UdS

Logique et Programmation Logique — Feuille de CC

Contrôle Final (Décembre 2020)

Le barème est donné à titre indicatif. Aucun document autorisé.

Exercice 1 : Questions de cours (2 points)

1. Donner la définition de $\Gamma \models F$.
2. Donner la définition d'un litéral.
3. Donner la définition d'une clause.
4. Quelles sont les propriétés de complétude et correction de la déduction naturelle ? (énoncer et expliquer)

Exercice 2 (4 points)

Démontrer de quatre manières différentes que :

$$\models ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$

Exercice 2 : Déduction naturelle (4 points)

A l'aide de la **déduction naturelle** (les règles sont rappelées au verso) et de la règle :

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$$

Montrer que les formules suivantes sont valides :

1. $(\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B))$

Exercice 3 : système formel (5 points)

Considérons le système formel S suivant :
Soit Σ l'alphabet composé de deux lettres : $\Sigma = \{\, \texttt{(}\,,\, \texttt{)}\, \}$. L'ensemble des formules F est l'ensemble des mots que le l'on peut composer avec Σ : $F = \Sigma^*$, y compris le mot vide que l'on note ϵ. Le système formel contient un axiome et deux règles :

$$\frac{}{\epsilon}\, A \qquad \frac{n}{\texttt{(}n\texttt{)}}\, R_1 \qquad \frac{m \quad n}{mn}\, R_2$$

1. Montrer que `(())` et `()(())` sont des théorèmes.
2. Enoncer des propriétés des théorèmes de ce système qui permettent de déduire que `())` et `((()))` et `)()(` ne sont pas des théorèmes.
3. Prouver soigneusement les propriétés que vous avez proposées à la question précédente.

Exercice 4 : satisfiabilité (2 points)

Soit F une formule de la logique propositionnelle composée uniquement de variables propositionnelles et des connecteurs $\vee$ et $\wedge$. Montrer que F est satisfiable. F est-elle valide ?

Exercice 5 : résolution (4 points)

On considère la phrase “Si toute personne qui n'est pas riche possède un père riche, alors il y une riche personne dont le grand-père est riche.”

1. Proposer une formalisation en logique des prédicats de l'énoncé ci-dessus. On utilisera le prédicat r d'arité 1, $r(x)$ indiquant que x est riche et le symbole de fonctionnel f d'arité 1, tel que $f(x)$ désigne le père de x.
2. Utilisez la méthode de résolution pour montrer que l'assertion ci-dessus est valide. Attention on peut réaliser plusieurs coupures avec un même couple de clauses suivant les litéraux choisis.

Rappels

$$\frac{}{\Gamma \vdash A}\ \text{si } A \in \Gamma \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ \text{Intro} \Rightarrow \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ \text{Elim} \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash P}\ \text{Elim } \bot$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \text{Intro } \neg \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ \text{Elim } \neg$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \wedge Q}\ \text{Intro } \wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash P}\ \text{Elim } \wedge\text{g} \qquad \frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash Q}\ \text{Elim } \wedge\text{d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q}\ \text{Intro } \vee\text{g} \qquad \frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q}\ \text{Intro } \vee\text{d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \vee Q \qquad \Gamma, P \vdash R \qquad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma \vdash R}\ \text{Elim } \vee$$

FIGURE 1 – Déduction naturelle : logique intuitionniste

$$\frac{\Gamma, \neg P \vdash \bot}{\Gamma \vdash P}\ \text{RAA}$$

FIGURE 2 – Déduction naturelle : logique classique