УПРАВЛЕНИЕ И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ
обработка сигналов

А.В. Макаренко
avm@rdcn.ru

Научно-исследовательская группа «Конструктивная Кибернетика»
Москва, Россия, www.rdcn.ru

Институт проблем управления РАН
Москва, Россия

Учебный курс – Лекция 6

30 апреля 2020 г.

ИПУ РАН, Москва, Россия

Outline

Outline section

Определение понятия

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ – (ЦОС, DSP – англ. digital signal processing) – способы обработки сигналов на основе численных методов с использованием цифровой вычислительной техники.

Введём в рассмотрение аналоговый сигнал:

$$s = s(t), \quad s \in \mathrm{S} \subset \mathbb{R}, \quad t \in \mathrm{T} \subset \mathbb{T}.$$

Определение понятия

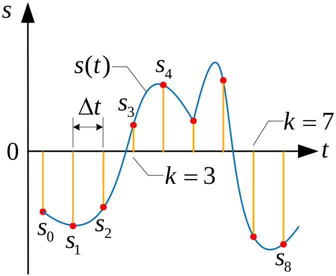
ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ – (ЦОС, DSP – англ. digital signal processing) – способы обработки сигналов на основе численных методов с использованием цифровой вычислительной техники.

Введём в рассмотрение аналоговый сигнал:

$$s = s(t), \quad s \in \mathrm{S} \subset \mathbb{R}, \quad t \in \mathrm{T} \subset \mathbb{T}.$$

Дискретизация во времени:

$$s'_k = s(t_k), \quad k \in \mathrm{K} \subset \mathbb{Z}, \quad \mathrm{K} = \overline{0,\, K-1}, \quad t_k < t_{k+1}.$$



Эквидистантность отсчётов:

$$t_{k'+1} - t_{k'} \equiv t_{k''+1} - t_{k''},$$

$$k' \neq k'', \quad k',\, k'' \in \mathrm{K}.$$

Важный момент:

- Джиттер – фазовое дрожание отсчёта данных.

Определение понятия

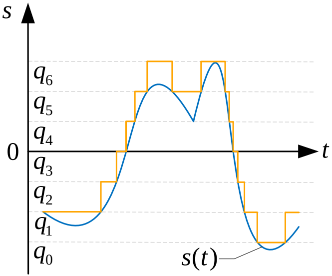
ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ – (ЦОС, DSP – англ. digital signal processing) – способы обработки сигналов на основе численных методов с использованием цифровой вычислительной техники.

Введём в рассмотрение аналоговый сигнал:

$$s = s(t), \quad s \in \mathrm{S} \subset \mathbb{R}, \quad t \in \mathrm{T} \subset \mathbb{T}.$$

Квантование по уровням:

$$q(t) = \left\lfloor \frac{s(t) - s_{min}}{h} \right\rfloor, \quad s_q(t) = \left[q(t) + 1\right] h, \quad h = \frac{s_{max} - s_{min}}{2^n}$$



Динамический диапазон:

$$SQNR = 20 \lg 2^n \quad [\text{дБ}].$$

Важный момент:

- Шум квантования – ошибки, возникающие при квантовании сигнала.

Определение понятия

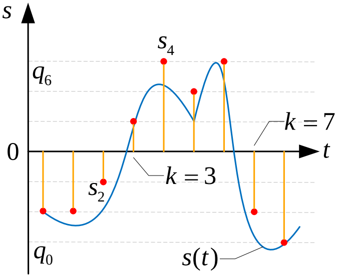
ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ – (ЦОС, DSP – англ. digital signal processing) – способы обработки сигналов на основе численных методов с использованием цифровой вычислительной техники.

Введём в рассмотрение аналоговый сигнал:

$$s = s(t), \quad s \in \mathrm{S} \subset \mathbb{R}, \quad t \in \mathrm{T} \subset \mathbb{T}.$$

Цифровой сигнал:

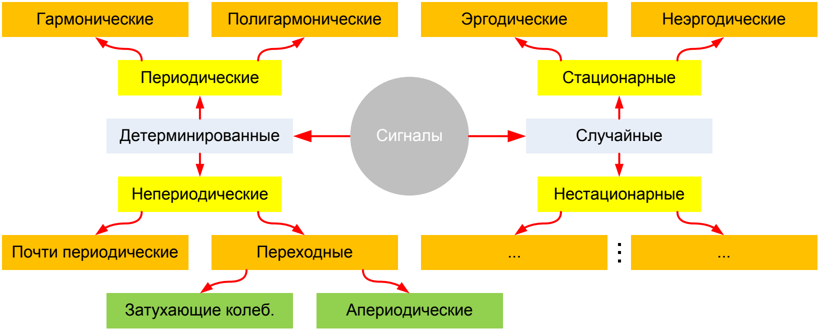
Дискретизация во времени + Квантование по уровням



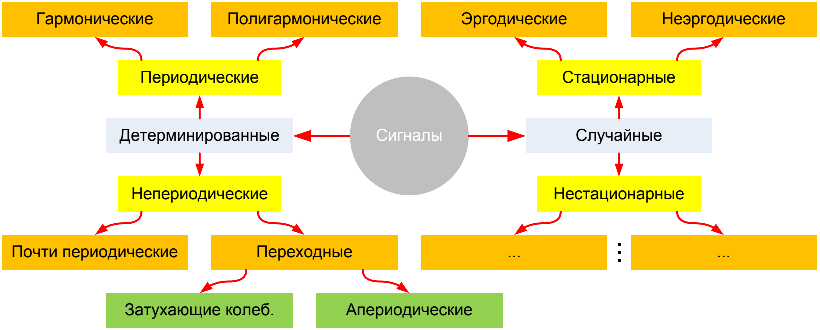
Важный момент:

- Важным свойством цифрового сигнала, определившего его доминирование в современных системах, является его способность к полной регенерации в ретрансляторе (до некоторого порогового отношения сигнал/шум).

Классы сигналов



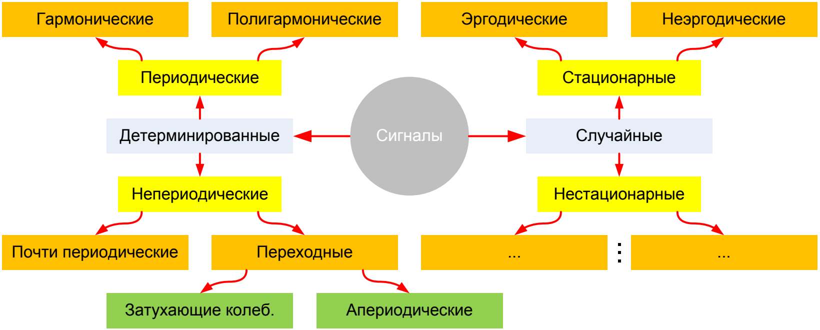
Классы сигналов



Гармонический:

$$s(t) = A\,\sin(2\,\pi\,f\,t + \omega), \quad T_{\text{p}} = \frac{1}{f}.$$

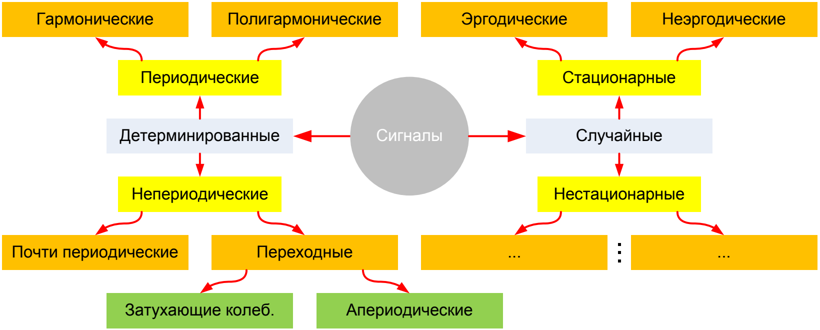
Классы сигналов



Полигармонический:

$$s(t) = s(t \pm n\,T_{\text{p}}), \quad n = 1,\,2,\,3,\,\ldots, \quad f_0 = \frac{1}{T_{\text{p}}}.$$

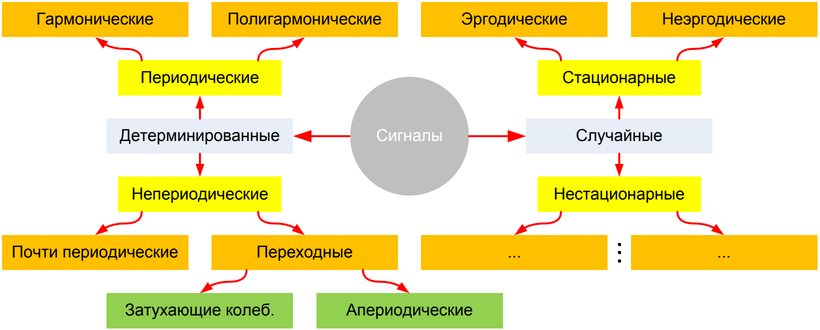
Классы сигналов



Почти периодический:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{M} A_i \, \sin(2\,\pi\, f_i\, t + \omega_i), \quad \exists\, i',\, i'' : \; \frac{f_{i''}}{f_{i'}} \notin \mathbb{Q}.$$

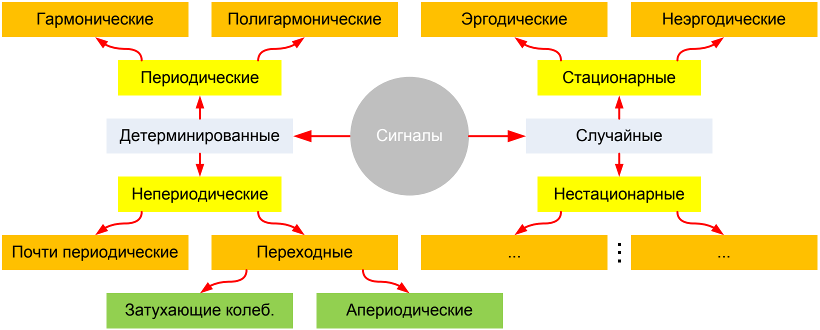
Классы сигналов



Переходной:

- Это все непериодические процессы, за исключением почти периодических:
- Затухающие колебания – это колебания, энергия которых уменьшается с течением времени (амплитуда колебаний A является убывающей функцией).
- Апериодическое колебание – это затухающие колебания, у которых $T_{\text{р}} \to \infty$.

Классы сигналов



Стационарный:

- В узком смысле – (строго стационарный):

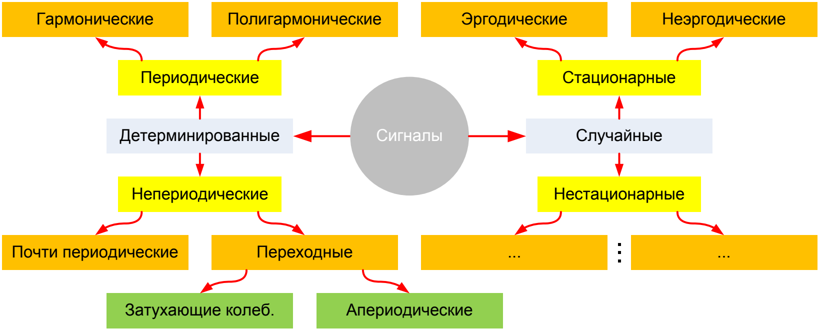
$$\{\mathbf{S}_t\} : \; F_{\mathrm{S}}(s_{t_1+\tau}, \ldots, s_{t_k+\tau}) = F_{\mathrm{S}}(s_{t_1}, \ldots, s_{t_k}), \; \forall \tau \neq 0.$$

- В широком смысле – (слабо стационарный):

$$\mathrm{E}\big[s(t)\big] = m_{\mathrm{s}}(t) = m_{\mathrm{s}}(t+\tau), \; \forall \tau \neq 0,$$

$$\mathrm{E}\Big[\big(s(t_1) - m_{\mathrm{s}}(t_1)\big)\big(s(t_2) - m_{\mathrm{s}}(t_2)\big)\Big] = C_{\mathrm{s}}(t_1, t_2) \Rightarrow C_{\mathrm{s}}(\tau, 0), \; \tau = t_1 - t_2.$$

Классы сигналов

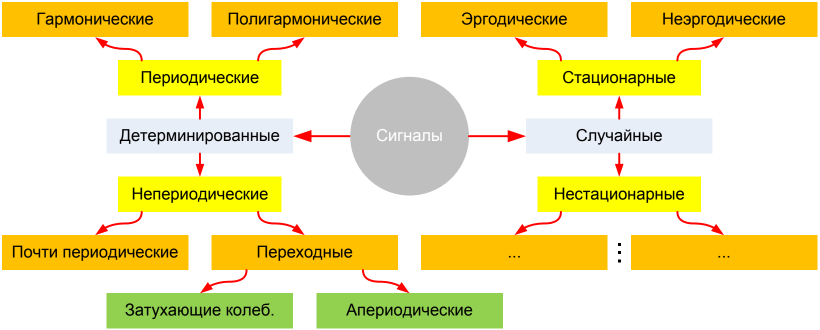


Эргодический:

- Средние значения по времени почти всех возможных реализаций процесса с вероятностью единица сходятся к одной и той же постоянной величине (среднему значению по ансамблю).

$$P\left[\mathrm{E}\left[\{\mathbf{S}_t\}\right]_k = \mathrm{E}\left[\{\mathbf{S}_t\}\right]_t\right] = 1.$$

Классы сигналов



Стационарность выборочных функций:

- Понятие применяется при наличии единственной реализации с.п.

$$\left| \mathrm{E}\big[s_k(t)\big]_{t_1}^{t_2} - \mathrm{E}\big[s_k(t)\big]_{t_1+\tau}^{t_2+\tau} \right| < \delta,\ \forall\tau,$$

$$\big| C_\mathrm{s}(t_1, t_2)|_k - C_\mathrm{s}(t_1+\tau, t_2+\tau)|_k \big| < \delta,\ \forall\tau.$$

Частота Найквиста

Фундаментальное правило:

$$f_{Nyq} = \frac{1}{2}\, f_s = \frac{1}{2\,\Delta t},$$

Примечания:

f_{Nyq} – частота Найквиста.

f_s – частота семплирования.

Δt – шаг дискретизации.

Частота Найквиста

Фундаментальное правило:

$$f_{Nyq} = \frac{1}{2}\, f_s = \frac{1}{2\,\Delta t},$$

Примечания:

f_{Nyq} – частота Найквиста.

f_s – частота семплирования.

Δt – шаг дискретизации.

Теорема Найквиста-Шеннона-Котельникова, теорема отсчётов:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\,\Delta t)\ \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t - k\,\Delta t)\right), \quad \mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin x}{x}, \quad 0 < \Delta t \leqslant \frac{1}{2\, f_{\mathrm{Sg}}}.$$

Частота Найквиста

Фундаментальное правило:

$$f_{Nyq} = \frac{1}{2}\, f_s = \frac{1}{2\,\Delta t},$$

Примечания:

f_{Nyq} – частота Найквиста.

f_s – частота семплирования.

Δt – шаг дискретизации.

Следствия из теоремы:

- любой аналоговый сигнал может быть восстановлен с какой угодно точностью по своим дискретным во времени отсчётам, взятым с частотой $f_s > f_{\mathrm{Sg}}$, где f_{Sg} – максимальная частота в в спектре реального сигнала.
- если максимальная частота в сигнале равна или превышает частоту Найквиста – половину частоты дискретизации, то способа восстановить сигнал из дискретного в аналоговый без искажений не существует, так называемая проблема наложения спектра (алиасинг).

Анализ во временной области

- моменты случайной величины.
- плотности вероятности.
- автокорреляционные функции.
- совместные плотности вероятности.
- взаимокорреляционные функции.
- импульсная характеристика системы:

$$y_k = \sum_{i=0}^{k} h_i \, x_{k-i}, \quad k = \overline{0,\, K-1},$$

где

$$y = h \circ x,$$

это операция дискретной свёртки.

Анализ в частотной области I

Дискретное преобразование Фурье:

$$\overset{\bullet}{S}_l = \Delta t \sum_{k=0}^{K-1} s_k \, \exp\left[-\imath \frac{2\,\pi\,k\,l}{K}\right], \quad f_l = \frac{l}{T} = \frac{l}{K\,\Delta t}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$k = \overline{0,\, K-1}, \quad l = \overline{0,\, L}, \quad L = \frac{K}{2}, \quad K = 2^n.$$

Примечания:

f_L – частота Найквиста.

f_1 – определяет разрешение по частоте.

Анализ в частотной области I

Дискретное преобразование Фурье:

$$\overset{\bullet}{S}_l = \Delta t \sum_{k=0}^{K-1} s_k \, \exp\left[-\imath \frac{2\,\pi\,k\,l}{K}\right], \quad f_l = \frac{l}{T} = \frac{l}{K\,\Delta t}, \quad s \in \mathbb{R},$$

$$k = \overline{0,\, K-1}, \quad l = \overline{0,\, L}, \quad L = \frac{K}{2}, \quad K = 2^n.$$

Примечания:

f_L – частота Найквиста.

f_1 – определяет разрешение по частоте.

Оценка односторонней спектральной плотности:

$$\hat{G}_{ss}(f_l) = \frac{2}{n_\mathrm{d}\,K\,\Delta t} \sum_{i=0}^{n_\mathrm{d}-1} \left|\overset{\bullet}{S}_i(f_l)\right|^2.$$

Примечание:

От числа усреднений n_d зависит случайная ошибка оценки спектра.

Анализ в частотной области II

Анализ в частотной области II

Взаимная спектральная плотность:

$$\hat{G}_{xy}(f_l) = \frac{2}{n_\mathrm{d}\, K\, \Delta t} \sum_{i=0}^{n_\mathrm{d}-1} \left| \overset{\bullet}{X}{}_i^{*}(f_l)\, \overset{\bullet}{Y}{}_i(f_l) \right|.$$

Примечание:

Взаимная спектральная плотность G_{xy} – величина комплексная.

Анализ в частотной области II

Взаимная спектральная плотность:

$$\hat{G}_{xy}(f_l) = \frac{2}{n_\mathrm{d}\, K\, \Delta t} \sum_{i=0}^{n_\mathrm{d}-1} \left| \dot{X}_i^*(f_l)\, \dot{Y}_i(f_l) \right|.$$

Примечание:

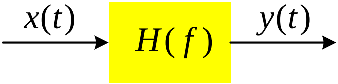
Взаимная спектральная плотность G_{xy} – величина комплексная.

Частотная характеристика системы:

$$\left|\hat{H}_{xy}(f_l)\right| = \frac{\left|\hat{G}_{xy}(f_l)\right|}{\hat{G}_{xx}(f_l)}, \quad \hat{\varphi}_{xy}(f_l) = \mathrm{arctg}\, \frac{\Im\, \hat{G}_{xy}(f_l)}{\Re\, \hat{G}_{xy}(f_l)}.$$

Анализ в частотной области III

Анализ в частотной области III



Функция когерентности:

$$\hat{\gamma}^2_{xy}(f_l) = \frac{\left|\hat{G}_{xy}(f_l)\right|^2}{\hat{G}_{xx}(f_l)\,\hat{G}_{yy}(f_l)}.$$

Анализ в частотной области III

Функция когерентности:

$$\hat{\gamma}^2_{xy}(f_l) = \frac{\left|\hat{G}_{xy}(f_l)\right|^2}{\hat{G}_{xx}(f_l)\,\hat{G}_{yy}(f_l)}.$$

Когерентный спектр выходного процесса:

$$\hat{G}^{\gamma}_{yy}(f_l) = \hat{\gamma}^2_{xy}(f_l)\,\hat{G}_{yy}(f_l).$$

Анализ в частотной области III

Функция когерентности:

$$\hat{\gamma}^2_{xy}(f_l) = \frac{\left|\hat{G}_{xy}(f_l)\right|^2}{\hat{G}_{xx}(f_l)\,\hat{G}_{yy}(f_l)}.$$

Когерентный спектр выходного процесса:

$$\hat{G}^{\gamma}_{yy}(f_l) = \hat{\gamma}^2_{xy}(f_l)\,\hat{G}_{yy}(f_l).$$

Остаточный спектр выходного процесса:

$$\hat{G}^{\gamma}_{vv}(f_l) = \hat{G}_{yy}(f_l) - \hat{G}^{\gamma}_{yy}(f_l).$$

Анализ в частотной области IV

- спектральные плотности.
- взаимные спектральные плотности.
- частотные характеристики.
- функции когерентности.
- когерентные спектры.
- остаточные спектры.

Оконное преобразование Фурье I

Конечная выборка сигнала $\{s_k\}_{k=1}^{K}$ равносильна произведению исходного сигнала $\{s_k\}$ на оконную функцию (в данном случае прямоугольную):

$$\overset{\bullet}{S}_l = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k\, w_k\, \exp\left[-\imath \frac{2\,\pi\,k\,l}{K}\right].$$

Оконное преобразование Фурье I

Конечная выборка сигнала $\{s_k\}_{k=1}^{K}$ равносильна произведению исходного сигнала $\{s_k\}$ на оконную функцию (в данном случае прямоугольную):

$$\overset{\bullet}{S}_l = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k\, w_k\, \exp\left[-\imath \frac{2\,\pi\, k\, l}{K}\right].$$

Таким образом, результатом оконного преобразования Фурье является не спектр исходного сигнала, а спектр произведения сигнала и оконной функции. Спектр, полученный при помощи оконного преобразования Фурье, является оценкой спектра исходного сигнала и принципиально допускает искажения.

Оконное преобразование Фурье I

Конечная выборка сигнала $\{s_k\}_{k=1}^{K}$ равносильна произведению исходного сигнала $\{s_k\}$ на оконную функцию (в данном случае прямоугольную):

$$\overset{\bullet}{S}_l = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k\, w_k\, \exp\left[-\imath \frac{2\,\pi\,k\,l}{K}\right].$$

Таким образом, результатом оконного преобразования Фурье является не спектр исходного сигнала, а спектр произведения сигнала и оконной функции. Спектр, полученный при помощи оконного преобразования Фурье, является оценкой спектра исходного сигнала и принципиально допускает искажения.

Искажения, вносимые применением окон, определяются размером окна и его формой. Выделяют два основных свойства частотных характеристик окон: ширина главного лепестка и максимальный уровень боковых лепестков. Применение окон, отличных от прямоугольного, обусловлено желанием уменьшить влияние боковых лепестков за счёт увеличения ширины главного.

Оконное преобразование Фурье I

Конечная выборка сигнала $\{s_k\}_{k=1}^{K}$ равносильна произведению исходного сигнала $\{s_k\}$ на оконную функцию (в данном случае прямоугольную):

$$\overset{\bullet}{S}_l = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \, w_k \, \exp\left[-\imath \frac{2\,\pi\,k\,l}{K}\right].$$

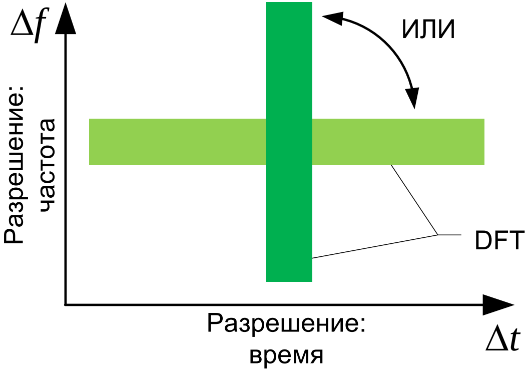
Таким образом, результатом оконного преобразования Фурье является не спектр исходного сигнала, а спектр произведения сигнала и оконной функции. Спектр, полученный при помощи оконного преобразования Фурье, является оценкой спектра исходного сигнала и принципиально допускает искажения.

Искажения, вносимые применением окон, определяются размером окна и его формой. Выделяют два основных свойства частотных характеристик окон: ширина главного лепестка и максимальный уровень боковых лепестков. Применение окон, отличных от прямоугольного, обусловлено желанием уменьшить влияние боковых лепестков за счёт увеличения ширины главного.

При использовании оконного преобразования Фурье невозможно одновременно обеспечить хорошее разрешение по времени и по частоте. Чем уже окно, тем выше разрешение по времени и ниже разрешение по частоте.

Оконное преобразование Фурье II

Проблема размена – время на частоту:



Теоремы Парсеваля и Хинчина–Колмогорова

ТЕОРЕМА ПАРСЕВАЛЯ устанавливает равенство между энергией сигнала и энергией его спектра:

$$\sum_{k=0}^{K-1} |s_k|^2 = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} |\dot{S}_l|^2.$$

Теоремы Парсеваля и Хинчина–Колмогорова

ТЕОРЕМА ПАРСЕВАЛЯ устанавливает равенство между энергией сигнала и энергией его спектра:

$$\sum_{k=0}^{K-1} |s_k|^2 = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L} |\overset{\bullet}{S}_l|^2.$$

ТЕОРЕМА ХИНЧИНА-КОЛМОГОРОВА утверждает, что спектральной плотностью мощности S_{xx} стационарного в широком смысле случайного процесса s является преобразование Фурье его автокорреляционной функции r_{xx}:

$$S_{xx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx\,k} \exp\left[-\imath\, 2\, \pi\, k\, f\right].$$

Вейвлет-анализ временных рядов I

Материнский вейвлет:

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Примечания:

a – временной масштаб.

b – сдвиг во времени.

Вейвлет-анализ временных рядов I

Материнский вейвлет:

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Примечания:

a – временной масштаб.

b – сдвиг во времени.

Достаточные условия вейвлета:

- нулевое среднее:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t \equiv 0.$$

- ограниченность L_2 нормы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bigl|\psi(t)\bigr|^2\,\mathrm{d}t < \infty.$$

- локализация во временной и частотной областях:

$$\bigl|\psi(t)\bigr| \leqslant \frac{c}{\bigl(1+|t|\bigr)^{1+\epsilon}}, \quad \bigl|S_\psi(\omega)\bigr| \leqslant \frac{c}{\bigl(1+|\omega|\bigr)^{1+\epsilon}}.$$

Вейвлет-анализ временных рядов IIa

Прямое непрерывное вейвлет преобразование:

$$W_{ss}(a,\, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathrm{d}t.$$

Примечание:

$W_{ss}(a,\, b)$ – масштабно-временное описание сигнала.

Вейвлет-анализ временных рядов IIa

Прямое непрерывное вейвлет преобразование:

$$W_{ss}(a,\, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathrm{d}t.$$

Примечание:

$W_{ss}(a,\, b)$ – масштабно-временное описание сигнала.

Свойства вейвлет-преобразования:

- линейность:

$$W\big[\alpha\, s_1(t) + \beta\, s_2(t)\big] = \alpha\, W_1(a,\, b) + \beta\, W_2(a,\, b).$$

- сдвиг и масштабирование:

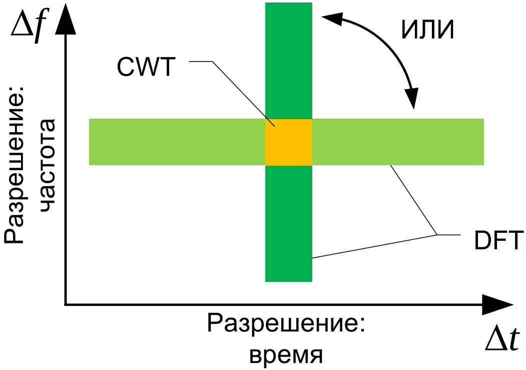
$$W\big[s(t-b')\big] = W_{ss}\big[a,\, b-b'\big], \quad W\left[s\left(\frac{t}{a'}\right)\right] = \frac{1}{a'}\, W_{ss}\left[\frac{a}{a'},\, \frac{b}{b'}\right].$$

- дифференцируемое представление:

$$W\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} s(t)\right] = (-1)^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \psi_{ab}(t)\, \mathrm{d}t.$$

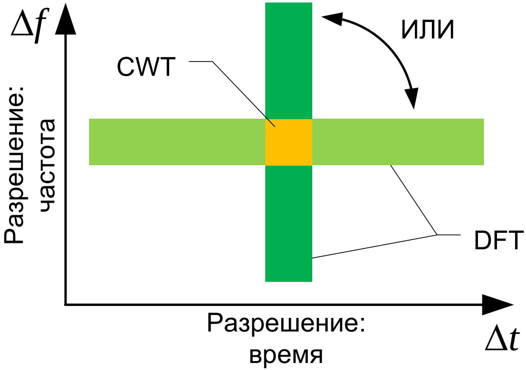
Вейвлет-анализ временных рядов IIb

Локализация – сильная сторона вейвлет-анализа:



Вейвлет-анализ временных рядов IIb

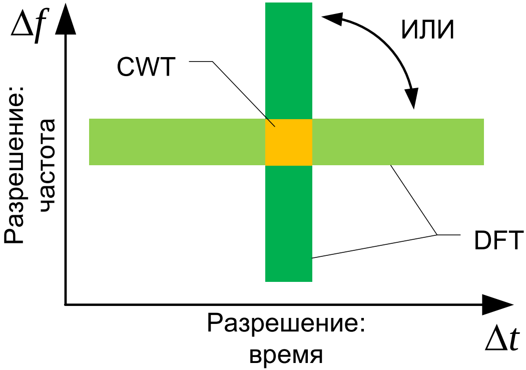
Локализация – сильная сторона вейвлет-анализа:



Что является слабой стороной?

Вейвлет-анализ временных рядов IIb

Локализация – сильная сторона вейвлет-анализа:



Что является слабой стороной?

Отсутствие формальных критериев выбора материнского вейвлета.

Вейвлет-анализ временных рядов IIc

Применение CWT и DWT:

Непрерывное – CWT: применяется для анализа процессов, используются неортогональные вейвлеты. Размерность выхода: $N + 1$.

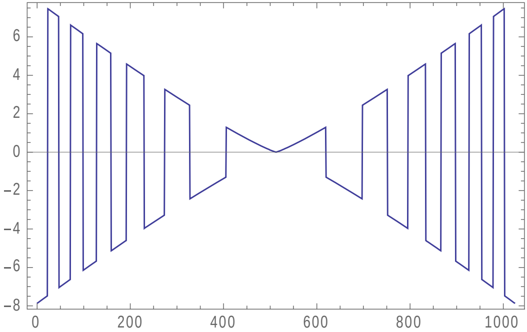
Дискретное – DWT: – применяется для сжатия, фильтрации сигналов, используются ортогональные вейвлеты. Размерность выхода: N.

Вейвлет-анализ временных рядов III

Пример – исходные данные:

```
data = Table[Abs@x^1.15 Sign[Cos[x^2]], {x, -6, 6, 12./1023}];

ListLinePlot[data, Frame → True, PlotTheme → None]
```

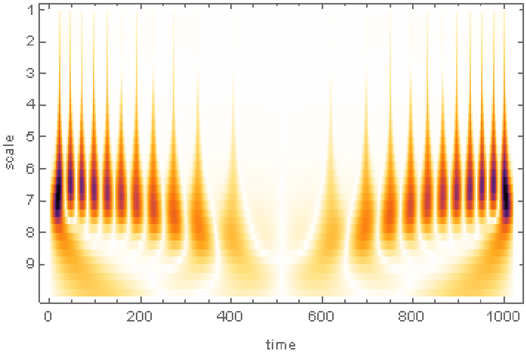


Вейвлет-анализ временных рядов III

Пример – вейвлет-преобразование:

```
cwt = ContinuousWaveletTransform [data, DGaussianWavelet [1]];

WaveletScalogram [cwt, Frame → True, FrameLabel → {"time", "scale"},
 PlotTheme → None]
```

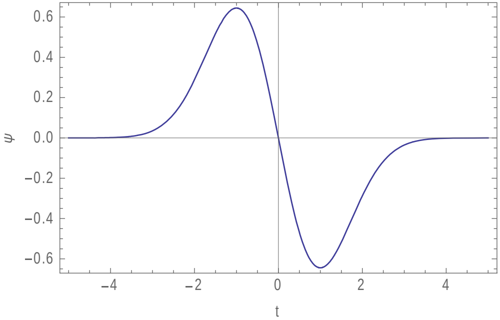


Вейвлет-анализ временных рядов IV

Материнский вейвлет во временном пространстве:

```
ψ[t_] := WaveletPsi [DGaussianWavelet  [1], t]

Plot [ψ[t], {t, -5, 5}, PlotRange → All, Frame → True , PlotTheme → None ,
 FrameLabel → {"t", "ψ"}]
```

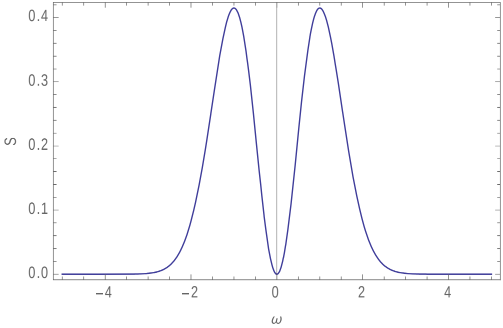


Вейвлет-анализ временных рядов IV

Материнский вейвлет в частотном пространстве:

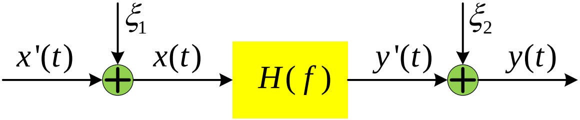
```
S[ω_] := Evaluate @FourierTransform [ψ[t], t, ω]

Plot [Abs [S1 [ω]] ^2, {ω, -5, 5}, PlotRange → All, Frame → True,
  PlotTheme → None, FrameLabel → {"ω", "S"}]
```



Соотношения между входными и выходными процессами

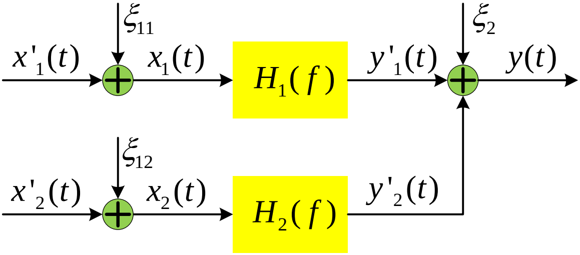
- SISO – модель с одним входом и одним выходом:



- шум на входе.
- шум на выходе.
- шум на входе и выходе.

Соотношения между входными и выходными процессами

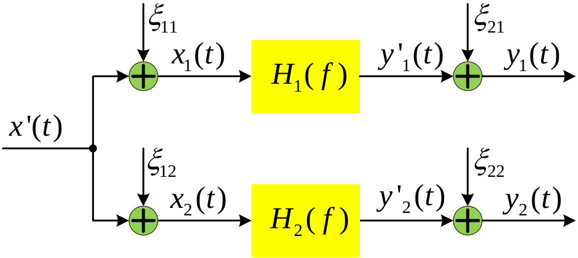
- MISO – модель с многими входами и одним выходом:



- шум на входе.
- шум на выходе.
- шум на входе и выходе.

Соотношения между входными и выходными процессами

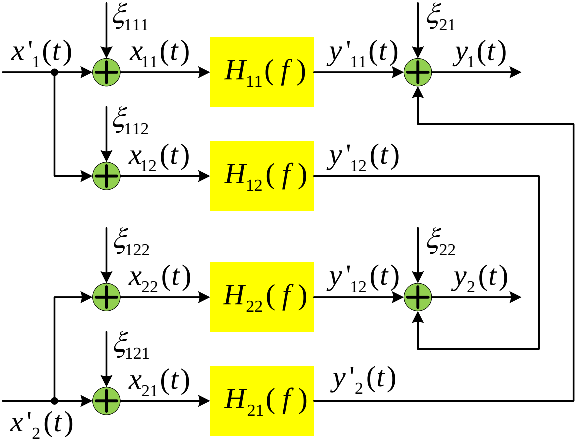
- SIMO – модель с одним входом и многими выходами:



- шум на входе.
- шум на выходе.
- шум на входе и выходе.

Соотношения между входными и выходными процессами

- MIMO – модель с многими входами и многими выходами:



- шум на входе.
- шум на выходе.
- шум на входе и выходе.

Цифровой фильтр

ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТР – фильтр обрабатывающий цифровой сигнал с целью выделения и/или подавления определённых частот (структурных компонент) этого сигнала.

Стационарный линейный фильтр:

$$f\big[x_1(t),\, a\big] + f\big[x_2(t),\, a\big] = f\big[x_1(t) + x_2(t),\, a\big], \quad a \equiv \text{const}.$$

Описание фильтров:

- h_k – импульсная характеристика.
- $H(z)$ – передаточная функция.
- $H(f_l)$ – комплексная частотная характеристика.
- $\big|H(f_l)\big|$ – амплитудно-частотная и $\varphi(f_l)$ – фазочастотная характеристики.

КИХ-фильтр

КИХ-ФИЛЬТР – (нерекурсивный фильтр, finite impulse response filter, FIR-filter) – один из видов линейных цифровых фильтров с ограниченной по времени импульсной характеристикой.

Связь между входным и выходным сигналами фильтра:

$$y_k = \sum_{i=0}^{P} b_i \, x_{k-i}.$$

Передаточная функция:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{P} b_i \, z^{-i}.$$

Положительные свойства:

- Устойчивость.
- при реализации не требуют наличия обратной связи.
- Фаза может быть сделана линейной.

Прямая связь со свёрточными нейросетями.

БИХ-фильтр

БИХ-ФИЛЬТР – (рекурсивный фильтр, infinite impulse response filter, IIR-filter) – один из видов линейных фильтров использующий один или более своих выходов в качестве входа, то есть образующий обратную связь и формирующий бесконечную по времени импульсную характеристику.

Связь между входным и выходным сигналами фильтра:

$$y_k = \sum_{i=0}^{P} b_i\, x_{k-i} - \sum_{j=1}^{Q} a_j\, y_{k-j}.$$

Передаточная функция:

$$H(z) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{P} b_i\, z^{-i}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{Q} a_j\, z^{-j}}.$$

Положительные свойства:

- широкие возможности по обработке сигналов.
- компактность при реализации.
- возможность расчёта в замкнутой форме.

Прямая связь с рекуррентными нейросетями.

Общие положения

Теория обнаружения, различения и оценивания сигналов начала бурно развиваться в 50-е годы XX века благодаря насущным потребностям в областях: связи, радио-, гидролокации, радионавигации.

Общие положения

Теория обнаружения, различения и оценивания сигналов начала бурно развиваться в 50-е годы XX века благодаря насущным потребностям в областях: связи, радио-, гидролокации, радионавигации.

Основополагающие положения этого периода: байесовский подход; широкие априорные предположения о сигналах, помехах и системах; линейные системы; белые шумы.

Общие положения

Теория обнаружения, различения и оценивания сигналов начала бурно развиваться в 50-е годы XX века благодаря насущным потребностям в областях: связи, радио-, гидролокации, радионавигации.

Основополагающие положения этого периода: байесовский подход; широкие априорные предположения о сигналах, помехах и системах; линейные системы; белые шумы.

В 70-е годы ситуация начала меняться, активно применяется парадигма «в условиях априорной неопределённости», как параметрической, так и структурной.

Общие положения

Теория обнаружения, различения и оценивания сигналов начала бурно развиваться в 50-е годы XX века благодаря насущным потребностям в областях: связи, радио-, гидролокации, радионавигации.

Основополагающие положения этого периода: байесовский подход; широкие априорные предположения о сигналах, помехах и системах; линейные системы; белые шумы.

В 70-е годы ситуация начала меняться, активно применяется парадигма «в условиях априорной неопределённости», как параметрической, так и структурной.

В 80-е годы формируется единая постановка для задач: обнаружения, различения, оценивания сигналов. Область применения расширяется на задачи медицинской диагностики, системы управления и т.д.

Общие положения

Теория обнаружения, различения и оценивания сигналов начала бурно развиваться в 50-е годы XX века благодаря насущным потребностям в областях: связи, радио-, гидролокации, радионавигации.

Основополагающие положения этого периода: байесовский подход; широкие априорные предположения о сигналах, помехах и системах; линейные системы; белые шумы.

В 70-е годы ситуация начала меняться, активно применяется парадигма «в условиях априорной неопределённости», как параметрической, так и структурной.

В 80-е годы формируется единая постановка для задач: обнаружения, различения, оценивания сигналов. Область применения расширяется на задачи медицинской диагностики, системы управления и т.д.

На рубеже XXI века меняется парадигма: начинают активно применяться методы машинного обучения. Многие задачи начинают решаться в нелинейной постановке.

Общие положения

Теория обнаружения, различения и оценивания сигналов начала бурно развиваться в 50-е годы XX века благодаря насущным потребностям в областях: связи, радио-, гидролокации, радионавигации.

Основополагающие положения этого периода: байесовский подход; широкие априорные предположения о сигналах, помехах и системах; линейные системы; белые шумы.

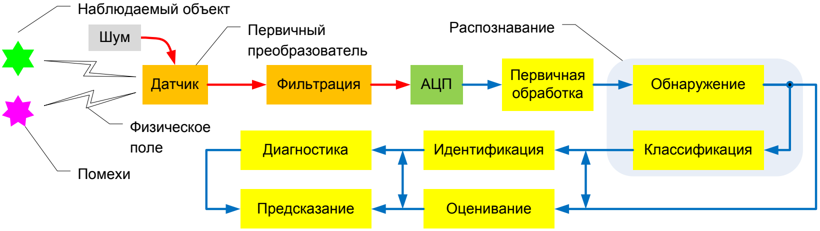
В 70-е годы ситуация начала меняться, активно применяется парадигма «в условиях априорной неопределённости», как параметрической, так и структурной.

В 80-е годы формируется единая постановка для задач: обнаружения, различения, оценивания сигналов. Область применения расширяется на задачи медицинской диагностики, системы управления и т.д.

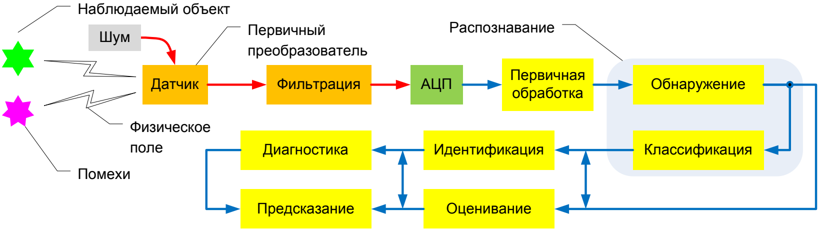
На рубеже XXI века меняется парадигма: начинают активно применяться методы машинного обучения. Многие задачи начинают решаться в нелинейной постановке.

Следующий рубеж: Deep Learning.

Решаемые задачи



Решаемые задачи



Важные моменты:

- Поскольку помехи, а зачастую и полезный сигнал, носят статистический характер, теория обнаружения построена на методах теории вероятностей и математической статистики.
- Априорная информированность является ключевым фактором, определяющим эффективность решения задачи: от «найди то, не знаю что» до «мне всё известно, вы мне не нужны».

Формальное представление задач I

Задачи обнаружения и различения сигналов формально решаются через проверку статистических гипотез по наблюдаемым данным $\mathbf{x} = \{x(t_1), \ldots, x(t_n)\}$:

Обнаружение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_1 – сигнал присутствует, $x(t) = s(t) \oplus \xi(t)$.

Формальное представление задач I

Задачи обнаружения и различения сигналов формально решаются через проверку статистических гипотез по наблюдаемым данным $\mathbf{x} = \{x(t_1), \ldots, x(t_n)\}$:

Обнаружение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_1 – сигнал присутствует, $x(t) = s(t) \oplus \xi(t)$.

Различение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_m – m-й сигнал присутствует, $x(t) = s_m(t) \oplus \xi(t)$, $m = \overline{1,\, M}$.

Формальное представление задач I

Задачи обнаружения и различения сигналов формально решаются через проверку статистических гипотез по наблюдаемым данным $\mathbf{x} = \{x(t_1), \ldots, x(t_n)\}$:

Обнаружение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_1 – сигнал присутствует, $x(t) = s(t) \oplus \xi(t)$.

Различение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_m – m-й сигнал присутствует, $x(t) = s_m(t) \oplus \xi(t)$, $m = \overline{1,\, M}$.

$\omega_0\big(x \,|\, \{\theta,\, \mu\}\big)$, $\omega_m\big(x \,|\, \{\theta,\, \mu\}\big)$ – n-точечная ПРВ чистой помехи и смеси m-го сигнала и помехи, соответственно.

Формальное представление задач I

Задачи обнаружения и различения сигналов формально решаются через проверку статистических гипотез по наблюдаемым данным $\mathbf{x} = \{x(t_1),\, \ldots,\, x(t_n)\}$:

Обнаружение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_1 – сигнал присутствует, $x(t) = s(t) \oplus \xi(t)$.

Различение

H_0 – сигнал отсутствует, $x(t) = \xi(t)$.

H_m – m-й сигнал присутствует, $x(t) = s_m(t) \oplus \xi(t)$, $m = \overline{1,\, M}$.

$\omega_0\big(x \,|\, \{\theta,\, \mu\}\big)$, $\omega_m\big(x \,|\, \{\theta,\, \mu\}\big)$ – n-точечная ПРВ чистой помехи и смеси m-го сигнала и помехи, соответственно.

Нерандомизированная решающая функция:

$$\phi^{(m)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \mathrm{X}_m, \\ 0 & \mathbf{x} \in \mathrm{X}_0. \end{cases}, \qquad \mathrm{X} = \mathrm{X}_0 \cup \mathrm{X}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{X}_m.$$

Рандомизированная решающая функция принимает любые значения из отрезка $[0,\, 1]$, и при её значении, равном γ_m, гипотеза H_m принимается с вероятностью γ_m.

Формальное представление задач II

Вероятность ложной тревоги:

$$\alpha(\theta,\, \mu) = \int\limits_{\mathrm{X}} \phi(\mathbf{x})\, \omega_0\big(x \,|\, \{\theta,\, \mu\}\big)\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{\mathrm{X}_1} \omega_0\big(x \,|\, \{\theta,\, \mu\}\big)\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Формальное представление задач II

Вероятность ложной тревоги:

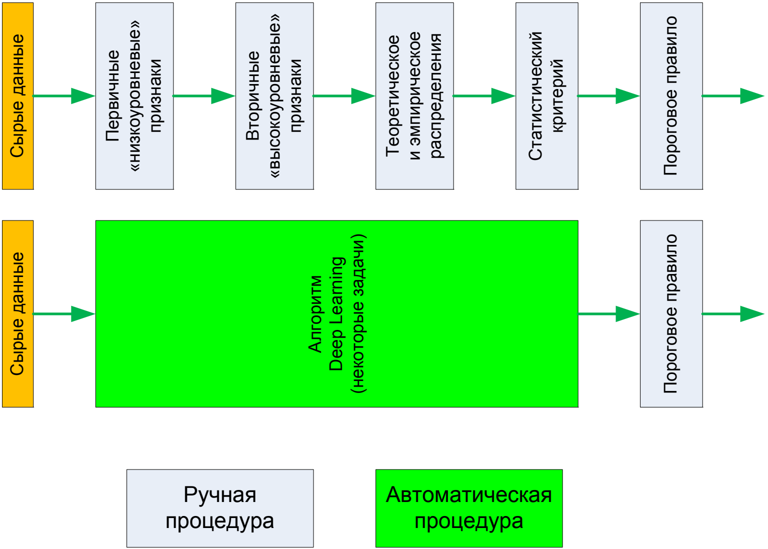
$$\alpha(\theta,\,\mu) = \int\limits_{\mathrm{X}} \phi(\mathbf{x})\,\omega_0\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{\mathrm{X}_1} \omega_0\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Вероятность пропуска объекта:

$$\delta(\theta,\,\mu) = 1 - \beta(\theta,\,\mu) = 1 - \int\limits_{\mathrm{X}} \phi(\mathbf{x})\,\omega_1\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{\mathrm{X}_0} \omega_1\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Вероятность правильного обнаружения $\beta(\theta,\,\mu)$ иначе называют ещё мощностью алгоритма обнаружения $\phi(\mathbf{x})$.

«Классика» vs «Deep Learning»



Байесовский критерий оптимальности

Исходно задано:

$\omega_0\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)$, $\omega_1\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)$ – n-точечная ПРВ чистой помехи и смеси сигнала и помехи, соответственно.

p_1 – априорная вероятность наличия сигнала в наблюдаемой выборке $\mathbf{x}$, причём $p_0 = 1 - p_1$.

Π_{ij} – потери и выигрыши за ошибки и правильные решения.

Байесовский критерий оптимальности

Исходно задано:

$\omega_0\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)$, $\omega_1\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)$ – n-точечная ПРВ чистой помехи и смеси сигнала и помехи, соответственно.

p_1 – априорная вероятность наличия сигнала в наблюдаемой выборке $\mathbf{x}$, причём $p_0 = 1 - p_1$.

Π_{ij} – потери и выигрыши за ошибки и правильные решения.

Средний риск (средние потери):

$$R = p_0\,\Pi_{00}\int\limits_{\mathrm{X}_0}\omega_0\,\mathrm{d}\mathbf{x} + p_0\,\Pi_{01}\int\limits_{\mathrm{X}_1}\omega_0\,\mathrm{d}\mathbf{x} + p_1\,\Pi_{10}\int\limits_{\mathrm{X}_0}\omega_1\,\mathrm{d}\mathbf{x} + p_1\,\Pi_{11}\int\limits_{\mathrm{X}_1}\omega_1\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Байесовский критерий оптимальности

Исходно задано:

$\omega_0\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)$, $\omega_1\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)$ – n-точечная ПРВ чистой помехи и смеси сигнала и помехи, соответственно.

p_1 – априорная вероятность наличия сигнала в наблюдаемой выборке $\mathbf{x}$, причём $p_0 = 1 - p_1$.

Π_{ij} – потери и выигрыши за ошибки и правильные решения.

Средний риск (средние потери):

$$R = p_0\,\Pi_{00}\int\limits_{X_0}\omega_0\,\mathrm{d}\mathbf{x} + p_0\,\Pi_{01}\int\limits_{X_1}\omega_0\,\mathrm{d}\mathbf{x} + p_1\,\Pi_{10}\int\limits_{X_0}\omega_1\,\mathrm{d}\mathbf{x} + p_1\,\Pi_{11}\int\limits_{X_1}\omega_1\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Отношение правдоподобия:

$$R \to \min: \quad L(\mathbf{x}) \equiv \frac{\omega_1\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)}{\omega_0\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)} \gtrless C = \frac{\big(\Pi_{01} - \Pi_{00}\big)\,p_0}{\big(\Pi_{10} - \Pi_{11}\big)\,p_1}.$$

Байесовский критерий оптимальности

Исходно задано:

$\omega_0\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)$, $\omega_1\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)$ – n-точечная ПРВ чистой помехи и смеси сигнала и помехи, соответственно.

p_1 – априорная вероятность наличия сигнала в наблюдаемой выборке $\mathbf{x}$, причём $p_0 = 1 - p_1$.

Π_{ij} – потери и выигрыши за ошибки и правильные решения.

Средний риск (средние потери):

$$R = p_0\,\Pi_{00}\int\limits_{\mathrm{X}_0}\omega_0\,\mathrm{d}\mathbf{x} + p_0\,\Pi_{01}\int\limits_{\mathrm{X}_1}\omega_0\,\mathrm{d}\mathbf{x} + p_1\,\Pi_{10}\int\limits_{\mathrm{X}_0}\omega_1\,\mathrm{d}\mathbf{x} + p_1\,\Pi_{11}\int\limits_{\mathrm{X}_1}\omega_1\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Отношение правдоподобия:

$$R \to \min: \quad L(\mathbf{x}) \equiv \frac{\omega_1\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)}{\omega_0\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)} \gtrless C = \frac{\big(\Pi_{01} - \Pi_{00}\big)\,p_0}{\big(\Pi_{10} - \Pi_{11}\big)\,p_1}.$$

Оптимальный обнаружитель:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & L(\mathbf{x}) \geqslant C, \\ 0 & L(\mathbf{x}) < C. \end{cases}$$

Критерий Неймана-Пирсона

Критерий Неймана-Пирсона используется в задачах синтеза равномерно наиболее мощных алгоритмов обнаружения сигналов.

Критерий Неймана-Пирсона

Критерий Неймана-Пирсона используется в задачах синтеза равномерно наиболее мощных алгоритмов обнаружения сигналов.

$$\beta(\theta,\,\mu) = \int\limits_{\mathrm{X}} \phi(\mathbf{x})\,\omega_1\bigl(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\bigr)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \max_{\phi(\mathbf{x})}.$$

$$\alpha(\theta,\,\mu) = \int\limits_{\mathrm{X}} \phi(\mathbf{x})\,\omega_0\bigl(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\bigr)\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \alpha.$$

Критерий Неймана-Пирсона

Критерий Неймана-Пирсона используется в задачах синтеза равномерно наиболее мощных алгоритмов обнаружения сигналов.

$$\beta(\theta,\, \mu) = \int\limits_{\mathrm{X}} \phi(\mathbf{x})\, \omega_1\big(x \,|\, \{\theta,\, \mu\}\big)\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \max_{\phi(\mathbf{x})}.$$

$$\alpha(\theta,\, \mu) = \int\limits_{\mathrm{X}} \phi(\mathbf{x})\, \omega_0\big(x \,|\, \{\theta,\, \mu\}\big)\, \mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \alpha.$$

Поиск оптимума ведётся по всем возможным алгоритмам обнаружения. Если решение удаётся найти, то оно является равномерно наиболее мощным (РНМ).

Критерий Неймана-Пирсона

Критерий Неймана-Пирсона используется в задачах синтеза равномерно наиболее мощных алгоритмов обнаружения сигналов.

$$\beta(\theta,\,\mu) = \int\limits_{\mathrm{X}} \phi(\mathbf{x})\,\omega_1\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \max_{\phi(\mathbf{x})}.$$

$$\alpha(\theta,\,\mu) = \int\limits_{\mathrm{X}} \phi(\mathbf{x})\,\omega_0\big(x\,|\,\{\theta,\,\mu\}\big)\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \alpha.$$

Поиск оптимума ведётся по всем возможным алгоритмам обнаружения. Если решение удаётся найти, то оно является равномерно наиболее мощным (РНМ).

Дополнительные условия:

- несмещённости, $\beta(\theta,\,\mu) \leqslant \alpha$.
- инвариантности, $\phi(\mathrm{g}\,\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$, $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$ – группа преобразований выборочного пространства X.
- выполнимости фундаментальной леммы Неймана-Пирсона (см. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.) – сужение допустимых классов ω_0 и ω_1.

Outline section

Контрольная работа

Задание для слушателей:

1. Изучить теоретические основы задач оценивания и прогнозирования сигналов в вероятностной постановке с позиций математической статистики.
2. Изучить особенности вычисления дискретных свёрток в частотном пространстве (линейные, периодические, апериодические свёртки).
3. Изучить построение спектральных оценок $\hat{G}_{ss}(f_l)$ в привязке к функционалу библиотеки `scipy`.
4. Решить задачу:

Квалификационная задача

Необходимо разработать, обучить и представить предобученную глубокую нейронную сеть принимающую на вход произвольный сигнал, заданный в виде дискретной последовательности $\{s_k\}_{k=1}^{1024}$, $s \in \mathbb{R}$, $t_{k+1} - t_k = \tau$, и выдающую на выходе оценку power spectral density (dB) в виде дискретной последовательности $\{g_k\}_{k=0}^{512}$. Обучающее и тестовое множества генерируются самостоятельно (каждая последовательность должна иметь нулевое среднее и единичную дисперсию). Решение реализуется на фреймворке Keras (Python 3.x, TF) и проверяется на валидационном наборе лектора.