Tehnici de simulare - Lab 5

Metoda inversă

① Caz continuu

(T) F - funcție de repartiție continuă

$U \sim Unif(0,1)$

$X = F^{-1}(U)$

X are funcția de repartiție F

dem:

notăm F_0 funcția de rep adevărată a lui X

$F_0(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x)$

$= \mathbb{P}(F(F^{-1}(U)) \leq F(x)) = \mathbb{P}(U \leq F(x))$

$U \sim Unif(a,b)$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b) \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

$U \sim Unif(0,1)$

$$F_U = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(U \leq F(x)) = F_U(\underbrace{F(x)}_{\in [0,1]}) = F(x) = F_0(x)$

① - ex.

$X \sim F$, $F(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

se înțelege ea

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^n, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

$$u = F^{-1}(x) \Leftrightarrow F(x) = u \Leftrightarrow x^n = u \Leftrightarrow x = u^{\frac{1}{n}}$$

Algoritm

① generez u

② calculez $x = u^{\frac{1}{n}}$

② $X \sim Exp(\lambda)$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$F(x) = u \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = u \Leftrightarrow 1 - u = e^{-\lambda x}$$

$$\log(1-u) = -\lambda x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \log \underbrace{(1-u)}_{unif[0,1]}$$

$$X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \log(u)$$

3) $X \sim Gamma(n, \lambda)$

i.i.d ~ independente și identic distribuite

$X_1, X_2 \dots X_n$ i.i.d $\sim Exp(\lambda)$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X \sim Gamma(n, \lambda)$$

Alg.

- Generez $U_1 \dots U_n$
- Calculez $x_1 \dots x_n$
- $\sum x_i = y$

$\downarrow$

valoarea pe care o căutam

Temă

- aplicați metoda inversa

$$F(x) = \frac{x + x^3 + x^5}{3}, \quad 0 \le x \le 1$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-2x} + 2x}{3}, & x \in (0, 1] \\[2ex] \dfrac{3 - e^{-2x}}{3}, & x > 1 \end{cases}$$