3. Propagación

La tarea más simple en el proceso de un tsunami es describir su propagación en el océano abierto. En este caso la amplitud de la onda ($A \sim 10^{-1}$a10^{0}m)es significantemente menor que la profundidad del océano ($H \sim 10^{3}$m); y a su vez la profundidad es mucho menor que la longitud de onda $\lambda = T(gH)^{1/2} \sim 10^{4} - 10^{6}$m. Esto nos permite aplicar exitosamente la teoría lineal más simple de ondas largas. A cualquier tasa, las manifestaciones de amplitud y la dispersión de fase serán insignificantes.
La ecuación de movimiento, o conservación de momentum, puede ser escrita

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -g\vec{\nabla}h - C_f \frac{\vec{V}|V|}{d+h}$$

con $\vec{V}$ el vector de velocidad horizontal promedio en profundidad, h es la elevación del agua o la amplitud del tsunami; d es la profundidad del agua y C_f es el coeficiente de fricción.
La aproximación lineal de la ecuación de aguas someras es:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -g\vec{\nabla}h$$

En la aproximación que considera al tsunami como una onda larga lineal (sin dispersión), la velocidad es determinada por la simple fórmula $c = \sqrt{gH}$. El periodo de las ondas de tsunami cae en el rango $10^2 - 10^4$s. Combinando esto con la relación para la longitud de onda, reescribimos la condición de aguas someras como

$$T\sqrt{g/H} \gg 1$$

Esta teoría lineal de ondas largas representa la más simple versión de una teoría de ondas superficiales en el agua y sirve como una aproximación aplicable para describir el proceso de propagación de tsunami en mar abierto a lo largo de rutas cortas. Pero cuando las olas cubren grandes distancias, los efectos de dispersión y nolinealidad, que tienen la propiedad de acumularse, son capaces de alterar no sólo la amplitud, sino que también la estructura muy superficial de la perturbación del agua.
Para calcular la distancia a la cual estos efectos dejan de ser despreciables, usaremos la relación de dispersión para ondas gravitacionales superficiales en un líquido $\omega^2 = gk\tanh(kH)$, desde la cual determinamos la velocidad de grupo:

$$C_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{g\left(\frac{kH}{\cosh^2(kH)} + \tanh(kH)\right)}{2\sqrt{gk\tanh(kH)}}$$

Así, la distancia de dispersión destructiva, L_{cd}, puede ser determinada como el producto de la velocidad de las ondas largas por el tiempo requerido para que un paquete de ondas se retrase del frente una distancia igual a la longitud de onda,

$$L_{cd} = \frac{\lambda(\omega)\sqrt{gH}}{\sqrt{gH} - C_{gr}(\omega)}$$

Si $\lambda \gg H$ entonces

$$L_{cd} \sim \lambda\left(\frac{\lambda}{H}\right)^2$$

Similarmente para el caso de la nolinealidad, consideremos una onda con amplitud A, la velocidad de propagación de la cresta diferirá de la velocidad lineal de las ondas largas y su valor es estimado como $\sqrt{g(H+A)}$.
Análogamente, la distancia a la que la nolinealidad es destructiva es:

$$L_{cn} = \frac{\lambda\sqrt{gH}}{\sqrt{g(H+A)} - \sqrt{gH}}$$

Si $A/H \ll 1$ entonces

$$L_{cn} \sim \lambda \frac{H}{A}$$

Notemos que incluso cuando la amplitud de la onda en mar abierto es significante, $A = 1$m y con profundidades tpicas de $H = 4$ km y $\lambda = 100$ km, el valor de L_{cn} sería alrededor de 400000 km que es un orden de magnitud mayor al radio de la Tierra por lo que efectivamente el efecto nolineal se puede despreciar.
La razón entre estas distancias aproximadas nos da el número de Ursell $U_r = \frac{A\lambda^2}{H^3}$, el cual es conocido en la teoría de ondas dispersivas-nolineales en agua.
En océano abierto $U_r \ll 1$ lo que implica que la dispersión tiene más efecto que la nolinealidad, mientras que cerca de la costa $U_r \gg 1$ lo que implica que la nolinealidad tiene un rol más importante que la dispersión.
Además notemos que la profundidad del océano es la única cantidad variable en la fórmula de la velocidad de ondas largas $c = \sqrt{gH}$. Luego, los efectos de la propagación del tsunami están relacionados al relieve del fondo oceánico.
Consideremos el problema unidimensional de la propagación de una onda larga en una cuenca, con la profundidad variando a lo largo de la coordenada horizontal. Vamos a considerar que las variaciones son lo suficientemente suaves de tal forma que las ondas reflejadas en las secciones inclinadas son despreciadas. Dentro del modelo lineal, las energías cinética y potencial son iguales y entonces la energía total puede ser escrita como dos veces la potencial:

$$W = \rho g \int_0^\lambda \xi^2 dx$$

con ξ el desplazamiento de la superficie libre del agua desde su posición de equilibrio y ρ la densidad del agua. Dado que en un sistema lineal la frecuencia de la perturbación permanecen intacta y la longitud de onda puede cambiar durante la propagación, la integral anterior es mejor hacerla sobre el tiempo en vez del espacio,

$$\rho g \sqrt{gH} \int_0^T \xi^2 dt = \text{constante} \times \xi_0^2 \sqrt{H}$$

De la conservación de la energía vemos que $\xi_0^2 \sqrt{H}$ =constante debe conservarse a lo largo de la ruta de propagación. En otras palabras, si la profundidad decrece a medida que la onda se propaga, entonces la amplitud debe aumentar por la ley $\xi_0 \sim H^{-1/4}$, y podemos relacionar

$$\xi_1 = \xi_2 \left(\frac{H_2}{H_1} \right)^{1/4}$$

.

3.1. Modelos numéricos de propagación de tsunami

Tsunamis numéricos se basan en la teoría de ondas largas (aguas someras), las cuales cuentan con ecuaciones hidrodinámicas promediadas sobre la componente vertical. En la teoría de ondas largas el problema tridimensional se reduce a dos-dimensional. En coordenadas cartesianas las ecuaciones de la teoría nolineal de ondas largas con fricción y fuerza de Coriolis es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} &= -g\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{C_B U\sqrt{U^2+V^2}}{D} + fV \\
\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} &= -g\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{C_B V\sqrt{U^2+V^2}}{D} + fU \\
\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(DU) + \frac{\partial}{\partial y}(DV) &= 0
\end{aligned}$$

$$U = \frac{1}{D}\int_{-H}^{\xi} u dz \qquad V = \frac{1}{D}\int_{-H}^{\xi} v dz$$

con U y V las componentes de la velocidad de flujo, promediadas en la profundidad, a lo largo de x e y, ξ es el desplazamiento de la superficie libre de su posición de equilibrio, $D(x,y,t) = H(x,y) + \xi(x,y,t)$ es al ancho de la columna de agua, g la aceleración de gravedad, $f = 2\omega \sin\phi$ es el parámetro de Coriolis (ω velocidad de rotación de la Tierra y ϕ la latitud), y C_B coeficiente de fricción adimensional empírico (~ 0.0025). Modelos más precisos incluyen la dependencia de la cantidad C_B en el ancho de la columna de agua. Un ejemplo

$$C_B = \frac{gn^2}{D^{1/3}}$$

con n el coeficiente de Manning y depende de la aspereza del fondo oceánico. Un valor típico en la costa es 0.025 s/m^3.