Unistra

Logique et Programmation Logique — Feuille de CT (Correction)

Examen Décembre 2021

Aucun document autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : question de cours sur la preuve de correction (2 points)

Étant donnée une règle de la forme :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash H_1 \qquad \dots \qquad \Gamma_n \vdash H_n}{\Gamma \vdash P}$$

On dit que la règle préserve la conséquence si quand $\Gamma_1 \models H_1$, ..., et $\Gamma_n \models H_n$ alors $\Gamma \models P$.

Choisir deux règles de la déduction naturelle propositionnelle et montrer qu'elles préservent la conséquence.

Correction :

Il fallait bien sûr justifier !

1. Prenons la règle d'introduction du $\wedge$:
$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$
Supposons que $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$. Montrons que $\Gamma \models A \wedge B$. On doit montrer que toute interpretation qui satisfait Γ satisfait $A \wedge B$. Soit I une interprétation qui satisfait Γ. Or comme $\Gamma \models A$, on a $I(A) = 1$. De même, $I(B) = 1$ donc $I(A \wedge B) = 1$
2. Prenons la règle d'élimination du $\vee$:
$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash P \qquad \Gamma, B \vdash P}{\Gamma \vdash P}$$
Supposons que $\Gamma \models A \vee B$ et que $\Gamma, A \models P$ et que $\Gamma, B \models P$. Montrons que $\Gamma \vdash P$. Soit I une interprétation qui satifsfait Γ. D'après la première hypthèse on a $I(A \vee B) = 1$, donc $I(A) = 1$ ou $I(B) = 1$. Si $I(A) = 1$, alors on peut utiliser la deuxième hypothèse pour conclure. Sinon $I(B) = 1$ et on peut conclure avec la troisième hypothèse.

Exercice 2 : règles inversibles (2 points)

On dit qu'une règle de la déduction naturelle est inversible si pour toute instance de cette règle si la conséquence est démontrable alors les premisses le sont.

Autrement dit si la règle est de la forme :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash H_1 \qquad \dots \qquad \Gamma_n \vdash H_n}{\Gamma \vdash P}$$

La règle est inversible si $\Gamma \models P$ implique que $\Gamma_1 \models H_1$, ..., et $\Gamma_n \models H_n$.

1. Donner une règle de la déduction naturelle qui est inversible et le démontrer.
2. Donner une règle de la déduction naturelle qui n'est pas inversible et le démontrer.

Correction :

1. La règle d'introduction du $\wedge$ est inversible car si $\Gamma \models A \wedge B$ alors $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$ (d'après la définition de l'interprétation du $\wedge$).
2. La règle d'introduction du $\vee$ (disons à gauche) n'est pas inversible car : $\models A \vee \neg A$ mais A n'est pas une tautologie (ce n'est pas une formule valide).

Exercice 3 (6 points)

A l'aide de la déduction naturelle démontrer que les formules suivantes sont valides :

1. $\neg(A \lor B) \;\Rightarrow\; (\neg A \land \neg B)$
2. $((P \Rightarrow Q) \land (P \Rightarrow \neg Q)) \;\Rightarrow\; \neg P$

Correction :

1.

Exercice 4 : (3 points)

On se place dans un langage avec deux symboles de prédicat unaires P et Q. Soit F la formule :

$$\exists x, \forall y, \forall z, ((P(y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x)))$$

1. Mettre la formule $\neg F$ sous forme clausale.
2. Utiliser la résolution pour déduire la clause vide.
3. Que peut-on en déduire sur la validité de F ?

Correction :

Erreurs fréquentes dans cet exercice :

1. Ne pas prendre la négation $\neg F$.
2. Faire comme s'il n'y avait pas de quantificateurs.
3. Skolemiser avant de prendre la négation.

Voici une proposition de correction :

1. $\neg F \equiv \forall x, \exists y, \exists z, (P(y) \Rightarrow Q(z)) \land (P(x) \land \neg Q(x))$ Skolémisation, on introduit deux symboles de fonction d'arité 1 (f et g) : $\forall x, (P(f(x)) \Rightarrow Q(g(x)) \land P(x) \land \neg Q(x)$ On obtient trois clauses :

   C_1 $\neg P(f(x)) \lor Q(g(x))$

   C_2 $P(x)$

   C_3 $\neg Q(x)$

   On peut renommer les variables :

   C_1 $\neg P(f(x)) \lor Q(g(x))$

   C_2 $P(y)$

   C_3 $\neg Q(z)$
2. On obtient $C_4 : Q(g(x))$ par résolution entre C_1 et C_2, puis avec C_3 on obtient la clause vide
3. la formule $\neg F$ est insatisfiable donc la formule F est valide

Exercice 5 : (4 points)

Soient les formules :

R : $\forall x, P(x, x)$

S : $\forall xy, P(x, y) \Rightarrow P(y, x)$

T : $\forall xyz, P(x, y) \land P(y, z) \Rightarrow P(x, z)$

Montrer que :

1. $\{R, S, T\}$ est un ensemble de formules satisfiable.
2. S n'est pas valide.
3. $R, S \not\models T$ (T n'est pas conséquence de R et S).
4. $T, R \not\models S$ (S n'est pas conséquence de T et R).

Correction :

1. On peut prendre comme interprétation l'ensemble des entiers avec P interprété par l'égalité.
2. Prendre l'ensemble des entiers et la relation $<$ qui n'est pas symmétrique.
3. Il faut montrer qu'il existe des relations réflexives et symétriques sans être transitives. On peut prendre par exemple l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et la relation $p = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
4. Il faut montrer qu'il existe des relations transitive et réflexive mais pas symétrique, par exemple $\leq$ sur les entiers naturels.

Exercice 6 : (3 points)

Définir un prédicat last/2 tel que $last(X, L)$ réussit ssi X est le dernier élément de la liste L.

Correction :

```
last(X,[X]).
last(X,[_|L]) :- last(X,L).
```

Rappels

$$\frac{}{\Gamma \vdash A} \text{ si } A \in \Gamma \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \text{ Intro} \Rightarrow \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \text{ Elim} \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash P} \text{ Elim } \bot$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A} \text{ Intro } \neg \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot} \text{ Elim } \neg$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \wedge Q} \text{ Intro } \wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash P} \text{ Elim } \wedge\text{g} \qquad \frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash Q} \text{ Elim } \wedge\text{d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q} \text{ Intro } \vee\text{g} \qquad \frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q} \text{ Intro } \vee\text{d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \vee Q \qquad \Gamma, P \vdash R \qquad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma \vdash R} \text{ Elim } \vee$$

$$\frac{\Gamma, \neg P \vdash \bot}{\Gamma \vdash P} \text{ RAA}$$