Tehnici de optimizare — Curs 1

Notare

- examen 50% minim — 6pct
- proiecte lab: 6 × 5p — 3pct
- 1 pct oficiu — 1pct

-> sumă ≥ 4.5

Probleme de optimizare liniară

$$\inf f(x \in P) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$$

$$\text{m ecuații}\ \left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

forma standard de a unei prob de optimizare liniară

Alg simplex rezolva chestii pe forma standard

$x_1 \dots x_n$ variabile de intrare.

funcția liniară

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - funcție obiectiv.

$f(x_1 \dots x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$

$c_1 \dots c_n$ - costuri

ecuatia i se numeste restrictie

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + .. + a_{in}x_n = b_i$

$x_i \geq 0$ - ne-negative

$x_i > 0$ - pozitive

$(x_1, x_2 .. x_n)$ care verifică restricțiile și condițiile de semn - soluție admisibilă

$P = \{$sol admisibilă$\}$

Dacă sol $\in P$ și $f($sol$) = \min / \max$, sol se numește soluție optimă a problemei

Scriere matricială a sol

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ vectorul termenilor liberi} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c$$

$c^T \cdot x = f(x)$

$Ax = b$

$x \geq 0$ ← vectorul null $= (0, 0, .., 0)^T$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Alte forme ale problemei de optimizare liniară

I Forma canonică

$$\begin{array}{ll} \inf c^T \cdot x & \sup c^T x \\ Ax \geq b & Ax \leq b \\ x \geq \phi & x \geq \phi \end{array}$$

Obs: o restricție se numește concordantă dacă
- este cu $\geq$
- este de minimizare

sau
- este cu $\leq$
- este de maximizare.

Aducerea unei prob din forma caconică în forma standard

a_i = linie din A

$$a_i^T \cdot \cancel{x} = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_i^T x \geq b_i \\ a_i^T x \leq b_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_i^T x \geq b_i \\ -a_i^T x \geq -b_i \end{cases}$$

invers

y - variabilă de egalizare, $y \geq 0$, "ecat" - din franceză

$$a_i^T x \leq b_i \Leftrightarrow a_i^T x + y = b_i$$

$$a_i^T x \geq b_i \Leftrightarrow a_i^T x - y = b_i$$

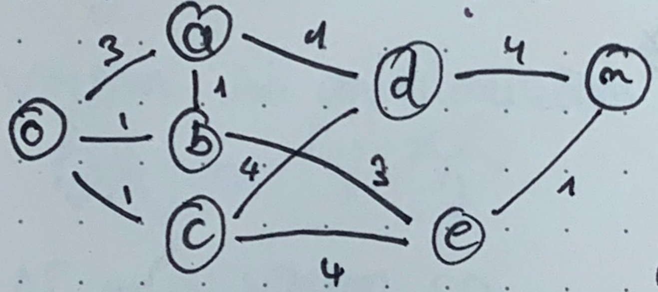
II Prob în forma generală

- avem
  * inecuații $\geq$
  * inecuații $\leq$
  * ecuații
  * variabile ≥ 0
  * variabile ≤ 0

$x_i \leq 0 \Rightarrow x_i' = -x_i \Rightarrow x_i' \geq 0$

Exemple de probleme de optimizare în rețele

① Optimizare în rețele



② - calculator
- se pot transfera
  x date între 2 calculatoare
  cu x date/sec
- se poate ~~merg~~ transmite
  de la a la b dar nu simultan

Variabile

x_{oa} = rata de la $o \to a$

$x_{oa} > 0 \to$ informație de la o la a

$x_{oa} < 0 \to$ informație de la a la o

+ câte o variabilă pt fiecare muchie

Problemă - maximizăm

$x_{oa} + x_{ob} + x_{oc}$

Restricții

$|x_{oa}| \leq 3$ $\quad |x_{cd}| \leq 4$

$|x_{ob}| \leq 1$ $\quad$ etc.

$|x_{oc}| \leq 1$

Restricții pentru noduri interne
- pentru fiecare nod ce intră = ce iese, echivalent cu suma ea pt un nod = 0

! avem variabila x_{oa} cu semnificația „cât merge din o în a"
$-x_{oa}$ = cât merge din a în o

pp. variabilele x_{ij} cu $i<j$ și $o<a$

$$\begin{cases} -x_{oa} + x_{ab} + x_{ad} = 0 \\ -x_{ob} - x_{ab} + x_{be} = 0 \\ -x_{oc} + x_{cd} + x_{ce} = 0 \\ -x_{ad} - x_{cd} + x_{dm} = 0 \\ -x_{be} - x_{ce} + x_{cm} = 0 \end{cases}$$

forma standard direct

căutăm max f, $f = x_{oa} + x_{ab} + x_{oc}$

Sol ~ prin metode magice ~

$x_{oa} = 2$ $\quad x_{be} = 2$
$x_{ob} = 1$ $\quad x_{ce} = -1$
$x_{oc} = 1$ $\quad x_{cd} = 2$
$x_{ab} = 1$ $\quad x_{dm} = 3$
$x_{ad} = 1$ $\quad x_{em} = 1$

② Probleme de transport

m depozite
n beneficiari

a_i - câtă marfă se află în depozitul i
b_j - câtă marfă vrea beneficiarul j
c_{ij} - costul de transport al unei unități de marfă din depozitul i la beneficiarul j

determinăm
x_{ij} - cât trimitem de la i la j

vrem să minimizăm
$$\sum_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

și mai vrem ca
* toți beneficiarii să primească cât vor

$\cancel{\sum_{j=\overline{1,m}} x}$ $\forall j, \sum_{i=\overline{1,n}} x_{ij} = b_j$

* depozitele să nu dea prea mult

$\forall i, \sum_{j=\overline{1,m}} x_{ij} \le a_i$

dacă $\sum a = \sum b$ avem = aici

③ Problema dietei

	Morcovi	Varză Albă	Porumb	Vrem
vit A	35	0,5	0,5	0,5
vit C	60	300	10	15
~~vit~~ fibre	30	20	10	4
Preț	0,75	0,5	0,15	

Variabile

x_1 - cantitatea de morcovi
x_2 - cantitatea de varză albă
x_3 - cantitatea de porumb

Minimizăm prețul de forma

$.75x_1 + .5x_2 + .15x_3$

Restricții

- pt fiecare chestie $\in$ {vit A, vit C, fibre} vrem cel puțin (0.5, 15, 4)

Rezolvare pe wolfram alpha.

goo.gl/AfSCtK