

Substitution Janvier 2021

Aucun document autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Questions de cours (2 points)

1. Donner la définition de $\Gamma \models F$.
2. Donner la définition d'un littéral.
3. Donner la définition d'une clause de Horn.
4. Quelles sont les propriétés de complétude et correction de la déduction naturelle? (énoncer et expliquer)

Exercice 2 (4 points)

Démontrer de quatre manières différentes que :

$$\models ((C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \vee B))$$

Exercice 3 : (4 points)

A l'aide de la déduction naturelle démontrer que les formules suivantes sont valides :

1. $(A \vee B \vee C) \Rightarrow (B \vee A \vee C)$
2. $((A \wedge B) \wedge \neg A) \Rightarrow (D \wedge B)$

Exercice 4 : (2 points)

Dans un village, les règles suivantes concernant les barbiers ont été édictées :

- Les gens qui ne se rasent pas par eux même sont rasés par tous les barbiers.
- Les barbiers ne rasent que les gens qui ne se rasent pas eux même.

1. Formaliser les règles en logique du premier ordre. On notera R le prédicat d'arité 2, $R(x, y)$ voulant dire x rase y . On notera B le prédicat : être un barbier.

Exercice 5 : systèmes formels (8 points)

Considérons le système formel S suivant :

L'ensemble des formules est l'ensemble des triplets de mots non vides sur l'alphabet comportant une seule lettre "1". Un mot sur l'alphabet comportant une seule lettre "1" est simplement une juxtaposition de "1". Ainsi par exemple, les triplets suivants sont des formules : $(111, 11, 111)$, $(1, 1, 1)$, $(111, 1, 1111111) \dots$

On note 1^n le mot $111\dots 1$ comportant n fois 1.

Le système formel comporte un seul axiome :

$$\frac{}{(1, 1, 11)}$$

Et un schéma de règles d'inférence :

$$\frac{(1^n, 1^m, 1^p)}{(1^{n+1}, 1^m, 1^{p+1})} \quad n > 0, m > 0 \text{ et } p > 0$$

1. Donner trois exemples de formules qui sont des théorèmes de ce système formel. Justifier en donnant la construction de la preuve.
2. Quelle est l'ensemble des formules qui sont des théorèmes de ce système formel ? justifier votre réponse.
3. Ce système formel est-il semi-décidable ? décidable ? justifier votre réponse.
4. Ce système formel est-il cohérent ? justifier votre réponse.
5. Proposer une définition de la validité des formules de ce système (\models) telle que ce système formel soit correct et complet vis-à-vis de cette définition et justifier votre réponse.
6. Supposons que l'on définit la validité de la manière suivante :
On dit que $(1^n, 1^p, 1^q)$ est valide (noté $\models (1^n, 1^p, 1^q)$) ssi $n + p = q$.
 - (a) Le système formel S est-il correct pour cette définition de la validité ? justifier votre réponse et si ce n'est pas le cas proposer un système formel correct.
 - (b) Le système formel S est-il complet pour cette définition de la validité ? justifier votre réponse et si ce n'est pas le cas proposer un système formel complet.