Unistra
Logique et Programmation Logique — Feuille de CT (Correction)

Substitution Janvier 2022

Aucun document autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : question de cours (4 points)

Dire si les affirmations suivantes sont correctes ou non, justifier vos réponses.

1. Soit valid un algorithme qui répond vrai pour une formule P si la formule P est valide et faux sinon. A partir de valid, il est possible de construire un algorithme sat qui répond vrai si son entrée est une formule satisfiable et faux sinon.
2. Il existe un algorithme qui étant donnée une formule du calcul des prédicats répond vrai sur une entrée P si la formule P est satisfiable et faux sinon.
3. Il existe un algorithme qui étant donnée une formule du calcul des propositions répond vrai sur une entrée P si la formule P est satisfiable et faux sinon.
4. Il existe un algorithme qui étant donnée une formule du calcul des propositions répond vrai sur une entrée P si la formule P est valide et faux sinon.

Correction :

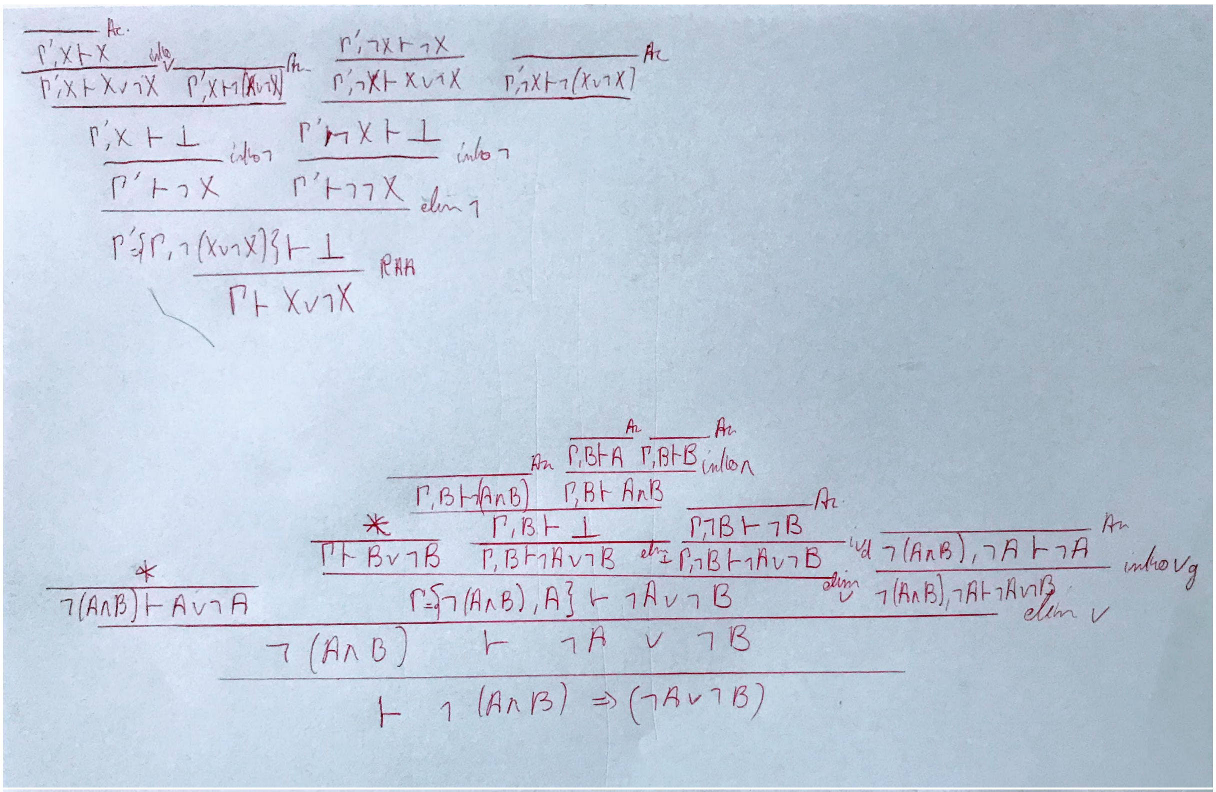
1. Vrai, il suffit de tester si la négation $\neg A$ est valide, auquel cas A est insatisfiable.
2. Faux, la satisfiabilité dans le calcul des prédicats n'est pas décideble.
3. Vrai, il suffit de vérifier si une des interpretations satisfait la formule.
4. Vrai, il suffit de vérifier si toutes les interpretations satisfont la formule.

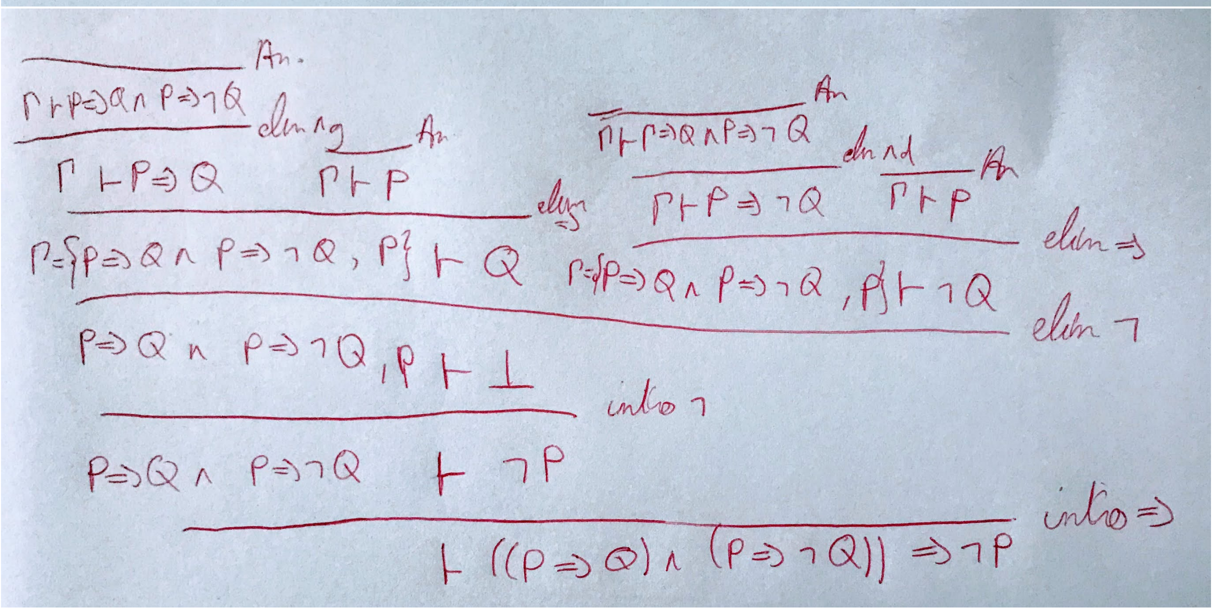
Exercice 3 (6 points)

A l'aide de la déduction naturelle démontrer que les formules suivantes sont valides :

1. $\neg(A \wedge B) \;\Rightarrow\; (\neg A \vee \neg B)$
2. $((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)) \;\Rightarrow\; \neg P$

Correction :





Exercice 4 : (3 points)

Pour le séquent suivant, dire si il est prouvable en déduction naturelle. Si oui donner l'arbre de preuve, sinon donner une interprétation dans laquelle le séquent est faux.

$$(\exists x, (P(x) \Rightarrow Q(x))),\ (\exists x, (Q(x) \Rightarrow R(x))) \vdash \exists x, P(x) \Rightarrow R(x)$$

Correction : Ce n'est pas prouvable. On considère l'univers U avec deux éléments a et b . $P = \{a, b\}$ est toujours vrai. $Q = \{a\}$ (seul Q(a) est vrai). $R = \emptyset$ est toujours faux. On a bien les hypothèses dans cette interprétation (prendre a pour la première et b pour la deuxième. Mais la conclusion n'est pas vérifiée.

Exercice 5 : (4 points)

Soient les formules :

R : $\forall x, P(x,x)$

AR : $\forall x, \neg P(x,x)$

S : $\forall xy, P(x,y) \Rightarrow P(y,x)$

nS : $\forall xy, P(x,y) \Rightarrow \neg P(y,x)$

T : $\forall xyz, P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z)$

U : $\forall x, \exists y, P(x,y)$

Montrer que :

1. $\{AR, nS, T\}$ est un ensemble de formules satisfiable.
2. $T, S, U \models R$.
3. $T, S \not\models R$ (R n'est pas conséquence de T et S).

Correction :

1. On peut prendre comme interprétation l'ensemble des entiers avec P interprété par $<$.
2. Soit x, d'après U on a y tel que $P(x,y)$ d'après S on a aussi $P(y,x)$, d'après T on a bien $P(x,x)$.
3. On peut prendre un univers réduit à un élément et P la relation vide. T et S sont vraies dans cette interprétation car la premisse de l'implication est fausse. Mais R n'est pas vraie dans cette interprétation.

Exercice 6 : (3 points)

Définir un prédicat occurrence/3 tel que $occurrence(L, X, N)$ est vrai si N est le nombre de fois où X est présent dans la liste L.

Correction :

```
occurrence([],_,0).
occurrence([X|L],X,N) :- occurrence(L,X,N1),N is N1+1.
occurrence([Y|L],X,N) :- X\==Y,occurrence(L,X,N).
```

Rappels

$$\frac{}{\Gamma \vdash A}\text{ si } A \in \Gamma \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\text{ Intro} \Rightarrow \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\text{ Elim} \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash P}\text{ Elim } \bot$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \text{Intro}\ \neg \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ \text{Elim}\ \neg$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \wedge Q}\ \text{Intro}\ \wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash P}\ \text{Elim}\ \wedge\text{g} \qquad \frac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash Q}\ \text{Elim}\ \wedge\text{d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q}\ \text{Intro}\ \vee\text{g} \qquad \frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q}\ \text{Intro}\ \vee\text{d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \vee Q \qquad \Gamma, P \vdash R \qquad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma \vdash R}\ \text{Elim}\ \vee$$

$$\frac{\Gamma, \neg P \vdash \bot}{\Gamma \vdash P}\ \text{RAA}$$