GRAPHES

1. DEFINITIONS ET PROPRIETES

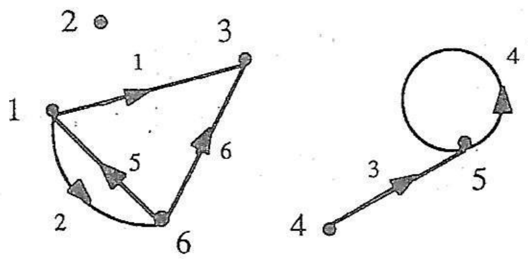
1.1. Graphes orientés

Définitions. - Un **graphe orienté simple** est un couple G = (E, Γ), où E est un ensemble de sommets et Γ une relation binaire dans E, c.à d. un sous-ensemble de $E \times E$.

Γ est un ensemble de couples (x, y) appelés **arcs** de G. On note $x \, \Gamma \, y$ le fait que $(x, y) \in \Gamma$: on dit que x est un **prédécesseur** de y et y un **successeur** de x dans le graphe G. On dit aussi que x est l'**origine** de l'arc (x, y) et que y en est l'**extrémité**.

Remarque. Nous nous limitons ici à des graphes simples, c.à d. n'ayant pas plusieurs arcs distincts de même origine et même extrémité. On peut fonder une théorie sur une définition de graphes non simples qui l'autorise, en adaptant ce qui suit.

A la fig. 1, on suppose que E est l'ensemble des entiers de 1 à 6, les sommets sont dessinés comme des points et les arcs comme des flèches.



$E = [1, 6]$; $\Gamma = \{(1, 3), (1, 6), (4, 5), (5, 5), (6, 1), (6, 3)\}$

Les arcs sont aussi numérotés de 1 à 6, dans l'ordre lexicographique

Figure 1. Un exemple de graphe

On note respectivement $\Gamma(x)$ et $\Gamma^{-1}(x)$ l'**ensemble des successeurs** et l'**ensemble des prédécesseurs** de x.

Dans l'exemple ci-dessus, $\Gamma(1) = \{3, 6\}$, $\Gamma(3) = \varnothing$, $\Gamma^{-1}(3) = \{1, 6\}$ et $\Gamma^{-1}(4) = \varnothing$.

Définitions. - Le **demi-degré intérieur** (resp. **extérieur**) du sommet x dans le graphe G est défini par $d_i(x) = \text{card}(\Gamma^{-1}(x))$ (resp. $d_e(x) = \text{card}(\Gamma(x))$). Le **degré** de x est défini par $d(x) = d_i(x) + d_e(x)$.

Dans l'exemple ci-dessus, $d_i(1) = 1$, $d_e(1) = 2$, $d(1) = 3$.

Définitions. - On appelle **racine** d'un graphe un sommet sans prédécesseur. On appelle **feuille** un sommet sans successeur.

Dans l'exemple, 2 et 4 sont des racines, 2 et 3 sont des feuilles.

1.2. Chemins

Définition. - Un **chemin** de longueur $k \geq 0$ est une suite $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ d'arcs α_i tels que l'extrémité de α_i est l'origine de α_{i+1}, pour $i = 1, ..., k-1$. Quand $k \geq 1$, le chemin n'est pas vide : l'origine de α_1 est l'origine du chemin et l'extrémité de α_k en est l'extrémité.

Dans l'exemple, c = ((4, 5), (5, 5), (5, 5)) est un chemin.

Quand $k \geq 1$, le chemin peut être codé par la suite des sommets $(x_0, x_1, ..., x_k)$ tels que $\alpha_i = (x_{i-1}, x_i)$; on dit que c'est un chemin de x_0 à x_k qui contient les sommets $x_0, x_1, ..., x_k$. Quand $k = 0$, il peut être éventuellement codé par une suite comportant un seul sommet, ce qui peut être utile.

Le chemin c ci-dessus peut être codé (4, 5, 5, 5).

Pour $k \geq 1$, Γ^k est la relation binaire **produit** définie par :

$x \, \Gamma^k \, y \Leftrightarrow$ il existe un chemin de longueur k de x à y.

Dans l'exemple, c est un chemin de Γ^3.

Par extension, on définit Γ^0 comme la relation d'**égalité** $x \, \Gamma^0 \, y \Leftrightarrow x = y$.

Définition. - Le chemin non vide codé $(x_0, x_1, ..., x_k)$ est un **circuit** si $x_0 = x_k$. Un circuit de longueur 1 est appelé **boucle.** Il est codé (x_0, x_0), avec $x_0 \, \Gamma \, x_0$.

A la fig. 1, le chemin codé (1, 6, 1) est un circuit et (5, 5) est une boucle.

Définition. - La **fermeture transitive** de la relation Γ est la relation binaire notée Γ^+ définie par :

$x \, \Gamma^+ \, y \Leftrightarrow$ il existe un chemin de longueur ≥ 1 de x à y.

Alors,

$$x \, \Gamma^+ \, y \Leftrightarrow x \, \Gamma \, y \ \vee \ x \, \Gamma^2 \, y \vee ... \vee \ x \, \Gamma^k \, y \vee ...$$

ce que l'on peut noter :

$$\Gamma^+ = \bigvee_{k=1}^{\infty} \Gamma^k$$

Par extension, on appelle aussi le graphe (E, Γ^+) fermeture transitive de $G = (E, \Gamma)$.

Dans l'exemple de la fig. 1, $\Gamma^+ = \{(1, 1), (1, 3), (1, 6), (4, 5), (5, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 6)\}$.

Cas particulier. Supposons que l'ensemble E est fini, avec card(E) = n > 0. Si $x \, \Gamma^k \, y$ avec $k > n$, alors on démontre facilement qu'il existe un chemin de longueur $\leq n$ de x à y. On a donc dans ce cas :

$$\Gamma^+ = \bigvee_{k=1}^{n} \Gamma^k$$

Définition. - La **fermeture réflexive transitive** de la relation Γ est définie par :

$$\Gamma^* = \bigvee_{k=0}^{\infty} \Gamma^k$$

Par extension, on appelle aussi le graphe (E, Γ^*) fermeture réflexive transitive de G = (E, Γ).

On démontre aisément la propriété suivante.

Propriété. - Γ^+ (resp. Γ^*) est la plus petite relation binaire transitive (resp. réflexive et transitive) qui contient Γ.

Définitions. - Un **chemin simple** est un chemin composé d'arcs distincts.

Un chemin différent d'un circuit est **élémentaire** s'il est non vide et ne contient que des sommets distincts.

Un **circuit élémentaire** est un circuit non vide ne contenant que des sommets distincts à l'exception de son origine et de son extrémité qui sont confondues.

Le chemin c ci-dessus n'est ni simple ni élémentaire. Le circuit (1, 6, 1) est élémentaire, mais le circuit (1, 6, 1, 6, 1) ne l'est pas.

Il est clair qu'un chemin élémentaire est simple, mais que l'inverse n'est pas toujours vrai.

Définition. - Un sommet de E est **isolé** dans G s'il n'est origine ou extrémité d'aucun arc de G.

Dans l'exemple de la fig. 1, le sommet 2 est isolé.

Définitions. Une **forêt** est un graphe sans circuit tel que tout sommet a au maximum un prédécesseur. Un **arbre** est une forêt avec une seule racine.

1.3. Equivalence, forte connexité

Définition. - On dit que les sommets x et y sont **équivalents** dans le graphe G si x = y ou s'il existe dans G un chemin de x à y et un chemin de y à x.

A la figure 1, les noeuds 1 et 6 sont équivalents.

Définition. - Les **composantes fortement connexes** du graphe G sont les classes d'équivalence définies par cette relation d'équivalence.

Les composantes fortement connexes du graphe de la figure 1 sont {1, 6}, {2}, {3}, {4} et {5}.

1.4. Chaînes, connexité

Définitions. - Le graphe **symétrique** de G = (E, Γ) est (E, Γ^{-1}). Son graphe **symétrisé** est (E, $\Gamma \vee \Gamma^{-1}$).

Définition. - Une **chaîne** de longueur $k \geq 0$ du graphe G = (E, Γ) est un chemin de son symétrisé.

Dans l'exemple de la figure 1, c' = ((3, 1), (1, 6)) est une chaîne.

La démonstration de la propriété suivante est immédiate.

Propriété. - La relation $(\Gamma \vee \Gamma^{-1})^*$ est une relation d'équivalence.

Définition. - On appelle **composantes connexes** du graphe G = (E, Γ) les classes d'équivalence de la relation $(\Gamma \vee \Gamma^{-1})^*$. Ce sont aussi les composantes fortement connexes du graphe symétrisé de G.

Les composantes connexes du graphe de la figure 1 sont {1, 3, 6}, {2}, et {4, 5}.

1.5. Graphe non orienté

Définition. - Un **graphe non orienté** est un couple G = (E, U), où E est un ensemble de sommets et U un ensemble de paires d'éléments de E.

Une paire {x, y} de U est appelée une **arête** du graphe.

Dans les graphes non orientés une notion de chaîne correspond à celle de chemin des graphes orientés, et une notion de cycle à celle de circuit. On peut y définir les notions de fermeture transitive et de connexité de manière semblable à ce qui a été fait précédemment. Nous n'en dirons pas plus ici.

1.6. Graphe valué

Il est possible d'attacher une information à chaque arc d'un graphe orienté G grâce à une fonction val, appelée **valuation**, de l'ensemble Γ des arcs dans un ensemble V de valeurs :

$$\text{val} : \Gamma \to V$$

Ainsi, selon le contexte, on peut associer à un arc une mesure, une durée, un poids, un coût, une équation, etc.

Il est aussi possible de valuer les sommets, mais nous ne le ferons pas ici.

3. REPRESENTATIONS DES GRAPHES

Toute une variété d'implantations peut être proposée. Nous nous limitons ici aux **graphes finis orientés**. Pour un tel graphe g spécifié ci-dessus, on note comme au début E son ensemble de sommets es (g), et Γ sa relation binaire exa : exa (g, x, y) = x Γ y.

3.1. Matrice booléenne associée

On suppose que les n sommets du graphe sont numérotés de 1 à n : $x_1, x_2, ..., x_n$, ou plus précisément, que l'on possède une *table* faisant correspondre à un sommet un entier de 1 à n, et une autre réalisant l'inverse.

Alors, on peut représenter les ensembles ou listes de successeurs et de prédécesseurs par une matrice booléenne m = $[m_{ij}]$ carrée n * n, appelée **matrice booléenne associée**, telle que :

$$m_{ij} = \text{exa}\ (g, x_i, x_j) = x_i\ \Gamma\ x_j$$

On trouve à la fig. 2 la matrice booléenne associée au graphe de la fig. 1.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figure 2. Matrice booléenne associée

Cette matrice, qui est une table, peut elle-même être représentée de plusieurs manières (cf. chapitre sur les tables), la plus immédiate étant bien sûr un *tableau carré*.

Cette représentation permet de réaliser facilement toutes les opérations d'accès aux éléments d'un graphe, ainsi que celles d'adjonction et suppression d'arcs. En revanche, elle est très mal-commode pour les adjonctions ou suppressions de sommets, parce que l'on considère qu'ils forment un ensemble figé. On peut gérer une valuation sur les arcs en prenant une matrice dont les éléments sont du type V, à condition de coder de manière particulière l'absence d'arc.

La représentation par matrice booléenne se prête très bien à la réalisation de certaines opérations. Ainsi, il est facile de programmer dans cette représentation l'opération donnant la **fermeture transitive** d'un graphe, grâce aux considérations suivantes :

il existe un chemin de longueur 2 de x_i à x_j $\Leftrightarrow$ $\exists$ k $m_{ik} \wedge m_{kj}$ $\Leftrightarrow$ $\bigvee_{k=1}^{n} m_{ik} \wedge m_{kj}$

C'est le terme général de la matrice $m^2 = m \otimes m$ où $\otimes$ est le **produit de matrices booléennes** ($\vee$ et $\wedge$ remplacent respectivement + et * de la multiplication de matrices numériques). Autrement dit, m^2 est la matrice associée à Γ^2.

Alors, on démontre facilement que $m^k = [m_{ij}^{(k)}]$ est la matrice associée à Γ^k pour $1 \leq k \leq n$.

De manière analogue :

il existe un chemin de longueur quelconque de x_i à x_j

$\Leftrightarrow$ il existe un chemin de longueur $\leq$ n de x_i à x_j $\Leftrightarrow$ $\exists$ k $m_{ij}^{(k)}$ $\Leftrightarrow$ $\bigvee_{k=1}^{n} m_{ij}^{(k)}$

C'est le terme général de la matrice $m^+ = \bigoplus_{k=1}^{n} m^k$, qui est la matrice associée à la fermeture transitive (E, Γ^+), avec $\oplus$ désignant la **somme de matrices booléennes.**

On a donc un algorithme simple de calcul de la fermeture transitive d'un graphe grâce aux opérations sur les matrices booléennes.

Complexité. Cet algorithme demande n-1 multiplications et n-1 additions de matrices n*n. Sa complexité dépend de celle de la multiplication de matrices. Si l'on se contente de l'algorithme naïf de multiplication, la complexité est en Θ (n^3) pour le nombre de multiplications. La complexité totale est Θ (n^4) toujours dans la même unité, ce qui est lent.

3.2. Matrice d'incidence aux arcs

On se place dans les mêmes hypothèses qu'à la section 3.1. On suppose que les p arcs sont aussi numérotés $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$, et là-encore que des tables permettent d'assurer la correspondance entre arcs et numéros.

Le graphe est alors représenté par la matrice n * p a = $[a_{ij}]$, appelée **matrice d'incidence aux arcs**, et définie de la manière suivante :

a_{ij} = **si** x_i est origine de α_j **alors** -1 **sinon si** x_i est extrémité de α_j **alors** 1 **sinon** 0.

On trouve à la fig. 3 la matrice d'incidence aux arcs du graphe de la fig. 1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \text{ : arcs} \\ \text{sommets} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figure 3. Matrice d'incidence aux arcs

C'est une matrice assez creuse car toute colonne contient au maximum 2 éléments non nuls. Elle peut être représentée directement par un tableau n * p, ce qui est assez économique par rapport à la méthode précédente lorsqu'il y a peu d'arcs et beaucoup de sommets. Elle peut l'être aussi par une technique de représentation de matrices creuses. Enfin, la méthode autorise aussi des arcs multiples entre les sommets.

Cette matrice permet des accès faciles par les sommets ou les arcs. En revanche, elle ne facilite pas les mises à jour car elle considère comme figés les ensembles de sommets et d'arcs.

3.3. Liste des arcs

On organise Γ comme une liste de couples de sommets. Si T est ordonné par ≤, cette liste peut être ordonnée par ordre lexicographique :

$$(x, y) < (x', y') \Leftrightarrow x < x' \vee (x = x' \wedge y < y')$$

Cette représentation peut convenir lorsqu'il y a peu d'arcs et que l'ensemble de sommets est grand. On peut considérer que les sommets isolés sont ceux qui ne figurent pas dans la liste comme origine ou extrémité d'un arc, sinon il faut en gérer l'ensemble à part.

Les opérations sur les graphes se ramènent donc à des opérations sur les listes.

3.4. Listes d'adjacence

Ici, les ensembles de successeurs et de prédécesseurs sont organisés en listes, elles-mêmes représentées de manière chaînée.

Les têtes de listes sont dans une liste de sommets, représentée de manière contiguë (fig. 4) ou chaînée (fig. 5). Cette liste peut contenir tous les sommets du graphe, y compris les sommets isolés. Elle peut aussi ne contenir que les sommets non isolés, l'ensemble des sommets isolés devant alors faire l'objet d'une gestion séparée.

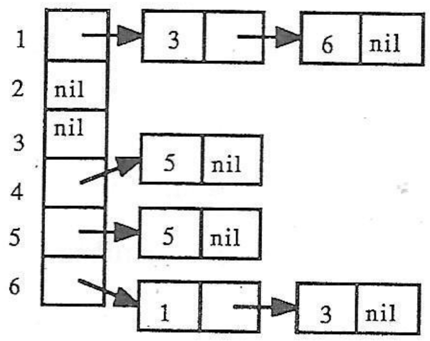


Figure 4. Listes d'adjacence (têtes contiguës)

Si le type T des sommets est ordonné, toutes ces listes peuvent l'être aussi.

Les opérations sur les graphes se ramènent alors à des opérations sur les listes. Il est clair que les organisations chaînées facilitent les mises à jour.

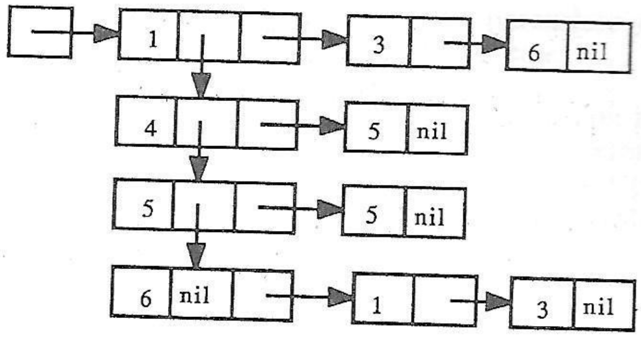


Figure 5. Listes d'adjacence (têtes chaînées)

Remarque. Ces méthodes de représentation sont encore valables pour des graphes non orientés, à condition de représenter une arête par les deux arcs correspondants.