SERII

→ de numere

→ armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → divergentă

→ armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ → convergentă pentru $\alpha > 1$

→ geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n}$ → convergentă pentru $q \in (-1, 1)$ cu suma seriei $S = \frac{1}{1-q}$

→ de funcții

→ dezvoltarea în serie Taylor / Mc Laurin pentru funcțiile cele mai uzuale:

- $e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^{n}$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^{n}$ pt. $x \in (-1, 1)$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n}$ pt. $x \in (-1, 1)$

→ toate acestea sunt serii de puteri (caz particular de serii de funcții)

Teoremă:

Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^{n}$ și $S(x)$ suma acesteia. Atunci:

1) seria derivatelor are aceeași rază de convergență iar suma acesteia este $S'(x)$.

2) seria primitivelor are aceeași rază de convergență iar suma acesteia este $\int S(x)$.

Exerciții cu serii de puteri

$\boxed{1}$ $$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(k+1)\cdot\theta^k}_{\text{ne face să ne gândim la derivata lui } \theta^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\theta^{k+1}\right)' = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k+1}\right)'_{\theta}}_{\text{derivare în raport cu } \theta} = \left(\theta\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k}_{\text{suma seriei este } \frac{1}{1-\theta}}\right)'_{\theta}$$

$(\theta\in(0,1),\ k\in\mathbb{N})$

$$= \left(\theta\cdot\frac{1}{1-\theta}\right)' = \frac{1-\theta-\theta\cdot(-1)}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{(1-\theta)^2}$$

$\boxed{2}$ $$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{k\cdot(k+1)\cdot\theta^k}_{\text{ne gândim din nou la o derivată, de ordinul 2 de această dată pentru că avem 2 coeficienți}} = \theta\cdot\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\theta^{k-1}\cdot(k+1) = \theta\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\theta^{k+1}\right)''$$

$$= \theta\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k+1}\right)''_{\theta} = \theta\cdot\left[\left(\theta\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k}_{\text{suma seriei e } \frac{1}{1-\theta}}\right)'\right]'_{\theta} =$$

$$= \theta\cdot\left[\left(\theta\cdot\frac{1}{1-\theta}\right)'\right]' = \theta\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{(1-\theta)^2}}_{\text{știm de la } \boxed{1}}\right)' = \theta\cdot(-2)\cdot(1-\theta)^{-3}\cdot(-1)$$

$$= 2\cdot\theta\cdot\frac{1}{(1-\theta)^3}$$

$\boxed{3}$ $$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{k^2\cdot(k+1)\cdot\theta^k}_{\text{avem 3 coeficienți, deci ne gândim la o derivată de ordinul 3}} = \sum_{k=0}^{\infty}(\underbrace{k-1}_{\text{vom despărți în două serii}}+1)\cdot k\cdot(k+1)\cdot\theta^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k-1)\cdot k(k+1)\cdot\theta^k + \sum_{k=0}^{\infty}1\cdot k\cdot(k+1)\cdot\theta^k$$

$$= \theta^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k-1)\cdot k\cdot(k+1)\cdot\theta^{k-2} + \theta\cdot\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot(k+1)\cdot\theta^{k-1}$$

$$= \theta^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\theta^{k+1}\right)''' + \theta\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\theta^{k+1}\right)'' =$$

$$= \theta^2\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k+1}\right)'''_{\theta} + \theta\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k+1}\right)''_{\theta}$$

$$= \theta^2\cdot\left(\theta\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k}\right)'''_{\theta} + \theta\cdot\left(\theta\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k}\right)''_{\theta}$$

$$= \theta^2\cdot\Bigg[\underbrace{\left[\left(\theta\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k}\right)'\right]'}_{\text{știm de la } \boxed{2}}\Bigg]' \cdot \theta\cdot\underbrace{\left[\left(\theta\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\theta^{k}}_{\frac{1}{1-\theta}}\right)'\right]'}_{\frac{2}{(1-\theta)^3}\ \text{știm de la } \boxed{2}}$$

$$= \theta^2\cdot\left(2(1-\theta)^{-3}\right)' + \theta\cdot\frac{2}{(1-\theta)^3}$$

$$= \theta^2\cdot 2\cdot(-3)\cdot(1-\theta)^{-4}\cdot(-1) + \theta\cdot\frac{2}{(1-\theta)^3}$$

$$= \frac{6\theta^2}{(1-\theta)^4} + \frac{{}^{1-\theta}\!/\,2\theta}{(1-\theta)^3} = \frac{6\theta^2+2\theta-2\theta^2}{(1-\theta)^4} = \frac{4\theta^2+2\theta}{(1-\theta)^4}$$

Rezolvări pentru examen februarie 2018

$\boxed{1}$ a) Determinarea constantei A.

Impunem condiția ca P_θ să fie o distribuție de probabilitate:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A\cdot P_\theta(X=k)=1 \iff A\cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot\theta^k}_{\text{știm de la } \boxed{1} \text{ cu serii}}=1 \iff$$

$$\iff A\cdot\frac{1}{(1-\theta)^2}=1 \iff \boxed{A=(1-\theta)^2}$$

b) Calculul $E(X)$ și $Var(X)$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot \mathbb{P}_\theta(X=k)=\dots=\frac{2\theta}{1-\theta}$$

vezi $\boxed{2}$ de la serii

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty} k^2\cdot \mathbb{P}_\theta(X=k)=\dots=\frac{2\theta(2\theta+1)}{(1-\theta)^2}$$

vezi $\boxed{3}$ de la serii

$$Var(X)=\frac{2\theta}{(1-\theta)^2}$$

c) • Obținerea estimatorului $\tilde{\theta}$ prin metoda momentelor

$$E(X)=\overline{X} \iff \frac{2\theta}{1-\theta}=\overline{X} \iff \dots\ \tilde{\theta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}+2}$$

• Calculul $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta}=0)$

deoarece $k\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta}=0)=\mathbb{P}_\theta\left(\frac{\overline{X}}{\overline{X}+2}=0\right)=\mathbb{P}_\theta(\overline{X}=0)=\mathbb{P}_\theta\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n}\overbrace{X_j}^{\geq 0}=0\right)$$

$$=\mathbb{P}_\theta(X_j=0)=A\cdot(0+1)\cdot\theta^0=(1-\theta)^2.$$