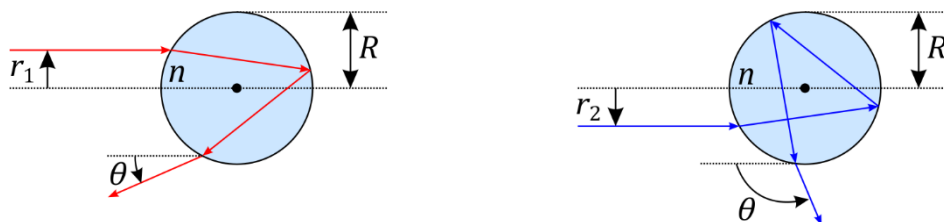


Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης  
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών  
Οπτική Ι – Γεωμετρική Οπτική: Προαιρετικό Θέμα 2018

## Μελέτη Ουράνιου Τόξου

Αντικείμενο της εργασίας είναι η μελέτη της ανάκλασης ακτίνων φωτός στο εσωτερικό διηλεκτρικής σφαίρας. Σκοπός είναι ο υπολογισμός της γωνίας με την οποία θα εξέλθει η ακτίνα από τη σφαίρα σαν συνάρτηση του σημείου πρόσπτωσης. Λόγω **συμμετρίας**, το πρόβλημα μπορεί να μελετηθεί απλουστευτικά σε 2D ως εξής:



για την περίπτωση της **μονής (αριστερά) και διπλής (δεξιά) εσωτερικής ανάκλασης**. Το σημείο πρόσπτωσης εξαρτάται τελικά μόνο από την εγκάρσια απόσταση από το κέντρο της σφαίρας,  $r$ , που λαμβάνει τιμές μεταξύ  $[0, R]$ . Ο δείκτης διάθλασης της σφαίρας είναι σταθερός και μεγαλύτερος της μονάδας, εξωτερικά βρίσκεται αέρας και η γωνία εξόδου,  $\theta$ , ορίζεται όπως στο σχήμα.

Η μελέτη της παραπάνω διάταξης γίνεται με χρήση του **νόμου του Snell** (διάθλασης) στα σημεία εισόδου & εξόδου της ακτίνας στη σφαίρα, και του **νόμου της ανάκλασης** στα ένα ή δύο εσωτερικά σημεία. Σε κάθε περίπτωση, θα πρέπει να υπολογιστούν, για όλα τα παραπάνω σημεία της περιφέρειας κύκλου, η διεύθυνση της ακτίνας και το διάνυσμα καμπυλότητας της σφαίρας (δηλαδή το σημειακά **κάθετο διάνυσμα στη διεπιφάνεια** των δύο υλικών), προκειμένου να υπολογιστεί η γωνία πρόσπτωσης.

Θεωρείστε ότι η προσπίπτουσα ακτίνα είναι λευκού φωτός, δηλαδή αποτελείται από τα λεγόμενα «**χρώματα της ίριδας**», ενώ η σφαίρα είναι από υλικό που εμφανίζει **χρωματική διασπορά** (chromatic dispersion), δηλαδή ο δείκτης διάθλασης της είναι λίγο διαφορετικός για κάθε μήκος κύματος (ή χρώμα φωτός). Στη συνέχεια, φανταστείτε ένα μεγάλο πέτασμα από άπειρες τέτοιες σφαίρες σε μεγάλη απόσταση και σε εξωτερικό χώρο. Τέλος, φανταστείτε πως το υλικό είναι σταγονίδια νερού και φωτίζεται με ακτίνες του ήλιου... Πως λέγεται το φαινόμενο που θα δει παρατηρητής των ακτίνων εξόδου;

### Ζητούμενα:

(α) **Πρόγραμμα MATLAB** (ένα m-file) με τέσσερα ορίσματα εισόδου: την κανονικοποιημένη απόσταση  $r/R$ , τον δείκτη διάθλασης της σφαίρας  $n$ , μία μεταβλητή που ορίζει την περίπτωση μονής ή διπλής εσωτερικής ανάκλασης και μία τριπλέτα RGB (**R**ed **G**reen **B**lue) για το χρώμα της ακτίνας, π.χ.

```
function [theta] = sphere_reflection( r , n , Nrefl , RGB )
```

Το πρόγραμμα αυτό, ανάλογα με το πλήθος των ορισμάτων εξόδου (εντολή `nargout` στο MATLAB), θα:

- Όταν καλείται χωρίς καθόλου ορίσματα εξόδου (`nargout==0`), θα ζωγραφίζει τη σφαίρα και την τροχιά της ακτίνας (4 ή 5 «σκέλη»), όπως δηλαδή στο παραπάνω σχήμα, με κατάλληλο χρώμα.
- Όταν καλείται με (ένα) όρισμα εξόδου, θα επιστρέφει την τιμή της γωνίας  $\theta$ , χωρίς να ζωγραφίζει.

(β) **Σύντομη PDF αναφορά**, χωρίς τον κώδικα MATLAB (αφού είναι στο m-file), που θα περιέχει τα παρακάτω:

1. Συνοπτική περιγραφή και γεωμετρική επίλυση του προβλήματος, δηλαδή αναλυτικές κλειστές σχέσεις για τη γωνία  $\theta$ , σε όσο πιο συνεπτυγμένη μορφή μπορείτε.

2. Διάγραμμα με τις γωνίες εξόδου  $\theta$  (κάθετος άξονας) σε σχέση με την απόσταση  $r$  (οριζόντιος άξονας), για την περίπτωση μονής & διπλής εσωτερικής ανάκλασης, για δείκτη  $n = 1.330$  και  $1.345$ . Ποιες είναι οι ακρότατες τιμές της  $\theta$  σε κάθε περίπτωση; Ποιες είναι οι αντίστοιχες  $r$ ;
3. Βρείτε μία απλή σχέση χρωματικής διασποράς του δείκτη διάθλασης του νερού (π.χ. ψάξτε για H2O στη βάση δεδομένων <https://refractiveindex.info/> και υπολογίστε μία γραμμική προσεγγιστική σχέση) και, με χρήση του προγράμματος MATLAB που αναπτύξατε, απεικονίστε το φαινόμενο που παρατηρείτε υπερθέτοντας στο ίδιο διάγραμμα (εντολή `hold on` στο MATLAB) τις ακτίνες διαφορετικού χρώματος, για μονή και διπλή εσωτερική ανάκλαση.
  - ❖ Τα διαφορετικά χρώματα που αντιστοιχίζονται στα μήκη κύματος του ορατού φωτός (380-750 nm) θα δοθούν ως διαφορετικές **τριπλέτες RGB** (Red Green Blue) στο πρόγραμμά σας, και μπορούν να ληφθούν από τη MATLAB ρουτίνα που σας δίνεται στο eTHMMY (Υλικό Μαθήματος → Εφαρμογές MATLAB → `calculateVisibleSpectrumColor.m`), με όρισμα εισόδου το μήκος κύματος σε ακέραιο αριθμό νανομέτρων.
4. Ποιες αποστάσεις  $r$  επιλέξατε για την απεικόνιση στο προηγούμενο σχήμα και γιατί; Για την απάντησή σας, συνδυάστε την εμπειρία από την παρατήρηση μονού ή διπλού ουράνιου τόξου και τις γνώσεις ηλεκτρομαγνητισμού που κατέχετε. Ποιο είναι το γωνιακό φάσμα ( $\theta_{red} - \theta_{purple}$ ) του κάθε τόξου; Ποια είναι η διάταξη των χρωμάτων; Γιατί τα δύο τόξα δεν «ακουμπάνε»;
5. Ζωγραφίστε τα δύο ουράνια τόξα μαζί αντιστοιχίζοντας το κάθε χρώμα σε τμήμα κύκλου ακτίνας ίσης με την αντίστοιχη γωνία  $\theta$  και υπερθέστε τα τόξα σε τοπίο/φωτογραφία της αρεσκείας σας ☺

### Χρειάζονται:

- Νόμοι της Γεωμετρικής Οπτικής
- Τριγωνομετρία και γραμμική άλγεβρα. Βολεύει η αναπαράσταση των σημείων στον 2D χώρο του προβλήματος με διανύσματα, π.χ.  $[x1 \ y1]$ , και η χρήση διανυσματικών ταυτοτήτων όπως εσωτερικό γινόμενο (για υπολογισμό γωνιών) ή εξωτερικό γινόμενο (για υπολογισμό κάθετων διανυσμάτων).
- Γνώσεις στοιχειώδους επιστημονικού προγραμματισμού σε MATLAB με χρήση πινάκων ή «διανυσμάτων» (δηλαδή πινάκων-γραμμής ή -στήλης), υπό-ρουτίνων κλπ. Για παράδειγμα:

```
wls = 400:10:700; % [nm] wavelengths considered, a vector of length 31.
n_water = n_H20_approx( wls ); % [.] refr indices of water for each wls, also vector of length 31
RGBs = calculateVisibleSpectrumColor( wls ); % 31x3 array; each *row* is an RGB triplet
thetas = sphere_reflection( 0:0.1:1 , 1.333 , 1 , [1 0 0] ); % Execution w/ vector inputs
```

- Γνώσεις απεικόνισης (plotting) στο MATLAB. Για παράδειγμα:

```
figure; % creates a figure
set(gcf, 'Color' , [1 1 1]); % sets figure background color to RGB=[1 1 1] value (white)
xc = 1*cos( linspace(0,2*pi,101) ); % x-coordinates of points in a R=1 circle circumference
yc = 1*sin( linspace(0,2*pi,101) ); % y-coordinates of points in a R=1 circle circumference
h=patch(xc,yc,[0 0 1]); % creates axes, plots a blue circle, returns a "handle" w/ object properties
hold on; % axes are "on hold", meaning that new plot commands will not delete previous objects
axis equal off; % hides the axes and forces equal scale on x- & y-axes
set(h, 'FaceColor' , [0 1 1] ); % circle (polygon) surface is now cyan
set(h, 'EdgeColor', 'None'); % circle (polygon) edges do not have a color
plot( [-2 -1], [1 0] , 'Color' , [1 1 1], 'Linewidth' , 3 ); % plots a thick white line
plot( [-1 1 2], [0 0 1] , 'Color' , [1 0 0], 'Linewidth' , 1 ); % plots a red line
plot( [-1 1 2], [0 0.1 1.2] , 'Color' , [0 1 0], 'Linewidth' , 1 ); % plots a green line
plot( [-1 1 2], [0 -1 0.8] , 'Color' , [0 0 1], 'Linewidth' , 1 ); % plots a blue line
```

- Για επιπλέον βοήθεια με το MATLAB, δείτε τον σύντομο οδηγό και το συνοδευτικό script m-file που βρίσκεται στο eTHMMY (Υλικό Μαθήματος → Εφαρμογές MATLAB)