Οπτικές Επικοινωνίες

Προαιρετικά Θέματα 2ου Κεφαλαίου

Αλέξανδρος Τζήκας

alextzik@ece.auth.gr - 8978

Προαιρετικά Θέματα 2ου Κεφαλαίου

Οπτικοί Κυματοδηγοί Ι: Ρυθμοί Διάδοσης

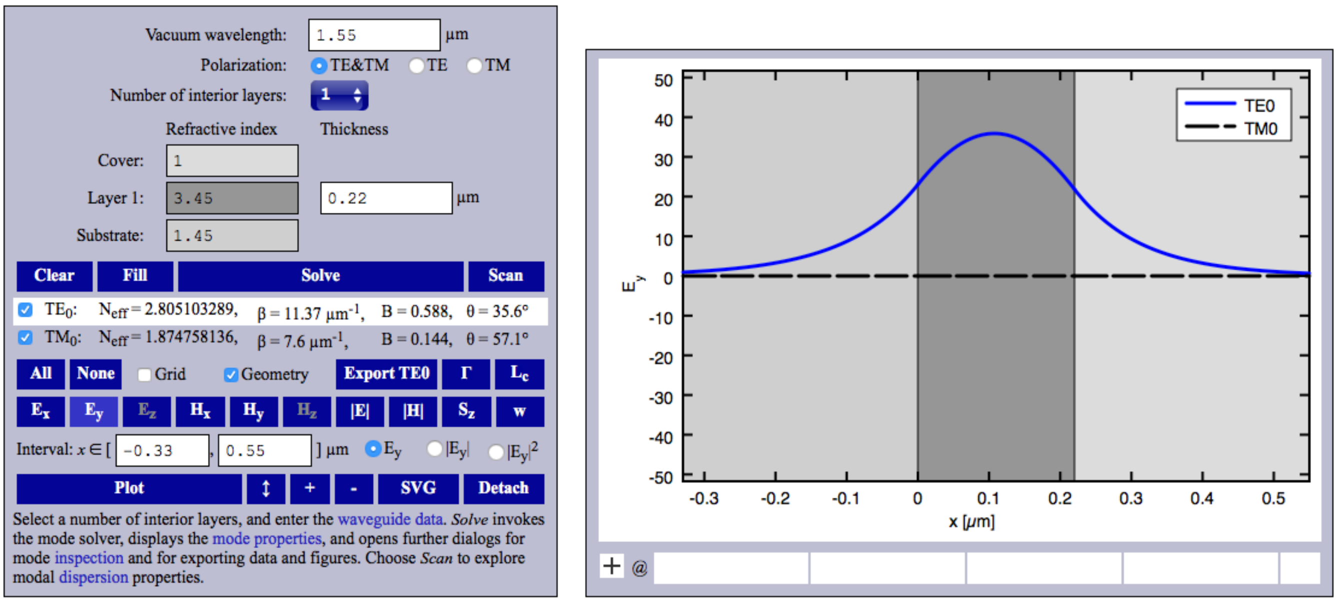
1. Κυματοδηγός Ράβδωσης Φωτονικής Τεχνολογίας Πυριτίου

Βασικός στόχος της άσκησης είναι η εφαρμογή της μεθόδου EIM (Effective Index Method) σε έναν κυματοδηγό ράβδωσης. Τα δεδομένα έχουν ως εξής:

n_{Si}=3.45 n_{SiO_2}=1.45   h=220nm   t=50nm   w:[300nm, 1000nm] λ_0=1550nm

<u>Ερώτημα (α)</u>

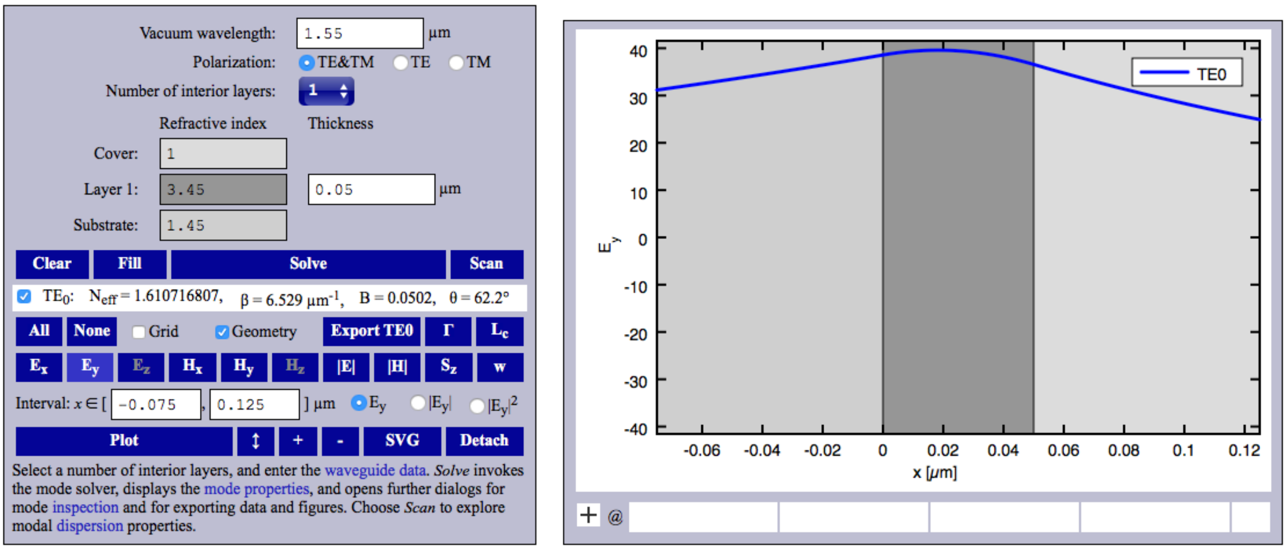
Στο ερώτημα αυτό ζητείται η κατασκευή του γεωμετρικού διαγράμματος διασποράς, δηλαδή η απεικόνιση της μεταβολής των ενεργών δεικτών διάθλασης των TE & TM ρυθμών ως προς το w. Για την δημιουργία του διαγράμματος αυτού απαιτείται η εφαρμογή της μεθόδου EIM. Αρχικά, εφαρμόζονται οι σχέσεις των επίπεδων κυματοδηγών διηλεκτρικής πλάκας κατά y. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιείται το διαδικτυακό υπολογιστικό εργαλείο με το οποίο θα γίνει ανάλυση ενός κυματοδηγού με πάχος στρώματος οδήγησης h και ενός με πάχος t για την εύρεση των n_{eff} των ρυθμών που δύναται να υπάρξουν σε αυτούς στην δεδομένη τιμή μήκους κύματος. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω.



Εικόνα 1.1: Αποτελέσματα προσομοίωσης για κυματοδηγό με πάχος στρώματος οδήγησης h

Παρατηρούμε την ύπαρξη μόνο 2 ρυθμών: TE_0 & TM_0.

Στην συνέχεια γίνεται ολοκλήρωση της προσομοίωσης και για κυματοδηγό πάχους στρώματος οδήγησης t.



Εικόνα 1.2: Αποτελέσματα προσομοίωσης για κυματοδηγό με πάχος στρώματος οδήγησης t

Παρατηρούμε ότι στον κυματοδηγό με πάχος στρώματος οδήγησης t υπάρχει μόνο ο βασικός TE_0 ρυθμός.

Τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα.

	$n_{eff}^{(2)}$	$n_{eff}^{(1)}$
TE_0	1.610716807	2.805103289
TM_0	n_2	1.874758136

Λόγω μη υποστήριξης του ρυθμού TM_0 από τον κυματοδηγό πάχους στρώματος οδήγησης t, κάνουμε εφαρμογή της 'Σημείωσης 2' και θεωρούμε ότι το φως διαρρέει πλήρως στο υπόστρωμα. Επομένως:

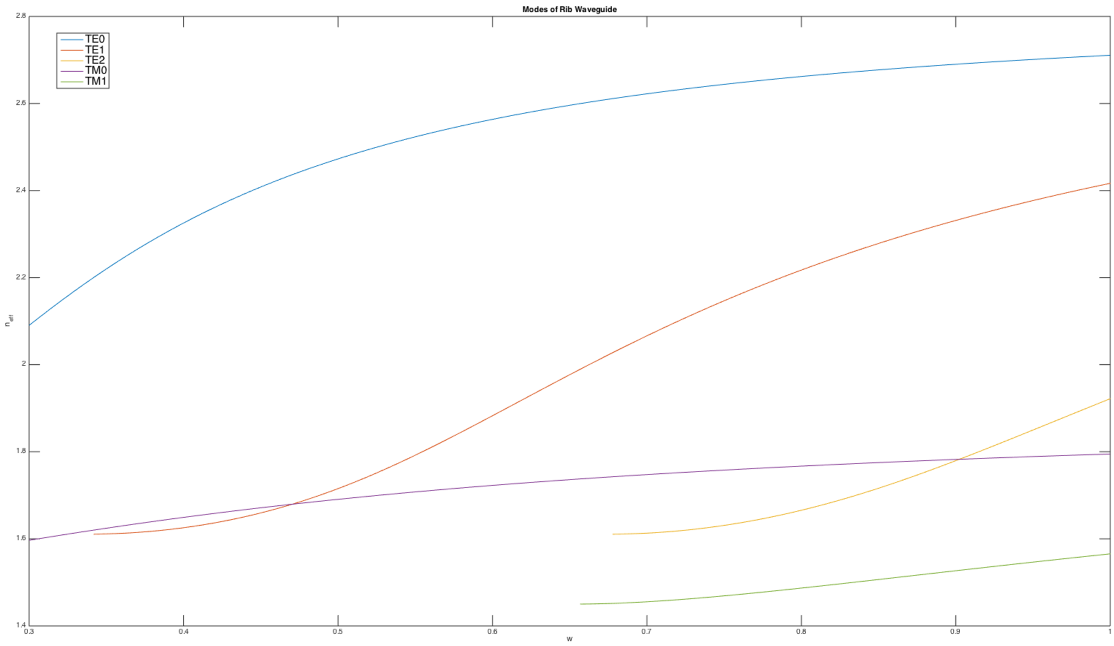
$$\mathbf{n_{eff}^{(2)} = n_2}$$

Το επόμενο βήμα στην εφαρμογή της μεθόδου EIM είναι η εφαρμογή της ανάλυσης επίπεδων κυματοδηγών διηλεκτρικής πλάκας κατά την x διεύθυνση. Αυτό θα γίνει σύμφωνα με το σχήμα 1.(γ) της εκφώνησης. Θεωρούμε λοιπόν τους ενεργούς δείκτες διάθλασης των 3 επιμέρους κυματοδηγών ως δείκτες διάθλασης των επιμέρους περιοχών ενός κυματοδηγού με διαστρωμάτωση κατά x. Φυσικά, όταν υπολογίζουμε τους TE ρυθμούς (2Δ, ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο κατά x) χρησιμοποιούμε τους ενεργούς δείκτες διάθλασης που βρέθηκαν στην κατακόρυφη ανάλυση για τον TE_0 ρυθμό (αφού η κατακόρυφη ανάλυση -TE- θεωρεί ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο κατά x) και εφαρμόζουμε TM ανάλυση στον οριζόντιο (1Δ) κυματοδηγό, αφού ισχυρό κατά x ηλεκτρικό πεδίο σχετίζεται με τους TM ρυθμούς του οριζόντιου κυματοδηγού), ενώ κατά τον υπολογισμό των TM ρυθμών (2Δ) τους ενεργούς δείκτες που βρέθηκαν στην κατακόρυφη ανάλυση για τον ρυθμό TM_0 εφαρμόζοντας TE ανάλυση στον οριζόντιο κυματοδηγό.

Με την λογική αυτή προέκυψε το παρακάτω διάγραμμα. Παρατηρείται η ύπαρξη συνολικά 5 ρυθμών, τρεις εκ των οποίων είναι TE και δύο TM. Τα πλάτη w για τα οποία εμφανίζονται οι ρυθμοί ανώτερης τάξης φαίνονται παρακάτω.

Ρυθμός	w
TE_1	0.342 μm
TE_2	0.678 μm
TM_1	0.657 μm

Το γεωμετρικό διάγραμμα διασποράς (n_{eff} προς w) φαίνεται στην επόμενη εικόνα.



Εικόνα 1.3: Γεωμετρικό Διάγραμμα Διασποράς. Το w μετράται σε μm.

Ερώτημα (β)

Στο ερώτημα αυτό ζητείται η απεικόνιση της μεταβολής του κλάσματος οπτικής ισχύος ως προς το w για τους δυο βασικούς TE & TM ρυθμούς του κυματοδηγού. Για την δημιουργία του διαγράμματος χρησιμοποιήθηκε η έτοιμη συνάρτηση APDWG.

Για τον βασικό TE ρυθμό δόθηκαν ως όρισμα στην συνάρτηση APDWG οι ενεργοί δείκτες διάθλασης της TE κατακόρυφης ανάλυσης και έγινε ανάλυση ως προς TM (κρατήθηκε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο του βασικού TM ρυθμού που προέκυψε με την APDWG). Στην περίπτωση του TE βασικού ρυθμού (2Δ) απαιτήθηκε μια τροποποίησης της APDWG έτσι ώστε να επιστρέφει και το Hy των TM ρυθμών. Με την εύρεση του Ex και Hy του βασικού TM ρυθμού της οριζόντιας ανάλυσης (που δίνει τον βασικό TE ρυθμό 2Δ) υπολογίστηκε το κλάσμα:

$$\frac{P_{TM}^{slab}}{P_{TM}^{all}} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^w E_x H_y^* dx}{\frac{1}{2}\int_{-2w}^{3w} E_x H_y^* dx}$$

Κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι για το ολοκλήρωμα του παρονομαστή απαιτείται η ολοκλήρωση σε όλα τα x, πράγμα που είναι αδύνατο σε μια αριθμητική ολοκλήρωση, για αυτό επιλέχτηκε ένα διάστημα επαρκώς μεγαλύτερο του w. Έξω από το διάστημα (0,w) οι τιμές που λαμβάνει το πεδίο είναι αρκετά μικρές με αποτέλεσμα να μην είναι ιδιαίκτερα σημαντική η συνεισφορά των υπόλοιπων x στο ολοκλήρωμα του παρονομαστή.

Για τον βασικό TM ρυθμό δόθηκαν ως όρισμα στην συνάρτηση APDWG οι ενεργοί δείκτες διάθλασης της TM κατακόρυφης ανάλυσης και έγινε ανάλυση ως προς TE (κρατήθηκε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο του βασικού TE ρυθμού που προέκυψε με την APDWG). Από την τιμή του Ey και με χρήση της σχέσης που συνδέει το Ey με το Hx για έναν TE ρυθμό (αφού τέτοια ανάλυση γίνεται), προκύπτει το Hx:

$$H_x^{TE} = -\frac{\beta}{\omega\mu_0}E_y^{TE} \xrightarrow[c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}]{\beta=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}n_{eff}} H_x^{TE} = -\frac{n_{eff}}{c_0\mu_0}E_y^{TE}$$

Τέλος, πραγματοποιήθηκε η ολοκλήρωση:

$$\frac{P_{TE}^{slab}}{P_{TE}^{all}} = \frac{-\frac{1}{2}\int_0^w E_y H_x^* dx}{-\frac{1}{2}\int_{-2w}^{3w} E_y H_x^* dx}$$

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε φαίνεται παρακάτω:

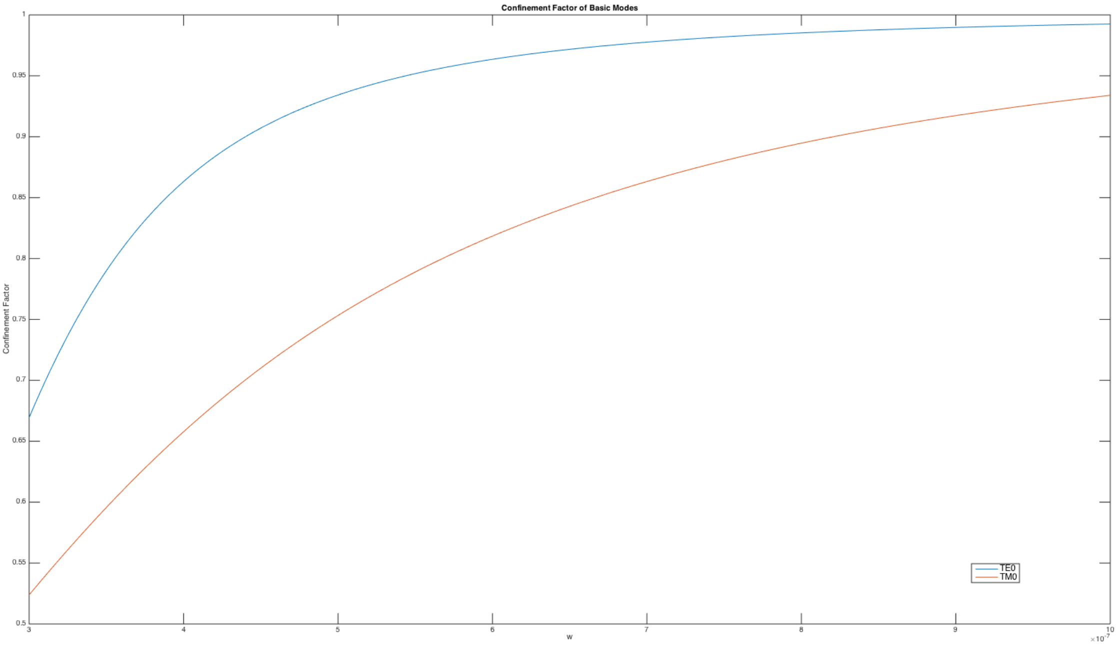
```
%%----- 1.b ---------------------------
%%
wavelength=1550*10^(-9);
n1eff_TE_1D=2.805103289;
n2eff_TE_1D=1.610716807;
n1eff_TM_1D=1.874758136;
n2eff_TM_1D=1.45;
c0=3*10^8;
m0=4*pi*10^(-7);
e0=8.854*10^(-12);
gamma_TE=zeros(1, 700+1);
gamma_TM=zeros(1, 700+1);
i=1;
for w=300*10^(-9):1*10^(-9):1000*10^(-9)
    x_all=linspace(-2*w, 3*w, 50000);
    x_slab=linspace(0, w, 10000);

    [ ~ , ~ , ~ , Ex_TM_all, Hy_TM_all ] = APDWG(wavelength , w , n1eff_TE_1D , n2eff_TE_1D , n2eff_TE_1D , x_all );
    P_slab=(1/2) * numerical_integration(Ex_TM_all(1,20001:30000).*(conj(Hy_TM_all(1,20001:30000))), x_all(20001:30000));
    P_all=(1/2) * numerical_integration(Ex_TM_all(1,:).*(conj(Hy_TM_all(1,:))), x_all);
    gamma_TE(i)=P_slab/P_all;

    [ neff_TE_1 , ~ , Ey_TE_all , ~, ~ ] = APDWG(wavelength , w , n1eff_TM_1D , n2eff_TM_1D , n2eff_TM_1D , x_all );
    [ neff_TE_2 , ~ , Ey_TE_slab , ~, ~ ] = APDWG(wavelength , w , n1eff_TM_1D , n2eff_TM_1D , n2eff_TM_1D , x_slab );
    Hx_TM_all=-(neff_TE_1(1)/(c0*m0)).*Ey_TE_all(1,:);
    Hx_TM_slab=-(neff_TE_1(1)/(c0*m0)).*Ey_TE_slab(1,:);
    P_slab=(-1/2) * numerical_integration(Ey_TE_slab(1,:).*(conj(Hx_TM_slab)), x_slab);
    P_all= (-1/2) * numerical_integration(Ey_TE_all(1,:).*(conj(Hx_TM_all)), x_all);
    gamma_TM(i)=P_slab/P_all;

    i=i+1;
end
w=300*10^(-9):1*10^(-9):1000*10^(-9);
plot(w, gamma_TE);
hold on;
plot(w, gamma_TM);
%%——————————————————————
```

Τέλος, το διάγραμμα βρίσκεται παρακάτω:



Εικόνα 1.4: Κλάσμα Οπτικής Ισχύος Βασικών Ρυθμών

<u>Ερώτημα (γ)</u>

Ζητούμενο αυτού του ερωτήματος είναι αρχικά η απεικόνιση της μεταβολής του ενεργού δείκτη διάθλασης των βασικών ρυθμών TE & TM για κυματοδηγό ράβδωσης με w=500nm, h=220nm, t=50nm , ως προς την πυκνότητα φορέων Si (N) όταν:

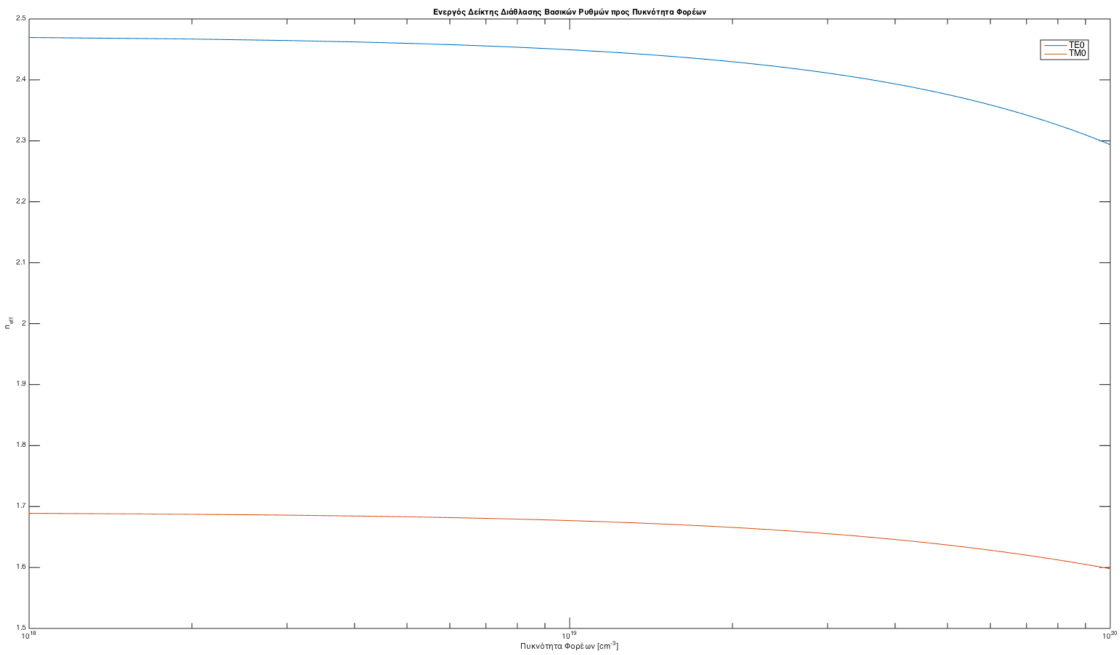
$$n_{Si} = n_{Si}^{0} - \sigma_n^e N - (\sigma_n^h N)^{0.8}$$

Με λογική αντίστοιχη των παραπάνω και τον παρακάτω κώδικα:

```
%%------- 1c--------------------------
wavelength=1550*10^(-9);
nsi0=3.45;
sn_e=8.8*10^(-28);
sn_h=4.6*10^(-28);
nsi=@(N)(nsi0-sn_e*N-(sn_h*N)^(0.8));
w=500*10^(-9);
h=220*10^(-9);
t=50*10^(-9);
N_min=10^24;
N_max=10^26;
nsiO2=1.45;
n0=1;
i=1;
neff_TM0_2D=zeros(1, 100);
neff_TE0_2D=zeros(1, 100);

for N=(1:1:100)*10^24
    [ neff_TE_1D_1 , neff_TM_1D_1 , ~ , ~, ~ ] = APDWG( wavelength , h , nsi(N) , nsiO2 , n0 );
    [ neff_TE_1D_2 , neff_TM_1D_2 , ~ , ~, ~ ] = APDWG( wavelength , t , nsi(N) , nsiO2 , n0 );
    if(isempty(neff_TM_1D_2))
        neff_TM_1D_2=nsiO2;
    end
    [ ~ , neff_TM_2D , ~ , ~, ~ ] = APDWG( wavelength , w , neff_TE_1D_1(1) , neff_TE_1D_2(1) , neff_TE_1D_2(1) );
    neff_TM0_2D(i)=neff_TM_2D(1);
    [ neff_TE_2D , ~ , ~ , ~, ~ ] = APDWG( wavelength , w , neff_TM_1D_1(1) , neff_TM_1D_2(1) , neff_TM_1D_2(1) );
    neff_TE0_2D(i)=neff_TE_2D(1);
    i=i+1;
end
N=(1:1:100)*10^18;
semilogx(N, neff_TM0_2D); %% TE(2D)
hold on;
semilogx(N, neff_TE0_2D); %% TM(2D)
```

προέκυψε το ζητούμενο διάγραμμα.



Εικόνα 1.5: Ενεργός Δείκτης Διάθλασης Βασικών Ρυθμών ως προς Συγκέντρωση Φορέων

Δεύτερο ζητούμενο του ερωτήματος είναι η κατασκευή ενός διαμορφωτή φάσης με δυνατότητα κάλυψης του εύρους [0,π], όταν η μέγιστη επιτρεπτή πυκνότητα φορέων στο Si είναι 10^{19} cm^{-3}. Επιθμούμε δηλαδή το σήμα στην έξοδο του κυματοδηγού να μπορεί να υποστεί μεταβολή φάσης από 0 έως π. Ορίζουμε:

β_{19}: Η σταθερά διάδοσης για $N=10^{19}$ cm^{-3}

β_{18}: Η σταθερά διάδοσης για $N=10^{18}$ cm^{-3}

n_{19}: Ο ενεργός δείκτης διάθλασης για $N=10^{19}$ cm^{-3}

n_{18}: Ο ενεργός δείκτης διάθλασης για $N=10^{18}$ cm^{-3}

d_{TM}: Μήκος κυματοδηγού TM ρυθμού

d_{TE}: Μήκος κυματοδηγού TE ρυθμού

Επίσης ισχύει: $\beta=2\pi n_{eff}/\lambda_0$

Εφόσον η αρμονική μεταβολή είναι της μορφής exp[-jβz], και επιθυμούμε εύρος φάσης εξόδου [0,π] και ($\beta_{19}<\beta_{18}$) θα πρέπει:

$$\beta_{19}\,d=2\pi \text{ και } \beta_{18}\,d=3\pi$$

Άρα:

$$\begin{matrix}\beta_{19}d = 2\pi \\ \beta_{18}d = 3\pi\end{matrix} \xRightarrow{\beta=2\pi n_{eff}/\lambda_o} (\beta_{18}-\beta_{19})d = \pi \Rightarrow d = \frac{\lambda_0}{2(n_{18}-n_{19})}$$

Τελικά:

$$d_{TM}=77.5\mu m \text{ \& } d_{TE}=38.75\mu m$$

Η μεγάλη διαφοροποίηση μεταξύ των μηκών κυματοδηγού για τον TE και τον TM ρυθμό οφείλεται στην σημαντική διαφορά μεταξύ των ενεργών δεικτών διάθλασης για τις χρησιμοποιούμενες πυκνότητες.

2. Υπολογισμοί σε οπτικές ίνες μέσω της βαθμωτής προσέγγισης

Το δεύτερο μέρος της εργασίας ασχολείται με οπτικές ίνες που λειτουργούν στο πλαίσιο της ασθενούς κυματοδήγησης (οι δείκτες διάθλασης του πυρήνα και του περιβλήματος κοντά μεταξύ τους). Στην ανάλυση των οπτικών αυτών ινών και λόγω των μεγάλων διαστάσεων του περιβλήματος συγκριτικά με τον πυρήνα θεωρούμε ότι το περίβλημα εκτείνεται στο άπειρο.

<u>Ερώτημα (α)</u>

Ξεκινώντας από την βαθμωτή εξίσωση κύματος για τις αξονικές συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και ακολουθώντας την λογική των σημείωσεων οδηγούμαστε στην παρακάτω προσπάθεια απόδειξης.

Θεωρώντας ότι η συνάρτηση ψ ορίζει μια εγκάρσια συνιστώσα ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου και υποθέτοντας ότι η οπτική ίνα εκτείνεται κατά z, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι:

$$\psi(x,y,z) = f(x,y)e^{-j\beta z}$$

Χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες, θα πρέπει να ισχύει:

$$[\Delta_T + k_0^2 n_i^2 - \beta^2]\psi = 0$$

που καταλήγει στην παρακάτω εξίσωση για το f(x,y):

$$[\Delta_T + k_0^2 n_i^2 - \beta^2] f(x,y) = 0$$

Εκφράζοντας τώρα το f(x,y) σε κυλινδρικές συντεταγμένες, προκύπτει η μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 f(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} + [k_0^2 n^2(r) - \beta^2] f(r,\varphi) = 0$$

Πρέπει να τονιστεί ότι αναζητούνται λύσεις:

$$f(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

Επομένως:

$$\Phi\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \Phi\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr} + R\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + [k_0^2 n^2(r) - \beta^2]R\Phi = 0$$

$$\xRightarrow{/\frac{R\Phi}{r^2}} \frac{r^2}{R}\frac{d^2R(r)}{dr^2} + r\frac{1}{R}\frac{dR(r)}{dr} + r^2[k_0^2 n^2(r) - \beta^2] = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{\Phi}\dfrac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = l^2 \xRightarrow{l\ \text{ακέραιος}, l\geq 1} \Phi(\varphi) = \cos(l\varphi) \text{ ή } \Phi(\varphi) = \sin(l\varphi) \\ \dfrac{r^2}{R}\dfrac{d^2R(r)}{dr^2} + r\dfrac{1}{R}\dfrac{dR(r)}{dr} + r^2[k_0^2 n^2(r) - \beta^2] = l^2 \xRightarrow{\substack{V=k_0 a\sqrt{n_1^2-n_2^2} \\ a^2=k_0^2n_1^2-\beta^2 \\ \kappa^2=-k_0^2n_2^2+\beta^2 \\ u=aa, v=\kappa\alpha, u^2+v^2=V^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq a, r^2\dfrac{d^2R(r)}{dr^2} + r\dfrac{dR(r)}{dr} + R\left[u^2\dfrac{r^2}{a^2} - l^2\right] = 0 \\ r \geq a, r^2\dfrac{d^2R(r)}{dr^2} + r\dfrac{dR(r)}{dr} - R\left[v^2\dfrac{r^2}{a^2} + l^2\right] = 0 \end{cases}$$

Οι λύσεις των δυο τελευταίων διαφορικών εξισώσεων είναι Bessel. Επιλύοντάς τες και λαμβάνοντας υπόψιν την συνέχεια της f(r,φ) στο r=α:

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} AJ_1\left(u\dfrac{r}{a}\right)\begin{Bmatrix}\cos(l\varphi) \\ \sin(l\varphi)\end{Bmatrix}, r \leq a \\ A\dfrac{J_1(u)}{K_l(u)}K_l\left(v\dfrac{r}{a}\right)\begin{Bmatrix}\cos(l\varphi) \\ \sin(l\varphi)\end{Bmatrix}, r \geq a \end{cases}$$

Τέλος, για να προκύψει η χαρακτηριστική εξίσωση και επειδή ισχύει:

$$E_z \text{ συνεχής} \Leftrightarrow \frac{dE_N}{dn} \text{ συνεχής } (normal\ derivative\ of\ normal\ component\ to\ interface)$$

λαμβάνουμε την παράγωγο κατά r του f(r,φ) στις 2 περιοχές και εξισώνουμε τα αποτελέσματα. Έτσι προκύπτει:

$$\frac{uJ_l'(u)}{J_l(u)} = \frac{vK_l'(v)}{K_l(v)}, u = U, v = W$$

Στην ανάλυση θεωρείται η συνέχεια της Ez στην επιφάνεια μεταξύ των δυο μέσων διαφορετικών δεικτών διάθλασης, αφού η Ez είναι εφαπτομενική στην συγκεκριμένη επιφάνεια.

Ερώτημα (β)

Η ανάλυση για το δεύτερο ερώτημα της άσκησης φαίνεται παρακάτω.

Γνωρίζουμε ότι:

$$\boldsymbol{n_1 \approx n_2}$$

Ισχύει:

$$W = a\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2} = ak_o\sqrt{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2} = ak_o\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\frac{\sqrt{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} = V\sqrt{b}$$

Αντίστοιχα:

$$U = a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} = ak_o\sqrt{n_1^2 - \frac{\beta^2}{k_0^2}} = ak_o\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\frac{\sqrt{n_1^2 - \frac{\beta^2}{k_0^2}}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} = V \cdot k$$

Όμως:

$$k^2 = \frac{n_1^2 - \frac{\beta^2}{k_0^2}}{n_1^2 - n_2^2} = \frac{n_1^2 - n_2^2 + n_2^2 - \frac{\beta^2}{k_0^2}}{n_1^2 - n_2^2} = 1 - b \Rightarrow U = V\sqrt{1-b}$$

Επίσης, είναι γνωστό ότι:

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

Ακόμα, ισχύει:

$$K_n'(x) = \frac{n}{x}K_n(x) - K_{n+1}(x) \overset{n=0}{\Longrightarrow} K_0'(x) = -K_1(x)$$

Επομένως:

$$\frac{UJ_0'(U)}{J_0(U)} = \frac{WK_0'(W)}{K_0(W)} \Rightarrow \frac{V\sqrt{1-b}J_0'(V\sqrt{1-b})}{J_0(V\sqrt{1-b})} = \frac{V\sqrt{b}K_0'(V\sqrt{b})}{K_0(V\sqrt{b})}$$

$$\Rightarrow -\frac{V\sqrt{1-b}J_1(V\sqrt{1-b})}{J_0(V\sqrt{1-b})} = -\frac{V\sqrt{b}K_1(V\sqrt{b})}{K_0(V\sqrt{b})}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1-b}J_1(V\sqrt{1-b})}{J_0(V\sqrt{1-b})} = \frac{\sqrt{b}K_1(V\sqrt{b})}{K_0(V\sqrt{b})}$$

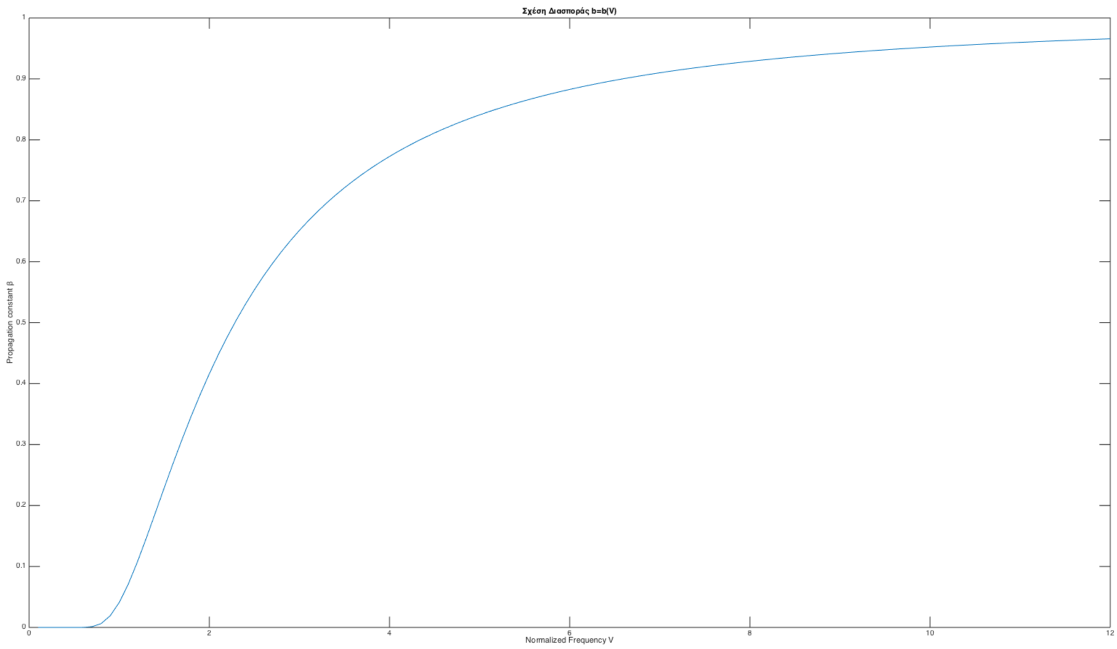
Η τελευταία σχέση είναι το ζητούμενο.

Ερώτημα (γ)

Η αριθμητική επίλυση της δοσμένης σχέσης για το b με δεδομένο V, έγινε με χρήση του παρακάτω κώδικα. Ιδιαίτερη προσοχή έπρεπε να δοθεί στην αρχική τιμή υπολογισμού που δίνεται ως όρισμα στην fsolve.

```
%%-------------2.c----------------------
char_eq=@ (b, V)((sqrt(1-b)*besselj(1,V*sqrt(1-b))/besselj(0, V*sqrt(1-b)))-(sqrt(b)*besselk(1,V*sqrt(b))/besselk(0, V*sqrt(b))));
betas=zeros(1,(12-0.1)/0.1);
i=1;
for V=0.1:0.1:12
   characteristic_equation=@(b)(char_eq(b, V));
   betas(i)=fsolve(characteristic_equation, 0.97);
   i=i+1;
end
V=0.1:0.1:12;
plot(V,abs(betas));
```

Το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται παρακάτω.



Εικόνα 2.1: Σχέση Διασποράς

Ερώτημα (δ)

Το εγκάρσιο προφίλ του ρυθμού LP_{01} προσεγγίζεται από την συνάρτηση:

$$E(r) = E_o \exp\left[-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right], w_0 = a(0.65 + 1.619V^{-\frac{3}{2}} + 2.879V^{-6})$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$E(x,y) = E_0[-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}]$$

Η σταθερά E_0 δεν επηρεάζει την ενεργό επιφάνεια, αφού απαλοίφεται.

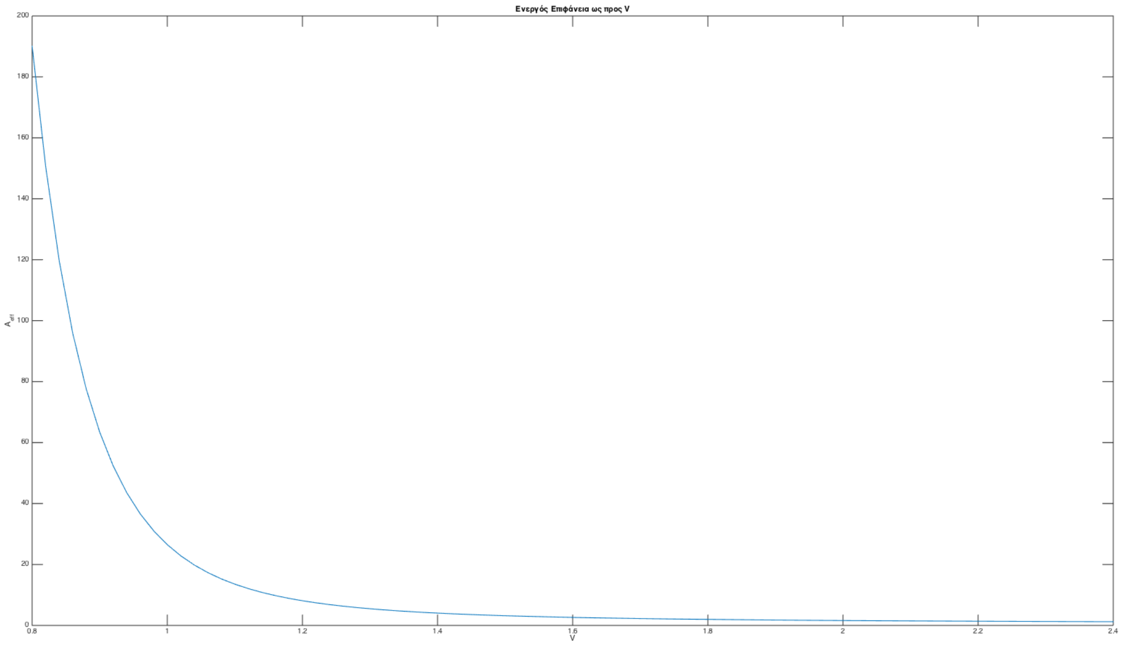
Για τον αριθμητικό υπολογισμό της A_{eff}, θεωρήθηκε ακτίνα πυρήνα 5μm. Κατασκευάστηκε επίσης μια συνάρτηση που πραγματοποιεί αριθμητική ολοκλήρωση σε πλέγμα 2 διαστάσεων επαρκώς μεγάλο για να προσομοιώνεται η ολοκλήρωση σε όλο το xy επίπεδο που ζητάει η A_{eff}.

Τέλος επειδή ζητείται η ενεργός επιφάνεια κανονικοποιημένη προς την γεωμετρική επιφάνεια του πυρήνα, έγινε η διαίρεση $A_{eff}/\pi a^2$.

Το ζητούμενο διάγραμμα κατασκευάστηκε με χρήση του παρακάτω κώδικα.

```
%%--------2.d---------------------------
%%
a=5*10^(-6);
w0=@(V)(a*(0.65+1.619*V^(-3/2)+2.879*V^(-6)));
eq=@(x, y, V)(exp((-(x^2+y^2)/(w0(V)^2))));
Aeff=zeros(1,1.6/0.02+1);
i=1;
for V=0.8:0.02:2.4
   disp(V);
   integrant_num=@(x, y)(abs(eq(x, y, V))^2);
   integrant_den=@(x, y)(abs(eq(x, y, V))^4);
   numerator=(integrate(integrant_num))^2;
   denominator=(integrate(integrant_den));
   Aeff(i)=numerator/denominator;
   i=i+1;
end
Aeff=Aeff./(pi*a^2);
V=0.8:0.02:2.4;
plot(V, Aeff);
%%———————————————————–
function [I] = integrate(eq)
    I=0;
    dx=0.5*10^(-6);
    dy=0.5*10^(-6);
    for x=(-100:0.5:100)*10^(-6)
       for y=(-100:0.5:100)*10^(-6)
            I=I+eq(x,y)*dx*dy;
       end
    end
end
```

Το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται παρακάτω.



Εικόνα 2.2: Ενεργός Επιφάνεια ως προς V