Résolution

a) Problème de Bill

On note :

A **:** Bill prend l'autobus

B **:** l'autobus est à l'heure

R **:** Bill aura son rendez-vous

M **:** Bill ira à la maison

D **:** Bill est déprimé

T **:** Bill obtient du travail

On nous donne :
- $(A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg R$, soit $\neg A \vee B \vee \neg R$
- $(\neg R \wedge D) \Rightarrow \neg M$, soit $R \vee \neg D \vee \neg M$
- $\neg T \Rightarrow D \wedge M$, soit $T \vee (D \wedge M)$, soit $(T \vee D) \wedge (T \vee M)$

On a donc quatre clauses :
- $\neg A \vee B \vee \neg R$
- $R \vee \neg D \vee \neg M$
- $T \vee D$
- $T \vee M$

De $\neg A \vee B \vee \neg R$ et $R \vee \neg D \vee \neg M$ on déduit $\neg A \vee B \vee \neg D \vee \neg M$.
De $R \vee \neg D \vee \neg M$ et $T \vee D$ on déduit $R \vee T \vee \neg M$.
(De $R \vee \neg D \vee \neg M$ et $T \vee M$ on déduit $R \vee \neg D \vee T$.)
De $R \vee T \vee \neg M$ et $T \vee M$ on déduit $R \vee T$.
De $R \vee T$ et $\neg A \vee B \vee \neg R$ on déduit $\neg A \vee B \vee T$.
On ne peut rien déduire d'autre.

1. $(A \wedge \neg B) \Rightarrow T$ donne la clause $\neg A \vee B \vee T$.
   Nous l'avons obtenue.
2. $(\neg R \wedge M) \Rightarrow T$ donne la clause $R \vee \neg M \vee T$.
   Nous l'avons obtenue.
3. $\neg B \Rightarrow (\neg A \vee \neg R)$ donne la clause $B \vee \neg A \vee \neg R$.
   Nous l'avons obtenue (c'est une des clauses qui sont données).
4. $(A \wedge M) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg D)$ donne la clause $\neg A \vee \neg M \vee B \vee \neg D$.
   Nous l'avons obtenue.

Ainsi, toutes les affirmations ont pu être déduites.

b) Amours

1. Soit :

   J **:** « J'aime Janine »

   F **:** « J'aime Françoise »

   L **:** « J'aime Louise »

   On a alors, d'après l'énoncé :

- $J \vee F \vee L$
- $(J \wedge \neg L) \Rightarrow F$ soit $\neg J \vee L \vee F$
- $(L \wedge F) \vee (\neg L \wedge \neg F)$ (ce qui équivaut à $L \Rightarrow F$) soit $((L \wedge F) \vee \neg L) \wedge ((L \wedge F) \vee \neg F)$, soit $((L \vee \neg L) \wedge (F \vee \neg L)) \wedge ((L \vee \neg F) \wedge (F \vee \neg F))$, soit $(F \vee \neg L) \wedge (L \vee \neg F)$, ce qui fait deux clauses : $F \vee \neg L$ et $L \vee \neg F$.
- $L \Rightarrow J$, soit $\neg L \vee J$

2. J'aime les trois.
3. Par la règle de résolution (coupure) et de factorisation, on a :
De $J \vee F \vee L$ et $\neg J \vee L \vee F$ on déduit $F \vee L$.
De $F \vee L$ et $F \vee \neg L$ on déduit F.
Par suite, de F et $L \vee \neg F$ on déduit L,
puis de $\neg L \vee J$ et L on déduit J.

c) Le club écossais

On définit pour un membre les propositions suivantes :

E **:** il est écossais

C **:** il porte des chaussettes oranges

K **:** il porte un kilt

M **:** il est marié

D **:** il sort le dimanche

On traduit les énoncés et on les transforme en clauses :

1. $\neg E \Rightarrow C$, soit $E \vee C$
2. $K \vee \neg C$
3. $M \Rightarrow \neg D$, soit $\neg M \vee \neg D$
4. $D \Leftrightarrow E$, soit $D \vee \neg E$ et $\neg D \vee E$ (nous avons déjà vu cela plus haut).
5. $K \Rightarrow (E \wedge M)$, soit $\neg K \vee (E \wedge M)$, soit $\neg K \vee E$ et $\neg K \vee M$.
6. $E \Rightarrow K$, soit $\neg E \vee K$

On cherche à démontrer que cet ensemble de huit clauses est contradictoire, donc que l'on peut déduire la clause vide.
De $\neg K \vee M$ et $\neg E \vee K$ on obtient $\neg E \vee M$.
De $\neg D \vee E$ et $\neg E \vee M$ on obtient $\neg D \vee M$.
De $\neg M \vee \neg D$ et $\neg D \vee M$ on obtient $\neg D$.
Alors de $\neg D$ et $D \vee \neg E$ on obtient $\neg E$.
Puis de $\neg E$ et $\neg K \vee E$ on obtient $\neg K$.
Puis de $\neg K$ et $K \vee \neg C$ on obtient $\neg C$.
Puis de $\neg C$ et $E \vee C$ on obtient E.
Enfin, de $\neg E$ et E on obtient la clause vide : l'ensemble est bien contradictoire.
On remarque que l'on a utilisé toutes les clauses.

Calculabilité, complétude

I) Calculabilité

1. Le complémentaire d'un ensemble récursif est récursif, puisqu'il suffit de prendre la négation du test d'appartenance (qui s'arrête toujours).
2. L'union de deux ensembles récursifs est récursif, car il s'agit de prendre le « ou » des deux tests d'appartenance (qui s'arrêtent toujours).
3. L'intersection de deux ensembles récursifs est récursif, car il s'agit de prendre le « et » des deux tests d'appartenance (qui s'arrêtent toujours).
4. Le complémentaire d'un ensemble récursivement énumérable n'est pas forcément récursivement énumérable. Si c'était le cas, tous les ensembles seraient récursifs d'après le cours (un ensemble est récursif si et seulement si cet ensemble et son complémentaire sont récursivement énumérables), ce qui n'est pas le cas.
5. L'union de deux ensembles récursivement énumérables est récursivement énumérable. Il suffit de faire énumérer les deux ensembles successivement par les deux fonctions qui les énumèrent.
6. L'intersection de deux ensembles récursivement énumérables est récursivement énumérable. En utilisant par exemple les fonctions semi-caractéristiques (fonction qui retourne 1 si une valeur donnée est dans l'ensemble, rien sinon), pour une valeur donnée on exécute la première, et si elle retourne 1, on exécute la seconde.
7. Une expression booléenne a un nombre fini n de variables, donc il y a un nombre fini (2^n) d'interprétations. Pour chacune des interprétations, il y a un nombre fini d'étapes pour vérifier que l'expression est vraie.

   La fonction est donc récursive.

II) Complétude

1. Le schéma d'axiome donne des formules valides et la règle MP est la règle du modus ponens, qui est valide également.

   Donc tout théorème pour le système est valide.
2. Il est facile de vérifier qu'une expression Q de la forme $(A \to B) \to (A \to B)$ est un théorème, puisqu'elle est obtenue par la règle MP avec P qui est :

   $(A \to B) \to (A \to A)$, qui est un axiome,

   et alors $P \to Q$ qui est :

   $((A \to B) \to (A \to A)) \to ((A \to B) \to (A \to B))$

   donc aussi un axiome.

   L'ensemble des axiomes, c'est à dire $\{(A \to B) \to (A \to A) \,|\, A,B \in F_S\}$, forme une partie des théorèmes.

   Démontrons que si Q est un théorème, alors il est nécessairement de l'une des deux formes. On le fait par induction sur le nombre de règles utilisées. Nous venons de voir que les axiomes sont de l'une des deux formes. Soit Q obtenu avec au moins une règle.

   Alors il existe P tel que P et $P \to Q$ sont des théorèmes obtenus avec une règle de moins. Par hypothèse, ils sont donc chacun de l'une des deux formes.

- Si $P = (A \to B) \to (A \to A)$
  Alors $P \to Q$ est de la forme $((A \to B) \to (A \to A)) \to Q$, mais comme $P \to Q$ est de l'une des deux formes, nécessairement Q est $(A \to B) \to (A \to A)$ ou $(A \to B) \to (A \to B)$, qui sont bien de la bonne forme.
- Si $P = (A \to B) \to (A \to B)$
  Alors $P \to Q$ est de la forme $((A \to B) \to (A \to B)) \to Q$, mais comme $P \to Q$ est de l'une des deux formes, nécessairement Q est $(A \to B) \to (A \to B)$ (pas le choix) qui est bien de la bonne forme.

Dans tous les cas, on a démontré que Q est bien de l'une des deux formes.

L'ensemble des théorèmes est donc bien celui donné dans l'énoncé.

3. L'expression $P \to Q \to R$ est une expression valide de F_S, mais n'est pas un théorème.
4. Prenons A qui est $((P \to Q) \to (P \to Q)) \to B$. Si on suppose que A est un théorème, alors B en est un (par la règle MP, avec la première prémisse qui est un axiome).

   Pourtant, $A \to B$ n'est pas un théorème, puisque son expression n'est pas dans l'ensemble établi précédemment.

   Donc le méta théorème n'est pas valable pour ce système.
5. Le problème de savoir si une formule est un théorème de S est décidable, car il suffit de vérifier que la formule est dans l'ensemble établi plus haut, ce qui se fait en un nombre fini d'étapes.

Calcul des prédicats

I) Syntaxe

Les symboles fonctionnels sont : f, g.
Les symboles prédicatifs sont : R, S, T.
Les variables sont : x, y, z (cette dernière non partout liée).
Les constantes sont : a, b (mais une constante peut être considérée comme une variable).
Pour les formules suivantes, on considère qu'il n'y a pas de constante, que tout est variable.

- Pour (E_1) :
  - Variables libres : a, t
  - Variables liées : x, y, t

  Substitution : il faut renommer les variables liées qui apparaissent dans $t = f(x,y)$:
  $\forall u \forall v\ (p(u,a,f(x,y)) \Rightarrow \exists t\, p(u,v,t))$
- Pour (E_2) :
  - Variables libres : a, t, b, x
  - Variables liées : x, v, u

  Substitution : il faut renommer les variables liées u et v :
  $\forall x \exists v\ (p(x,v) \Rightarrow r(a)) \Rightarrow \forall w \forall z\, p(t,b,f(f(g(t,v),u)))$
- Pour (E_3) :
  - Variables libres : x
  - Variables liées : y, x

  Substitution : il faut renommer la variable liée y :
  $\forall z\ (p(f(x,y),z) \vee p(z,f(x,y)) \Rightarrow \forall x\, p(x,x)$

II) Formalisation

Avec des notation « évidentes » :

- $\forall x\ (H(x) \Rightarrow P(x))$
- $\forall x\ (D(x) \Rightarrow \neg P(x))$
- $\exists x\ (D(x) \wedge I(x))$
- $\neg(\exists x\ (H(x) \wedge I(x)))$

III) Quelques théorèmes

1.

$$\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, p(x) \ \vdash\ \forall y\, p(y)}\,*}{\vdash\ \forall x\, p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y)}\,\text{Intro}\Rightarrow$$

* Car les deux formules sont les mêmes.

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg p(y),\forall x\, p(x)\ \vdash\ \neg p(y)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg p(y),\forall x\, p(x)\ \vdash\ \forall x\, p(x)}}{\neg p(y),\forall x\, p(x)\ \vdash\ p(y)}\,\text{Elim}\forall}{\neg p(y),\forall x\, p(x)\ \vdash \bot}\,\text{Elim}\neg}{\neg p(y)\ \vdash\ \neg\forall x\, p(x)}\,\text{Intro}\neg$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, p(x) \vdash \forall x\, p(x)}}{\forall x\, p(x) \vdash p(t)}\ \text{Elim}\forall}{\forall x\, p(x) \vdash \exists y\, p(y)}\ \text{Intro}\exists$$

4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x\, \forall y\, p(x,y) \vdash \exists x\, \forall y\, p(x,y)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x\, \forall y\, p(x,y), \forall y\, p(x,y) \vdash \forall y\, p(x,y)}}{\exists x\, \forall y\, p(x,y), \forall y\, p(x,y) \vdash p(x,x)}\ \text{Elim}\forall}{\exists x\, \forall y\, p(x,y), \forall y\, p(x,y) \vdash \exists x\, p(x,x)}\ \text{Intro}\exists}{\exists x\, \forall y\, p(x,y) \vdash \exists x\, p(x,x)}\ \text{Elim}\exists}{\vdash \exists x\, \forall y\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, p(x,x)}\ \text{Intro} \Rightarrow$$

La règle Elim$\exists$ revient à utiliser l'hypothèse de l'existence d'un x, qui nous donne alors un tel x (comme valeur non libre dans les autres formules), ce qui nous donne une hypothèse supplémentaire, tout en gardant le même but. On peut alors utiliser cette valeur de x dans la règle Intro$\exists$.

⚠ La « démonstration » suivante n'aboutit pas : le « x » que l'on obtient de l'hypothèse lors de l'utilisation de la règle Elim$\exists$ n'est pas le « t » que l'on a affirmé pouvoir obtenir lors de l'utilisation de la règle Intro$\exists$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x\, \forall y\, p(x,y) \vdash \exists x\, \forall y\, p(x,y)} \qquad \dfrac{}{\exists x\, \forall y\, p(x,y), \forall y\, p(x,y) \vdash \forall y\, p(t,y)}}{\exists x\, \forall y\, p(x,y) \vdash \forall y\, p(t,y)}\ \text{Elim}\exists}{\exists x\, \forall y\, p(x,y) \vdash p(t,t)}\ \text{Elim}\forall}{\exists x\, \forall y\, p(x,y) \vdash \exists x\, p(x,x)}\ \text{Intro}\exists}{\vdash \exists x\, \forall y\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, p(x,x)}\ \text{Intro} \Rightarrow$$

Il fallait donc obtenir ce x avant (d'où l'utilisation dès le début de la règle Elim$\exists$).

Cependant, on ne peut pas choisir « x » tout de suite, car sinon la règle Elim$\exists$ ne pourrait plus être applicable du fait que « x » serait libre dans la conclusion de la règle, ce que la règle interdit (le « x » obtenu doit être une nouvelle variable libre dans le sens du bas vers le haut : c'est un nouveau x parmi ceux qui existent).

IV) Validité

(f_1) n'est pas valide : le y n'est pas forcément x.

Exemple : considérer que p est la relation « strictement inférieur », dans l'univers des nombres réels. Autrement dit, $p(x,y)$ est interprétée par $x < y$ avec x et y réels.

La formule $\forall x \exists y p(x,y)$ est donc $\forall x \exists y x < y$ et est vraie dans notre modèle.

Pourtant, $\exists x p(x,x)$, autrement dit $\exists x x < x$ est fausse dans notre modèle.

La formule (f_1) est donc fausse dans le modèle.

(f_2) est valide : nous l'avons démontrée plus haut.

(f_3) n'est pas valide : il se peut que $p(x,y)$ soit toujours fausse, ainsi que $r(z)$.

Le fait que $p(x,y)$ implique $r(x)$ n'implique pas que $r(x)$ puisse être vraie.

Exemple de modèle : l'univers est $\{1\}$ (il doit être non vide), p est $\emptyset$, de même que r.

Dans ce modèle, $p(x,y)$ est autrement dit toujours fausse, ainsi que $r(z)$.

Donc $\exists z r(z)$ est fausse.

Pourtant, $\exists y \forall x (p(x,y) \Rightarrow r(x))$ est vraie d'après la table de vérité de l'implication.

Donc (f_3) est fausse.

(f_4) est valide (on choisit $y = x$). Démonstration à l'aide de la déduction naturelle :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x \forall y (p(x,y) \vee p(y,x))}}{\Gamma \vdash \forall y (p(x,y) \vee p(y,x))}\,\text{Elim}\forall\ (x \leftarrow x)}{\Gamma \vdash p(x,x) \vee p(x,x)}\,\text{Elim}\forall\ (y \leftarrow x) \qquad \dfrac{}{\Gamma, p(x,x) \vdash p(x,x)} \qquad \dfrac{}{\Gamma, p(x,x) \vdash p(x,x)}}{\Gamma \vdash p(x,x)}\,\text{Elim}\vee}{\Gamma = \forall x \forall y (p(x,y) \vee p(y,x)) \vdash \forall x p(x,x)}\,\text{Intro}\forall}{\vdash \forall x \forall y (p(x,y) \vee p(y,x)) \Rightarrow \forall x p(x,x)}\,\text{Intro} \Rightarrow$$

(f_5) n'est pas valide : le y qui existe dans l'hypothèse dépend de x, il n'est pas forcément toujours le même, contrairement à ce qu'exprime la conclusion.

Pour le démontrer plus précisément, il suffit de trouver un modèle dans lequel la formule est fausse.

Choisissons pour univers $\{1,2\}$ et $p = \{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$.

Alors $\forall x \exists y \forall z p(x,y,z)$ est vraie :

- pour $x = 1$, on choisit $y = 1$, et alors $\forall z p(1,1,y)$ est vraie.
- pour $x = 2$, on choisit $y = 2$, et alors $\forall z p(2,2,y)$ est vraie.

Cependant, il n'existe pas de y pour lequel $\forall z p(z,y,z)$ soit vraie : si $y = 1$, c'est faux pour $z = 2$; pour $y = 2$ c'est faux pour $z = 1$.

Donc (f_5) est fausse dans le modèle.

(f_6) est valide : comme il existe un y pour lequel $r(y)$ est faux, comme $p(y)$ implique $r(y)$, on en déduit que $p(y)$ est faux.

Démonstration en déduction naturelle :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (\forall x (p(x) \Rightarrow r(x)) \wedge \exists y \neg r(y)}}{\Gamma = \Gamma_1, \neg r(y) \vdash \exists y \neg r(y)}\,\text{Elim}\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, p(y) \vdash \neg r(y)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma' \vdash \forall x (p(x) \Rightarrow r(x)) \wedge \exists y \neg r(y)}}{\Gamma' \vdash \forall x (p(x) \Rightarrow r(x))}\,\text{Elim} \wedge g}{\Gamma' \vdash p(y) \Rightarrow r(y)}\,\text{Elim}\forall (x \leftarrow y) \qquad \dfrac{}{\Gamma' \vdash p(y)}}{\Gamma' = \Gamma, p(y) \vdash r(y)}\,\text{Elim} \Rightarrow}{\Gamma, p(y) \vdash \bot}\,\text{Elim}\neg}{\Gamma \vdash \neg p(y)}\,\text{Intro}\neg}{\Gamma = \Gamma_1, \neg r(y) \vdash \exists z \neg p(z)}\,\text{Intro}\exists}{\Gamma_1 = \forall x (p(x) \Rightarrow r(x)) \wedge \exists y \neg r(y) \vdash \exists z \neg p(z)}\,\text{Elim}\exists}{\vdash (\forall x (p(x) \Rightarrow r(x)) \wedge \exists y \neg r(y)) \Rightarrow \exists z \neg p(z)}\,\text{Elim} \Rightarrow$$

V) Modèles

1. On considère le modèle suivant :
   - L'univers est l'intervalle $[0,1]$
   - $a = 0$ et $b = 1$.
   - $p(x,y)$ est $x \leqslant y$.

- f est la fonction constante égale à 1 (donc à b).

La relation $x \leqslant y$ est transitive, donc les $(\mathcal{A}_1)$ sont vraies. Tous les nombres $x \in [0,1]$ sont tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$ par définition, donc les $(\mathcal{A}_2)$ sont vraies. Comme, quel que soit $x \in [0,1]$, $x \leqslant 1 = f(x)$, $(\mathcal{A}_3)$ est vraie.

$\mathcal{I}(B) = 1$ si, quel que soit $y \in [0,1]$, $(x \leqslant y \Rightarrow x \leqslant 1)$. Comme c'est vrai, $\mathcal{I}(B) = 1$.

2. Pour le même modèle, $p(f(x),a)$ est interprété par $1 \leqslant 0$, or c'est faux.

VI) Modèles 2

On considère que l'interprétation de $P(x)$ est $x \in \{1,3\}$ dans le modèle donné. Il en va de manière similaire pour Q et R.

1. vraie $(1 \in \{1,3\})$
2. vraie $(3 \in \{1,2,3\})$
3. fausse $(2 \in \emptyset)$
4. vrai $(\forall x, x \in \{1,2,3\})$
5. faux ($\forall x, x \in \{1,3\}$: faux pour 2)
6. vrai $(\forall x, (x \in \{1,3\} \Rightarrow x \in \{1,2,3\}))$
7. faux ($\forall x, x \in \{1,3\} \wedge x \in \{1,2,3\}$: faux pour 2)
8. vrai ($\exists x, x \in \{1,2,3\} \wedge x \notin \{1,3\}$: vrai pour 2)
9. vrai $(\neg(\exists x, x \in \emptyset))$
10. vrai ($\exists x, (x \notin \{1,2,3\} \Rightarrow x \in \{1,3\})$: n'importe quelle valeur de x convient, car la prémisse de l'implication est toujours fausse)
11. vrai ($\exists x, \neg(x \in \{1,2,3\} \Rightarrow x \in \{1,3\})$: vrai pour 2)

Formes normales, Unification et Résolution avec variables

I) Mise sous forme(s) normale(s)

a) Formes prénexes

À retenir : on peut « sortir » les $\forall$, $\exists$ des $\wedge$, $\vee$ et à droite des implications à condition de ne pas capturer de variable.
Quand on « sort » les $\forall$, $\exists$ d'une négation $\neg$ ou à gauche d'une implication, il faut permuter les $\forall$ en $\exists$ et inversement.
Une bonne manière de ne pas se perdre est de dessiner l'arbre de syntaxe de la formule.
On remonte petit à petit :

1.

$$\begin{array}{lll}
& \forall x\,(p(x) \Rightarrow \exists z\,(\neg\forall y\,(q(x,y) \Rightarrow p(f(a))) \wedge \forall y\,(q(x,y) \Rightarrow p(x)))) & \\
\equiv & \forall x\,(p(x) \Rightarrow \exists z\,(\exists y\,\neg(q(x,y) \Rightarrow p(f(a))) \wedge \forall t\,(q(x,t) \Rightarrow p(x)))) & \text{renommage} \\
\equiv & \forall x\,(p(x) \Rightarrow \exists z\exists y\forall t\,(\neg(q(x,y) \Rightarrow p(f(a))) \wedge (q(x,t) \Rightarrow p(x)))) & \\
\equiv & \forall x\exists z\exists y\forall t\,(p(x) \Rightarrow (\neg(q(x,y) \Rightarrow p(f(a))) \wedge (q(x,t) \Rightarrow p(x)))) &
\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{lll}
& \neg((\forall x\exists y\,p(x,y) \wedge \forall y\exists x\,q(y,z)) \Rightarrow \forall x\exists y\exists z\,(p(x,y) \wedge q(y,z))) & \\
\equiv & \neg((\forall x\exists y\,p(x,y) \wedge \forall u\exists v\,q(u,z)) \Rightarrow \forall a\exists b\exists c\,(p(a,b) \wedge q(b,c))) & \text{renommage} \\
\equiv & \neg((\forall x\exists y\forall u\exists v\,(p(x,y) \wedge q(u,z))) \Rightarrow \forall a\exists b\exists c\,(p(a,b) \wedge q(b,c))) & \\
\equiv & \neg(\exists x\forall y\exists u\forall v\,(p(x,y) \wedge q(u,z)) \Rightarrow \forall a\exists b\exists c\,(p(a,b) \wedge q(b,c))) & \\
\equiv & \neg(\exists x\forall y\exists u\forall v\forall a\exists b\exists c\,(p(x,y) \wedge q(u,z)) \Rightarrow (p(a,b) \wedge q(b,c))) & \\
\equiv & \forall x\exists y\forall u\exists v\exists a\forall b\forall c\,\neg((p(x,y) \wedge q(u,z)) \Rightarrow (p(a,b) \wedge q(b,c))) &
\end{array}$$

3.

$$\begin{array}{lll}
& \exists y\forall z\,(p(z,y) \Leftrightarrow \neg\exists x\,(p(z,x) \wedge p(x,z))) & \\
\equiv & \exists y\forall z\,(p(z,y) \Leftrightarrow \forall x\,\neg(p(z,x) \wedge p(x,z))) & \\
\equiv & \exists y\forall z\,((p(z,y) \Rightarrow \forall x\,\neg(p(z,x) \wedge p(x,z))) \wedge (\forall x\,\neg(p(z,x) \wedge p(x,z)) \Rightarrow p(z,y))) & \text{équi} \\
\equiv & \exists y\forall z\,((p(z,y) \Rightarrow \forall x\,\neg(p(z,x) \wedge p(x,z))) \wedge (\forall t\,\neg(p(z,t) \wedge p(t,z)) \Rightarrow p(z,y))) & \text{ren} \\
\equiv & \exists y\forall z\,(\forall x\,(p(z,y) \Rightarrow \neg(p(z,x) \wedge p(x,z))) \wedge \exists t\,(\neg(p(z,t) \wedge p(t,z)) \Rightarrow p(z,y))) & \\
\equiv & \exists y\forall z\forall x\exists t\,((p(z,y) \Rightarrow \neg(p(z,x) \wedge p(x,z))) \wedge (\neg(p(z,t) \wedge p(t,z)) \Rightarrow p(z,y))) &
\end{array}$$

b) Formes de Skolem

1.

$$\begin{aligned}
& (\exists x\ (p(x) \Rightarrow (r(x) \vee \forall y\ p(y)))) \wedge \forall x \exists y\ (r(y) \Rightarrow p(x)) \\
\equiv\ & (\exists x\ (p(x) \Rightarrow (r(x) \vee \forall y\ p(y)))) \wedge \forall z \exists t\ (r(t) \Rightarrow p(z)) && \text{ren} \\
\equiv\ & \exists x \forall y \forall z \exists t\ ((p(x) \Rightarrow (r(x) \vee p(y))) \wedge (r(t) \Rightarrow p(z)))
\end{aligned}$$

forme de Skolem : $\forall y \forall z\ ((p(a) \Rightarrow (r(a) \vee p(y))) \wedge (r(f(y,z)) \Rightarrow p(z)))$

2.

$$\begin{aligned}
& ((p_1(x_1) \Rightarrow \exists x_2\ p_2(x_2)) \Rightarrow \exists x_3\ p(x_3)) \Rightarrow \exists x_4 q(x_4) \\
\equiv\ & (\exists x_2\ (p_1(x_1) \Rightarrow p_2(x_2)) \Rightarrow \exists x_3\ p(x_3)) \Rightarrow \exists x_4 q(x_4) \\
\equiv\ & (\forall x_2 \exists x_3\ ((p_1(x_1) \Rightarrow p_2(x_2)) \Rightarrow p(x_3))) \Rightarrow \exists x_4 q(x_4) \\
\equiv\ & \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4\ (((p_1(x_1) \Rightarrow p_2(x_2)) \Rightarrow p(x_3)) \Rightarrow q(x_4))
\end{aligned}$$

forme de Skolem : $\forall x_3\ (((p_1(x_1) \Rightarrow p_2(a)) \Rightarrow p(x_3)) \Rightarrow q(f(x_3)))$

3.

$$\begin{aligned}
& (\forall x\ (p(x) \wedge \exists y\ q(x,y))) \wedge (\forall x\ p(x) \Rightarrow \exists y\ r(y)) \\
\equiv\ & (\forall x\ (p(x) \wedge \exists y\ q(x,y))) \wedge (\forall z\ p(z) \Rightarrow \exists t\ r(t)) && \text{ren} \\
\equiv\ & (\forall x \exists y\ (p(x) \wedge q(x,y))) \wedge \exists z\ (p(z) \Rightarrow \exists t\ r(t)) \\
\equiv\ & (\forall x \exists y\ (p(x) \wedge q(x,y))) \wedge \exists z \exists t\ (p(z) \Rightarrow r(t)) \\
\equiv\ & \forall x \exists y \exists z \exists t\ ((p(x) \wedge q(x,y)) \wedge (p(z) \Rightarrow r(t)))
\end{aligned}$$

forme de Skolem : $\forall x\ ((p(x) \wedge q(x, f(x))) \wedge (p(g(x)) \Rightarrow r(h(x))))$

II) Unification

1.

$$\begin{aligned}
& \{p(x, f(x), g(f(x), x)) = p(z, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))\} \\
\to & \{x = z, f(x) = f(f(a)), g(f(x),x) = g(f(g(a,z)),v)\} && \text{decomposition} \\
\to & \{x = z, x = f(a), f(x) = f(g(a,z)), x = v\} && \text{decomposition } (\times 2) \\
\to & \{x = z, x = f(a), x = g(a,z), x = v\} && \text{decomposition} \\
\to & \{x = f(a), f(a) = z, f(a) = g(a,z), f(a) = v\} && \text{elimination } (x = f(a)) \\
\to & \text{Echec} && \text{conflit } (f(a) = g(a,z))
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
& \{p(f(g(x, y)), g(v, w), y) = p(f(z), x, f(x))\} \\
\to & \{f(g(x, y)) = f(z), g(v, w) = x, y = f(x)\} && \text{decomposition} \\
\to & \{g(x, y) = z, g(v, w) = x, y = f(x)\} && \text{decomposition} \\
\to & \{y = f(x), g(x,f(x)) = z, g(v, w) = x\} && \text{elimination } (y = f(x)) \\
\to & \{y = f(x), z = g(x,f(x)), x = g(v, w)\} && \text{inversion } (\times 2) \\
\to & \{x = g(v, w), y = f(g(v, w)), z = g(g(v, w),f(g(v, w)))\} && \text{elimination } (x = g(v, w))
\end{aligned}$$

Il n'y a plus de règle applicable, les deux atomes sont donc unifiables.
Une fois unifiés, $A = B = p(f(g(f(g(v,w)),f(g(v,w)))),g(v,w),f(g(v,w)))$

3.

$$
\begin{array}{ll}
\{p(x,f(x),f(f(x))) = p(u,w,w)\} & \\
\to\{x = u, f(x) = w, f(f(x)) = w\} & \text{decomposition} \\
\to\{x = u, f(u) = w, f(f(u)) = w\} & \text{elimination } (x = u) \\
\to\{x = u, w = f(u), w = f(f(u))\} & \text{inversion } (\times 2) \\
\to\{x = u, w = f(u), f(u) = f(f(u))\} & \text{elimination } (w = f(u)) \\
\to\{x = u, w = f(u), u = f(u)\} & \text{decomposition} \\
\to\text{Echec} & \text{occurence } (u \in FV(f(u)))
\end{array}
$$

4.

$$
\begin{array}{ll}
\{p(x,f(x),f(f(x))) = p(f(f(y)),y,f(y))\} & \\
\to\{x = f(f(y)), f(x) = y, f(f(x)) = f(y)\} & \text{decomposition} \\
\to\{x = f(f(y)), f(x) = y, f(x) = y\} & \text{decomposition} \\
\to\{x = f(f(y)), y = f(x)\} & \text{inversion} \\
\to\{x = f(f(y)), y = f(f(f(y)))\} & \text{elimination } (x = f(f(y))) \\
\to\text{Echec} & \text{occurence } (y \in FV(f(f(f(y)))))
\end{array}
$$

III) Résolution

1.
   - de (a) et (b) on obtient (d) $p(f(a))$ après unification $(x = a)$ et coupure.
   - de (c) et (d) on obtient la clause vide après unification $(z = a)$ et coupure.
2.
   - De (c) et (d) on obtient (g) $p(f(b),f(y)) \vee p(b,y)$ $(x = b)$
   - De (d) et (e) on obtient (h) $p(f(b),f(b))$ $(y = b)$
   - De (h) et (b) on obtient (i) $q(a,b)$ $(y = b)$
   - De (i) et (f) on obtient (j) $q(f(a),f(a))$ $(y = a,\ x = a)$
   - De (j) et (a) on obtient la clause vide $(z = a,\ y = f(a))$

IV) Conséquences

1. On transforme les formules en forme de Skolem puis en clauses :
   - A_1 : $p(x,f(x))$
   - A_2 : $\neg p(z_1,z_2) \vee q(z_1)$
   - $\neg F$ (la formule à prouver est à nier pour ensuite chercher une contradiction) : $\neg q(a)$

   De $p(x,f(x))$ et $\neg p(z_1,z_2) \vee q(z_1)$ on obtient $q(x)$ $(z_1 = x$ et $z_2 = f(x))$

   De $q(x)$ et $\neg q(a)$ on obtient la clause vide $(x = a)$.

   F est bien conséquence des axiomes A_i.
2. Formes de Skolem puis clauses :
   - A_1 : $\neg p(x) \vee r(f(x))$
   - A_2 : $\neg r(y) \vee p(f(y))$ (on renomme la variable pour éviter les erreurs de raisonnement pour l'unification)
   - $\neg F$: $\exists x\ \neg(p(x) \Rightarrow p(f(f(x))))$, soit $\exists x\ (p(x) \wedge \neg p(f(f(x))))$, donc $p(a)$ et $\neg p(f(f(a)))$

De $\neg p(x) \vee r(f(x))$ et $\neg r(y) \vee p(f(y))$ on obtient $\neg p(x) \vee p(f(f(x)))$ $(y = f(x))$
De $\neg p(x) \vee p(f(f(x)))$ et $p(a)$ on obtient $p(f(f(a)))$ $(x = a)$
De $p(f(f(a)))$ et $\neg p(f(f(a)))$ on obtient la clause vide.

3. On traduit tout d'abord les énoncés.
Il y a deux types d'éléments/variables, les gens et les crimes. On pourrait définir deux prédicats pour spécifier si une variable est une personne ou un crime, mais nous ne le ferons (pour simplifier) que pour les crimes (nécessaire à cause de A_5) avec un prédicat que nous noterons Cr, d'arité 1. On utilisera le prédicat Co, d'arité 2, pour exprimer le fait qu'une personne x a commis un crime m : $Co(x,m)$. Les autres prédicats découlent clairement de l'énoncé.

A_1 **:** $\forall m\,(Cr(m) \Rightarrow \exists x\, Co(x,m))$
A_2 **:** $\forall x\,(\exists m\, Co(x,m) \Rightarrow M(x))$
A_3 **:** $\forall x\,(A(x) \Rightarrow M(x))$
A_4 **:** $\forall x\,((M(x) \wedge A(x)) \Rightarrow \neg\exists m\, Co(x,m))$
A_5 **:** $\exists m\, Cr(m)$
F **:** $\exists x\,(M(x) \wedge \neg A(x))$
$\neg F$ **:** $\forall x\,(\neg M(x) \vee A(x))$

Formes de Skolem puis clauses :
- A_1 : $\neg Cr(m) \vee Co(f(m),m)$
- A_2 : $\neg Co(x,m) \vee M(x)$
- A_3 : $\neg A(x) \vee M(x)$
- A_4 : $\neg M(x) \vee \neg A(x) \vee \neg Co(x,m)$
- A_5 : $Cr(c)$ (avec c constante)
- $\neg F$: $\neg M(x) \vee A(x)$

De A_5 et A_1 on obtient (a) $Co(f(c),c)$ $(m = c)$
(Ce crime parmi ceux qui existent, quelqu'un l'a commis)
De (a) et A_2 on obtient (b) $M(f(c))$ $(x = f(c))$
(Cette personne qui a commis le crime est malhonnête)
De (b) et A_4 on obtient $\neg A(f(c)) \vee \neg Co(f(c),m)$ $(x = f(c))$
(alors elle n'est pas arrêtée ou elle n'a pas commis de crime)
De $\neg A(f(c)) \vee \neg Co(f(c),m)$ et (a) on obtient (c) $\neg A(f(c))$
(mais on sait qu'elle a commis le crime, donc elle n'est pas arrêtée)
De (c) et $\neg F$ on obtient (d) $\neg M(f(c))$ $(x = f(c))$
(On a trouvé une personne qui n'est pas arrêtée, il nous suffit alors de prouver qu'elle est malhonnête)
De (d) et (b) on obtient la clause vide
(on savait déjà qu'elle était malhonnête, CQFD).
On remarque que l'on n'a pas utilisé la formule A_3 (et pas uniquement parce que A_4 précise que les gens arrêtés qui ne commettent pas de crimes sont malhonnêtes).
En fait, les hypothèses suivantes suffisent (et sont toutes nécessaires) pour déduire F :
A_1 **:** « Pour tout crime, il y a quelqu'un qui l'a commis » ;
A_2 **:** « Seuls les gens malhonnêtes commettent des crimes » ;
A_4 **:** « Les gens arrêtés ne commettent pas de crimes » ;
A_5 **:** « Il y a des crimes ».
Ce crime parmi ceux qui existent, quelqu'un l'a commis.
Cette personne qui a commis le crime est malhonnête.
De plus, elle n'est pas arrêtée (sans quoi elle n'aurait pas commis de crime).
On a donc une personne qui n'est pas arrêtée et qui est malhonnête.