# CLASE 1 : Repaso de probabilidad

C1
H1

## PROBABILIDAD CONDICIONAL :

$$P(A|B) = P(B|A)\frac{P(A)}{P(B)}$$

Bayes

UNA DE LAS PROBABILIDADES ES MÁS FÁCIL QUE LA OTRA!

**Ejemplo** Tiro un dado y después tiro una moneda tantas veces como el resultado del dado.

$D = \#$ dado ; $M = \#$ de caras

**Obs:** $M | D = d \sim Bin(d, \frac{1}{2})$

$$P(D=5 | M=3) \stackrel{?}{=} \frac{P(M=3|D=5) \cdot P(D=5)}{P(M=3)}$$

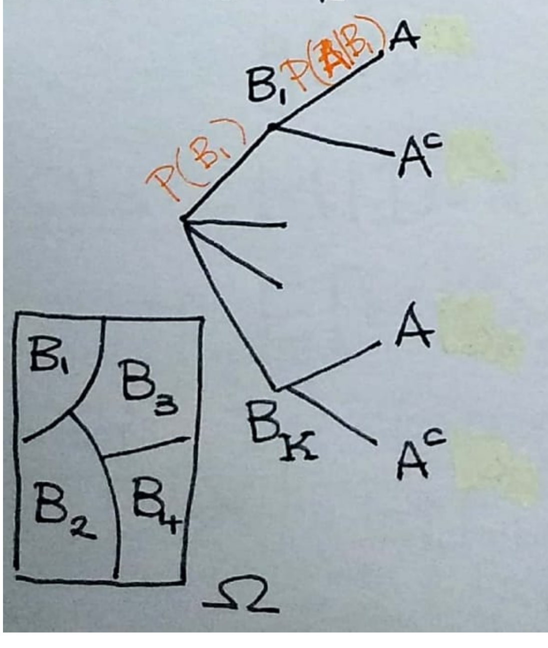
$$= \frac{\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} \times \frac{1}{6}}{P(M=3)}$$

## FÓRMULA DE PROBABILIDAD TOTAL

$\Omega = \bigcup B_k$

$$P(A) = \sum_k P(A|\underbrace{B_k}) \cdot P(B_k)$$

"posibles contextos"




$$P(M=3) = \sum_{d=1}^{6} P(M=3|D=d)P(D=d)$$

$$= \sum_{d=3}^{6} \binom{d}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^d \cdot \frac{1}{6}$$

C1
H2

ERANZA : $E[X] = \sum_x x \, P(X=x)$

$= \int x \, f_X(x) \, dx$

$P_B(A) := P(A|B)$ es una probabilidad

$p_{X|Y=y}(x) := \dfrac{P(X=x; Y=y)}{P(Y=y)} = \dfrac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$ y está fijo!

$X|Y=y \sim p_{X|Y=y}$ $\therefore$ TIENE UNA ESPERANZA!

$E[X|Y=y] = \sum_x x \, p_{X|Y=y}(x)$

Ejemplo: $E[M|D=3] = \sum_{m=0}^{3} m \, p_{M|D=3}(m) = \sum_{m=0}^{3} \binom{3}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^3 m$

~~LEY DE ESPERANZA TOTAL~~

ESPERANZA CONDICIONAL

$E[X|Y]$ es una variable aleatoria (depende de $Y$)

$g(Y)$ $\qquad g(Y)(\omega) := E[X|Y=y(\omega)]$

Obs: $M|D=d \sim Bin(d, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow E[M|D=d] = \frac{d}{2} \Rightarrow E[M|D] = \frac{D}{2}$

LEY DE ESPERANZA TOTAL

$E[X] = E[E[X|Y]]$
$= \sum_y E[X|Y=y] \, p_Y(y)$

$E[M] = E[E[M|D]]$
$= E\left[\frac{D}{2}\right] = \frac{6.7}{2.2}$

CLASE Rata (Calcular una esperanza de modo recursivo) | C1 H3

M

**INDEPENDENCIA**: $X \perp\!\!\!\perp Y$ sii $\underbrace{p_{X|Y=y}(x) = p_X(x)}_{X|Y=y \sim X}$

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y)$$

- $\{X_i\}_i$ iid $\Rightarrow p(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i)$
- $E[X|Y] = E[X]$ si $X \perp\!\!\!\perp Y$ (mencionar lo de "mejor" predictor)

## CADENAS DE MARKOV (Ref. Bremaud / Grimmett)

"Algo de dependencia" $\{X_n\}_{n\geq 0}$ cadena de markov en $S$

$$P(X_n = s \mid X_0 = s_0, \dots, X_{n-1} = s_{n-1}) = P(X_n = s \mid X_{n-1} = s_{n-1})$$

$\forall\, s, s_0, \dots, s_{n-1} \in S$ (ie. me alcanza con solo el último estado!)

Intermezzo: $X \to Y \to Z$ INDEPENDENCIA COND

$$p(x,y,z) = p(z|y)\, p(y|x)\, p(x) \Rightarrow p(x,z|y) \stackrel{\cdots}{=} p(x|y)\, p(z|y)$$

ie, $X \underset{Y}{\perp\!\!\!\perp} Z$

$\therefore\ X_{n-1} \underset{X_n}{\perp\!\!\!\perp} X_{n+1}$ : ie, el pasado y el presente son cond. indep.

$$P(X_n = s_n, X_{n-1} = s_{n-1}, \dots, X_0 = s_0) = P(X_n = s_n \mid X_{n-1} = s_{n-1}, \dots, X_0 = s_0) . P(\ )$$

$$\stackrel{\cdots}{=} P(X_n = s_n \mid X_{n-1} = s_{n-1})\, P(X_{n-1} = s_{n-1} \mid X_{n-2} = )\ \dots\ P(X_0 = s_0)$$

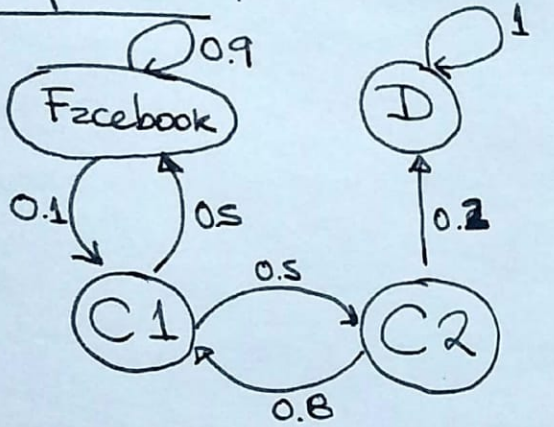
CLAS
M

homogénez: $P(X_{n+1}=s' \mid X_n = s) = p_{ss'}$ → MATRIZ DE TRANSICIÓN

C1
H4

Obs: $\sum_{s' \in S} p_{ss'} = 1$ ; $p_{ss'} \geq 0$

Ejemplo 1:




$p_{F,C1} = 0.1$

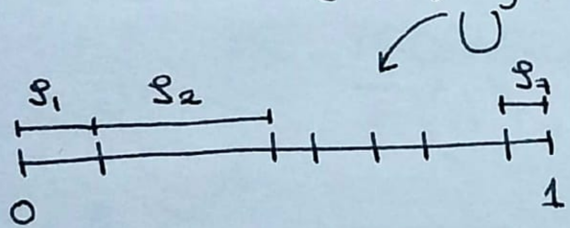
$$\begin{array}{c|cccc} & F & C_1 & C_2 & D \\ \hline F & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ C_1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ C_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ D & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ejemplo 2: Slides.

SIMULACIÓN:

$X \in \{1, \ldots, 7\}$ $\quad X \sim \rho$

$U \sim \mathcal{U}[0,1]$




Si $U \in I_1 \Rightarrow X = 1$ $\quad P(X=1) = P(U \in I_1) = |I_1| = \rho_1$

$U \in I_2 \Rightarrow X = 2$

$X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$ ; $U_{n+1} \perp\!\!\!\perp X_n$