

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Questions de cours (4 points)

1. Donner la définition de $\Gamma \models F$.
2. Donner la définition d'un littéral.
3. Donner la définition d'une clause.
4. Quelle est la méthode pour mettre une formule sous forme d'une conjonction de clauses ?

Exercice 2 : Système formel (8 points)

Soit le système formel défini de la manière suivante : soit Σ l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des formules est $F = \{a^n b c^m \text{ tels que } (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$. Il y a un schéma d'axiomes (Ax), et une règle (R) :

$$\frac{}{a^{2i} b c^{2i}} \text{Ax (où } i \text{ est un entier quelconque)}$$

$$\frac{a^n b c^m \quad a^{n'} b c^{m'}}{a^{n+n'} b c^m} \text{R (où } m, n, m' \text{ et } n' \text{ sont des entiers quelconques)}$$

1. Montrer que $a^6 b c^2$ est un théorème.
2. Montrer que $a^{10} b$ est un théorème.
3. Montrer que $a^2 b^2 c^2$ n'est pas un théorème.
4. Montrer que $a^3 b c^2$ n'est pas un théorème.
5. Donner l'ensemble des théorèmes de ce système. Indices : réfléchir à la quantité de a et de c et à la parité.
6. Justifier la réponse à la questions précédente.

Exercice 3 (8 points)

1. En utilisant les règles de la déduction naturelle pour la logique classique (on s'autorise le tiers exclu), montrer que : $\vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
2. Montrer de deux autres manières différentes que : $\models (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$

Rappels

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma \vdash A} \text{ si } A \in \Gamma \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \text{Intro } \Rightarrow \quad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \text{Elim } \Rightarrow \\
\\
\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash P} \text{Elim } \perp \\
\\
\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \text{Intro } \neg \quad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} \text{Elim } \neg \\
\\
\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \wedge Q} \text{Intro } \wedge \quad \frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash P} \text{Elim } \wedge g \quad \frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash Q} \text{Elim } \wedge d \\
\\
\frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q} \text{Intro } \vee g \quad \frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q} \text{Intro } \vee d \\
\\
\frac{\Gamma \vdash P \vee Q \quad \Gamma, P \vdash R \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma \vdash R} \text{Elim } \vee
\end{array}$$

Figure 1 – Dédution naturelle : logique intuitionniste

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma, \neg P \vdash \perp}{\Gamma \vdash P} \text{RAA} \\
\\
\frac{}{\Gamma \vdash P \vee \neg P} \text{Tiers Exclu}
\end{array}$$

Figure 2 – Dédution naturelle : logique classique