μας τέτοια δεδομένα, θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε θεωρητικά τους πίνακες αυτούς. Τα μοναδιαία διανύσματα που καταδεικνύουν τις κατευθύνσεις άφιξης των τριών σημάτων δίνονται και πάλι από την (6.221), ενώ τα διανύσματα θέσης των 5 ισοτροπικών στοιχείων εκφράζονται από την (6.222). Συνεπώς, με τον ίδιο τρόπο όπως στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, ο πίνακας οδήγησης των εισερχόμενων σημάτων θα εκφράζεται από την (6.223). Ο πίνακας αυτός, για τις τιμές των γωνιών άφιξης  $\theta_0=60^\circ$ ,  $\theta_1=45^\circ$  και  $\theta_2=120^\circ$ , παίρνει τη μορφή

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \exp(j\pi \cos 60^\circ) & \exp(j\pi \cos 45^\circ) & \exp(j\pi \cos 120^\circ) \\ \exp(j2\pi \cos 60^\circ) & \exp(j2\pi \cos 45^\circ) & \exp(j2\pi \cos 120^\circ) \\ \exp(j3\pi \cos 60^\circ) & \exp(j3\pi \cos 45^\circ) & \exp(j3\pi \cos 120^\circ) \\ \exp(j4\pi \cos 60^\circ) & \exp(j4\pi \cos 45^\circ) & \exp(j4\pi \cos 120^\circ) \end{bmatrix}. \quad (6.237)$$

Θεωρώντας ότι κάθε εισερχόμενο σήμα έχει ισχύ 1W και ότι δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ δυο οποιωνδήποτε από τα τρία εισερχόμενα σήματα, θα ισχύει

$$\bar{R}_{gg} = \bar{I}_{3 \times 3}. \quad (6.238)$$

Επίσης, από την (6.44) παίρνουμε

$$\bar{R}_{nn} = 0.001 \bar{I}_{5 \times 5}. \quad (6.239)$$

Θεωρώντας ακόμη ότι δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος και σήματος θορύβου, αντικαθιστούμε τις (6.237), (6.238) και (6.239) στην (6.109), οπότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \bar{R}_{xx} &= \bar{A} \bar{R}_{gg} \bar{A}^H + \bar{R}_{nn} = \\ &= \begin{bmatrix} 3.001 & -0.606 - j0.796 & -2.266 + j0.964 & 0.928 - j0.372 & 1.142 - j0.513 \\ -0.606 + j0.796 & 3.001 & -0.606 - j0.796 & -2.266 + j0.964 & 0.928 - j0.372 \\ -2.266 - j0.964 & -0.606 + j0.796 & 3.001 & -0.606 - j0.796 & -2.266 + j0.964 \\ 0.928 + j0.372 & -2.266 - j0.964 & -0.606 + j0.796 & 3.001 & -0.606 - j0.796 \\ 1.142 + j0.513 & 0.928 + j0.372 & -2.266 - j0.964 & -0.606 + j0.796 & 3.001 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.240)$$

Αφαιρώντας από τον πίνακα της (6.237) την πρώτη (αριστερή) στήλη, παίρνουμε τον πίνακα οδήγησης των σημάτων παρεμβολής ίσο με

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp(j\pi \cos 45^\circ) & \exp(j\pi \cos 120^\circ) \\ \exp(j2\pi \cos 45^\circ) & \exp(j2\pi \cos 120^\circ) \\ \exp(j3\pi \cos 45^\circ) & \exp(j3\pi \cos 120^\circ) \\ \exp(j4\pi \cos 45^\circ) & \exp(j4\pi \cos 120^\circ) \end{bmatrix}. \quad (6.241)$$

Λόγω των άνω θεωρήσεων ότι κάθε εισερχόμενο σήμα έχει ισχύ 1W και ότι δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ δυο οποιωνδήποτε εισερχόμενων σημάτων, άρα και μεταξύ των δυο σημάτων παρεμβολής, θα ισχύει

$$\bar{R}_{gigi} = \bar{I}_{2 \times 2}. \quad (6.242)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.239), (6.241) και (6.242) στην (6.134), βρίσκουμε



$$\bar{R}_{uu} = \bar{A}_i \bar{R}_{gigi} \bar{A}_i^H + \bar{R}_{nn} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2.001 & -0.606 + j0.204 & -1.266 + j0.964 & 0.928 - j1.372 & 0.142 - j0.513 \\ -0.606 - j0.204 & 2.001 & -0.606 + j0.204 & -1.266 + j0.964 & 0.928 - j1.372 \\ -1.266 - j0.964 & -0.606 - j0.204 & 2.001 & -0.606 + j0.204 & -1.266 + j0.964 \\ 0.928 + j1.372 & -1.266 - j0.964 & -0.606 - j0.204 & 2.001 & -0.606 + j0.204 \\ 0.142 + j0.513 & 0.928 + j1.372 & -1.266 - j0.964 & -0.606 - j0.204 & 2.001 \end{bmatrix}. \quad (6.243)$$

Από τις (6.240) και (6.243) κατασκευάζουμε τον πίνακα  $\bar{R}_{uu}^{-1} \bar{R}_{xx}$ . Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή που βρίσκουμε για τον πίνακα αυτόν είναι

$$SINR_{\max} + 1 = 2834.7, \quad (6.244)$$

από την οποία προκύπτει

$$SINR_{\max} = 2833.7 \text{ ή } 34.52\text{dB}. \quad (6.245)$$

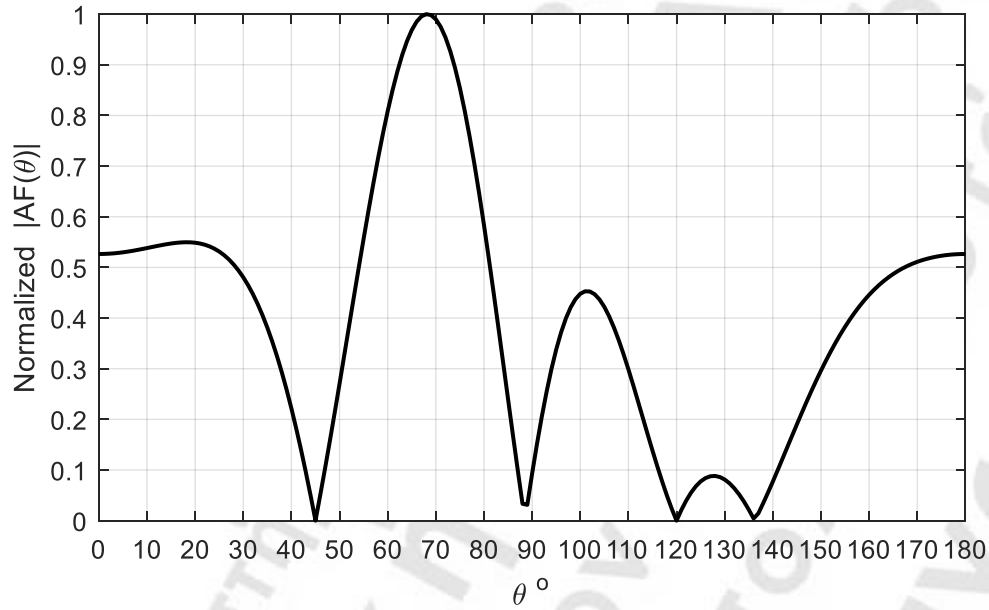
Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα κανονικοποιημένο ως προς το τρίτο (μεσαίο) στοιχείο του είναι

$$\bar{w}_{opt} = \begin{bmatrix} -3.779 - j3.651 \\ 2.294 - j4.279 \\ 1 \\ 2.294 + j4.279 \\ -3.779 + j3.651 \end{bmatrix}. \quad (6.246)$$

Στην ουσία, η τελευταία σχέση εκφράζει το ζητούμενο διάνυσμα βαρών τροφοδοσίας που μεγιστοποιεί τον  $SINR$ . Τέλος, αφού τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας είναι 5 ιστροπικές πηγές, όπως στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, ο παράγοντας διάταξης της στοιχειοκεραίας θα είναι

$$AF(\vartheta) = \bar{w}_{opt}^H \bar{a}(\vartheta), \quad (6.247)$$

όπου το διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}(\vartheta)$  δίνεται και πάλι από την (6.229). Διαιρώντας το μέτρο του παράγοντα διάταξης με τη μέγιστη τιμή αυτού, παίρνουμε το κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας, που είναι στην ουσία το κανονικοποιημένο μέτρο του παράγοντα διάταξης, και το οποίο φαίνεται στο σχήμα 6.7. Παρατηρούμε ότι ο μορφοποιητής πετυχαίνει να δημιουργήσει δυο μηδενισμούς αντιστοίχως στις κατευθύνσεις άφιξης των δυο σημάτων παρεμβολής. Εντούτοις, δεν καταφέρνει να βρει ακριβώς την κατεύθυνση του επιθυμητού σήματος. Όπως φαίνεται το μέγιστο του διαγράμματος εμφανίζεται σε γωνία  $\vartheta=68^\circ$ , γεγονός που σημαίνει ότι έχουμε απόκλιση  $8^\circ$  από την επιθυμητή κατεύθυνση ( $\vartheta_0=60^\circ$ ). Για  $\vartheta=60^\circ$  η τιμή του κανονικοποιημένου παράγοντα διάταξης είναι 0.8, γεγονός που σημαίνει ότι το σφάλμα στην κατεύθυνση του επιθυμητού σήματος είναι σημαντικό. Παρουσιάζεται δηλαδή το ίδιο πρόβλημα που είδαμε στο παράδειγμα υλοποίησης NSB. Γενικώς, όταν παρουσιάζονται σε μια τεχνική μορφοποίησης προβλήματα που αφορούν τη θέση της κορυφής του κύριου λοβού, η λύση είναι να αυξήσουμε τον αριθμό των στοιχείων της στοιχειοκεραίας. Με τον τρόπο αυτό το σφάλμα της θέσης μειώνεται.



**Σχήμα 6.7** Κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας στοιχειοκεραίας πέντε ισαπεχόντων ιστροπικών στοιχείων, με μηδενισμούς στις γωνίες  $\vartheta_1=45^\circ$  και  $\vartheta_2=120^\circ$ .

### **6.6 Μορφοποιητής εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας**

Ο μορφοποιητής αυτός βασίζεται στον υπολογισμό της μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood, ML) ενός συνόλου σημάτων, με σκοπό την εκτίμηση του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος. Η συγκεκριμένη μέθοδος μορφοποίησης αποτελεί εφαρμογή μιας γενικότερης τεχνικής (maximum likelihood estimation) που ανήκει στη θεωρία εκτίμησης.

Για να γίνει αντιληπτή η τεχνική μέγιστης πιθανοφάνειας, ας θεωρήσουμε ένα σύνολο πραγματικών μεταβλητών  $z_q, q=1, \dots, Q$ , οι τιμές των οποίων ακολουθούν κανονική κατανομή (κατανομή Gauss). Η συνδυασμένη κανονική κατανομή του συνόλου των μεταβλητών αυτών (multivariate normal distribution) δίνεται από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_z(\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^Q |\bar{\Sigma}|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\bar{z} - \bar{\mu})^T \bar{\Sigma}^{-1} (\bar{z} - \bar{\mu}) \right], \quad (6.248)$$

όπου

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_Q \end{bmatrix} \quad (6.249)$$

και

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_Q \end{bmatrix} \quad (6.250)$$

είναι διανύσματα που έχουν αντιστοίχως ως στοιχεία τις άνω μεταβλητές και τις μέσες τιμές αυτών,

$$\bar{\Sigma} = E \left[ (\bar{z} - \bar{\mu})(\bar{z} - \bar{\mu})^T \right] \quad (6.251)$$

είναι ο πίνακας συµμεταβλητότητας (covariance matrix) των άνω μεταβλητών (είναι θετικά ορισμένος συµμετρικός πίνακας), και  $|\bar{\Sigma}|$  είναι η ορίζουσα του πίνακα αυτού. Στην περίπτωση πραγµατικών μεταβλητών με μηδενικές μέσες τιμές ( $\mu_q=0, q=1,...,Q$ ), η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας παίρνει τη µορφή

$$f_z(\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^Q |\bar{\Sigma}|}} \exp \left( -\frac{1}{2} \bar{z}^T \bar{\Sigma}^{-1} \bar{z} \right). \quad (6.252)$$

Όταν οι μεταβλητές  $z_q, q=1,...,Q$ , είναι µιγαδικές με μηδενικές μέσες τιμές ( $\mu_q=0, q=1,...,Q$ ) και μηδενικό πίνακα συγγένειας, τότε αντί της (6.252), χρησιµοποιείται µια αντίστοιχη κατανοµή που ονοµάζεται κυκλικά-συµμετρική κανονική κατανοµή (circularly-symmetric normal distribution) και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_z(\bar{z}) = \frac{1}{\pi^Q |\bar{\Sigma}|} \exp \left( -\bar{z}^H \bar{\Sigma}^{-1} \bar{z} \right), \quad (6.253)$$

η οποία παίρνει πραγµατικές τιμές. Ο πίνακας συγγένειας (relation matrix) είναι ένας συµμετρικός πίνακας, που ονοµάζεται επίσης πίνακας ψευδο-συµμεταβλητότητας (pseudo-covariance matrix) και εκφράζεται από τη γενική σχέση

$$\bar{C} = E \left[ (\bar{z} - \bar{\mu})(\bar{z} - \bar{\mu})^T \right], \quad (6.254)$$

αλλά στην προκείμενη περίπτωση, όπου οι μεταβλητές έχουν μηδενικές μέσες τιμές, θα περιγράφεται από την απλοποιηµένη έκφραση

$$\bar{C} = E \left[ \bar{z} \bar{z}^T \right]. \quad (6.255)$$

Επιπλέον, επειδή οι μεταβλητές έχουν μηδενικές μέσες τιμές, ο πίνακας συµμεταβλητότητας συµπίπτει με τον πίνακα συσχέτισης των μεταβλητών, είναι θετικά ορισμένος ερµιτιανός πίνακας, και ορίζεται από τη σχέση

$$\bar{\Sigma} = E \left[ \bar{z} \bar{z}^H \right]. \quad (6.256)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, όπως ορίζεται από την (6.253), δεν είναι βολική για υπολογισµούς λόγω της εκθετικής της µορφής. Για το λόγο αυτό ορίζεται µια νέα πραγµατική συνάρτηση, η οποία ονοµάζεται λογαριθµική συνάρτηση πιθανοφάνειας (log-likelihood function) και προκύπτει από το φυσικό λογάριθµο της  $f_z(\bar{z})$ , δηλαδή

$$L(\bar{z}) = \ln[f_z(\bar{z})] = -\bar{z}^H \bar{S}^{-1} \bar{z} - Q \ln \pi - \ln |\bar{S}|. \quad (6.257)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι μεγιστοποίηση της  $f_z(\bar{z})$  συνεπάγεται μεγιστοποίηση της  $L(\bar{z})$  και το αντίστροφο.

Προσαρμόζοντας τη λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας στην τεχνική μορφοποίησης που εξετάζουμε, θα θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα  $\bar{z}$  των μιγαδικών μεταβλητών με μηδενικές μέσες τιμές και μηδενικό πίνακα συγγένειας είναι στην ουσία το  $\bar{x}_u(k)$ , δηλ. το διάνυσμα που εμπεριέχει τα σήματα παρεμβολής και θορύβου. Συνεπώς, στην περίπτωση μας θα ισχύει

$$L[\bar{x}_u(k)] = -\bar{x}_u^H(k) \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{x}_u(k) - M \ln \pi - \ln |\bar{R}_{uu}|. \quad (6.258)$$

Λόγω της (6.16), η άνω σχέση μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$L[\bar{x}(k), \bar{x}_d(k)] = -[\bar{x}(k) - \bar{x}_d(k)]^H \bar{R}_{uu}^{-1} [\bar{x}(k) - \bar{x}_d(k)] - M \ln \pi - \ln |\bar{R}_{uu}|. \quad (6.259)$$

Το διάνυσμα  $\bar{x}_d(k)$  αντιπροσωπεύει ένα σύνολο ντετερμινιστικών σημάτων, στις τιμές των οποίων όταν συμπέσουν οι αντίστοιχες συνιστώσες του  $\bar{x}(k)$  (δηλ. τα σήματα εισόδου της στοιχειοκεραίας), η άνω συνάρτηση μεγιστοποιείται. Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό με ένα απλοποιημένο παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε ότι η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας καθορίζει την πιθανότητα εμφάνισης των τιμών μιας και μόνο πραγματικής στατιστικής μεταβλητής  $x$  και ότι η πιθανότητα αυτή εξαρτάται από μια πραγματική παράμετρο  $x_d$ . Για να έχουμε κάποια ομοιότητα με τη μορφή της συνάρτησης πιθανοφάνειας που εξετάζουμε πιο πάνω, ας θεωρήσουμε στο παράδειγμά μας ότι η συνάρτηση είναι της μορφής

$$L[x, x_d] = -(x - x_d) \Gamma (x - x_d) - \Delta = -\Gamma (x - x_d)^2 - \Delta, \quad (6.260)$$

όπου  $\Gamma$  και  $\Delta$  σταθερές θετικές ποσότητες. Έστω λοιπόν ότι κάνουμε κάποια μέτρηση της μεταβλητής  $x$  και ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε μέσω της άνω σχέσης την πιθανότητα εμφάνισης αυτής της τιμής. Εφόσον η μέτρηση έχει γίνει (δηλ. είναι γεγονός), θα πρέπει λογικά η τιμή της  $x$  να λαμβάνεται με τη μέγιστη πιθανότητα. Η πιθανότητα όμως μεγιστοποιείται για συγκεκριμένη τιμή της  $x_d$  και συγκεκριμένα για  $x_d = x$ . Αυτό μπορεί επίσης να προκύψει μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης ως προς  $x_d$ . Επιπλέον, η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης ως προς  $x_d$  είναι αρνητική ( $-2\Gamma$ ), το οποίο σημαίνει ότι για  $x_d = x$  η συνάρτηση μεγιστοποιείται. Συνεπώς, και στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε, όταν οι τιμές του  $\bar{x}(k)$  συμπέσουν στο  $\bar{x}_d(k)$  θα έχουμε τη μέγιστη τιμή της  $L[\bar{x}(k), \bar{x}_d(k)]$ . Η τιμή του  $\bar{x}_d(k)$  για την οποία μεγιστοποιείται η  $L[\bar{x}(k), \bar{x}_d(k)]$  προκύπτει από τη συνθήκη

$$\frac{\partial L[\bar{x}(k), \bar{x}_d(k)]}{\partial \bar{x}_d^H(k)} = \bar{0}. \quad (6.261)$$

Από την (6.125) φαίνεται ότι η τιμή του  $\bar{x}_d(k)$ , που μεγιστοποιεί τη λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας, αντιστοιχεί σε κάποια τιμή της  $g_d(k)$ . Η τιμή αυτή μπορεί να υπολογιστεί από τη συνθήκη

$$\frac{\partial L[\bar{x}(k), g_d(k)]}{\partial g_d^*(k)} = 0, \quad (6.262)$$

η οποία είναι ισοδύναμη της (6.261). Η  $L[\bar{x}(k), g_d(k)]$  υπολογίζεται αντικαθιστώντας την (6.125) στην (6.259), οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} L[\bar{x}(k), g_d(k)] &= -[\bar{x}(k) - \bar{a}_d g_d(k)]^H \bar{R}_{uu}^{-1} [\bar{x}(k) - \bar{a}_d g_d(k)] - M \ln \pi - \ln |\bar{R}_{uu}| = \\ &= -\bar{x}^H(k) \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{x}(k) + \bar{x}^H(k) \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d g_d(k) + g_d^*(k) \bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{x}(k) \\ &\quad - g_d^*(k) \bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d g_d(k) - M \ln \pi - \ln |\bar{R}_{uu}|. \end{aligned} \quad (6.263)$$

Αντικαθιστώντας την άνω σχέση στην (6.262), παίρνουμε

$$\bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{x}(k) - \bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d g_d(k) = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$g_d(k) = \frac{\bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1}}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d} \bar{x}(k). \quad (6.264)$$

Πρακτικώς, αυτό που επιθυμούμε είναι να λάβουμε την πληροφορία του επιθυμητού σήματος, δηλ. την  $g_d(k)$ , στην έξοδο του μορφοποιητή. Συνεπώς, θέλουμε να ισχύει

$$y(k) = g_d(k). \quad (6.265)$$

Τότε, η (6.264) σε συνδυασμό με την (6.2) δίνει

$$\bar{w}_{ML}^H = \frac{\bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1}}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d}, \quad (6.266)$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{w}_{ML} = \frac{\bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d}. \quad (6.267)$$

Υπόψη ότι ο  $\bar{R}_{uu}$  είναι ερμιτιανός, συνεπώς και ο  $\bar{R}_{uu}^{-1}$  είναι ερμιτιανός, δηλ. θα ισχύει  $(\bar{R}_{uu}^{-1})^H = \bar{R}_{uu}^{-1}$ . Τελικά, από την τελευταία σχέση υπολογίζονται τα ζητούμενα βάρη για να λάβουμε στην έξοδο μόνο το επιθυμητό σήμα.

Ο συγκεκριμένος μορφοποιητής μπορεί να δώσει πολύ καλά αποτελέσματα, αλλά θα πρέπει να είναι γνωστή η κατεύθυνση άφιξης του επιθυμητού σήματος και επιπλέον θα πρέπει να είναι σε ισχύ οι υποθέσεις που κάναμε πιο πάνω, δηλ. τα ανεπιθύμητα σήματα (συνιστάμενα σήματα παρεμβολής και θορύβου)  $x_{um}(k)$ ,  $m=1, \dots, M$ , να ακολουθούν κανονική κατανομή με μηδενικές μέσες τιμές και μηδενικό πίνακα συγγένειας. Τέλος, σημαντικό είναι και το μειονέκτημα του υπολογισμού του πίνακα  $\bar{R}_{uu}$ , που σημαίνει ότι από τα σήματα εισόδου του μορφοποιητή θα πρέπει να εξαχθούν οι ανεπιθύμητες συνιστώσες αυτών ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός του  $\bar{R}_{uu}$ .

Αν λαμβάνεται μόνο το επιθυμητό σήμα με παρουσία θορύβου, αλλά χωρίς εισερχόμενα σήματα παρεμβολής, θα ισχύει  $\bar{R}_{ii} = \bar{0}$  και συνεπώς  $\bar{R}_{uu} = \bar{R}_{nn}$ . Τότε, η άνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$\bar{w}_{ML} = \frac{\bar{R}_{nn}^{-1} \bar{a}_d}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{nn}^{-1} \bar{a}_d}. \quad (6.268)$$

*Παράδειγμα εφαρμογής:*

Μορφοποιητής ML χρησιμοποιεί στοιχειοκεραία 5 ιστροπικών στοιχείων ( $M=5$ ) που διατάσσονται στον  $z$ -άξονα του συστήματος συντεταγμένων και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d=\lambda/2$ . Στον μορφοποιητή εισέρχεται μόνο ένα επιθυμητό σήμα ( $n=0$ ) με γωνία άφιξης  $\vartheta_0=60^\circ$  (γωνία ανύψωσης). Αν η ισχύς θορύβου είναι  $\hat{P}_n=0.001$ , να υπολογιστεί το διάνυσμα βαρών τροφοδοσίας και να σχεδιαστεί το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας.

*Λύση:*

Εφόσον δεν υπάρχουν σήματα παρεμβολής, θα χρησιμοποιηθεί η (6.268). Το διάνυσμα οδήγησης του επιθυμητού σήματος μπορεί να κατασκευαστεί με τη βοήθεια της (6.95) για  $n=0$  και θα είναι

$$\bar{a}_d = \bar{a}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\pi \cos 60^\circ) \\ \exp(j2\pi \cos 60^\circ) \\ \exp(j3\pi \cos 60^\circ) \\ \exp(j4\pi \cos 60^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.269)$$

Επιπλέον θα ισχύει

$$\bar{R}_{nn} = 0.001 \bar{I}_{5 \times 5}. \quad (6.270)$$

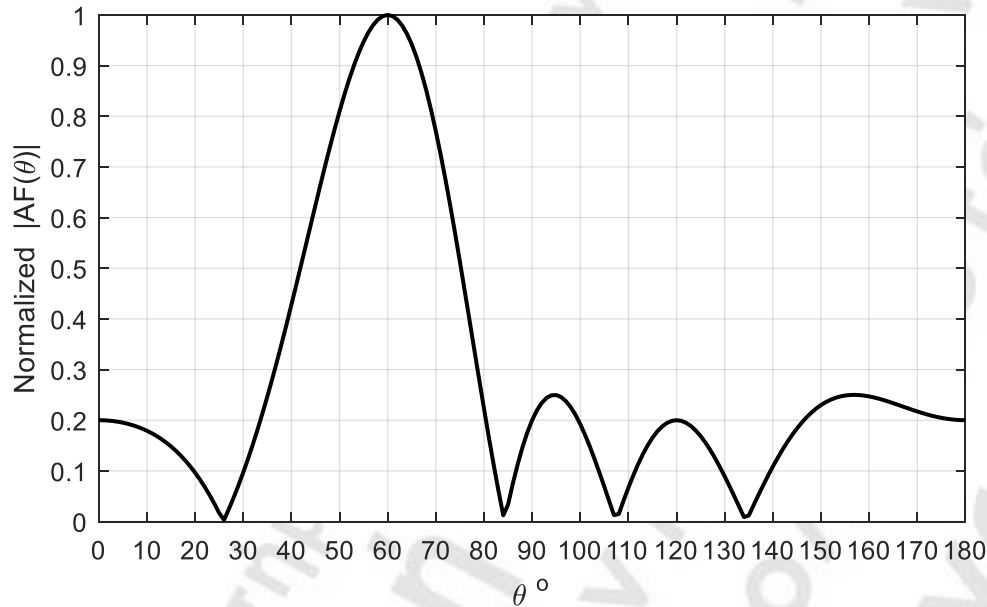
Αντικαθιστώντας τις (6.269) και (6.270) στην (6.268), παίρνουμε

$$\bar{w}_{ML} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ j0.2 \\ -0.2 \\ -j0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}. \quad (6.271)$$

Ο παράγοντας διάταξης θα είναι της μορφής

$$AF(\vartheta) = \bar{w}_{ML}^H \bar{a}(\vartheta), \quad (6.272)$$

όπου το διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}(\vartheta)$  δίνεται και πάλι από την (6.229). Από την (6.272) υπολογίζεται το κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας, το οποίο φαίνεται στο σχήμα 6.8. Παρατηρούμε ότι ο μορφοποιητής καταφέρνει να βρει ακριβώς την κατεύθυνση άφιξης του επιθυμητού σήματος ( $\vartheta_0=60^\circ$ ).



**Σχήμα 6.8** Κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας στοιχειοκεραίας πέντε ισαπεχόντων ιστροπικών στοιχείων με μέγιστο κύριου λοβού σε γωνία  $\theta_0=60^\circ$ .

### **6.7 Μορφοποιητής απαραμόρφωτης απόκρισης ελάχιστης διακύμανσης**

Ο μορφοποιητής αυτός είναι από τους πιο δημοφιλείς και είναι γνωστός με την ονομασία Minimum Variance Distortionless Response (MVDR) beamformer. Ο στόχος αυτού του μορφοποιητή είναι διπλός. Αφενός στοχεύει στο να διατηρήσει το επιθυμητό εισερχόμενο σήμα απαραμόρφωτο (distortionless response) στην έξοδο, δηλ. μετά τον πολλαπλασιασμό των σημάτων εισόδου με τα αντίστοιχα βάρη τροφοδοσίας. Αφετέρου στοχεύει στο να ελαχιστοποιήσει τη διακύμανση του σήματος εξόδου (minimum variance) που πρακτικώς μεταφράζεται στη μείωση της ισχύος της ανεπιθύμητης συνιστώσας του σήματος εξόδου.

Αν  $\bar{w}_{MV}$  είναι το ζητούμενο διάνυσμα βαρών, η συνιστώσα εξόδου που οφείλεται στο επιθυμητό  $s_d$ , σύμφωνα με την (6.148), θα είναι

$$y_d(k) = \bar{w}_{MV}^H \bar{a}_d g_d(k), \quad (6.273)$$

όπου  $g_d$  η συνάρτηση διαμόρφωσης της πληροφορίας που μεταφέρει το  $s_d$ . Επειδή ζητούμε η  $g_d$  να φτάνει στην έξοδο χωρίς παραμόρφωση, θα πρέπει η  $y_d$  να ισούται με την  $g_d$  πολλαπλασιασμένη με έναν σταθερό αριθμό  $G_B$  (beamforming gain), δηλαδή

$$y_d(k) = G_B g_d(k). \quad (6.274)$$

Το αν ο  $G_B$  είναι πραγματικός ή μιγαδικός δεν έχει σημασία, αρκεί να είναι σταθερός. Από τη σύγκριση των (6.273) και (6.274), προκύπτει

$$\bar{w}_{MV}^H \bar{a}_d = G_B. \quad (6.275)$$

Πρακτικώς, η απαίτηση αυτή είναι ίδια με την πρώτη απαίτηση που τέθηκε στον NSB αν  $G_B=1$ . Επιπλέον, έχουμε δείξει ότι η ισχύς της ανεπιθύμητης συνιστώσας του σήματος εξόδου υπολογίζεται από την (6.71), η οποία στην προκείμενη περίπτωση παίρνει τη μορφή

$$\hat{P}_{yu} = \bar{w}_{MV}^H \bar{R}_{uu} \bar{w}_{MV}. \quad (6.276)$$

Υπενθυμίζεται ότι για να ισχύει η (6.71), άρα και η (6.276), θα πρέπει οι συνιστώσες των σημάτων στην έξοδο του μορφοποιητή να είναι μηδενικής μέσης τιμής. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε, λοιπόν, είναι η ελαχιστοποίηση της  $\hat{P}_{yu}$  κάτω από τον περιορισμό που θέτει η (6.275). Η λύση βρίσκεται με εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange. Θα πρέπει λοιπόν να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση, η οποία θα περιέχει τον περιορισμό που εκφράζεται μέσω της (6.275). Η συνάρτηση αυτή, όμως, θα πρέπει να είναι πραγματική, οπότε της δίνουμε τη μορφή

$$\Phi(\bar{w}_{MV}, \bar{w}_{MV}^H, \lambda) = \hat{P}_{yu} + \lambda(G_B - \bar{w}_{MV}^H \bar{a}_d) + [\lambda(G_B - \bar{w}_{MV}^H \bar{a}_d)]^H, \quad (6.277)$$

όπου η παράμετρος  $\lambda$  είναι πολλαπλασιαστής Lagrange. Αναλύοντας την άνω σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{w}_{MV}, \bar{w}_{MV}^H, \lambda) &= \bar{w}_{MV}^H \bar{R}_{uu} \bar{w}_{MV} + \lambda(G_B - \bar{w}_{MV}^H \bar{a}_d) + \lambda^*(G_B^* - \bar{a}_d^H \bar{w}_{MV}) = \\ &= \bar{w}_{MV}^H \bar{R}_{uu} \bar{w}_{MV} + \lambda G_B - \lambda \bar{w}_{MV}^H \bar{a}_d + \lambda^* G_B^* - \lambda^* \bar{a}_d^H \bar{w}_{MV}. \end{aligned} \quad (6.278)$$

Εφόσον η  $\Phi(\bar{w}_{MV}, \bar{w}_{MV}^H, \lambda)$  είναι βαθμωτή πραγματική συνάρτηση, η ελάχιστη τιμή αυτής προκύπτει από εφαρμογή της (6.207), οπότε παίρνουμε

$$\frac{\partial [\Phi(\bar{w}_{MV}, \bar{w}_{MV}^H, \lambda)]}{\partial \bar{w}_{MV}^H} = \bar{R}_{uu} \bar{w}_{MV} - \lambda \bar{a}_d = \bar{0} \quad \text{ή} \quad \bar{R}_{uu} \bar{w}_{MV} = \lambda \bar{a}_d,$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{w}_{MV} = \lambda \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d. \quad (6.279)$$

Να σημειωθεί ότι η άνω παραγωγή έγινε ακολουθώντας διάταξη αριθμητή (numerator layout) και ότι χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες παραγωγής που διατυπώνονται στις (6.209) και (6.210). Λαμβάνοντας την ανάστροφη συζυγή μορφή και στα δυο μέλη της τελευταίας σχέσης, και έχοντας υπόψη ότι ο  $\bar{R}_{uu}$  είναι ερμιτιανός ( $\bar{R}_{uu} = \bar{R}_{uu}^H$ ), έχουμε

$$\bar{w}_{MV}^H = (\lambda \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d)^H = \lambda^* \bar{a}_d^H (\bar{R}_{uu}^{-1})^H = \lambda^* \bar{a}_d^H (\bar{R}_{uu}^H)^{-1},$$

και τελικά

$$\bar{w}_{MV}^H = \lambda^* \bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1}. \quad (6.280)$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και τα δυο μέλη της άνω σχέσης με το  $\bar{a}_d$  και χρησιμοποιώντας την (6.275), παίρνουμε

$$\lambda^* = \frac{G_B}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{G_B^*}{(\bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d)^H} = \frac{G_B^*}{\bar{a}_d^H (\bar{R}_{uu}^{-1})^H \bar{a}_d} = \frac{G_B^*}{\bar{a}_d^H (\bar{R}_{uu}^H)^{-1} \bar{a}_d},$$



και τελικά

$$\lambda = \frac{G_B^*}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d} \quad (6.281)$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange. Τελικά, αντικαθιστώντας την (6.281) στην (6.279), βρίσκουμε τα ζητούμενα βάρη τροφοδοσίας ίσα με

$$\bar{w}_{MV} = G_B^* \frac{\bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d} \quad (6.282)$$

Αυτό που έχει σημασία για την ικανοποίηση των στόχων ενός μορφοποιητή δεν είναι οι ακριβείς τιμές των βαρών στις οποίες καταλήγει η μαθηματική διερεύνηση, αλλά οι σχετικές τιμές των βαρών. Δηλ. όταν αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα βάρη με τον ίδιο πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό, το διάγραμμα ακτινοβολίας δεν αλλάζει, γεγονός που σημαίνει ότι οι στόχοι εξακολουθούν να ικανοποιούνται επακριβώς. Αν λοιπόν στην άνω σχέση θεωρήσουμε  $G_B=1$ , προκύπτει ισοδύναμα η έκφραση

$$\bar{w}_{MV} = \frac{\bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d} \quad (6.283)$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία έκφραση είναι ταυτόσημη με την (6.267) υπολογισμού των βαρών του μορφοποιητή ML. Εντούτοις, στον μορφοποιητή MVDR, η έκφραση αυτή βρέθηκε χωρίς να χρειάζεται η υπόθεση ότι τα ανεπιθύμητα σήματα (συνιστάμενα σήματα παρεμβολής και θορύβου) ακολουθούν κανονική κατανομή με μηδενικές μέσες τιμές και μηδενικό πίνακα συγγένειας. Επιπλέον, η ακριβής τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange που δίνεται στην (6.281) δεν είναι σημαντική για τις σχετικές τιμές των βαρών. Μπορούμε λοιπόν να διαιρέσουμε το διάνυσμα βαρών της (6.282) με την τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange που δίνεται στην (6.281), οπότε προκύπτει ισοδύναμα η έκφραση

$$\bar{w}_{MV} = \bar{R}_{uu}^{-1} \bar{a}_d \quad (6.284)$$

Βέβαια, και στις τρεις άνω σχέσεις φαίνεται εκ πρώτης όψεως ότι το μειονέκτημα του υπολογισμού του πίνακα  $\bar{R}_{uu}$  παραμένει. Για το λόγο αυτό θα επαναληφθεί η άνω διαδικασία υπολογισμού των βαρών τροφοδοσίας μεταβάλλοντας ελαφρώς τις αρχικές απαιτήσεις. Θα ζητήσουμε πλέον να ελαχιστοποιηθεί η μέση ισχύς  $\hat{P}_y$  του συνολικού σήματος εξόδου κάτω από τον περιορισμό που θέτει η (6.275). Δεδομένου του περιορισμού αυτού, η μέση ισχύς της επιθυμητής συνιστώσας εξόδου θα έχει μια δεδομένη τιμή, η οποία δεν μπορεί να ελαχιστοποιηθεί. Συνεπώς, η ελαχιστοποίηση της  $\hat{P}_y$  ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της  $\hat{P}_{yu}$  που είχε τεθεί αρχικά. Άρα ουσιαστικώς το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι ακριβώς το ίδιο, αλλά εκφράζεται μέσω διαφορετικών συνθηκών.

Η μέση ισχύς εξόδου υπολογίζεται από την (6.7), η οποία στην προκειμένη περίπτωση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\hat{P}_y = \bar{w}_{MV}^H \bar{R}_{xx} \bar{w}_{MV} \quad (6.285)$$

Υπενθυμίζεται ότι για να ισχύει η (6.7), άρα και η (6.285), θα πρέπει το σήμα εξόδου του μορφοποιητή να είναι μηδενικής μέσης τιμής. Η λύση βρίσκεται και πάλι με εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange. Η συνάρτηση η οποία περιέχει τον περιορισμό που εκφράζεται μέσω της (6.275) πρέπει να είναι πραγματική, οπότε της δίνουμε τη μορφή

$$\Phi(\bar{w}_{MV}, \bar{w}_{MV}^H, \lambda) = \hat{P}_y + \lambda(G_B - \bar{w}_{MV}^H \bar{a}_d) + [\lambda(G_B - \bar{w}_{MV}^H \bar{a}_d)]^H, \quad (6.286)$$

όπου  $\lambda$  είναι πολλαπλασιαστής Lagrange. Αναλύοντας την άνω σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{w}_{MV}, \bar{w}_{MV}^H, \lambda) &= \bar{w}_{MV}^H \bar{R}_{xx} \bar{w}_{MV} + \lambda(G_B - \bar{w}_{MV}^H \bar{a}_d) + \lambda^*(G_B^* - \bar{a}_d^H \bar{w}_{MV}) = \\ &= \bar{w}_{MV}^H \bar{R}_{xx} \bar{w}_{MV} + \lambda G_B - \lambda \bar{w}_{MV}^H \bar{a}_d + \lambda^* G_B^* - \lambda^* \bar{a}_d^H \bar{w}_{MV}. \end{aligned} \quad (6.287)$$

Η ελάχιστη τιμή της  $\Phi(\bar{w}_{MV}, \bar{w}_{MV}^H, \lambda)$  προκύπτει με εφαρμογή της (6.207), δηλαδή

$$\frac{\partial [\Phi(\bar{w}_{MV}, \bar{w}_{MV}^H, \lambda)]}{\partial \bar{w}_{MV}^H} = \bar{R}_{xx} \bar{w}_{MV} - \lambda \bar{a}_d = \bar{0} \quad \text{ή} \quad \bar{R}_{xx} \bar{w}_{MV} = \lambda \bar{a}_d,$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{w}_{MV} = \lambda \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d. \quad (6.288)$$

Λαμβάνοντας την ανάστροφη συζυγή μορφή και στα δυο μέλη της τελευταίας σχέσης, έχουμε

$$\bar{w}_{MV}^H = \lambda^* \bar{a}_d^H \bar{R}_{xx}^{-1}. \quad (6.289)$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και τα δυο μέλη της άνω σχέσης με το  $\bar{a}_d$  και χρησιμοποιώντας την (6.275), παίρνουμε

$$\lambda^* = \frac{G_B}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{G_B^*}{(\bar{a}_d^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d)^H},$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda = \frac{G_B^*}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d}. \quad (6.290)$$

Τελικά, αντικαθιστώντας την (6.290) στην (6.288), βρίσκουμε τα ζητούμενα βάρη από τη σχέση

$$\bar{w}_{MV} = G_B^* \frac{\bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d}. \quad (6.291)$$

Φαίνεται λοιπόν ότι ο υπολογισμός των βαρών μέσω της (6.291) εξαλείφει το μειονέκτημα του υπολογισμού του  $\bar{R}_{uu}$ , που απαιτεί εξαγωγή των ανεπιθύμητων συνιστωσών μέσα από τα σήματα εισόδου. Ο πίνακας  $\bar{R}_{xx}$  υπολογίζεται πολύ εύκολα δεδομένου ότι τα σήματα εισόδου είναι μετρούμενα μεγέθη. Βέβαια, και πάλι θα πρέπει να τονιστεί ότι αυτό που έχει σημασία για την ικανοποίηση των στόχων του μορφοποιητή δεν είναι οι ακριβείς τιμές

των βαρών αλλά οι σχετικές. Έτσι από την τελευταία σχέση προκύπτουν δυο ισοδύναμες εκφράσεις, διαιρώντας αντιστοίχως με  $G_b^*$  και με την τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange που δίνεται από την (6.290). Οι εκφράσεις αυτές είναι

$$\bar{w}_{MV} = \frac{\bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d}{\bar{a}_d^H \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d} \quad (6.292)$$

και

$$\bar{w}_{MV} = \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d. \quad (6.293)$$

Οι τελευταίες δυο σχέσεις είναι οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται στην πράξη, προκειμένου να υπολογιστούν τα βάρη τροφοδοσίας. Ο συγκεκριμένος μορφοποιητής δίνει πολύ καλά αποτελέσματα, αλλά θα πρέπει να είναι γνωστή η κατεύθυνση άφιξης του επιθυμητού σήματος (για να υπολογιστεί το διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}_d$ ).

*Παράδειγμα εφαρμογής:*

Μορφοποιητής MVDR χρησιμοποιεί στοιχειοκεραία 5 ιστροπικών στοιχείων ( $M=5$ ) που διατάσσονται στον  $z$ -άξονα του συστήματος συντεταγμένων και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d=\lambda/2$ . Στον μορφοποιητή εισέρχονται ένα επιθυμητό σήμα ( $n=0$ ) με γωνία άφιξης  $\theta_0=60^\circ$  και δυο σήματα παρεμβολής ( $N=2$ ) με αντίστοιχες γωνίες άφιξης  $\theta_1=45^\circ$  και  $\theta_2=120^\circ$ . Η μέτρηση των γωνιών γίνεται ως προς τον  $z$ -άξονα, δηλ. είναι γωνίες ανύψωσης (elevation angles). Αν η ισχύς θορύβου είναι  $\hat{P}_n=0.001$ , να υπολογιστεί το διάνυσμα βαρών τροφοδοσίας και να σχεδιαστεί το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας.

*Λύση:*

Ο πίνακας  $\bar{R}_{xx}$  κατασκευάζεται από δειγματοληψία των σημάτων εισόδου σε πραγματικό χρόνο, όπως έχει ήδη περιγραφεί στην παράγραφο 6.1. Εφόσον δεν έχουμε στη διάθεσή μας τέτοια δεδομένα, θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε θεωρητικά τον πίνακα αυτό. Ο πίνακας οδήγησης  $\bar{A}$  των εισερχόμενων σημάτων, για τις τιμές των γωνιών άφιξης  $\theta_0=60^\circ$ ,  $\theta_1=45^\circ$  και  $\theta_2=120^\circ$ , θα έχει τη μορφή της (6.237). Θεωρώντας ότι κάθε εισερχόμενο σήμα έχει ισχύ 1W και ότι δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ δυο οποιωνδήποτε από τα τρία εισερχόμενα σήματα, θα ισχύει για τον πίνακα συσχέτισης  $\bar{R}_{gg}$  η (6.238). Επιπλέον ο πίνακας συσχέτισης  $\bar{R}_{nn}$  των σημάτων θορύβου θα δίνεται από την (6.239). Θεωρώντας ακόμη ότι δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος και σήματος θορύβου, αντικαθιστούμε τις (6.237), (6.238) και (6.239) στην (6.109), οπότε βρίσκουμε

$$\bar{R}_{xx} = \bar{A} \bar{R}_{gg} \bar{A}^H + \bar{R}_{nn} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3.001 & -0.606 - j0.796 & -2.266 + j0.964 & 0.928 - j0.372 & 1.142 - j0.513 \\ -0.606 + j0.796 & 3.001 & -0.606 - j0.796 & -2.266 + j0.964 & 0.928 - j0.372 \\ -2.266 - j0.964 & -0.606 + j0.796 & 3.001 & -0.606 - j0.796 & -2.266 + j0.964 \\ 0.928 + j0.372 & -2.266 - j0.964 & -0.606 + j0.796 & 3.001 & -0.606 - j0.796 \\ 1.142 + j0.513 & 0.928 + j0.372 & -2.266 - j0.964 & -0.606 + j0.796 & 3.001 \end{bmatrix}. \quad (6.294)$$

Το διάνυσμα οδήγησης του επιθυμητού σήματος είναι στην ουσία η πρώτη (αριστερή) στήλη του πίνακα  $\bar{A}$ , δηλαδή

$$\bar{a}_d = \bar{a}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\pi \cos 60^\circ) \\ \exp(j2\pi \cos 60^\circ) \\ \exp(j3\pi \cos 60^\circ) \\ \exp(j4\pi \cos 60^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.295)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.294) και (6.295) στην (6.293), παίρνουμε

$$\bar{w}_{MV} = \begin{bmatrix} 0.221 + j0.213 \\ -0.134 + j0.250 \\ -0.058 \\ -0.134 - j0.250 \\ 0.221 - j0.213 \end{bmatrix}. \quad (6.296)$$

Εφόσον έχουν σημασία τα σχετικά βάρη, μπορούμε να τα κανονικοποιήσουμε ως προς το βάρος του μεσαίου (τρίτου) στοιχείου, οπότε λαμβάνουμε

$$\bar{w}_{MV} = \begin{bmatrix} -3.779 - j3.651 \\ 2.294 - j4.279 \\ 1 \\ 2.294 + j4.279 \\ -3.779 + j3.651 \end{bmatrix}. \quad (6.297)$$

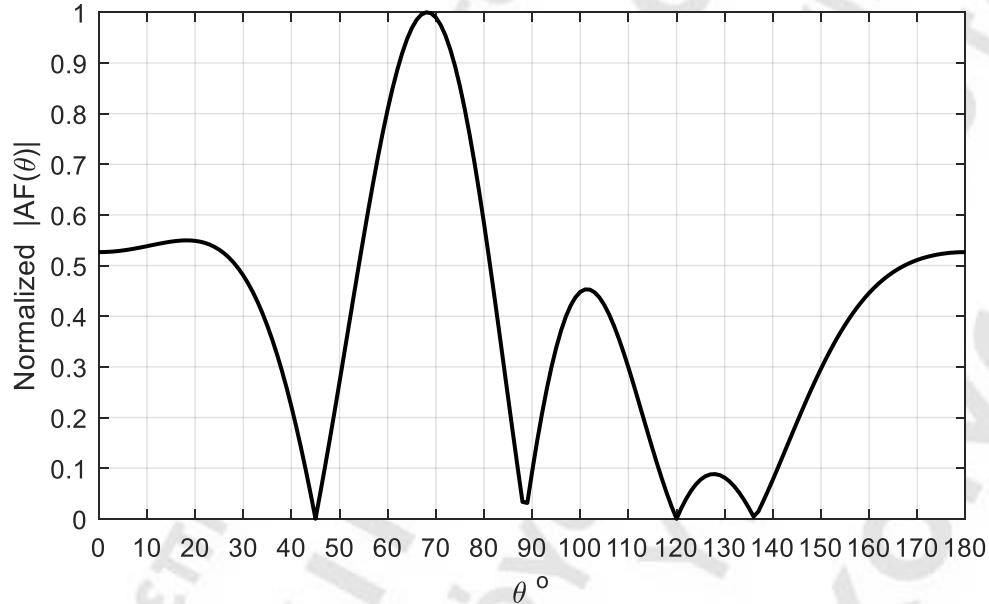
Αφού τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας είναι 5 ιστροπικές πηγές, ο παράγοντας διάταξης της στοιχειοκεραίας θα είναι

$$AF(\vartheta) = \bar{w}_{MV}^H \bar{a}(\vartheta), \quad (6.298)$$

όπου το διάνυσμα οδήγησης  $\bar{a}(\vartheta)$  δίνεται και πάλι από την (6.229). Από την (6.298) υπολογίζεται το κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας, το οποίο φαίνεται στο σχήμα 6.9. Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα ακτινοβολίας είναι ίδιο μ' αυτό του μορφοποιητή μεγιστοποίησης SINR (σχήμα 6.7). Συνεπώς ισχύουν τα ίδια σχόλια, δηλ. επιτυγχάνονται ακριβώς οι μηδενισμοί αλλά υπάρχει απόκλιση στην εύρεση της κατεύθυνσης άφιξης του επιθυμητού σήματος.

Ουσιαστικά, οι μορφοποιητές max SINR και MVDR έχουν περίπου την ίδια αποδοτικότητα, ενώ η αξία τους καθορίζεται από την πληροφορία που χρειάζονται στην πράξη. Από τις (6.236) και (6.293) φαίνεται ότι η γνώση του  $\bar{R}_{xx}$  είναι απαραίτητη και για τους δυο μορφοποιητές. Ο μορφοποιητής max SINR πλεονεκτεί έναντι του MVDR στο ότι δεν χρειάζεται να γνωρίζει την κατεύθυνση άφιξης του επιθυμητού σήματος, κάτι που απαιτείται για τη σωστή λειτουργία του μορφοποιητή MVDR. Από την άλλη, ο MVDR πλεονεκτεί έναντι του max SINR στο ότι δεν χρειάζεται να γνωρίζει τον  $\bar{R}_{uu}$ , ο οποίος είναι

απαραίτητος για τη σωστή λειτουργία του μορφοποιητή max SINR. Στην πράξη, τα μειονεκτήματα του καθενός αντισταθμίζονται με διάφορες τεχνικές. Ο MVDR συνήθως χρησιμοποιεί κάποιον αλγόριθμο εύρεσης των κατευθύνσεων άφιξης εισερχόμενων σημάτων, ενώ ο μορφοποιητής max SINR υπολογίζει τον  $\bar{R}_{uu}$  με ειδικές διεργασίες.



**Σχήμα 6.9** Κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας στοιχειοκεραίας πέντε ισαπεχόντων ιστροπικών στοιχείων, με μηδενισμούς στις γωνίες  $\theta_1=45^\circ$  και  $\theta_2=120^\circ$ .

### **6.8 Μορφοποιητής ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος**

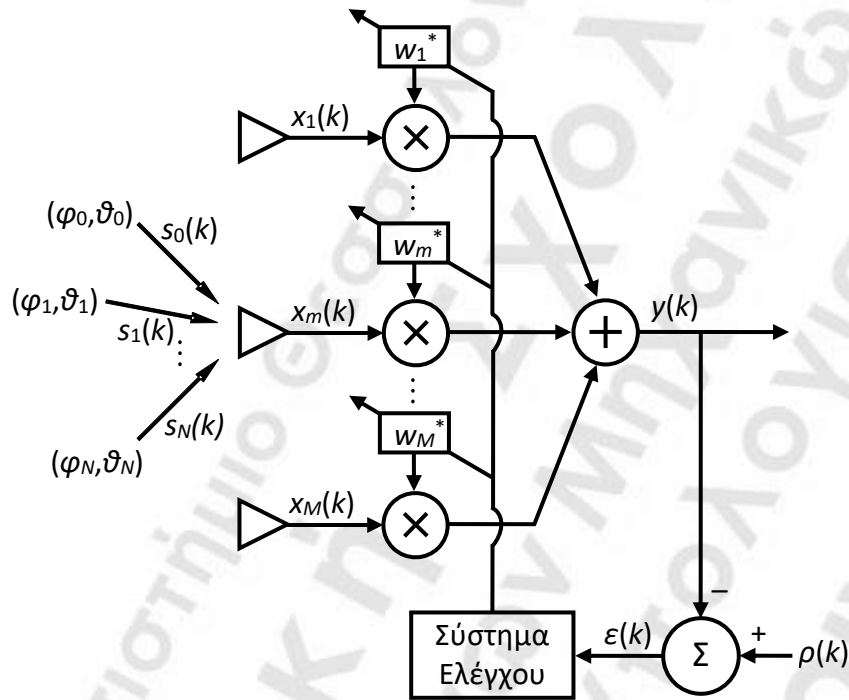
Ο μορφοποιητής αυτός είναι γνωστός με την ονομασία Minimum Mean-Squared Error (MMSE) beamformer. Ο στόχος αυτού του μορφοποιητή είναι να βρει τα κατάλληλα βάρη τροφοδοσίας που ελαχιστοποιούν το σφάλμα του σήματος εξόδου  $y(k)$  ως προς ένα σήμα αναφοράς (reference signal)  $\rho(k)$ . Το σήμα αναφοράς είναι συνήθως σήμα που εμφανίζει υψηλή συσχέτιση με το επιθυμητό εισερχόμενο σήμα  $s_d(k)$  ( $=s_0(k)$ ) και καμία συσχέτιση με τα εισερχόμενα σήματα παρεμβολής  $s_n(k)$ ,  $n=1, \dots, N$ . Σε περίπτωση που το επιθυμητό σήμα παρουσιάζει συσχέτιση με κάποιο από τα σήματα παρεμβολής, η αποδοτικότητα του μορφοποιητή MMSE μειώνεται δραστικά. Το βασικό μπλοκ διάγραμμα του μορφοποιητή αυτού φαίνεται στο σχήμα 6.10.

Το σφάλμα του σήματος εξόδου ως προς το σήμα αναφοράς ορίζεται, για την  $k$ -στη στιγμή δειγματοληψίας, από τη σχέση

$$\varepsilon(k) = \rho(k) - y(k), \quad (6.299)$$

ή ισοδύναμα, λόγω της (6.2), από τη σχέση

$$\varepsilon(k) = \rho(k) - \bar{\mathbf{w}}_{MMSE}^H \bar{\mathbf{x}}(k). \quad (6.300)$$



**Σχήμα 6.10** Βασικό μπλοκ διάγραμμα συστήματος μορφοποίησης δέσμης MMSE.

Επειδή τα  $y(k)$  και  $\rho(k)$  είναι μιγαδικά σήματα, είναι ευνόητο ότι η ελαχιστοποίηση του  $\varepsilon(k)$  αφορά το μέτρο ή το τετράγωνο του μέτρου του (τετραγωνικό σφάλμα). Το τετράγωνο του μέτρου του  $\varepsilon(k)$  ορίζεται, με τη βοήθεια της (6.300), από τη σχέση

$$|\varepsilon(k)|^2 = \varepsilon(k) \varepsilon^*(k) = [\rho(k) - \bar{w}_{MMSE}^H \bar{x}(k)] [\rho(k) - \bar{w}_{MMSE}^H \bar{x}(k)]^H. \quad (6.301)$$

Αναλύοντας την τελευταία σχέση, θα έχουμε

$$\begin{aligned} |\varepsilon(k)|^2 &= [\rho(k) - \bar{w}_{MMSE}^H \bar{x}(k)] [\rho^*(k) - \bar{x}^H(k) \bar{w}_{MMSE}] = \\ &= \rho(k) \rho^*(k) - \rho(k) \bar{x}^H(k) \bar{w}_{MMSE} - \bar{w}_{MMSE}^H \bar{x}(k) \rho^*(k) + \bar{w}_{MMSE}^H \bar{x}(k) \bar{x}^H(k) \bar{w}_{MMSE}. \end{aligned} \quad (6.302)$$

Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι στην πράξη δεν είναι δυνατή η εύρεση βαρών που ελαχιστοποιούν το τετραγωνικό σφάλμα ξεχωριστά για κάθε στιγμή δειγματοληψίας. Αυτό που μπορεί να ελαχιστοποιηθεί είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean-squared error, MSE), που υπολογίζεται με τη βοήθεια της (6.302) από την έκφραση

$$\begin{aligned} E[|\varepsilon(k)|^2] &= E[\rho(k) \rho^*(k)] - E[\rho(k) \bar{x}^H(k)] \bar{w}_{MMSE} - \bar{w}_{MMSE}^H E[\bar{x}(k) \rho^*(k)] + \\ &+ \bar{w}_{MMSE}^H E[\bar{x}(k) \bar{x}^H(k)] \bar{w}_{MMSE} = \hat{P}_\rho - \bar{r}_{xp}^H \bar{w}_{MMSE} - \bar{w}_{MMSE}^H \bar{r}_{xp} + \bar{w}_{MMSE}^H \bar{R}_{xx} \bar{w}_{MMSE}, \end{aligned} \quad (6.303)$$

όπου

$$\hat{P}_\rho = E[\rho(k) \rho^*(k)] = E[|\rho(k)|^2] \quad (6.304)$$

είναι η μέση ισχύς του σήματος αναφοράς,

$$\bar{r}_{xp} = E[\bar{x}(k)\rho^*(k)] \quad (6.305)$$

είναι διάνυσμα στήλης που εκφράζει τη συσχέτιση μεταξύ των σημάτων εισόδου και του σήματος αναφοράς (θα μπορούσε να ονομαστεί διάνυσμα συσχέτισης σημάτων εισόδου και σήματος αναφοράς), και τέλος  $\bar{R}_{xx}$  είναι ο γνωστός πίνακας συσχέτισης των σημάτων εισόδου (σχέση (6.8)). Επειδή το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι πραγματική συνάρτηση, με ορίσματα τα μιγαδικά διανύσματα  $\bar{w}_{MMSE}$  και  $\bar{w}_{MMSE}^H$ , τα στάσιμα σημεία αυτής θα υπολογιστούν με εφαρμογή της (6.207) στην (6.303), οπότε παίρνουμε

$$\frac{\partial \left( E[|\varepsilon(k)|^2] \right)}{\partial \bar{w}_{MMSE}^H} = -\bar{r}_{xp} + \bar{R}_{xx} \bar{w}_{MMSE} = \bar{0} \quad \text{ή} \quad \bar{R}_{xx} \bar{w}_{MMSE} = \bar{r}_{xp},$$

και τελικά

$$\bar{w}_{MMSE} = \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{r}_{xp}. \quad (6.306)$$

Να σημειωθεί ότι η άνω παραγωγή έγινε ακολουθώντας διάταξη αριθμητή και ότι χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες παραγωγής που δίνονται από τις (6.209) και (6.210). Η τελευταία σχέση υποδεικνύει ένα στάσιμο σημείο. Επειδή όμως το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι θετική πραγματική συνάρτηση και συνεπώς η μέγιστη τιμή της απειρίζεται, το ένα και μοναδικό στάσιμο σημείο θα είναι τοπικό και ολικό ελάχιστο της συνάρτησης. Από την άποψη της πληροφωρίας που απαιτείται για την πραγματοποίηση υπολογισμών, παρατηρούμε ότι ο συγκεκριμένος μορφοποιητής υπερτερεί όλων των προηγούμενων, επειδή οι πληροφορίες που απαιτούνται για τον υπολογισμό των βαρών μέσω της (6.306) είναι τα σήματα εισόδου και το σήμα αναφοράς. Πρόκειται δηλαδή για πληροφορίες που αποκτούνται εύκολα, χωρίς την ανάγκη εξαγωγής συνιστωσών μέσα από σήματα ή τη γνώση της κατεύθυνσης άφιξης εισερχόμενων σημάτων. Επίσης, επειδή ο συγκεκριμένος μορφοποιητής είναι σύστημα κλειστού βρόχου (βλέπε σχήμα 6.10), μπορεί να διορθώνει σε πραγματικό χρόνο τα βάρη τροφοδοσίας παρακολουθώντας τις τιμές του σήματος αναφοράς.

Ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση που το σήμα αναφοράς συμπίπτει με τη συνάρτηση διαμόρφωσης του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος, δηλαδή

$$\rho(k) = g_d(k). \quad (6.307)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.121) και (6.307) στην (6.305), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \bar{r}_{xp} &= E[\bar{a}_d g_d(k) + \bar{A}_i \bar{g}_i(k) + \bar{n}(k)] g_d^*(k) = \\ &= \bar{a}_d E[g_d(k) g_d^*(k)] + \bar{A}_i E[\bar{g}_i(k) g_d^*(k)] + E[\bar{n}(k) g_d^*(k)] = \\ &= \bar{a}_d \hat{P}_{sd} + \bar{A}_i \bar{r}_{igid} + \bar{r}_{ngd}, \end{aligned} \quad (6.308)$$

όπου  $\hat{P}_{sd}$  είναι η μέση ισχύς του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος (σχέση (6.130)),

$$\bar{r}_{gigd} = E[\bar{g}_i(k)g_d^*(k)] \quad (6.309)$$

είναι το διάνυσμα συσχέτισης μεταξύ των συναρτήσεων διαμόρφωσης των σημάτων παρεμβολής και της συνάρτησης διαμόρφωσης του επιθυμητού σήματος, και

$$\bar{r}_{ngd} = E[\bar{n}(k)g_d^*(k)] \quad (6.310)$$

είναι το διάνυσμα συσχέτισης μεταξύ των σημάτων θορύβου και της συνάρτησης διαμόρφωσης του επιθυμητού σήματος. Δεδομένου ότι το επιθυμητό σήμα είναι ασυσχέτιστο και με τα σήματα παρεμβολής και με τα σήματα θορύβου, τα δυο άνω διανύσματα συσχέτισης είναι μηδενικά, δηλαδή

$$\bar{r}_{gigd} = \bar{0} \quad (6.311)$$

και

$$\bar{r}_{ngd} = \bar{0}. \quad (6.312)$$

Λόγω των (6.311) και (3.312), η (6.308) καταλήγει στη μορφή

$$\bar{r}_{xp} = \hat{P}_{sd} \bar{a}_d. \quad (6.313)$$

Αντικαθιστώντας την άνω σχέση στην (6.306), παίρνουμε

$$\bar{w}_{MMSE} = \hat{P}_{sd} \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d. \quad (6.314)$$

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι αυτό που καθορίζει το διάγραμμα ακτινοβολίας δεν είναι οι ακριβείς τιμές των βαρών τροφοδοσίας αλλά οι σχετικές τους τιμές. Επομένως, η άνω σχέση μπορεί να απλοποιηθεί στην έκφραση

$$\bar{w}_{MMSE} = \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d. \quad (6.315)$$

Βέβαια, η τελευταία σχέση δείχνει ότι ο υπολογισμός των βαρών απαιτεί τη γνώση της κατεύθυνσης διάδοσης του επιθυμητού σήματος. Αυτό, όμως δεν είναι αλήθεια, γιατί ακόμη και στην περίπτωση αυτή, που το σήμα αναφοράς συμπίπτει με τη συνάρτηση διαμόρφωσης του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος, χρησιμοποιείται και πάλι η (6.306). Συνεπώς, η (6.315) δεν έχει πρακτική αξία. Ο λόγος, λοιπόν, για τον οποίο αποδείξαμε τη σχέση αυτή είναι για να δούμε την ομοιότητά της με την (6.293) που δίνει τα βάρη της MVDR. Συνεπώς, όταν το σήμα αναφοράς συμπίπτει με τη συνάρτηση διαμόρφωσης του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος, οι τεχνικές MVDR και MMSE αναμένεται να παράγουν τα ίδια σχετικά βάρη και επομένως θα έχουν (θεωρητικώς τουλάχιστον) την ίδια αποδοτικότητα.

## **6.9 Μορφοποιητής ελάχιστων μέσων τετραγώνων**

Πρόκειται για μορφοποιητή (Least Mean Squares beamformer, LMS beamformer) που ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean-squared error, MSE) συγκεκριμένης συνάρτησης με την εφαρμογή του αλγόριθμου της μέγιστης καθόδου (steepest descent algorithm). Η συνάρτηση είναι ίδια μ' αυτή που ελαχιστοποιεί και ο μορφοποιητής MMSE,



δηλ. είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του σήματος εξόδου ως προς ένα σήμα αναφοράς. Η συνάρτηση αυτή είναι πραγματική, με ορίσματα τα μιγαδικά διανύσματα  $\bar{w}$  και  $\bar{w}^H$ , και έχει τη μορφή της (6.303), την οποία ξαναδιατυπώνουμε στο σημείο αυτό για λόγους ευκολίας:

$$\Phi(\bar{w}, \bar{w}^H) = E[|\varepsilon(k)|^2] = \hat{P}_\rho - \bar{r}_{xp}^H \bar{w} - \bar{w}^H \bar{r}_{xp} + \bar{w}^H \bar{R}_{xx} \bar{w} \quad (6.316)$$

Το μπλοκ διάγραμμα του μορφοποιητή είναι ίδιο μ' αυτό του σχήματος 6.10.

Ο αλγόριθμος της μέγιστης καθόδου είναι μια επαναληπτική διαδικασία, σε κάθε βήμα (επανάληψη) της οποίας το διάνυσμα βαρών υπολογίζεται από το διάνυσμα βαρών του προηγούμενου βήματος και την κλίση της συνάρτησης που θέλουμε να ελαχιστοποιηθεί, σύμφωνα με τη σχέση

$$\bar{w}(q+1) = \bar{w}(q) - \gamma \nabla \Phi(\bar{w}(q), \bar{w}^H(q)), \quad (6.317)$$

όπου  $q$  είναι ο αύξων αριθμός της επανάληψης και  $\gamma$  είναι αυθαίρετη παράμετρος που καθορίζει το μέγεθος του βήματος μετατόπισης σε κάθε επανάληψη. Η κλίση της συνάρτησης  $\Phi$  ορίζεται από τη σχέση

$$\nabla \Phi(\bar{w}(q), \bar{w}^H(q)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial w_{real,1}} + j \frac{\partial \Phi}{\partial w_{imag,1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial w_{real,M}} + j \frac{\partial \Phi}{\partial w_{imag,M}} \end{bmatrix}, \quad (6.318)$$

όπου  $w_{real,1}, \dots, w_{real,M}$  είναι τα πραγματικά μέρη και  $w_{imag,1}, \dots, w_{imag,M}$  τα αντίστοιχα φανταστικά μέρη των βαρών τροφοδοσίας ( $w_m = w_{real,m} + jw_{imag,m}$ ,  $m=1, \dots, M$ ). Δηλαδή, η κλίση της  $\Phi$  είναι διάνυσμα στήλης  $M$  μιγαδικών συνιστωσών. Γνωρίζουμε, όμως, από τη μιγαδική ανάλυση (παράγωγοι Wirtinger) ότι ισχύουν οι εκφράσεις

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_m} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial w_{real,m}} - j \frac{\partial \Phi}{\partial w_{imag,m}} \right) \quad (6.319)$$

και

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_m^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial w_{real,m}} + j \frac{\partial \Phi}{\partial w_{imag,m}} \right). \quad (6.320)$$

Λόγω της (6.320), η (6.318) γίνεται

$$\nabla \Phi(\bar{w}(q), \bar{w}^H(q)) = 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial w_1^*} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial w_M^*} \end{bmatrix} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{w}^H}. \quad (6.321)$$

Στην άνω σχέση ακολουθείται διάταξη αριθμητή, γεγονός που σημαίνει ότι το  $\partial\Phi/\partial\bar{w}^H$  είναι διάνυσμα στήλης όπως εξάλλου και η κλίση. Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (6.317) παίρνουμε

$$\bar{w}(q+1) = \bar{w}(q) - 2\gamma \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{w}^H} = \bar{w}(q) - \delta \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{w}^H}, \quad (6.322)$$

όπου  $\delta=2\gamma$  αυθαίρετη παράμετρος που καθορίζει, όπως και η παράμετρος  $\gamma$ , το μέγεθος του βήματος μετατόπισης σε κάθε επανάληψη. Παραγωγίζοντας την (6.316) ως προς  $\bar{w}^H$ , παίρνουμε

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{w}^H} = -\bar{r}_{xp} + \bar{R}_{xx} \bar{w}. \quad (6.323)$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (6.322), έχουμε

$$\bar{w}(q+1) = \bar{w}(q) - \delta [\bar{R}_{xx} \bar{w}(q) - \bar{r}_{xp}]. \quad (6.324)$$

Για να μπορέσει ο αλγόριθμος της μέγιστης καθόδου να καταλήξει σε αποτέλεσμα μετά από έναν αριθμό επαναλήψεων (που ευελπιστούμε να είναι μικρός), θα πρέπει για χάρη της ταχύτητας του αλγόριθμου κάθε επανάληψη να διαρκεί όσο το δυνατόν λιγότερο. Η ελάχιστη διάρκεια μιας επανάληψης είναι η περίοδος δειγματοληψίας  $T_s$ , δηλ. ο χρόνος λήψης ενός δείγματος. Στο τέλος, λοιπόν, κάθε  $k$ -στης περιόδου δειγματοληψίας, το σύστημα λαμβάνει τις τιμές των  $\bar{x}(k)$  και  $\varepsilon(k)$ . Από τις τιμές αυτές καλείται να υπολογίσει τα  $\bar{R}_{xx}$  και  $\bar{r}_{xp}$ . Παρόλο που τα μεγέθη αυτά είναι εξ ορισμού μέσες τιμές κάποιων ποσοτήτων και συνεπώς απαιτείται ένα σύνολο δειγματοληψιών για τον υπολογισμό τους, είναι ευνόητο ότι μέσα στο χρονικό διάστημα μιας δειγματοληψίας δεν μπορούν να θεωρηθούν ότι αντιπροσωπεύουν αλλά μόνο ότι προσεγγίζουν μέσες τιμές. Έτσι, αντί των (6.8) και (6.305) χρησιμοποιούνται οι αντίστοιχες προσεγγιστικές μορφές αυτών, δηλαδή

$$\tilde{R}_{xx}(k) = \bar{x}(k) \bar{x}^H(k) \quad (6.325)$$

και

$$\tilde{r}_{xp}(k) = \bar{x}(k) \rho^*(k). \quad (6.326)$$

Επίσης, επειδή ο χρόνος κάθε επανάληψης ισούται με την περίοδο δειγματοληψίας, είναι ευνόητο ότι  $q=k$ , οπότε η (6.324) παίρνει τη μορφή

$$\bar{w}(k+1) = \bar{w}(k) - \delta [\tilde{R}_{xx}(k) \bar{w}(k) - \tilde{r}_{xp}(k)]. \quad (6.327)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.325) και (6.326) στην (6.327), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \bar{w}(k+1) &= \bar{w}(k) - \delta [\bar{x}(k) \bar{x}^H(k) \bar{w}(k) - \bar{x}(k) \rho^*(k)] = \\ &= \bar{w}(k) + \delta \bar{x}(k) [\rho^*(k) - \bar{x}^H(k) \bar{w}(k)], \end{aligned} \quad (6.328)$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{w}(k+1) = \bar{w}(k) + \delta \bar{x}(k) [\rho(k) - \bar{w}^H(k) \bar{x}(k)]^H. \quad (6.329)$$

Η ποσότητα μέσα στην αγκύλη της τελευταίας σχέσης είναι το σφάλμα του σήματος εξόδου ως προς το σήμα αναφοράς (βλέπε σχήμα 6.10), δηλαδή

$$\varepsilon(k) = \rho(k) - y(k) = \rho(k) - \bar{w}^H \bar{x}(k). \quad (6.330)$$

Λόγω της (6.330), η (6.329) καταλήγει στη σχέση

$$\bar{w}(k+1) = \bar{w}(k) + \delta \bar{x}(k) \varepsilon^*(k) = \bar{w}(k) + \delta \varepsilon^*(k) \bar{x}(k). \quad (6.331)$$

Η τιμή της παραμέτρου  $\delta$  είναι σημαντική για το ρυθμό σύγκλισης του αλγόριθμου. Αν η τιμή της είναι μικρή (δηλ. έχουμε μικρό βήμα μετατόπισης), τότε η σύγκλιση είναι αργή και ο αλγόριθμος δεν μπορεί να παρακολουθήσει τις αλλαγές των κατευθύνσεων άφιξης των εισερχόμενων σημάτων. Μ' άλλα λόγια, ο αλγόριθμος, λόγω του μικρού βήματος μετατόπισης, χρειάζεται μεγάλο αριθμό επαναλήψεων για να βρει τα βάρη τροφοδοσίας που ελαχιστοποιούν το MSE και, μέχρι να τα βρει, τα εισερχόμενα σήματα έχουν ήδη αλλάξει κατευθύνσεις άφιξης, γεγονός που μεταφράζεται σε αδυναμία του μορφοποιητή να παρακολουθήσει τα εισερχόμενα σήματα. Αν πάλι, η τιμή της παραμέτρου  $\delta$  είναι μεγάλη (δηλ. έχουμε μεγάλο βήμα μετατόπισης), τότε η σύγκλιση είναι τόσο γρήγορη που ο αλγόριθμος προσπερνάει τις βέλτιστες τιμές των βαρών και δεν μπορεί ποτέ να καταλήξει σ' αυτές. Στην ουσία παρατηρείται μια ταλάντωση του αλγόριθμου γύρω από τις βέλτιστες τιμές χωρίς όμως να μπορεί τελικά να τις εντοπίσει. Συνεπώς, υπάρχει ένα βέλτιστο διάστημα τιμών της παραμέτρου  $\delta$ , για το οποίο η σύγκλιση είναι αρκετά γρήγορη χωρίς όμως να παρατηρείται αδυναμία εντοπισμού των βέλτιστων βαρών. Το διάστημα αυτό, σύμφωνα με σχετική έρευνα, ορίζεται από τη σχέση

$$0 \leq \delta \leq \frac{1}{2\lambda_{\max}}, \quad (6.332)$$

όπου  $\lambda_{\max}$  είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα  $\tilde{R}_{xx}(k)$ . Κανονικά, η εφαρμογή της (6.331) σε κάθε  $k$ -στη επανάληψη δεν απαιτεί υπολογισμό του  $\tilde{R}_{xx}(k)$  και των ιδιοτιμών αυτού. Αν όμως επιζητείται σωστός ρυθμός σύγκλισης του αλγόριθμου, τότε θα πρέπει είτε σε κάθε επανάληψη είτε ανά συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων να υπολογίζεται ο  $\tilde{R}_{xx}(k)$  και οι ιδιοτιμές αυτού, ώστε να επιλέγεται τιμή για την παράμετρο  $\delta$  μέσα στο διάστημα που υποδεικνύει η (6.332). Δεδομένου ότι ο  $\tilde{R}_{xx}(k)$  είναι ένας θετικά ορισμένος ερμιτιανός πίνακας, θα έχει μόνο θετικές ιδιοτιμές, και συνεπώς θα ισχύει

$$\lambda_{\max} \leq \text{trace}[\tilde{R}_{xx}(k)], \quad (6.333)$$

όπου  $\text{trace}[\cdot]$  δηλώνει το ίχνος ενός πίνακα και το οποίο όπως ξέρουμε ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του πίνακα. Αντί, λοιπόν, της (6.332) μπορούμε να θέσουμε τη συνθήκη

$$0 \leq \delta \leq \frac{1}{2 \text{trace}[\tilde{R}_{xx}(k)]}. \quad (6.334)$$

Η επιλογή τιμής για την παράμετρο  $\delta$  με βάση την άνω συνθήκη, αφενός επαληθεύει πάντα τη συνθήκη (6.332) (δηλ. λόγω της (6.333), αν ισχύει η (6.334) τότε θα ισχύει και η (6.332)) και αφετέρου μειώνει σημαντικά την υπολογιστική πολυπλοκότητα (για την εύρεση του ίχνους ενός πίνακα απαιτούνται πολύ λιγότεροι υπολογισμοί απ' ό,τι για την εύρεση των ιδιοτιμών).

*Παράδειγμα εφαρμογής:*

Μορφοποιητής LMS λειτουργεί σε συχνότητα  $f=800\text{MHz}$  και χρησιμοποιεί στοιχειοκεραία 5 ισοτροπικών στοιχείων ( $M=5$ ) που διατάσσονται στον  $z$ -άξονα του συστήματος συντεταγμένων και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d=\lambda/2$ . Στον μορφοποιητή εισέρχονται ένα επιθυμητό σήμα ( $n=0$ ) με γωνία άφιξης  $\vartheta_0=60^\circ$  και δυο σήματα παρεμβολής ( $N=2$ ) με αντίστοιχες γωνίες άφιξης  $\vartheta_1=45^\circ$  και  $\vartheta_2=120^\circ$  (elevation angles). Τα σήματα αυτά υφίστανται δειγματοληψία με συχνότητα  $f_s=100f$ . Τα δείγματα της συνάρτησης διαμόρφωσης του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος λαμβάνονται από τη σχέση

$$g_0(k) = \cos(2\pi f T_s k) = \cos(2\pi k/100), \quad (6.335)$$

ενώ το καθένα από τα δυο σήματα παρεμβολής ακολουθεί κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και ισχύ 1W. Ο θόρυβος ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και ισχύ 0.001W. Το σήμα αναφοράς συμπίπτει με τη συνάρτηση διαμόρφωσης του επιθυμητού σήματος, δηλαδή

$$\rho(k) = g_0(k) = \cos(2\pi k/100). \quad (6.336)$$

Να εκτελεστεί η διαδικασία μορφοποίησης LMS για 200 επαναλήψεις ( $k=1, \dots, 200$ ), με τιμή παραμέτρου  $\delta=0.02$ , και να καταγραφούν:

- (α) Τα πλάτη των βαρών τροφοδοσίας ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων.
- (β) Το επιθυμητό σήμα και το σήμα εξόδου ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων.
- (γ) Το τετραγωνικό σφάλμα του σήματος εξόδου ως προς το σήμα αναφοράς ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων.
- (δ) Το κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας με βάση τα βάρη που προκύπτουν στο τέλος των 200 επαναλήψεων.

*Λύση:*

Η λειτουργία του μορφοποιητή LMS στηρίζεται στην εφαρμογή της (6.331) ή στην ισοδύναμη σχέση (6.328). Αντικαθιστώντας την (6.336) στην (6.328) και δεδομένου ότι  $\delta=0.02$ , παίρνουμε

$$\bar{w}(k+1) = \bar{w}(k) + 0.02 \bar{x}(k) [\cos(2\pi k/100) - \bar{x}''(k) \bar{w}(k)]. \quad (6.337)$$

Κανονικά, η εφαρμογή της άνω σχέσης απαιτεί τη γνώση της τιμής του  $\bar{x}(k)$  σε κάθε επανάληψη. Στην πράξη ο μορφοποιητής αποκτά πολύ εύκολα την τιμή αυτή. Επειδή όμως δεν έχουμε στη διάθεσή μας τέτοια δεδομένα, θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε θεωρητικά το  $\bar{x}(k)$ . Ο πίνακας οδήγησης  $\bar{A}$  των εισερχόμενων σημάτων, για τις τιμές των

γωνιών άφιξης  $\vartheta_0=60^\circ$ ,  $\vartheta_1=45^\circ$  και  $\vartheta_2=120^\circ$ , θα έχει τη μορφή της (6.237). Εφόσον το καθένα από τα δυο σήματα παρεμβολής είναι μηδενικής μέσης τιμής, η ισχύς συμπίπτει με τη διακύμανση και συνεπώς η τυπική απόκλιση του καθενός (που ισούται με την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης) θα είναι ίση με τη μονάδα. Με τη βοήθεια της (6.99), το διάνυσμα διαμόρφωσης πληροφορίας θα έχει τη μορφή

$$\bar{g}(k) = \begin{bmatrix} g_0(k) \\ g_1(k) \\ g_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/100) \\ r(0,1) \\ r(0,1) \end{bmatrix}, \quad (6.338)$$

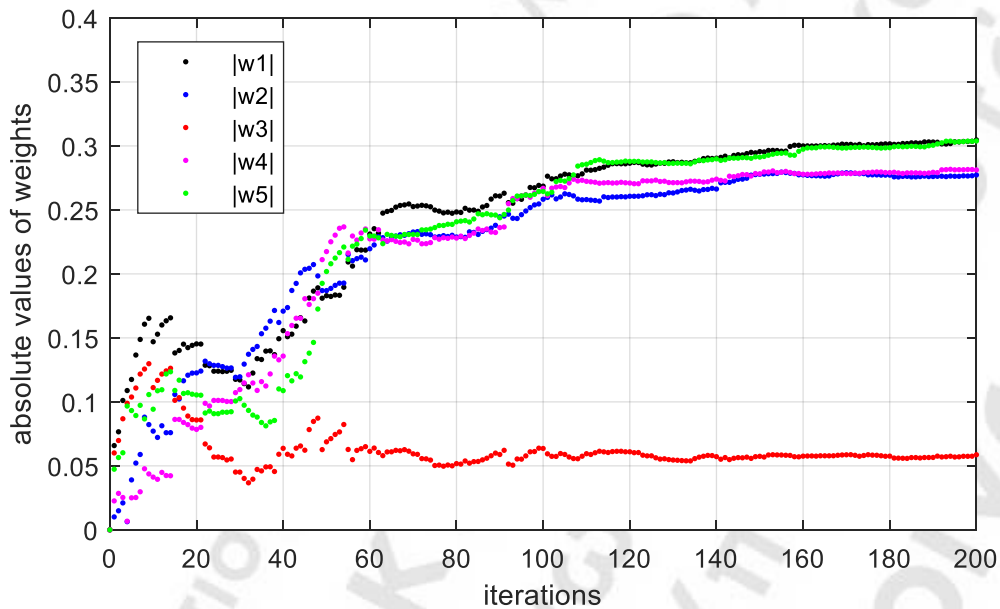
όπου  $r(0,1)$  είναι γεννήτρια συνάρτηση τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα. Εφόσον τα σήματα θορύβου είναι μηδενικής μέσης τιμής, η ισχύς συμπίπτει με τη διακύμανση και συνεπώς η τυπική απόκλιση του κάθε σήματος θα είναι ίση με  $\sqrt{0.001}$ . Έτσι, το διάνυσμα των σημάτων θορύβου θα έχει τη μορφή

$$\bar{n}(k) = \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ n_3(k) \\ n_4(k) \\ n_5(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0, \sqrt{0.001}) \\ r(0, \sqrt{0.001}) \\ r(0, \sqrt{0.001}) \\ r(0, \sqrt{0.001}) \\ r(0, \sqrt{0.001}) \end{bmatrix}, \quad (6.339)$$

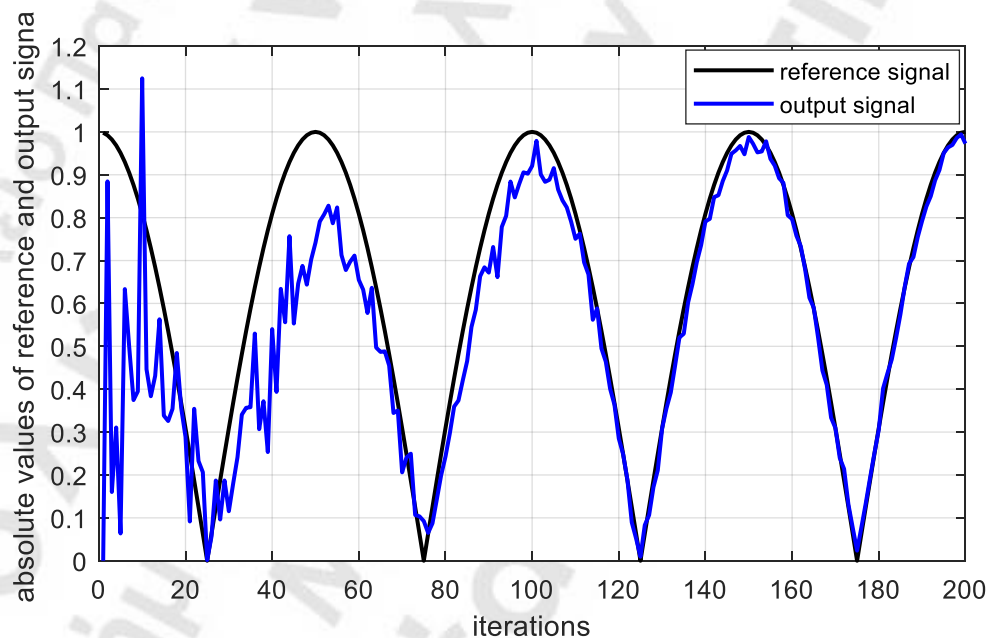
όπου  $r(0, \sqrt{0.001})$  είναι γεννήτρια συνάρτηση τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίση με  $\sqrt{0.001}$ . Αντικαθιστώντας τις (6.237), (6.338) και (6.339) στην (6.98), μπορούμε να υπολογίσουμε το  $\bar{x}(k)$ . Με αντικατάσταση της τιμής του  $\bar{x}(k)$  στην (6.337), υπολογίζεται η νέα τιμή του διανύσματος βαρών που θα χρησιμοποιηθεί στην επόμενη επανάληψη, και με τον τρόπο αυτό μετά από έναν ικανό αριθμό επαναλήψεων υπολογίζεται τελικά το διάνυσμα βαρών που επιτυγχάνει την ελάχιστη τιμή του σφάλματος  $\varepsilon(k)$ .

Στο σχήμα 6.11 φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλονται τα μέτρα των βαρών. Παρατηρούμε ότι οι τιμές σταθεροποιούνται από τις 160 επαναλήψεις περίπου και μετά. Να ληφθεί υπόψη ότι οι 160 επαναλήψεις αντιστοιχούν σε 1.6 περιόδους του σήματος αναφοράς. Άρα μια περίοδος του σήματος αναφοράς δεν είναι πάντα αρκετή για να καταλήξει ο αλγόριθμος σε ικανοποιητικό αποτέλεσμα. Κάτι παρόμοιο συμβαίνει με τα μέτρα των σημάτων αναφοράς και εξόδου. Όπως φαίνεται στο σχήμα 6.12, το σήμα εξόδου αρχίζει να παρακολουθεί με πολύ καλή ακρίβεια το σήμα αναφοράς από τις 160 επαναλήψεις περίπου και μετά. Το γεγονός αυτό φαίνεται επίσης και από το διάγραμμα του σχήματος 6.13, που δίνει τη γραφική παράσταση μεταβολής του τετραγωνικού σφάλματος του σήματος εξόδου ως προς το σήμα αναφοράς. Τέλος, για τις τιμές των βαρών στα οποία καταλήγει ο αλγόριθμος, υπολογίζεται το κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας, το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 6.14. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα,

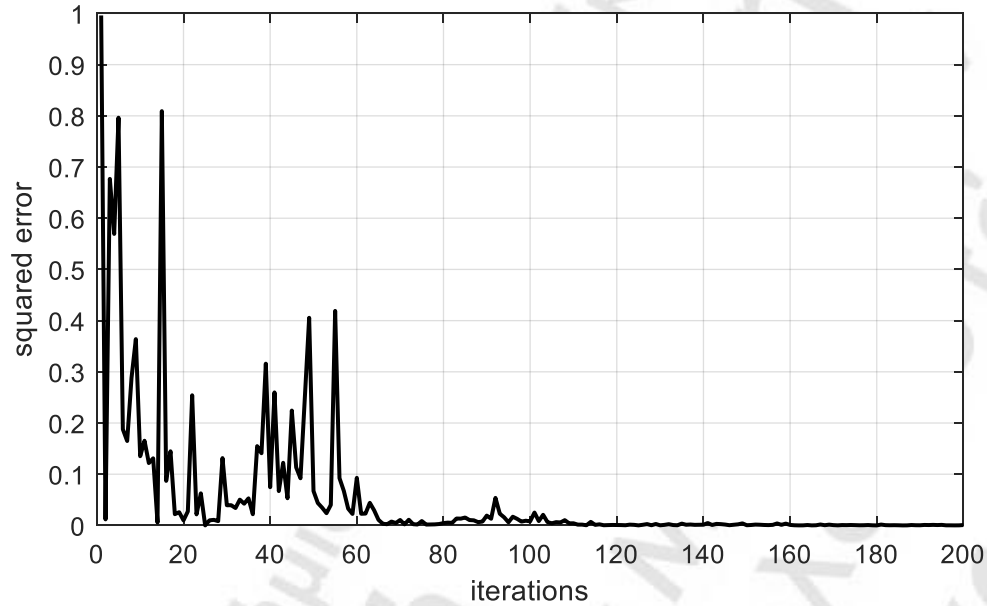
επιτυγχάνονται ακριβώς οι μηδενισμοί αλλά υπάρχει απόκλιση στην κατεύθυνση που εμφανίζεται η κορυφή του κύριου λοβού, γεγονός που το έχουμε ήδη διαπιστώσει και στους προηγούμενους αλγόριθμους μορφοποίησης.



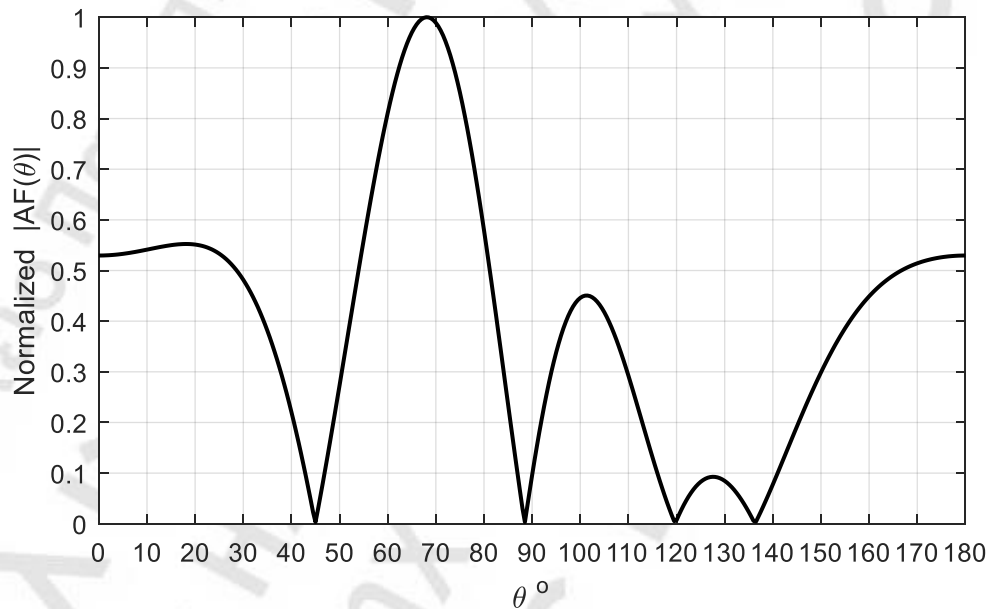
**Σχήμα 6.11** Γραφική παράσταση μεταβολής των μέτρων των βαρών τροφοδοσίας ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων.



**Σχήμα 6.12** Γραφική παράσταση μεταβολής των μέτρων του σήματος αναφοράς και του σήματος εξόδου ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων.



**Σχήμα 6.13** Γραφική παράσταση μεταβολής του τετραγωνικού σφάλματος του σήματος εξόδου ως προς το σήμα αναφοράς ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων.



**Σχήμα 6.14** Κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας στοιχειοκεραίας πέντε ισαπεχόντων ιστροπικών στοιχείων, με μηδενισμούς στις γωνίες  $\theta_1=45^\circ$  και  $\theta_2=120^\circ$ .

Ο συγκεκριμένος μορφοποιητής έχει τα ίδια πλεονεκτήματα μ' αυτά του μορφοποιητή MMSE, δηλ. μπορεί να υπολογίσει τα βάρη τροφοδοσίας κάνοντας χρήση των σημάτων εισόδου και του σήματος αναφοράς. Οι τιμές των σημάτων αυτών αποτελούν πληροφορίες που αποκτούνται εύκολα, χωρίς την ανάγκη εξαγωγής συνιστωσών μέσα από σήματα ή τη γνώση της κατεύθυνσης άφιξης εισερχόμενων σημάτων. Επιπλέον, επειδή ο συγκεκριμένος

μορφοποιητής είναι σύστημα κλειστού βρόχου (βλέπε σχήμα 6.10), μπορεί να διορθώνει σε πραγματικό χρόνο τα βάρη, παρακολουθώντας τις τιμές του σήματος αναφοράς.

Όπως φαίνεται από την (6.328) ή την (6.331), η διόρθωση των βαρών είναι μια επαναληπτική διαδικασία χαμηλής πολυπλοκότητας. Στο σημείο αυτό βρίσκεται και το βασικό μειονέκτημα του μορφοποιητή LMS. Η παρακολούθηση του σήματος αναφοράς σε πραγματικό χρόνο σημαίνει για ένα μορφοποιητή ότι πρέπει να έχει άμεση απόκριση, γεγονός που δεν ισχύει για τον μορφοποιητή LMS, λόγω της επαναληπτικής διαδικασίας που εφαρμόζεται και του αυξημένου χρόνου που συνεπάγεται για τη σύγκλιση του αλγόριθμου.

### **6.10 Μορφοποιητής αντιστροφής πίνακα δειγμάτων**

Ο μορφοποιητής αυτός είναι γνωστός με την ονομασία Sample Matrix Inversion (SMI) beamformer. Μερικές φορές αναφέρεται στη βιβλιογραφία με την ονομασία Direct Matrix Inversion (DMI) beamformer. Αποτελεί μια πρακτική υλοποίηση του μορφοποιητή MMSE. Συνεπώς, το διάγραμμα του μορφοποιητή είναι ίδιο μ' αυτό του σχήματος 6.10. Συγκεκριμένα, ο υπολογισμός των βαρών γίνεται με τη χρήση μπλοκ δειγματοληψίας. Για το  $b$ -στο μπλοκ, η (6.306) παίρνει τη μορφή

$$\bar{w}_{SMI} = \tilde{R}_{xx}^{-1}(b) \tilde{r}_{xp}(b), \quad (6.340)$$

όπου  $\tilde{R}_{xx}(b)$  είναι η προσεγγιστική μορφή του  $\bar{R}_{xx}$  που αντιστοιχεί στο  $b$ -στο μπλοκ δειγματοληψίας και υπολογίζεται από την (6.14). Επίσης,

$$\tilde{r}_{xp}(b) = \frac{1}{K} \bar{X}(b) \bar{\rho}^H(b) \quad (6.341)$$

είναι η προσεγγιστική μορφή του διανύσματος συσχέτισης  $\bar{r}_{xp}$ , η οποία προκύπτει από τα  $M \times K$  δείγματα του  $b$ -στου μπλοκ δειγματοληψίας των σημάτων εισόδου (πίνακας εισόδου από τη σχέση (6.13)) και τα  $K$  αντίστοιχα δείγματα του σήματος αναφοράς τα οποία ομαδοποιούνται στο διάνυσμα γραμμής

$$\bar{\rho}(b) = [\rho(1+(b-1)K) \quad \rho(2+(b-1)K) \quad \dots \quad \rho(K+(b-1)K)]. \quad (6.342)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.14) και (6.341) στην (6.340), παίρνουμε την τελική έκφραση υπολογισμού των βαρών τροφοδοσίας, η οποία είναι

$$\bar{w}_{SMI} = [\bar{X}(b) \bar{X}^H(b)]^{-1} \bar{X}(b) \bar{\rho}^H(b). \quad (6.343)$$

Ο υπολογισμός των βαρών μέσω της άνω σχέσης είναι διαδικασία ενός βήματος, η οποία βέβαια διενεργείται μετά από  $K$  περιόδους δειγματοληψίας, ώστε να αποθηκευτεί η πληροφορία που απαιτείται για την κατασκευή του πίνακα εισόδου  $\bar{X}(b)$  και του διανύσματος  $\bar{\rho}(b)$ . Συνεπώς, ο μορφοποιητής αυτός έχει το πλεονέκτημα της άμεσης απόκρισης σε στιγμιαίες αλλαγές των κατευθύνσεων άφιξης των εισερχόμενων σημάτων (γεγονός που δεν ισχύει για τον μορφοποιητή LMS). Έχει όμως το μειονέκτημα, σε σχέση με τον μορφοποιητή LMS, της υψηλότερης πολυπλοκότητας. Επιπλέον, από τα δεδομένα που



θα συλλεχθούν σε κάποιο μπλοκ δειγματοληψίας, υπάρχει μια μικρή πιθανότητα να προκύψει πίνακας  $\tilde{R}_{xx}(b)$  ιδιάζων, που είναι μη-αντιστρέψιμος, ή κακώς ορισμένος, ο οποίος αντιστρέφεται αλλά επειδή έχει ορίζουσα κοντά στο μηδέν δημιουργεί μεγάλες αποκλίσεις από τη σωστή λύση.

*Παράδειγμα εφαρμογής:*

Μορφοποιητής SMI λειτουργεί σε συχνότητα  $f=800\text{MHz}$  και χρησιμοποιεί στοιχειοκεραία 5 ιστροπικών στοιχείων ( $M=5$ ) που διατάσσονται στον  $z$ -άξονα του συστήματος συντεταγμένων και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d=\lambda/2$ . Στον μορφοποιητή εισέρχονται ένα επιθυμητό σήμα ( $n=0$ ) με γωνία άφιξης  $\theta_0=60^\circ$  και δυο σήματα παρεμβολής ( $N=2$ ) με αντίστοιχες γωνίες άφιξης  $\theta_1=45^\circ$  και  $\theta_2=120^\circ$  (elevation angles). Τα σήματα αυτά υφίστανται δειγματοληψία με συχνότητα  $f_s=100f$ . Τα δείγματα της συνάρτησης διαμόρφωσης του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος λαμβάνονται από τη σχέση

$$g_0(k) = \cos(2\pi f T_s k) = \cos(2\pi k/100), \quad (6.344)$$

ενώ το καθένα από τα δυο σήματα παρεμβολής ακολουθεί κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και ισχύ 1W. Ο θόρυβος ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και ισχύ 0.001W. Το σήμα αναφοράς συμπίπτει με τη συνάρτηση διαμόρφωσης του επιθυμητού σήματος, δηλαδή

$$\rho(k) = g_0(k) = \cos(2\pi k/100). \quad (6.345)$$

Να εκτελεστεί η διαδικασία μορφοποίησης SMI με μπλοκ δειγματοληψίας 50 δειγμάτων ( $K=50$ ), και να καταγραφούν:

(α) Τα πλάτη των βαρών τροφοδοσίας που προκύπτουν.

(β) Το κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας.

*Λύση:*

Η λειτουργία του μορφοποιητή SMI στηρίζεται στην εφαρμογή της (6.343). Κανονικά, η εφαρμογή της άνω σχέσης απαιτεί τη γνώση του  $\bar{X}(b)$ . Στην πράξη ο μορφοποιητής κατασκευάζει πολύ εύκολα τον πίνακα αυτό. Επειδή όμως δεν έχουμε στη διάθεσή μας τέτοια δεδομένα, θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε θεωρητικά τον  $\bar{X}(b)$ . Ο πίνακας οδήγησης  $\bar{A}$  των εισερχόμενων σημάτων, για τις τιμές των γωνιών άφιξης  $\theta_0=60^\circ$ ,  $\theta_1=45^\circ$  και  $\theta_2=120^\circ$ , θα έχει τη μορφή της (6.237). Εφόσον το καθένα από τα δυο σήματα παρεμβολής είναι μηδενικής μέσης τιμής, η ισχύς συμπίπτει με τη διακύμανση και συνεπώς η τυπική απόκλιση του καθενός (που ισούται με την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης) θα είναι ίση με τη μονάδα. Με τη βοήθεια της (6.111), ο πίνακας διαμόρφωσης πληροφορίας για το 1ο μπλοκ δειγματοληψίας ( $b=1$ ) θα έχει τη μορφή

$$\bar{G}(1) = \overbrace{\begin{bmatrix} \cos(2\pi/100) & \cos(4\pi/100) & \cdots & \cos\pi \\ r(0,1) & r(0,1) & \cdots & r(0,1) \\ r(0,1) & r(0,1) & \cdots & r(0,1) \end{bmatrix}}^{50 \text{ στήλες}}, \quad (6.346)$$

όπου  $r(0,1)$  είναι γεννήτρια συνάρτηση τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα. Εφόσον τα σήματα θορύβου είναι μηδενικής μέσης τιμής, η ισχύς συμπίπτει με τη διακύμανση και συνεπώς η τυπική απόκλιση του κάθε σήματος θα είναι ίση με  $\sqrt{0.001}$ . Έτσι, με τη βοήθεια της (6.29), ο πίνακας των σημάτων θορύβου για το 1ο μπλοκ δειγματοληψίας ( $b=1$ ) θα έχει τη μορφή

$$\bar{N}(1) = \begin{matrix} & \text{50 στήλες} \\ \begin{bmatrix} r(0, \sqrt{0.001}) & r(0, \sqrt{0.001}) & \cdots & r(0, \sqrt{0.001}) \\ r(0, \sqrt{0.001}) & r(0, \sqrt{0.001}) & \cdots & r(0, \sqrt{0.001}) \\ r(0, \sqrt{0.001}) & r(0, \sqrt{0.001}) & \cdots & r(0, \sqrt{0.001}) \\ r(0, \sqrt{0.001}) & r(0, \sqrt{0.001}) & \cdots & r(0, \sqrt{0.001}) \\ r(0, \sqrt{0.001}) & r(0, \sqrt{0.001}) & \cdots & r(0, \sqrt{0.001}) \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (6.347)$$

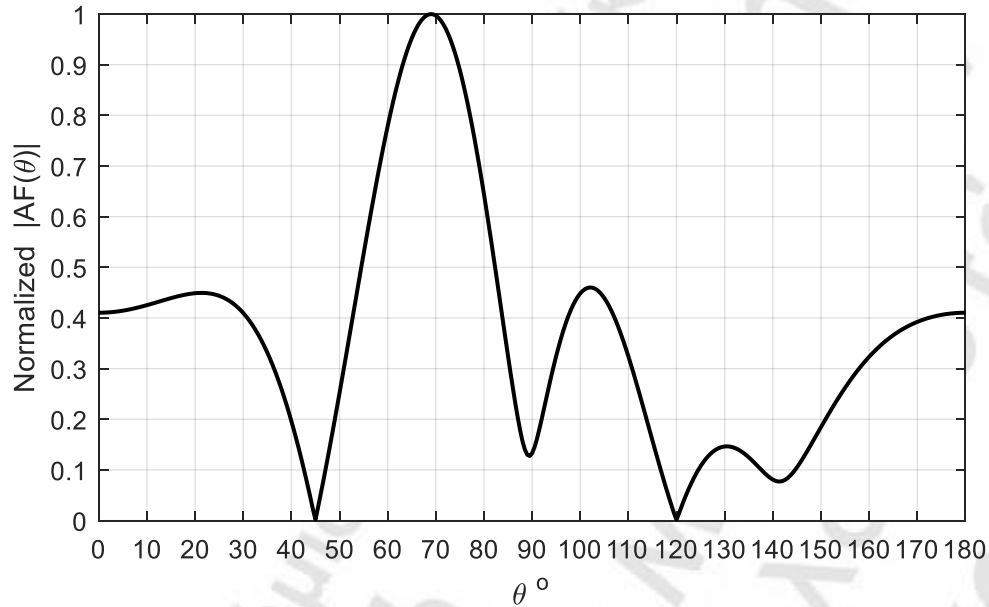
όπου  $r(0, \sqrt{0.001})$  είναι γεννήτρια συνάρτηση τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίση με  $\sqrt{0.001}$ . Αντικαθιστώντας τις (6.237), (6.346) και (6.347) στην (6.110), μπορούμε να υπολογίσουμε το  $\bar{X}(1)$ , δηλ. τον πίνακα εισόδου για το 1ο μπλοκ ( $b=1$ ). Λόγω της (6.345), η (6.342) για το 1ο μπλοκ δίνει

$$\bar{\rho}(1) = \begin{matrix} & \text{50 στοιχεία} \\ \begin{bmatrix} \cos(2\pi/100) & \cos(4\pi/100) & \cdots & \cos\pi \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (6.348)$$

Αντικαθιστώντας τα  $\bar{X}(1)$  και  $\bar{\rho}(1)$  στην (6.343), υπολογίζουμε το διάνυσμα βαρών, που αντιστοιχεί στο 1ο μπλοκ δειγματοληψίας, ίσο με

$$\bar{w}_{SMI} = \begin{bmatrix} 0.171 + j0.254 \\ -0.121 + j0.305 \\ -0.109 + j0.028 \\ -0.122 - j0.195 \\ 0.219 - j0.225 \end{bmatrix}. \quad (6.349)$$

Το κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας φαίνεται στο σχήμα 6.15. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα, επιτυγχάνονται ακριβώς οι μηδενισμοί αλλά υπάρχει απόκλιση στην κατεύθυνση που εμφανίζεται η κορυφή του κύριου λοβού, γεγονός που το έχουμε ήδη διαπιστώσει και σ' όλους τους προηγούμενους αλγόριθμους μορφοποίησης. Αυτό όμως που πρέπει να τονιστεί είναι ότι οι μηδενισμοί επιτυγχάνονται χρησιμοποιώντας μόνο 50 δείγματα, ενώ ο μορφοποιητής LMS δίνει παρόμοιο αποτέλεσμα μετά από 160 επαναλήψεις, δηλ. κάνοντας χρήση 160 δειγμάτων. Ολοκληρώνοντας, να σημειωθεί ότι όλη η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και για τα επόμενα μπλοκ δειγματοληψίας.



**Σχήμα 6.15** Κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας στοιχειοκεραίας πέντε ισαπεχόντων ιστροπικών στοιχείων, με μηδενισμούς στις γωνίες  $\theta_1=45^\circ$  και  $\theta_2=120^\circ$ .

### **6.11 Μορφοποιητής αναδρομικής τεχνικής ελαχίστων τετραγώνων**

Ο μορφοποιητής αυτός είναι γνωστός με την ονομασία Recursive Least Squares (RLS) beamformer. Αποτελεί μια πρακτική υλοποίηση του μορφοποιητή MMSE, διατηρώντας όμως χαμηλή πολυπλοκότητα σε αντίθεση με τον αλγόριθμο SMI, η πολυπλοκότητα του οποίου είναι αρκετά υψηλή λόγω της αντιστροφής του πίνακα  $\tilde{R}_{xx}$ . Το διάγραμμα του μορφοποιητή είναι και πάλι ίδιο μ' αυτό του σχήματος 6.10.

Ο υπολογισμός των βαρών δεν γίνεται με τη χρήση μπλοκ δειγματοληψίας. Τα δείγματα των σημάτων εισόδου και αναφοράς, που λαμβάνονται, αποθηκεύονται συνεχώς, δημιουργώντας έτσι έναν πίνακα συσχέτισης  $\tilde{R}_{xx}$  που ενημερώνεται (επικαιροποιείται) σε κάθε στιγμή δειγματοληψίας. Έστω ότι από την αρχή της δειγματοληψίας έχουν ληφθεί  $q$  δείγματα των σημάτων εισόδου και του σήματος αναφοράς, δηλ. αντιστοίχως  $\bar{x}(k)$  και  $\rho(k)$ ,  $k=1, \dots, q$ . Διαμορφώνοντας κατάλληλα την (6.11), ο πίνακας συσχέτισης των σημάτων εισόδου μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\tilde{R}_{xx}(q) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \bar{x}(k) \bar{x}^H(k), \quad (6.350)$$

όπου μέσα στην παρένθεση δεν αναφέρεται ο αύξων αριθμός του μπλοκ στο οποίο αντιστοιχεί ο πίνακας  $\tilde{R}_{xx}$  (όπως συνέβαινε μέχρι τώρα), αλλά το σύνολο των δειγμάτων από τα οποία κατασκευάζεται ο πίνακας αυτός κατά την τρέχουσα στιγμή δειγματοληψίας. Με όμοιο τρόπο και λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του διανύσματος συσχέτισης μεταξύ των σημάτων εισόδου και αναφοράς που δίνεται από την (6.305), μπορούμε να γράψουμε

$$\tilde{r}_{xp}(q) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \bar{x}(k) \rho^*(k). \quad (6.351)$$

Με σκοπό να δίνουμε μεγαλύτερη έμφαση στα πρόσφατα δείγματα και μικρότερη στα παλαιότερα, μπορούμε να τροποποιήσουμε τις δυο άνω σχέσεις, εισάγοντας μια παράμετρο  $a$  η οποία σταθμίζει τους όρους των αθροισμάτων αναλόγως της παλαιότητάς τους. Έτσι, οι δυο άνω σχέσεις γίνονται αντίστοιχα

$$\tilde{R}_{xx}(q) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q a^{q-k} \bar{x}(k) \bar{x}^H(k) \quad (6.352)$$

και

$$\tilde{r}_{xp}(q) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q a^{q-k} \bar{x}(k) \rho^*(k). \quad (6.353)$$

Η παράμετρος  $a$  ονομάζεται *παράγοντας άγνοιας* (forgetting factor), παίρνει τιμές στο διάστημα  $(0,1]$  ( $0 < a \leq 1$ ), και εκφράζει το ποσοστό της έμφασης που δίνουμε σε ένα δείγμα σε σχέση με το αμέσως επόμενο (νεότερο). Προφανώς, σε ένα σύνολο  $q$  δειγμάτων, το  $q$ -στο (δηλ. το πιο πρόσφατο) λαμβάνεται με πλήρη έμφαση, ενώ το πρώτο ( $k=1$ ) λαμβάνεται με τη μικρότερη έμφαση επειδή πολλαπλασιάζεται επί  $a^{q-1}$ . Στην περίπτωση που  $a=1$ , οι (6.352) και (6.353) επανέρχονται αντίστοιχα στις μορφές (6.350) και (6.351), όπου όλα τα δείγματα λαμβάνονται με την ίδια έμφαση.

Αν από τα αθροίσματα των δυο άνω σχέσεων ξεχωρίσουμε τον τελευταίο (δηλ. πιο πρόσφατο) όρο, οι σχέσεις γράφονται αντίστοιχα με τη μορφή

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{xx}(q) &= \frac{1}{q} \left[ \sum_{k=1}^{q-1} a^{q-k} \bar{x}(k) \bar{x}^H(k) + \bar{x}(q) \bar{x}^H(q) \right] = \\ &= \frac{q-1}{q} \left[ a \frac{1}{q-1} \sum_{k=1}^{q-1} a^{q-1-k} \bar{x}(k) \bar{x}^H(k) + \bar{x}(q) \bar{x}^H(q) \right] = \\ &= \frac{q-1}{q} \left[ a \tilde{R}_{xx}(q-1) + \bar{x}(q) \bar{x}^H(q) \right] \end{aligned} \quad (6.354)$$

και

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{xp}(q) &= \frac{1}{q} \left[ \sum_{k=1}^{q-1} a^{q-k} \bar{x}(k) \rho^*(k) + \bar{x}(q) \rho^*(q) \right] = \\ &= \frac{q-1}{q} \left[ a \frac{1}{q-1} \sum_{k=1}^{q-1} a^{q-1-k} \bar{x}(k) \rho^*(k) + \bar{x}(q) \rho^*(q) \right] = \\ &= \frac{q-1}{q} \left[ a \tilde{r}_{xp}(q-1) + \bar{x}(q) \rho^*(q) \right]. \end{aligned} \quad (6.355)$$

Η μαθηματική σημασία των δυο άνω σχέσεων είναι ότι τα  $\tilde{R}_{xx}(q)$  και  $\tilde{r}_{xp}(q)$  μπορούν να υπολογιστούν αναδρομικά από την τιμή που είχαν την προηγούμενη στιγμή δειγματοληψίας και τις τιμές των δειγμάτων  $\bar{x}(q)$  και  $\rho(q)$  κατά την τρέχουσα στιγμή.

Επιπλέον, για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του  $\tilde{R}_{xx}(q)$ , μπορούμε να εφαρμόσουμε τη φόρμουλα των Sherman-Morrison-Woodbury (SMW formula), σύμφωνα με την οποία

$$(\bar{A} + \bar{U}\bar{C}\bar{V})^{-1} = \bar{A}^{-1} - \bar{A}^{-1}\bar{U}(\bar{C}^{-1} + \bar{V}\bar{A}^{-1}\bar{U})^{-1}\bar{V}\bar{A}^{-1}. \quad (6.356)$$

Στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε,  $\bar{A} = a\tilde{R}_{xx}(q-1)$  (πίνακας  $m \times m$ ),  $\bar{U} = \bar{x}(q)$  (διάνυσμα στήλης  $m \times 1$ ),  $\bar{C} = 1$  (βαθμωτή ποσότητα) και  $\bar{V} = \bar{x}^H(q)$  (διάνυσμα γραμμής  $1 \times m$ ). Εφαρμόζοντας την (6.356) στην (6.354), και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ποσότητα

$$\bar{C}^{-1} + \bar{V}\bar{A}^{-1}\bar{U} = 1 + a^{-1}\bar{x}^H(q)\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1)\bar{x}(q) \quad (6.357)$$

είναι βαθμωτή ποσότητα και όχι διάνυσμα ή πίνακας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{xx}^{-1}(q) &= \left( \frac{q-1}{q} \right)^{-1} \left[ a\tilde{R}_{xx}(q-1) + \bar{x}(q)\bar{x}^H(q) \right]^{-1} = \\ &= \frac{q}{q-1} \left[ a^{-1}\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1) - \frac{a^{-2}\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1)\bar{x}(q)\bar{x}^H(q)\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1)}{1 + a^{-1}\bar{x}^H(q)\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1)\bar{x}(q)} \right], \end{aligned} \quad (6.358)$$

η οποία γράφεται με τη μορφή

$$\tilde{R}_{xx}^{-1}(q) = \frac{q}{q-1} \left[ a^{-1}\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1) - a^{-1}\bar{h}(q)\bar{x}^H(q)\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1) \right], \quad (6.359)$$

όπου

$$\bar{h}(q) = \frac{a^{-1}\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1)\bar{x}(q)}{1 + a^{-1}\bar{x}^H(q)\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1)\bar{x}(q)}. \quad (6.360)$$

Η (6.359) είναι μια μορφή εξίσωσης Riccati προσαρμοσμένης στη μέθοδο RLS. Η σχέση (6.360) μετασχηματίζεται στην έκφραση

$$\bar{h}(q) + \bar{h}(q)a^{-1}\bar{x}^H(q)\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1)\bar{x}(q) = a^{-1}\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1)\bar{x}(q),$$

ή στην ισοδύναμη μορφή

$$\bar{h}(q) = \left[ a^{-1}\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1) - a^{-1}\bar{h}(q)\bar{x}^H(q)\tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1) \right] \bar{x}(q). \quad (6.361)$$

Η ποσότητα μέσα στις αγκύλες της (6.361) είναι ίδια με την ποσότητα εντός των αγκυλών της (6.359). Συνεπώς, η (6.361) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\bar{h}(q) = \frac{q-1}{q} \tilde{R}_{xx}^{-1}(q)\bar{x}(q). \quad (6.362)$$

Εφόσον ο μορφοποιητής RLS αποτελεί πρακτική υλοποίηση του μορφοποιητή MMSE, για τον υπολογισμό των βαρών τροφοδοσίας θα χρησιμοποιηθεί η (6.306), η οποία για την  $q$ -στη στιγμή δειγματοληψίας παίρνει τη μορφή

$$\bar{w}_{RLS}(q) = \tilde{R}_{xx}^{-1}(q)\tilde{r}_{xp}(q). \quad (6.363)$$

Λόγω της (6.355), η άνω σχέση δίνει

$$\bar{w}_{RLS}(q) = \frac{q-1}{q} a \tilde{R}_{xx}^{-1}(q) \tilde{r}_{xp}(q-1) + \frac{q-1}{q} \tilde{R}_{xx}^{-1}(q) \bar{x}(q) \rho^*(q). \quad (6.364)$$

Η σχέση (6.364), με αντικατάσταση του  $\tilde{R}_{xx}^{-1}(q)$  στον πρώτο όρο του αθροίσματός της από την (6.359), παίρνει τη μορφή

$$\bar{w}_{RLS}(q) = \tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1) \tilde{r}_{xp}(q-1) - \bar{h}(q) \bar{x}^H(q) \tilde{R}_{xx}^{-1}(q-1) \tilde{r}_{xp}(q-1) + \frac{q-1}{q} \tilde{R}_{xx}^{-1}(q) \bar{x}(q) \rho^*(q),$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{w}_{RLS}(q) = \bar{w}_{RLS}(q-1) - \bar{h}(q) \bar{x}^H(q) \bar{w}_{RLS}(q-1) + \frac{q-1}{q} \tilde{R}_{xx}^{-1}(q) \bar{x}(q) \rho^*(q). \quad (6.365)$$

Τέλος, λόγω της (6.362), η άνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$\bar{w}_{RLS}(q) = \bar{w}_{RLS}(q-1) - \bar{h}(q) \bar{x}^H(q) \bar{w}_{RLS}(q-1) + \bar{h}(q) \rho^*(q), \quad (6.366)$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{w}_{RLS}(q) = \bar{w}_{RLS}(q-1) + \bar{h}(q) [\rho^*(q) - \bar{x}^H(q) \bar{w}_{RLS}(q-1)]. \quad (6.367)$$

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται αντιληπτό ότι μπορούμε με αναδρομικό (recursive) τρόπο να υπολογίζουμε τις τιμές των  $\bar{h}(q)$ ,  $\tilde{R}_{xx}^{-1}(q)$  και  $\bar{w}_{RLS}(q)$ , θεωρώντας ότι, έπειτα από έναν ικανό αριθμό δειγματοληψιών  $q$ , τα βάρη τροφοδοσίας αποκτούν τις κατάλληλες τιμές που ελαχιστοποιούν το σφάλμα του σήματος εξόδου ως προς το σήμα αναφοράς. Το σημαντικό πλεονέκτημα είναι ότι δεν απαιτείται ευθεία αντιστροφή του πίνακα  $\tilde{R}_{xx}$ . Ο αντίστροφος πίνακας συσχέτισης μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά από την (6.359) ελαττώνοντας έτσι το πλήθος των υπολογισμών.

Συμπερασματικά, ο αλγόριθμος RLS μπορεί να υλοποιηθεί με βάση τα εξής βήματα:

1. Ορίζουμε την τιμή της παραμέτρου  $a$  και το συνολικό αριθμό  $Q$  των δειγμάτων τα οποία θα ληφθούν υπόψη στον αλγόριθμο.
2. Αρχικοποιούμε το διάνυσμα βαρών για  $q = 1$ , δηλαδή θέτουμε

$$\bar{w}_{RLS}(1) = \bar{0}. \quad (6.368)$$

3. Αρχικοποιούμε τον  $\tilde{R}_{xx}^{-1}(1)$  για  $q = 1$ , δηλαδή θέτουμε

$$\tilde{R}_{xx}^{-1}(1) = \delta \bar{I}_{m \times m}, \quad (6.369)$$

όπου  $\delta$  αυθαίρετος θετικός πραγματικός αριθμός με αρκετά μεγάλη τιμή (π.χ.  $\delta = 10^6$ ).

4. Για κάθε  $q = 2$  ως  $Q$  (με βήμα 1):

5a. Υπολογίζεται η τιμή του  $\bar{h}(q)$  από την (6.360).

5b. Υπολογίζεται η τιμή του  $\tilde{R}_{xx}^{-1}(q)$  από την (6.359).

5c. Υπολογίζεται η τιμή του  $\bar{w}_{RLS}(q)$  από την (6.367).

Πρακτικώς, δεν είναι απαραίτητο ο αλγόριθμος να ολοκληρώνεται με τη λήψη συγκεκριμένου αριθμού δειγμάτων  $Q$ . Μπορεί να τρέχει συνεχώς και να διορθώνει τα βάρη παρακολουθώντας σε πραγματικό χρόνο τις μεταβολές των σημάτων. Οι απαιτήσεις σε μνήμη είναι μικρές, δεδομένου ότι για τους υπολογισμούς κάθε βήματος χρησιμοποιούνται πληροφορίες που αφορούν το τρέχον βήμα και το αμέσως προηγούμενο.

*Παράδειγμα εφαρμογής:*

Μορφοποιητής RLS λειτουργεί σε συχνότητα  $f=800\text{MHz}$  και χρησιμοποιεί στοιχειοκεραία 5 ισοτροπικών στοιχείων ( $M=5$ ) που διατάσσονται στον  $z$ -άξονα του συστήματος συντεταγμένων και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $d=\lambda/2$ . Στον μορφοποιητή εισέρχονται ένα επιθυμητό σήμα ( $n=0$ ) με γωνία άφιξης  $\theta_0=60^\circ$  και δυο σήματα παρεμβολής ( $N=2$ ) με αντίστοιχες γωνίες άφιξης  $\theta_1=45^\circ$  και  $\theta_2=120^\circ$  (elevation angles). Τα σήματα αυτά υφίστανται δειγματοληψία με συχνότητα  $f_s=100f$ . Τα δείγματα της συνάρτησης διαμόρφωσης του επιθυμητού εισερχόμενου σήματος λαμβάνονται από τη σχέση

$$g_0(q) = \cos(2\pi f T_s q) = \cos(2\pi q/100), \quad (6.370)$$

ενώ το καθένα από τα δυο σήματα παρεμβολής ακολουθεί κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και ισχύ  $1\text{W}$ . Ο θόρυβος ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και ισχύ  $0.001\text{W}$ . Το σήμα αναφοράς συμπίπτει με τη συνάρτηση διαμόρφωσης του επιθυμητού σήματος, δηλαδή

$$\rho(q) = g_0(q) = \cos(2\pi q/100). \quad (6.371)$$

Να εκτελεστεί η διαδικασία μορφοποίησης RLS για  $Q=50$  επαναλήψεις ( $q=1, \dots, 50$ ), με τιμή παραμέτρου  $a=0.98$ , και να καταγραφούν:

- (α) Τα πλάτη των βαρών τροφοδοσίας ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων.
- (β) Το επιθυμητό σήμα και το σήμα εξόδου ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων.
- (γ) Το τετραγωνικό σφάλμα του σήματος εξόδου ως προς το σήμα αναφοράς ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων.
- (δ) Το κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας με βάση τα βάρη που προκύπτουν στο τέλος των 50 επαναλήψεων.

*Λύση:*

Επειδή δεν έχουμε στη διάθεσή μας τις τιμές των  $\bar{x}(q)$ , θα προσπαθήσουμε να τις κατασκευάσουμε θεωρητικά. Ο πίνακας οδήγησης  $\bar{A}$  των εισερχόμενων σημάτων, για γωνίες άφιξης  $\theta_0=60^\circ$ ,  $\theta_1=45^\circ$  και  $\theta_2=120^\circ$ , θα έχει τη μορφή της (6.237). Εφόσον το καθένα από τα δυο σήματα παρεμβολής είναι μηδενικής μέσης τιμής, η ισχύς συμπίπτει με τη διακύμανση και συνεπώς η τυπική απόκλιση του καθενός (που ισούται με την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης) θα είναι ίση με τη μονάδα. Με τη βοήθεια της (6.99), το διάνυσμα διαμόρφωσης πληροφορίας θα έχει τη μορφή

$$\bar{g}(q) = \begin{bmatrix} g_0(q) \\ g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi q/100) \\ r(0,1) \\ r(0,1) \end{bmatrix}, \quad (6.372)$$

όπου  $r(0,1)$  είναι γεννήτρια συνάρτηση τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα. Εφόσον τα σήματα θορύβου είναι μηδενικής μέσης τιμής, η ισχύς συμπίπτει με τη διακύμανση και συνεπώς η τυπική απόκλιση του κάθε σήματος θα είναι ίση με  $\sqrt{0.001}$ . Έτσι, το διάνυσμα των σημάτων θορύβου θα έχει τη μορφή

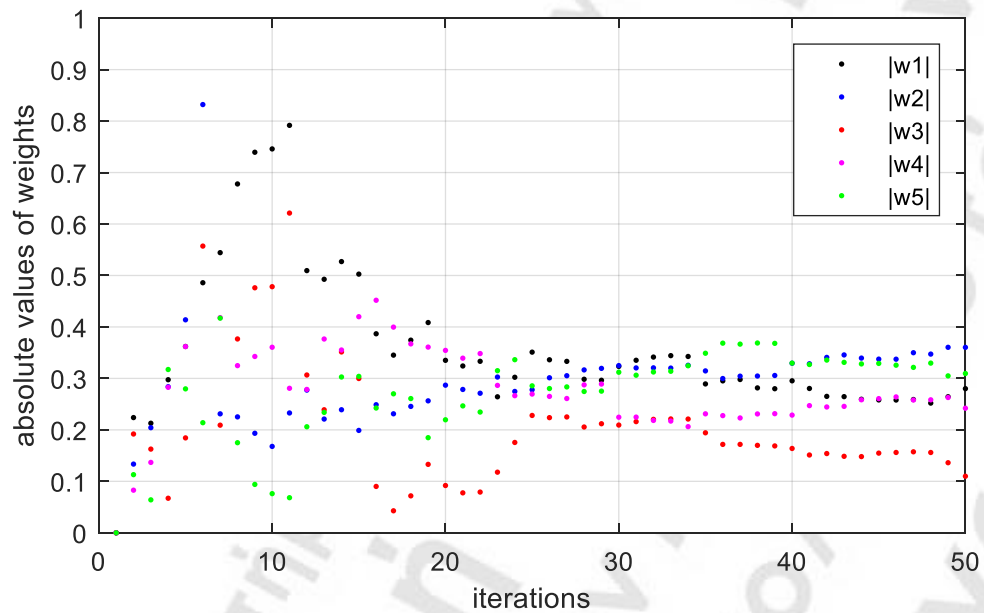
$$\bar{n}(q) = \begin{bmatrix} n_1(q) \\ n_2(q) \\ n_3(q) \\ n_4(q) \\ n_5(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0, \sqrt{0.001}) \\ r(0, \sqrt{0.001}) \\ r(0, \sqrt{0.001}) \\ r(0, \sqrt{0.001}) \\ r(0, \sqrt{0.001}) \end{bmatrix}, \quad (6.373)$$

όπου  $r(0, \sqrt{0.001})$  είναι γεννήτρια συνάρτηση τυχαίων αριθμών που ακολουθούν κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίση με  $\sqrt{0.001}$ . Αντικαθιστώντας τις (6.237), (6.372) και (6.373) στην (6.98), μπορούμε να υπολογίσουμε το  $\bar{x}(q)$  για κάθε βήμα. Εφαρμόζουμε λοιπόν τον αλγόριθμο RLS με τη δομή που δόθηκε πιο πάνω.

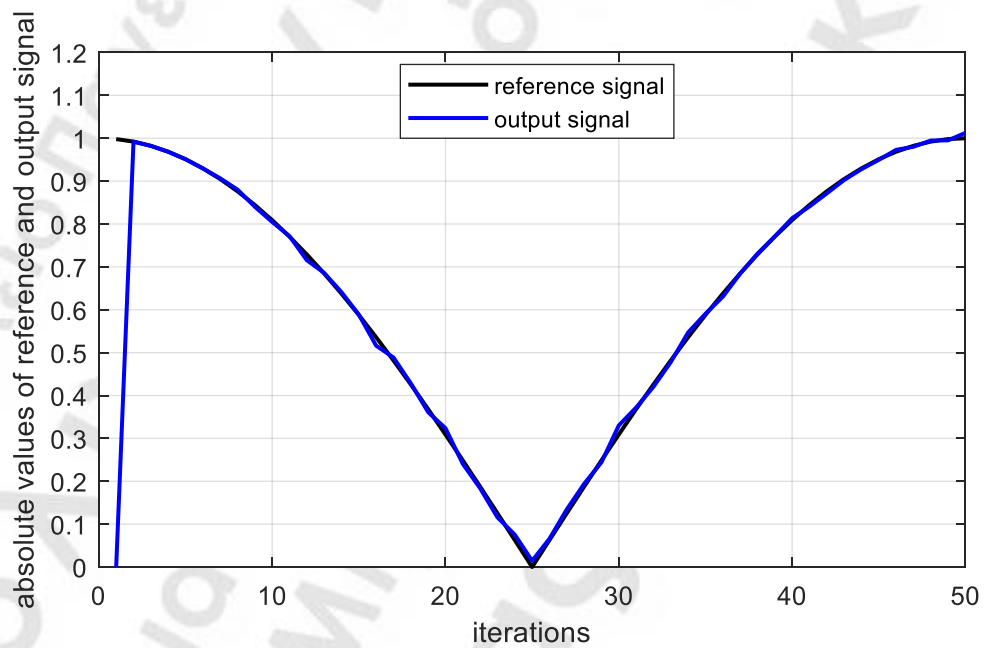
Στο σχήμα 6.16 φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλονται τα μέτρα των βαρών. Παρατηρούμε ότι οι τιμές σταθεροποιούνται από τις 40 επαναλήψεις περίπου και μετά. Να ληφθεί μάλιστα υπόψη ότι οι 40 επαναλήψεις αντιστοιχούν σε χρονικό διάστημα λιγότερο από μισή περίοδο του σήματος αναφοράς. Επιπλέον, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.17, το σήμα εξόδου παρακολουθεί με εξαιρετική ακρίβεια το σήμα αναφοράς από τις πρώτες επαναλήψεις. Το γεγονός αυτό φαίνεται επίσης και από το διάγραμμα του σχήματος 6.18, που απεικονίζει το τετραγωνικό σφάλμα του σήματος εξόδου ως προς το σήμα αναφοράς. Τέλος, για τις τιμές των βαρών στα οποία καταλήγει ο αλγόριθμος, υπολογίζεται το κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας, το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 6.19. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι επιτυγχάνονται ακριβώς οι μηδενισμοί στις  $45^\circ$  και  $120^\circ$ , αλλά όπως και στους προηγούμενους αλγόριθμους μορφοποίησης υπάρχει απόκλιση στην κατεύθυνση που εμφανίζεται η κορυφή του κύριου λοβού.

Ο μορφοποιητής RLS διατηρεί τα βασικά πλεονεκτήματα των μορφοποιητών MMSE, LMS και SMI, δηλ. μπορεί να υπολογίσει τα βάρη τροφοδοσίας κάνοντας χρήση των σημάτων εισόδου και αναφοράς, χωρίς την ανάγκη εξαγωγής συνιστωσών μέσα από σήματα ή τη γνώση της κατεύθυνσης άφιξης εισερχόμενων σημάτων. Επιπλέον, μπορεί να διορθώνει σε πραγματικό χρόνο τα βάρη τροφοδοσίας, παρακολουθώντας τις τιμές του σήματος αναφοράς. Στην ουσία ο μορφοποιητής RLS αποτελεί μια μέση λύση ανάμεσα στους LMS και SMI, δεδομένου ότι διατηρεί τη χαμηλή πολυπλοκότητα που προσφέρει ο LMS χωρίς όμως να απαιτεί μεγάλο αριθμό επαναλήψεων για να συγκλίνει σε αποτέλεσμα.

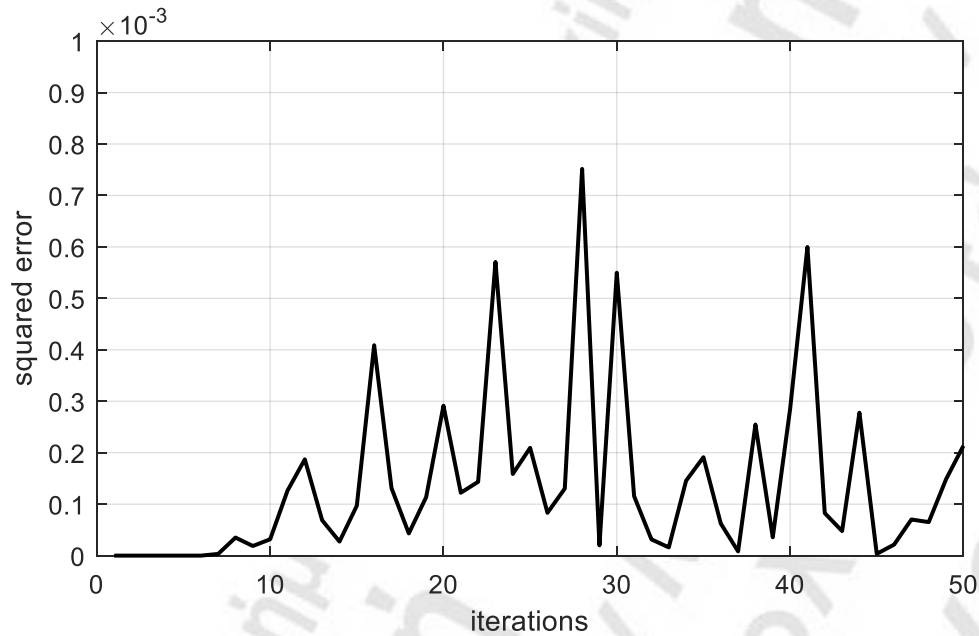




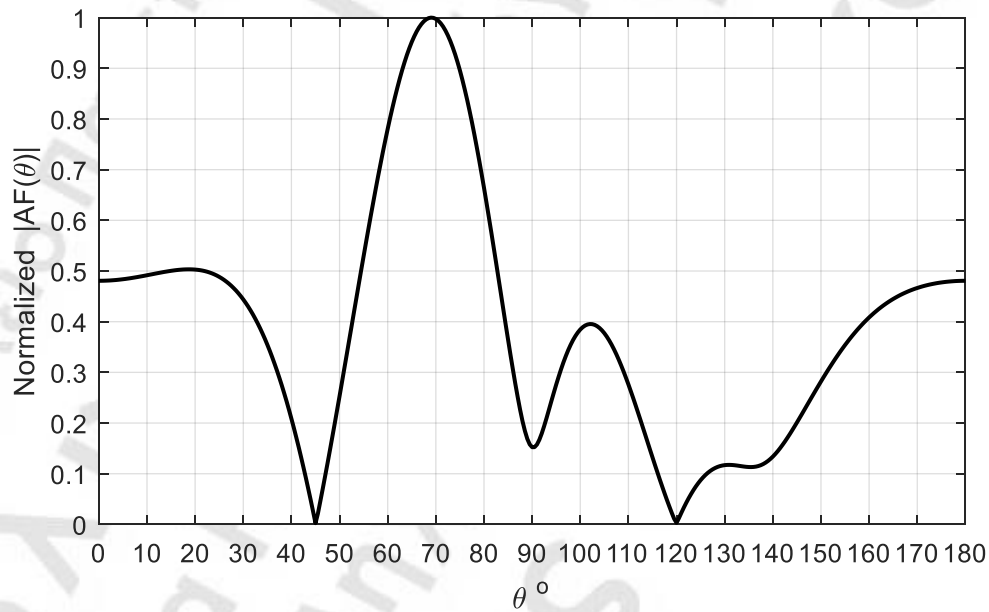
**Σχήμα 6.16** Γραφική παράσταση μεταβολής των μέτρων των βαρών τροφοδοσίας ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων.



**Σχήμα 6.17** Γραφική παράσταση μεταβολής των μέτρων του σήματος αναφοράς και του σήματος εξόδου ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων.



**Σχήμα 6.18** Γραφική παράσταση μεταβολής του τετραγωνικού σφάλματος του σήματος εξόδου ως προς το σήμα αναφοράς ως συνάρτηση του αριθμού επαναλήψεων.



**Σχήμα 6.19** Κανονικοποιημένο διάγραμμα ακτινοβολίας στοιχειοκεραίας πέντε ισαπεχόντων ιστροπικών στοιχείων, με μηδενισμούς στις γωνίες  $\theta_1=45^\circ$  και  $\theta_2=120^\circ$ .