Ασκήσεις για το μάθημα
“Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι”
Φροντιστήριο #2

Άσκηση 1. Κατασκευάστε τον πίνακα κέρδους παιχνιδιού με δυο παίκτες και δυο στρατηγικές ανά παίκτη όπου το κόστος της αναρχίας και της ευστάθειας είναι 2 και $3/2$ αντίστοιχα, ενώ τα κέρδη των παικτών σε κάθε κατάσταση είναι αυστηρά θετικά.

Απάντηση. Αρχικά, ας θυμηθούμε τις έννοιες του κόστους της αναρχίας και της ευστάθειας. Αν ορίσουμε το κοινωνικό κέρδος $\mathrm{SW}(S)$ μιας κατάστασης S σαν το ολικό κέρδος των παικτών στην κατάσταση αυτή, τότε το κόστος της αναρχίας (PoA) είναι ο χειρότερος λόγος μεταξύ του βέλτιστου κοινωνικού κέρδους OPT και του κοινωνικού κέρδους σε κατάσταση ισορροπίας, ενώ το κόστος της ευστάθειας (PoS) είναι ο καλύτερος τέτοιος λόγος. Δηλαδή,

$$\mathrm{PoA} = \max_{S \text{ ισορροπία}} \frac{\mathrm{OPT}}{\mathrm{SW}(S)}$$

και

$$\mathrm{PoS} = \min_{S \text{ ισορροπία}} \frac{\mathrm{OPT}}{\mathrm{SW}(S)}.$$

Προσέξτε ότι οι δυο αυτοί λόγοι ορίζονται έτσι ώστε να είναι πάντα μεγαλύτεροι του 1, καθώς σε παιχνίδι κέρδους έχουμε ότι $\mathrm{SW}(S) \leq \mathrm{OPT}$ για κάθε κατάσταση S. Πως θα έπρεπε να ορίσουμε το κόστος της αναρχίας και της ευστάθειας για παιχνίδια κόστους;

Μια απάντηση στη συγκεκριμένη άσκηση είναι το εξής παιχνίδι:

	A	B
A	$5/3$ \ 1	1 \ 1
B	0.1 \ 3.1	1 \ 3

Παρατηρήστε ότι οι καταστάσεις (A, A) και (B, A) είναι αμιγείς ισορροπίες με κοινωνικό κέρδος $8/3$ και 2, αντίστοιχα. Ωστόσο, η κατάσταση (B, B) έχει βέλτιστο κοινωνικό κέρδος 4 και, επομένως, το κόστος της αναρχίας είναι 2 (από την κατάσταση (B, A)) και το κόστος της ευστάθειας είναι $3/2$ (από την κατάσταση (A, A)). $\square$

Άσκηση 2. Κατασκευάστε τον πίνακα κέρδους παιχνιδιού με δυο παίκτες και δυο στρατηγικές ανά παίκτη το οποίο έχει δυο ισορροπίες κατά Nash και όπου τόσο το κόστος της αναρχίας όσο και το κόστος της ευστάθειας είναι τουλάχιστον 100, ενώ τα κέρδη των παικτών σε κάθε κατάσταση είναι αυστηρά θετικά.

Απάντηση. Ένα παιχνίδι με τα ζητούμενα χαρακτηριστικά είναι το εξής:

	A	B
A	1 1	1 1
B	199.5 0.1	199 1

Παρατηρήστε ότι οι καταστάσεις (A, A) και (B, A) είναι αμιγείς ισορροπίες με κοινωνικό κέρδος 2 και οι δυο. Ωστόσο, η κατάσταση (B, B) έχει βέλτιστο κοινωνικό κέρδος 200 και, επομένως, το κόστος της αναρχίας και της ευστάθειας είναι 100. □

Άσκηση 3.

(A) Πότε ένα παιχνίδι δεν επιδέχεται συνάρτηση δυναμικού;

(B) Είναι δυνατόν ένα παιχνίδι που δεν επιδέχεται συνάρτηση δυναμικού να έχει αμιγή ισορροπία;

Απάντηση.

(A) Ένα παιχνίδι δεν επιδέχεται συνάρτηση δυναμικού όταν το γράφημα Nash dynamics περιέχει κύκλο.

(B) Ναι, αρκεί να υπάρχει μια κατάσταση του παιχνιδιού από την οποία κανένας παίκτης να μην έχει κίνητρο να αποκλίνει. Δηλαδή, αρκεί το γράφημα Nash dynamics να περιέχει έναν κόμβο με μόνο εισερχόμενες ακμές (αυτό είναι ανεξάρτητο του αν περιέχει κύκλο).

□

Άσκηση 4. Κατασκευάστε παιχνίδι δύο παικτών με δυο στρατηγικές A και B ανά παίκτη το οποίο έχει τη μικτή ισορροπία $(p, q) = (1/3, 2/3)$ και επιδέχεται τη συνάρτηση δυναμικού Φ με $\Phi(A, A) = 10$, $\Phi(A, B) = 4$, $\Phi(B, A) = 6$ και $\Phi(B, B) = 8$.

Απάντηση. Για να κατασκευάσουμε το παιχνίδι πρέπει να ορίσουμε τα κέρδη των παικτών σε όλες τις πιθανές καταστάσεις του παιχνιδιού, φτιάχνοντας τον αντίστοιχο πίνακα κέρδους. Οι απαιτήσεις της συνάρτησης δυναμικού στην ουσία μας λένε την δομή του γραφήματος Nash dynamics το οποίο πρέπει να είναι ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
A,A & B,A \arrow[l] \arrow[d] \\
A,B \arrow[u] \arrow[r] & B,B
\end{tikzcd}$$

Ένα παιχνίδι με τις απαιτούμενες προδιαγραφές είναι το εξής:

	A	B
A	1 2	0 0
B	0 0	2 1

Παρατηρήστε ότι το μέσο κέρδος του παίκτη 1 (που παίζει κατά στήλες) είναι

$$K_1(p, q) = pq + 2(1 - p)(1 - q) = p(3q - 2) + 2 - 2q$$

ενώ το μέσο κέρδος του παίκτη 2 (που παίζει κατά γραμμές) είναι

$$K_2(p, q) = 2pq + (1 - p)(1 - q) = q(3p - 1) + 1 - 2p.$$

Συνεπώς, όντως το ζευγάρι $(p, q) = (1/3, 2/3)$ είναι μια μικτή ισορροπία του παιχνιδιού. $\square$

Άσκηση 5. Θεωρήστε ένα παιχνίδι ανάθεσης ενός συνόλου εργασιών J σε ένα σύνολο μηχανών M. Κάθε παίκτης έχει τον έλεγχο μιας δουλειάς την οποία μπορεί να αναθέσει σε μια από τις διαθέσιμες μηχανές. Η δουλειά που ελέγχει ο παίκτης $i \in J$ έχει θετικό βάρος w_i. Οι μηχανές έχουν ίδιες ταχύτητες επεξεργασίας. Συμβολίζοντας με $m_i(S)$ τη μηχανή που επιλέγει ο παίκτης i για τη δουλειά του στην κατάσταση S, το φορτίο της μηχανής $j \in M$ είναι το συνολικό βάρος των δουλειών που έχουν ανατεθεί στη μηχανή j, δηλαδή,

$$L_j(S) = \sum_{i \in J : m_i(S) = j} w_i.$$

Το κόστος του παίκτη i στην κατάσταση S είναι το φορτίο της μηχανής όπου έχει αναθέσει τη δουλειά του, δηλαδή, $\text{cost}_i(S) = L_{m_i(S)}(S)$. Ως κοινωνικό κόστος μιας κατάστασης ορίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των φορτίων των μηχανών, δηλαδή,

$$\text{SC}(S) = \sum_{j \in M} L_j(S)^2.$$

(Α) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\Phi(S) = \sum_{j \in M} L_j(S)^2$$

είναι συνάρτηση δυναμικού.

(Β) Δώστε μικτή (μη αμιγή) ισορροπία κατά Nash.

(Γ) Δείξτε ότι το κόστος της ευστάθειας είναι 1.

Απάντηση.

(Α) Έστω δυο κατάστασεις S και S' του παιχνιδιού οι οποίες διαφέρουν μόνο στη στρατηγική ενός παίκτη π. Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση Φ είναι συνάρτηση δυναμικού, αρκεί να δείξουμε ότι οι ποσότητες $\Phi(S) - \Phi(S')$ και $\text{cost}_\pi(S) - \text{cost}_\pi(S')$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Στη κατάσταση S ο παίκτης π έχει επιλέξει τη μηχανή $m_\pi(S)$, ενώ στη κατάσταση S' έχει επιλέξει τη μηχανή $m_\pi(S')$, και ισχύει ότι $m_\pi(S) \neq m_\pi(S')$. Εφόσον οι στρατηγικές των άλλων παικτών είναι ίδιες και στις δυο καταστάσεις, έχουμε ότι

$$L_{m_\pi(S)}(S') = L_{m_\pi(S)}(S) - w_\pi \Leftrightarrow L_{m_\pi(S)}(S') = \text{cost}_\pi(S) - w_\pi \tag{1}$$

και

$$L_{m_\pi(S')}(S') = L_{m_\pi(S')}(S) + w_\pi \Leftrightarrow L_{m_\pi(S')}(S) = \text{cost}_\pi(S') - w_\pi \tag{2}$$

Συνεπώς,

$$\Phi(S) - \Phi(S') = \sum_{j \in M} L_j(S)^2 - \sum_{j \in M} L_j(S')^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j \neq m_\pi(S), m_\pi(S')} L_j(S)^2 + L_{m_\pi(S)}(S)^2 + L_{m_\pi(S')}(S)^2 \\
&\quad - \sum_{j \neq m_\pi(S), m_\pi(S')} L_j(S)^2 - L_{m_\pi(S)}(S')^2 - L_{m_\pi(S')}(S')^2 \\
&= \left(L_{m_\pi(S)}(S)^2 - L_{m_\pi(S)}(S')^2 \right) + \left(L_{m_\pi(S')}(S)^2 - L_{m_\pi(S')}(S')^2 \right) \\
&= \text{cost}_\pi(S)^2 - \left(\text{cost}_\pi(S) - w_\pi \right)^2 + \left(\text{cost}_\pi(S') - w_\pi \right)^2 - \text{cost}_\pi(S')^2 \\
&= 2w_\pi \left(\text{cost}_\pi(S) - \text{cost}_\pi(S') \right),
\end{aligned}
$$

όπου στην δεύτερη ισότητα έχουμε διακρίνει τις μηχανές $m_\pi(S)$ και $m_\pi(S')$ από τις υπόλοιπες μηχανές στα αθροίσματα. Στην τρίτη ισότητα έχουμε ομαδοποιήσει το φορτία των δύο αυτών μηχανών στις δυο καταστάσεις, και έπειτα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (1) και (2) για να φέρουμε το κόστος του παίκτη π στην έκφραση. Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει με πράξεις και έχουμε τελειώσει καθώς το βάρος w_π του παίκτη π είναι θετικό και άρα οι δυο ποσότητες έχουν το ίδιο πρόσημο.

(Β) Μια μικτή ισορροπία είναι όλοι οι παίκτες να επιλέγουν όλες τις μηχανές ισοπίθανα. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε παίκτης βλέπει το ίδιο μέσο φορτίο σε όλες τις μηχανές και επομένως τον συμφέρει να ισομοιράσει και αυτός το βάρος του σε όλες τις μηχανές.

(Γ) Πρώτα, παρατηρήστε ότι $\Phi(S) = \text{SC}(S)$ και θυμηθείτε ότι μια κατάσταση S^* όπου η συνάρτηση δυναμικού ελαχιστοποιείται αποτελεί ισορροπία του παιχνιδιού (διότι κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς). Συνεπώς, το κοινωνικό κόστος ελαχιστοποιείται σε ισορροπία και το κόστος της ευστάθειας είναι 1. $\square$

Άσκηση 6. Δίνεται ένα παιχνίδι συμφόρησης με μη φθίνουσες συναρτήσεις καθυστέρησης όπου οι στρατηγικές των παικτών είναι τέτοιες ώστε κανένας πόρος να μην χρησιμοποιείται ποτέ (δηλαδή, σε καμμιά κατάσταση) από περισσότερους από λ παίκτες. Δείξτε ότι το κόστος της ευστάθειας του παιχνιδιού είναι το πολύ λ. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της συνάρτησης δυναμικού και τη συνάρτηση δυναμικού του Rosenthal.

Απάντηση. Πρώτα ας θυμηθούμε μερικά πράγματα για τα παιχνίδια συμφόρησης: υπάρχει ένα σύνολο πόρων E και κάθε παίκτης i επιλέγει ένα υποσύνολο $s_i \subseteq E$ από αυτούς ως τη στρατηγική του. Κάθε πόρος e συσχετίζεται με μια συνάρτηση καθυστέρησης f_e η οποία εξαρτάται από το πλήθος των παικτών $n_e(S)$ που χρησιμοποιούν τον πόρο στην κατάσταση S του παιχνιδιού. Το κόστος του παίκτη i στη κατάσταση S είναι

$$\text{cost}_i(S) = \sum_{e \in s_i} f_e(n_e(S))$$

και το κοινωνικό κόστος είναι το ολικό κόστος όλων των παικτών

$$\text{SC}(S) = \sum_{i=1}^{n} \text{cost}_i(S).$$

Τέλος, η συνάρτηση του Rosenthal ορίζεται ως

$$\Phi(S) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(S)} f_e(i).$$

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, θα πρέπει να συσχετίσουμε (με κατάλληλες ανισότητες) την συνάρτηση δυναμικού με το κοινωνικό κόστος. Πρώτα, ας μετασχηματίσουμε λίγο το κοινωνικό κόστος ως εξής:

$$\text{SC}(S) = \sum_{i=1}^{n} \text{cost}_i(S) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in s_i} f_e(n_e(S)) = \sum_{e \in E} \sum_{i: e \in s_i} f_e(n_e(S)) = \sum_{e \in E} n_e(S) f_e(n_e(S))$$

Εφόσον σε όλες τις καταστάσεις του παιχνιδιού και για κάθε πόρο e ισχύει ότι $n_e(S) \leq \lambda$, έχουμε ότι

$$\text{SC}(S) = \sum_{e \in E} n_e(S) f_e(n_e(S)) \leq \lambda \sum_{e \in E} f_e(n_e(S)) \leq \lambda \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n} f_e(i) = \lambda \Phi(S). \tag{3}$$

Ακόμη, έχουμε ότι

$$\Phi(S) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(S)} f_e(i) \leq \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(S)} f_e(n_e(S)) = \sum_{e \in E} n_e(S) f_e(n_e(S)) = \text{SC}(S). \tag{4}$$

Τώρα, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, εφαρμόζουμε την μέθοδο της συνάρτησης δυναμικού ως εξής. Ξεκινάμε απο μια κατάσταση S^* με βέλτιστο κοινωνικό κόστος. Αν η S^* είναι ισορροπία τότε το κόστος της ευστάθειας είναι 1. Διαφορετικά, αφήνουμε τους παίκτες να παίξουν και να αλλάξουν στρατηγικές μέχρις ότου να φτάσουν σε μια ισορροπία S. Εφόσον η Φ είναι συνάρτηση δυναμικού, ξέρουμε ότι $\Phi(S) \le \Phi(S^*)$ (καθώς σε κάθε κίνηση κάποιος παίκτης βελτιώνει το κόστος του). Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε ότι

$$\mathrm{SC}(S) \le \lambda\Phi(S) \le \lambda\Phi(S^*) \le \lambda\mathrm{SC}(S^*)$$

και επομένως το κόστος της ευστάθειας είναι το πολύ λ. $\square$

Άσκηση 7. Έστω ένα σύνολο παικτών N και ένα σύνολο διαφορετικών στρατηγικών M. Κάθε παίκτης μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε στρατηγική από το σύνολο M. Για κάθε στρατηγική $e \in M$, το κόστος ενός παίκτη που χρησιμοποιεί αυτή τη στρατηγική είναι $c_e/k + d_e$ όταν k παίκτες χρησιμοποιούν την e (οι πόσότητες c_e και d_e είναι μη αρνητικές). Με $n_e(S)$ συμβολίζουμε τον αριθμό των παικτών που επιλέγουν την στρατηγική e στην κατάσταση S.

(A) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\Phi(S) = \sum_{e \in M} \left(c_e \cdot H_{n_e(S)} + d_e \cdot n_e(S) \right)$$

είναι (ακριβής) συνάρτηση δυναμικού για το παιχνίδι.

(B) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της συνάρτησης δυναμικού, δείξτε ότι το κόστος της ευστάθειας του παιχνιδιού είναι το πολύ H_n, θεωρώντας ως κοινωνικό κόστος το συνολικό κόστος των παικτών.

Απάντηση.
(A) Έστω δυο καταστάσεις S και S' του παιχνιδιού οι οποίες διαφέρουν μόνο στην στρατηγική ενός παίκτη i. Για να δείξουμε ότι η Φ είναι ακριβής συνάρτηση δυναμικού πρέπει να δείξουμε ότι $\Phi(S) - \Phi(S') = \text{cost}_i(S) - \text{cost}_i(S')$. Ας θεωρήσουμε ότι ο παίκτης i χρησιμοποιεί την στρατηγική x στην κατάσταση S και την στρατηγική y στην κατάσταση S'. Τότε, εφόσον οι υπόλοιποι παίκτες έχουν τις ίδιες στρατηγικές στις δυο αυτές καταστάσεις, έχουμε ότι

$$n_x(S') = n_x(S) - 1 \Rightarrow H_{n_x(S)} = H_{n_x(S')} + \frac{1}{n_x(S)} \tag{5}$$

και

$$n_y(S') = n_y(S) + 1 \Rightarrow H_{n_y(S)} = H_{n_y(S')} - \frac{1}{n_y(S')} \tag{6}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\Phi(S) &= \sum_{e \in M} \left(c_e \cdot H_{n_e(S)} + d_e \cdot n_e(S) \right) \\
&= \sum_{e \neq x,y} \left(c_e \cdot H_{n_e(S)} + d_e \cdot n_e(S) \right) + \left(c_x \cdot H_{n_x(S)} + d_x \cdot n_x(S) \right) + \left(c_y \cdot H_{n_y(S)} + d_y \cdot n_y(S) \right) \\
&= \sum_{e \neq x,y} \left(c_e \cdot H_{n_e(S')} + d_e \cdot n_e(S') \right) \\
&\quad + c_x \left(H_{n_x(S')} + \frac{1}{n_x(S)} \right) + d_x \left(n_x(S') + 1 \right) \\
&\quad + c_y \left(H_{n_y(S')} - \frac{1}{n_y(S')} \right) + d_y \left(n_x(S') - 1 \right) \\
&= \sum_{e \neq x,y} \left(c_e \cdot H_{n_e(S')} + d_e \cdot n_e(S') \right) + \left(c_x \cdot H_{n_x(S')} + d_x \cdot n_x(S') \right) + \left(c_y \cdot H_{n_y(S')} + d_y \cdot n_y(S') \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{c_x}{n_x(S)}+d_x\right)-\left(\frac{c_y}{n_y(S')}+d_y\right)\\
&=\Phi(S')+\mathrm{cost}_i(S)-\mathrm{cost}_i(S'),
\end{aligned}
$$

όπου στην πρώτη ισότητα έχουμε απλώς σπάσει το άθροισμα για τις στρατηγικές $e \notin \{x, y\}$, x και y. Στη δεύτερη ισότητα αξιοποιούμε το γεγονός ότι για τις στρατηγικές $e \neq x, y$ δεν υπάρχει διαφορά από την S στην S', και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (5) και (6) για να αντικαταστήσουμε τις αντίστοιχες ποσότητες για τις στρατηγικές x και y. Το αποτέλεσμα προκύπτει παρατηρώντας ότι πλέον έχουμε ορίσει τις ποσότητες $\Phi(S')$, $\mathrm{cost}_i(S)$ και $\mathrm{cost}_i(S')$ με κατάλληλη ομαδοποίηση.

(B) Πρώτα, θα προσπαθήσουμε να συσχετίσουμε το κοινωνικό κόστος με τη συνάρτηση δυναμικού. Παρατηρήστε ότι το κοινωνικό κόστος είναι

$$
\mathrm{SC}(S)=\sum_{i\in N}\mathrm{cost}_i(S)=\sum_{e\in M}\left(\frac{c_e}{n_e(S)}+d_e\right)n_e(S)=\sum_{e\in M}(c_e+n_e(S)\cdot d_e)\leq\Phi(S). \tag{7}
$$

Επίσης, για την συνάρτηση δυναμικού, έχουμε

$$
\Phi(S)=\sum_{e\in M}\left(c_e\cdot H_{n_e(S)}+d_e\cdot n_e(S)\right)\leq\sum_{e\in M}\left(c_e\cdot H_n+d_e\cdot n_e(S)\cdot H_n\right)=H_n\cdot\mathrm{SC}(S). \tag{8}
$$

Τώρα εφαρμόζουμε τη μέθοδο της συνάρτησης δυναμικού ως εξής. Ξεκινάμε απο μια κατάσταση S^* με βέλτιστο κοινωνικό κόστος. Αν η S^* είναι ισορροπία τότε το κόστος της ευστάθειας είναι 1. Διαφορετικά, αφήνουμε τους παίκτες να παίξουν και να αλλάξουν στρατηγικές μέχρις ότου να φτάσουν σε μια ισορροπία S. Εφόσον η Φ είναι συνάρτηση δυναμικού, ξέρουμε ότι $\Phi(S)\leq\Phi(S^*)$. Από τις σχέσεις (7) και (8) έχουμε ότι

$$
\mathrm{SC}(S)\leq\Phi(S)\leq\Phi(S^*)\leq H_n\cdot\mathrm{SC}(S^*)
$$

και επομένως το κόστος της ευστάθειας είναι το πολύ H_n. □