Unistra

Logique et Programmation Logique — Feuille de CC Oct 2021 (Correction)

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Questions de cours (4 points)

1. Donner la définition de $\Gamma \models F$.
2. Donner la définition d'un littéral.
3. Donner la définition d'une clause.
4. Quelle est la méthode pour mettre une formule sous forme d'une conjonction de clauses ?

Exercice 2 : Système formel (8 points)

Soit le système formel défini de la manière suivante : soit Σ l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des formules est $F = \{a^n bc^m$ tels que $(m, n) \in \mathbb{N}^2\}$. Il y a un schéma d'axiomes (Ax), et une règle (R) :

$$\frac{}{a^{2i}bc^{2i}} \text{ Ax (où } i \text{ est un entier quelconque)}$$

$$\frac{a^n bc^m \qquad a^{n'} bc^{m'}}{a^{n+n'} bc^m} \text{ R (où } m, n, m' \text{ et } n' \text{ sont des entiers quelconques)}$$

1. Montrer que $a^6 bc^2$ est un théorème.
2. Montrer que $a^{10} b$ est un théorème.
3. Montrer que $a^2 b^2 c^2$ n'est pas un théorème.
4. Montrer que $a^3 bc^2$ n'est pas un théorème.
5. Donner l'ensemble des théorèmes de ce système. Indices : réfléchir à la quantité de a et de c et à la parité.
6. Justifier la réponse à la questions précédente.

Correction :

1. Facile
2. Facile
3. Deux réponses possibles : on montre que tous les théorèmes n'ont qu'un seul b, ou alors on dit que la règle ne s'applique pas et ce n'est pas un axiome donc ce n'est pas un théorème.
4. On montre que le nombre de a est toujours paire.
5. L'ensemble des théorème est l'ensemble $T = \{a^{2k} bc^{2i}$ avec $k \geq i\}$.
6. Il faut prouver les deux inclusions : d'une part que tous les théorèmes sont bien de cette forme, et d'autre part que toutes les formules de cette forme sont bien des théorèmes.
   (a) Les axiomes sont bien de cette forme (avec $k = i$). Supposons que $a^n bc^m$ et que $a^{n'} bc^{m'}$ sont de cette forme, c'est à dire que n, m, n' et m' sont paires et $n \geq m$ et $n' \geq m'$, on a bien que $n + n'$ est paire et que $n + n' \geq m$.

(b) Soit une formule de la forme : $a^{2k}bc^{2i}$ avec $k \geq i$. Montrons que c'est un théorème :

$$\dfrac{\dfrac{}{a^{2i}bc^{2i}}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{b}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{}{a^{2(k-i)}bc^{2(k-i)}}\,\text{Ax}}{a^{2(k-i)}b}\,\text{R}}{a^{2k}bc^{2i}}\,\text{R}$$

Exercice 3 (8 points)

1. En utilisant les règles de la déduction naturelle pour la logique classique (on s'autorise le tiers exclu), montrer que : $\vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash P \vee \neg P}\,\text{tiers exclu} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\,\text{ax}}{P \vdash Q \Rightarrow P}\,\text{Intro} \Rightarrow}{P \vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)}\,\text{Intro} \vee\text{d} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg P, P \vdash P}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{\neg P, P \vdash \neg P}\,\text{ax}}{\neg P, P \vdash \bot}\,\text{Elim } \neg}{\neg P, P \vdash Q}\,\text{Elim } \bot}{\neg P \vdash P \Rightarrow Q)}\,\text{Intro} \Rightarrow}{\neg P \vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)}\,\text{Intro} \vee\text{g}}{\vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)}\,\text{Elim } \vee$$

2. Montrer de deux autres manières différentes que : $\models (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
   Correction :

   Par simplification : $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P) \equiv \neg P \vee Q \vee \neg Q \vee P \equiv \neg P \vee \top \vee \neg P \equiv \top$ donc $\models (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$ car toute formule équivalente à vrai est une tautologie.

   Par table de vérité : Faire la table de vérité.

   Par analyse sémantique : Soit I une interprétation, montrons que $I((P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)) = 1$.
   - Si $I(P) = 1$.
     — Si $I(Q) = 1$ alors $I(P \Rightarrow Q) = 1$ donc $I((P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)) = 1$.
     — Sinon $I(Q) = 0$, donc $I(Q \Rightarrow P) = 1$ donc $I((P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)) = 1$.
   - Sinon $I(P) = 0$ donc $I(P \Rightarrow Q) = 1$ donc $I((P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)) = 1$.

Rappels

$$\frac{}{\Gamma \vdash A}\ \text{si } A \in \Gamma \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ \text{Intro} \Rightarrow \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ \text{Elim} \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash P}\ \text{Elim } \bot$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \text{Intro } \neg \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ \text{Elim } \neg$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \wedge Q}\ \text{Intro } \wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash P}\ \text{Elim } \wedge\text{g} \qquad \frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash Q}\ \text{Elim } \wedge\text{d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q}\ \text{Intro } \vee\text{g} \qquad \frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q}\ \text{Intro } \vee\text{d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \vee Q \qquad \Gamma, P \vdash R \qquad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma \vdash R}\ \text{Elim } \vee$$

Figure 1 – Déduction naturelle : logique intuitionniste

$$\frac{\Gamma, \neg P \vdash \bot}{\Gamma \vdash P}\ \text{RAA}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash P \vee \neg P}\ \text{Tiers Exclu}$$

Figure 2 – Déduction naturelle : logique classique