FACULDADE DE TECNOLOGIA RUBENS LARA

TRABALHO DE OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

ALEXSANDRO DA SILVA BEZERRA

Santos, São Paulo
2024

Tarefa 1.1.Pesquise o que é uma norma em $\mathbb{R}^n$ e escreva a sua definição.

Uma **norma** em $\mathbb{R}^n$ é uma função matemática que associa a cada vetor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ um número real não negativo, que representa o "tamanho"ou "comprimento"do vetor. Formalmente, uma norma é uma função $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que deve satisfazer as seguintes propriedades para todos os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ e qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. **Não-negatividade**: $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. **Homogeneidade positiva**: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
3. **Desigualdade triangular**: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Essas propriedades garantem que a norma de um vetor é uma medida coerente de seu comprimento ou distância a partir da origem.

Exemplos comuns de normas incluem:

- **Norma Euclidiana** (ou L2-norma), dada por

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

  que é a distância de x à origem no espaço euclidiano.

- **Norma L1** (ou Norma Taxicab), dada por

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

  que é a soma das distâncias absolutas das componentes de x.

- **Norma Lp**, para $p \geq 1$, definida como

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Essas normas são essenciais em várias áreas da matemática, como análise numérica e álgebra linear, para medir distâncias e definir conceitos como convergência e otimização.

Tarefa 1.2.

a. Plotar os dados apresentados na tabela acima. Usar o eixo x para as datas e o eixo y para os valores. Além disso, o eixo x deve variar entre 0 e 6, e o eixo y deve variar entre 130 e 140.

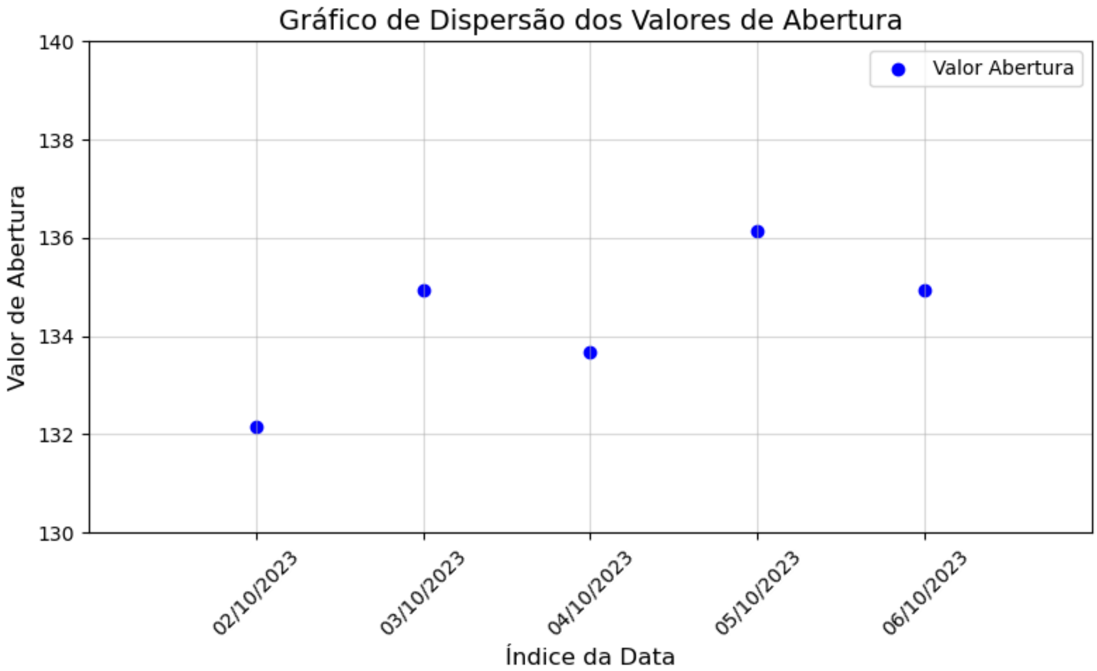

Figura 1: Gráfico de dispersão dos valores de abertura.

b. Mostrar que $\alpha = 132.328$ e $\beta = 0.678$. Para isso, assuma que ti = i.

fórmula do β é definida como:

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i - n \cdot (\bar{t}_n) \cdot (\bar{x}_n)}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n \cdot (\bar{t}_n^2)}$$

Substituindo os valores:

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i x_i - 5 \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5}\right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}\right)}{\sum_{i=1}^{5} t_i^2 - 5 \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5}\right)^2}$$

Calculando as somas e as médias:

$$\sum_{i=1}^{5} t_i = 1+2+3+4+5 = 15, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 132.15+134.93+133.66+136.13+134.94 = 671.81$$

$$\bar{t}_n = \frac{15}{5} = 3, \quad \bar{x}_n = \frac{671.81}{5} = 134.362$$

$$\sum_{i=1}^{5} t_i x_i = 1 \cdot 132.15 + 2 \cdot 134.93 + 3 \cdot 133.66 + 4 \cdot 136.13 + 5 \cdot 134.94 = 2022.21$$

$$\sum_{i=1}^{5} t_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Agora, substituímos os valores:

$$\beta = \frac{2022.21 - 5 \cdot 3 \cdot 134.362}{55 - 5 \cdot 3^2}$$

$$\beta = \frac{2022.21 - 2015.43}{55 - 45}$$

$$\beta = \frac{6.78}{10} = 0.678$$

Portanto, o valor de β é aproximadamente 0.678.

Cálculo de α

A fórmula para α é:

$$\alpha = (\bar{x}_n) - \beta \cdot (\bar{t}_n)$$

Substituindo os valores:

$$\alpha = 134.362 - 0.678 \cdot 3$$

$$\alpha = 134.362 - 2.034$$

$$\alpha = 132.328$$

Portanto, o valor de α é 132.328.

c. Usar os ítens anteriores para plotar um gráfico com os pontos da série temporal e a reta ajustada a partir da L2-regressão linear.

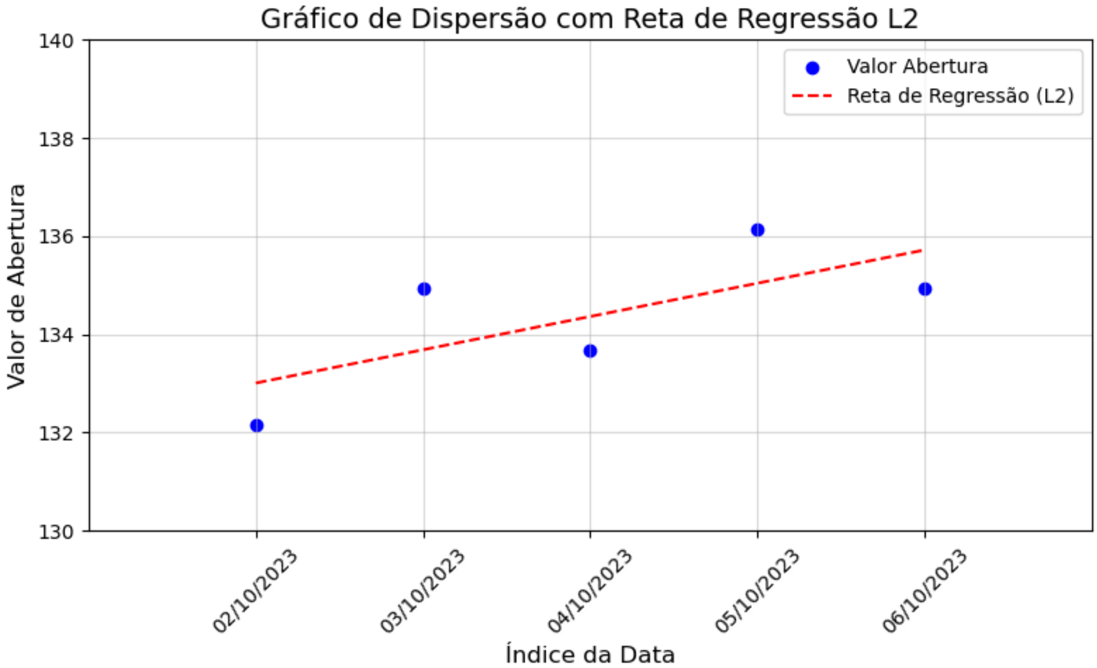

Figura 2: Gráfico de dispersão com reta de regressão L2.

Tarefa 1.3.

a. Escrever o PPL associado a L1-regressão para os dados da tabela acima.

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i,$$

Tal que :

$$\epsilon_i + a + b \cdot t_i \geq x_i$$

$$\epsilon_i - (a + b \cdot t_i) \geq -x_i$$

Função Objetivo

$$\text{Minimizar} \quad \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5$$

Restrições

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_1 + a + b \geq 132.15 \\
&\epsilon_1 - (a + b) \geq -132.15 \\
&\epsilon_2 + a + 2b \geq 134.93 \\
&\epsilon_2 - (a + 2b) \geq -134.93 \\
&\epsilon_3 + a + 3b \geq 133.66 \\
&\epsilon_3 - (a + 3b) \geq -133.66 \\
&\epsilon_4 + a + 4b \geq 136.13 \\
&\epsilon_4 - (a + 4b) \geq -136.13 \\
&\epsilon_5 + a + 5b \geq 134.94 \\
&\epsilon_5 - (a + 5b) \geq -134.94 \\
&\epsilon_i \geq 0
\end{aligned}
$$

b. Use o LINDO para resolver o problema do item (a). Mostre que $\alpha = 131.395$ e $\beta = 0.755$.

Resultados do LINDO

- $a = 131.395$ (intercepto)
- $b = 0.755$ (inclinação)
- Resíduos absolutos (ϵ_i):

$$\epsilon_1 = 0.0, \quad \epsilon_2 = 2.025, \quad \epsilon_3 = 0.0, \quad \epsilon_4 = 1.715, \quad \epsilon_5 = 0.230$$

A função objetivo, que minimiza a soma dos resíduos absolutos ($\sum_{i=1}^{5} \epsilon_i$), resultou em:

$$\text{Função Objetivo:} \quad 0.0 + 2.025 + 0.0 + 1.715 + 0.230 = 3.97$$

Slack or Surplus e Dual Price

- **Linha 1 Slack or Surplus (3.970000):** O valor positivo indica que a função objetivo ($\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5$) possui um *slack* de 3.97, no caso o valor mínimo alcançado sem quebrar as outras restrições.
- **Dual Price (-1.000000):** A função objetivo diminuiria em 1 unidade se o limite fosse reduzido em 1 unidade. Isso reflete a minimização da soma dos ϵ_i.

- **Linha 2 Slack or Surplus (0.000000):** A restrição é **ativa**, significando que $\epsilon_1 + a + b = 132.15$. Esta restrição impacta na solução.
- **Dual Price (0.000000):** A restrição não afeta diretamente a solução.
- **Linha 3 Slack or Surplus (0.000000):** Também **ativa**, indicando $\epsilon_1 - (a + b) = -132.15$.
- **Dual Price (-1.000000):** Reduzir o limite em 1 unidade causaria uma redução de 1 unidade na função objetivo, mostrando influência significativa.
- **Linha 4 Slack or Surplus (0.000000):** A restrição $\epsilon_2 + a + 2b = 134.93$ está no limite permitido, sendo **ativa**.
- **Dual Price (-1.000000):** Semelhante à linha 3, esta restrição tem impacto na solução.
- **Linha 5 Slack or Surplus (4.050000):** Há um *slack* de 4.05, indicando que a restrição $\epsilon_2 - (a + 2b) \geq -134.93$ não limita a solução.
- **Dual Price (0.000000):** A restrição não afeta diretamente a solução.
- **Linha 6 Slack or Surplus (0.000000):** A restrição é **ativa**, com $\epsilon_3 + a + 3b = 133.66$, influenciando os valores finais.
- **Dual Price (-0.500000):** Reduzir o limite em 1 unidade resultaria em uma redução de 0.5 unidades na função objetivo, indicando influência moderada.
- **Linha 7 Slack or Surplus (0.000000):** Também **ativa**, com $\epsilon_3 - (a + 3b) = -133.66$.
- **Dual Price (-0.500000):** Semelhante à linha 6, esta restrição tem impacto menor, mas relevante.
- **Linha 8 Slack or Surplus (0.000000):** A restrição $\epsilon_4 + a + 4b = 136.13$ está no limite permitido, sendo **ativa**.
- **Dual Price (-1.000000):** Reduzir o limite em 1 unidade reduziria a função objetivo em 1 unidade, mostrando grande impacto.
- **Linha 9 Slack or Surplus (3.430000):** Com *slack* de 3.43, a restrição $\epsilon_4 - (a + 4b) \geq -136.13$ não também não limita a solução.
- **Dual Price (0.000000):**A restrição não afeta diretamente a solução.

- **Linha 10 Slack or Surplus (0.460000):** Um pequeno *slack* de 0.46 indica que $\epsilon_5 + a + 5b \geq 134.94$ está próxima de ser ativa porém ainda está com valor maior que zero.
- **Dual Price (0.000000):** A restrição não afeta diretamente a solução.
- **Linha 11 Slack or Surplus (0.000000):** A restrição $\epsilon_5 - (a + 5b) = -134.94$ é **ativa**, influenciando diretamente a solução.
- **Dual Price (-1.000000):** Esta restrição impacta diretamente a solução, com uma redução de 1 unidade na função objetivo caso o limite seja reduzido em 1 unidade.

c. Plote dois gráficos: um com os dados e a reta dada pela L1-regressão, e plote um gráfico com os dados e as duas retas dadas pela L2-regressão linear e a L1-regressão linear.

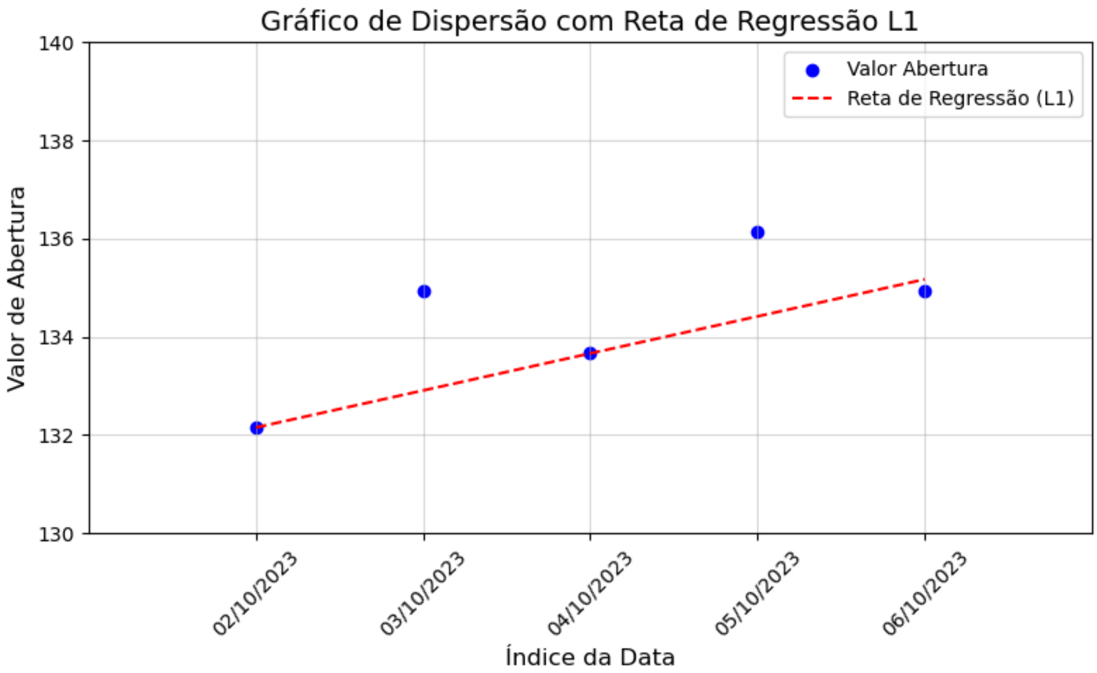

Figura 3: Gráfico de dispersão com reta de regressão L1.

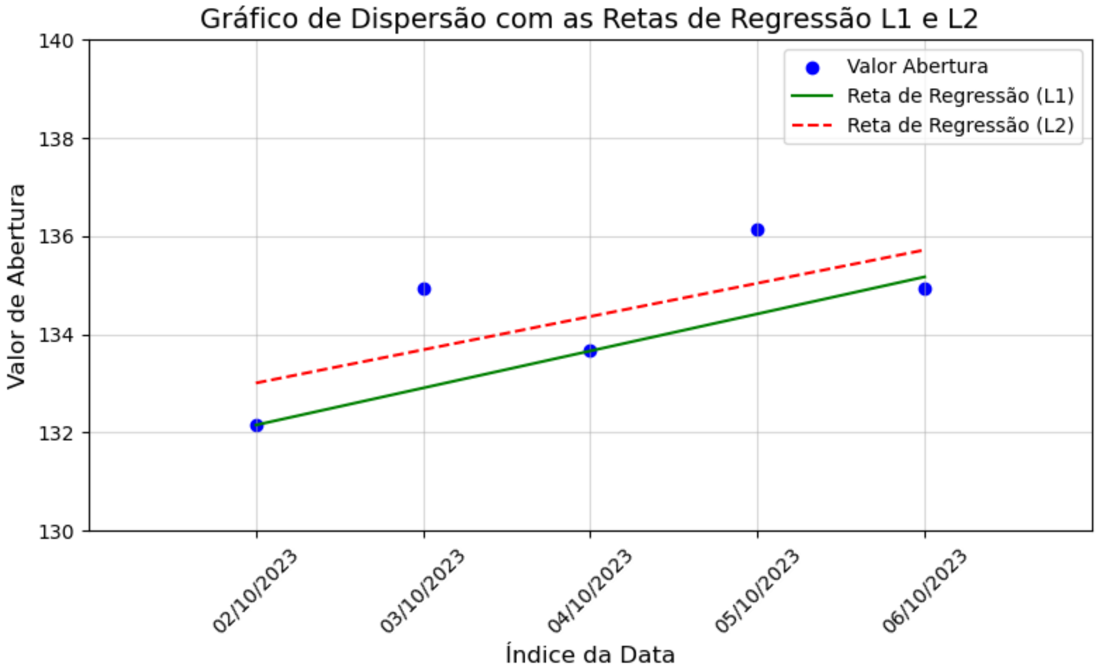

Figura 4: Gráfico de dispersão com reta de regressão L1 e L2.

d. Apartir do que foi discutido, o que podemos falar sobre os dados dos dias 03/10 e 05/10?.

Ambos os valores estão **acima da média** de 134.362, sendo eles no dia 03/10/2023 (**134.93**) e no dia 05/10/2023 (**136.13**), ao observar os gráficos. Percebmos que esses pontos estão acima das linhas de tendência $L1$ (verde) e $L2$ (vermelha).

A linha $L2$ parece **se ajustar melhor** a valores mais elevados. Isso porque $L2$ está mais próxima desses pontos em comparação com $L1$, sugerindo que é mais representativa para extremos superiores.

O valor de 05/10/2023, em particular, se destaca. Ele não apenas está significativamente acima da média, mas também apresenta maior **distância** tanto em relação às retas de tendência $L1$ e $L2$ quanto à média. Esse comportamento sugere que este valor pode ser classificado como um **outlier**, já que se afasta das tendências gerais do conjunto de dados.

Exercicío 2.(Um problema de modelagem) Suponha que uma f´abrica de varas de alumínio tenha recebido o seguinte pedido: 60 varas de 20 cm, 45 varas de 22 cm, 30 varas de 25 cm e 40 varas de 26 cm. A fábrica usa varas de 70 cm e faz os cortes necessários para entregar os pedidos. O técnico responsável pelos cortes quer minimizar o desperdício de material. Assim, começou listando os possíveis padrões de corte que utilizam pelo menos 80% do material. Formule o PPL para o problema da f´abrica e resolva-o usando o LINDO.

Padrões de Corte

Os padrões de corte possíveis, respeitando o uso mínimo de 80% do comprimento 70 sendo 56 cm, são apresentados na tabela abaixo:

Padrão	20 cm	22 cm	25 cm	26 cm	Soma (cm)
1	3	0	0	0	60
2	2	1	0	0	62
3	2	0	1	0	65
4	2	0	0	1	66
5	0	3	0	1	66
6	1	2	0	0	64
7	0	2	1	0	69
8	0	2	0	1	70
9	1	0	2	0	70
10	1	1	1	0	67
11	1	1	0	1	68

Seja x_i o comprimento da fita com Padrão i de corte, com $i \in \{1, \ldots, 11\}$. A quantidade de varas cortadas utilizando o padrão i é denotada por x_i.

Função Objetivo

$$\text{Minimizar} \quad 10x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 6x_6 + x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 3x_{10} + 2x_{11}$$

Restrições

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_6 + x_9 + x_{10} + x_{11} &\geq 60 \\
x_2 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 + x_{10} + x_{11} &\geq 45 \\
x_3 + x_7 + 2x_9 + x_{10} &\geq 30 \\
x_4 + x_5 + x_8 + x_{11} &\geq 40 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11} &\geq 0
\end{aligned}$$

Adicionando as variáveis de excesso:

Função Objetivo

$$\text{Minimizar} \quad 10x_1+8x_2+5x_3+4x_4+4x_5+6x_6+x_7+3x_{10}+2x_{11}+20e_1+22e_2+25e_3+26e_4$$

Restrições

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_6 + x_9 + x_{10} + x_{11} - e_1 &= 60 \\
x_2 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 + x_{10} + x_{11} - e_2 &= 45 \\
x_3 + x_7 + 2x_9 + x_{10} - e_3 &= 30 \\
x_4 + x_5 + x_8 + x_{11} - e_4 &= 40 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, e_1, e_2, e_3, e_4 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Resultados do LINDO . Value

- $X_4 = 3$: O padrão 4 será usado 3 vezes.
- $X_5 = 1$: O padrão 5 será usado 1 vez.
- $X_6 = 1$: O padrão 6 será usado 1 vez.
- $X_9 = 15$: O padrão 9 será usado 15 vezes.
- $X_8 = 1$: O padrão 8 será usado 1 vez.
- $X_{11} = 38$: O padrão 11 será usado 38 vezes.
- $E_4 = 2$: Dois excessos de 26 cm ou seja duas barras a mais foram gerados tendo um excesso de 42 cm no caso desperdiçando.

As demais variáveis $X_1, X_2, X_3, X_7, X_{10}, E_1, E_2, E_3$ têm valor zero, indicando que não são utilizadas na solução.

Reduced Cost

- $X_1 = 0$, com custo reduzido de 10. Isso significa que incluir uma unidade de X_1 na solução aumentaria o custo em 10 cm.
- $X_2 = 0$, com custo reduzido de 8. Isso significa que incluir uma unidade de X_2 na solução aumentaria o custo em 8 cm.
- $X_3 = 0$, com custo reduzido de 5. Isso significa que incluir uma unidade de X_3 na solução aumentaria o custo em 5 cm.
- $X_4 = 3$, com custo reduzido de 0. Isso significa que o padrão X_4 já está na solução ótima, e seu custo não pode ser reduzido.
- $X_5 = 1$, com custo reduzido de 0. Isso significa que o padrão X_5 já está na solução ótima, e seu custo não pode ser reduzido.
- $X_6 = 1$, com custo reduzido de 0. Isso significa que o padrão X_6 já está na solução ótima, e seu custo não pode ser reduzido.
- $X_7 = 0$, com custo reduzido de 1. Isso significa que incluir uma unidade de X_7 na solução aumentaria o custo em 1 cm.
- $X_8 = 1$, com custo reduzido de 0. Isso significa que o padrão X_8 já está na solução ótima, e seu custo não pode ser reduzido.
- $X_9 = 15$, com custo reduzido de 0. Isso significa que o padrão X_9 já está na solução ótima, e seu custo não pode ser reduzido.

- $X_{10} = 0$, com custo reduzido de 3. Isso significa que incluir uma unidade de X_{10} na solução aumentaria o custo em 3 cm.
- $X_{11} = 38$, com custo reduzido de 0. Isso significa que o padrão X_{11} já está na solução ótima, e seu custo não pode ser reduzido.
- $e_1 = 0$, com custo reduzido de 20. Isso significa que incluir uma unidade de e_1 na solução aumentaria o custo em 20 cm.
- $e_2 = 0$, com custo reduzido de 22. Isso significa que incluir uma unidade de e_2 na solução aumentaria o custo em 22 cm.
- $e_3 = 0$, com custo reduzido de 25. Isso significa que incluir uma unidade de e_3 na solução aumentaria o custo em cm .
- $e_4 = 2$, com custo reduzido de 0. Isso significa que o excesso e_4 já está na solução ótima, e seu custo não pode ser reduzido.

Slack or Surplus e Dual Price

- **Linha 1 (função objetivo):** Sobra (*Slack/Surplus*) de 150, indicando que este é o valor da função objetivo na solução ótima.
- **Dual Price:** -1.000000
  Esse valor indica o impacto de alterar a restrição associada à função objetivo. Um aumento unitário na função objetivo resultaria em uma redução de 1 unidade no valor da solução ótima.
- **Linha 2 (Restrição 1):**
- **Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida, ou seja, não há sobra nem falta.
- **Dual Price:** 0.000000
  O valor zero indica que essa restrição não tem impacto direto na função objetivo no ponto ótimo. Alterações nessa restrição não afetariam o valor da solução ótima.
- **Linha 3 (Restrição 2):**
- **Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida.
- **Dual Price:** 0.000000
  Similar à Linha 2, essa restrição não afeta diretamente a função objetivo no ponto ótimo.

- **Linha 4 (Restrição 3):**
- **Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida.
- **Dual Price:** 0.000000
  Como nas linhas anteriores, o valor indica que a restrição não tem impacto na função objetivo.
- **Linha 5 (Restrição 4):**
- **Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida.
- **Dual Price:** 26.00000
  Esse valor positivo indica que, se o limite da restrição fosse aumentado em uma unidade, o valor da função objetivo aumentaria em 26 cm. Isso reflete a sensibilidade da solução a essa restrição.

Exercício 3

A Elecond é uma pequena companhia que fabrica dois tipos de fechaduras eletrônicas. O custo de trabalho, matéria-prima e preço de venda por unidade de cada uma está dado na tabela abaixo:

	Fechadura Tipo 1	**Fechadura Tipo 2**
Preço de Venda	R$100	R$90
Custo de Trabalho	R$50	R$35
Matéria-Prima	R$30	R$40

Na abertura de 01/12/23, a Elecond possuía matéria-prima suficiente para fabricar 100 fechaduras do tipo 1 e 100 fechaduras do tipo 2. Na mesma data, o balanço financeiro da companhia é dado pela seguinte tabela:

	Ativos	**Passivos**
Dinheiro	R$10.000	
Contas a Receber	R$3.000	
Estoque	R$7.000	
Empréstimo Bancário		R$10.000

A razão de liquidez é definida como:

$$\text{Razão de Liquidez} = \frac{\text{Ativos}}{\text{Passivos}}$$

No início do dia 01/12/23, a razão de liquidez da Elecond era:

$$\text{Razão de Liquidez} = \frac{20.000}{10.000} = 2.$$

A Elecond deve determinar quantas fechaduras eletrônicas devem ser produzidas de cada tipo no mês de Dezembro de 2023. A demanda dessas fechaduras é grande o suficiente para assegurar que todas as produzidas serão vendidas. Todas as vendas serão feitas no crédito, assim, todos os pagamentos dos produtos produzidos em Dezembro não serão recebidos antes de 01 de Fevereiro de 2024.

Durante Dezembro, a Elecond irá receber R$2.000 em contas a receber e deve pagar R$1.000 em empréstimos pendentes e um aluguel mensal de R$1.000. No dia 01 de Janeiro, a Elecond irá receber um carregamento de matéria-prima no valor de R$2.000, que será pago em 01 de Fevereiro de 2024. A administração financeira da Elecond decidiu que o saldo de caixa no fechamento de 01 de Janeiro de 2024 deve ser de pelo menos R$4.000. O banco que faz empréstimos para a Elecond exige que sua razão de liquidez seja pelo menos 2 no fechamento do dia 01 de Janeiro de 2024. Para maximizar o lucro no mês de Dezembro, a Elecond deve produzir quantas fechaduras do tipo 1 e do tipo 2?

O lucro por unidade de cada tipo de fechadura é dado pelo preço de venda menos o custo de trabalho e matéria-prima:

$$\text{Lucro (Tipo 1)} = 100 - 50 - 30 = 20 \text{ reais.}$$

$$\text{Lucro (Tipo 2)} = 90 - 35 - 40 = 15 \text{ reais.}$$

Assim, a função objetivo é maximizar o lucro total:

$$\max z = 20x_1 + 15x_2,$$

onde:

- x_1: quantidade de fechaduras do Tipo 1 a ser produzida.
- x_2: quantidade de fechaduras do Tipo 2 a ser produzida.

Restrições A quantidade máxima de matéria-prima disponível para cada tipo de fechadura é suficiente para 100 unidades. Portanto:

$$x_1 \leq 100,$$

$$x_2 \leq 100.$$

O saldo de caixa mínimo no final do período deve ser pelo menos R$4.000. A equação para o saldo de caixa é:

Saldo final = Saldo inicial + Receita - Custos fixos - Custos de produção.
Substituindo os valores fornecidos:

$$10.000 + (100x_1 + 90x_2) - 1.000 - 1.000 - (30x_1 + 40x_2) \geq 4.000.$$

Simplificando:

$$9.000 - 30x_1 - 40x_2 \geq 4.000,$$

$$5.000 \geq 30x_1 + 40x_2.$$

A razão de liquidez deve ser pelo menos 2, dada por:

$$\text{Razão de Liquidez} = \frac{\text{Ativos}}{\text{Passivos}} \geq 2.$$

Substituindo:

$$\frac{10.000 + 100x_1 + 90x_2}{10.000} \geq 2.$$

Simplificando:

$$10.000 + 100x_1 + 90x_2 \geq 20.000,$$

$$100x_1 + 90x_2 \geq 10.000.$$

PPL

$$\text{Maximizar: } z = 20x_1 + 15x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 100,$$

$$30x_1 + 40x_2 \leq 5.000,$$

$$100x_1 + 90x_2 \geq 10.000.$$

$$x_1 = 100, \quad \text{onde o valor da variável } x_1 \text{ é } 100.$$

Isso significa que, para maximizar o lucro, a solução ideal é produzir 100 fechaduras do Tipo 1.

$$x_2 = 50, \quad \text{onde o valor da variável } x_2 \text{ é } 50.$$

Isso significa que, para maximizar o lucro, a solução ideal é produzir 50 fechaduras do Tipo 2.

Reduced cost:

O *reduced cost* de ambas as variáveis é 0. Não há incentivo adicional para alterar a quantidade de produção de x_1 e x_2. Produzindo 100 de x_1 e 50 de x_2 é exatamente o que maximiza o lucro.

Slack or Surplus e Dual Price

- **Linha 1 (função objetivo): Slack or Surplus:** 2750.0000
  Esse é o valor da função objetivo na solução ótima, representando o resultado final do problema de maximização.

- **Dual Price:** 1.000000
  O valor positivo indica que um aumento unitário no limite superior da função objetivo aumentará o valor ótimo em uma unidade.

- **Linha 2 (Restrição 1): Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida, sem sobras nem faltas.

- **Dual Price:** 8.750000
  Um valor positivo indica que, se o limite da restrição fosse aumentado em uma unidade, o valor da função objetivo seria incrementado em 8.75 unidades.

- **Linha 3 (Restrição 2): Slack or Surplus:** 50.000000
  Há uma folga de 50 unidades, ou seja, a restrição não está sendo totalmente utilizada.

- **Dual Price:** 0.000000
  Um valor zero indica que a alteração no limite dessa restrição não impactaria o valor da função objetivo.

- **Linha 4 (Restrição 3): Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida.

- **Dual Price:** 0.375000
  O valor positivo indica que, se o limite da restrição fosse relaxado, a função objetivo aumentaria em 0.375 unidades.

- **Linha 5 (Restrição 4): Slack or Surplus:** 4500.0000
  Existe uma grande folga de 4500 unidades, indicando que a restrição não está completamente utilizada.

- **Dual Price:** 0.000000
  Como a restrição não está afetando a solução ótima, relaxá-la não teria efeito sobre a função objetivo.

Exercício 4. Problema do Custo Mínimo de Fluxo em Rede

Considere o grafo orientado G, que consiste de um número finito $n \in \mathbb{N}$ de vértices (*nós* ou *pontos*) $V = \{v_1, \dots, v_n\}$; e um conjunto de arestas orientadas (*links*, *arcos*, *lados*, *linhas*) $A = \{(v_i, v_j), (v_k, v_s), \dots, (v_s, v_t)\}$ ligando os vértices. O arco (v_i, v_j) é orientado no sentido de início em v_i e final em v_j.

Para cada vértice v_i em G, associamos um número b_i que representa:

- A **disponibilidade de envio** de um determinado item ($b_i > 0$),
- Ou a **demanda** do item ($b_i < 0$).

Vértices com $b_i > 0$ são chamados de **fontes**, e vértices com $b_i < 0$ são chamados de **ralos**. Se $b_i = 0$, então não há disposição para envio nem demanda para o produto. Neste caso, o vértice v_i será chamado de **vértice intermediário**.

Assumimos que a oferta total é igual à demanda total dentro da rede (*network*/grafo), isto é:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = 0.$$

Associamos ainda a cada uma das arestas (v_i, v_j) um par ordenado $(c_{i,j}, p_{i,j})$, onde:

- $c_{i,j}$ é a **capacidade de fluxo** entre os vértices v_i e v_j através da aresta (v_i, v_j),
- $p_{i,j}$ é o **preço** para enviar o item via o fluxo representado pela aresta (v_i, v_j).

O **Problema do Custo Mínimo de Fluxo em Rede** pode ser formulado como:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x_{i,j},$$

sujeito às restrições:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} - \sum_{k=1}^{n} x_{k,i} = b_i, \quad \forall i,$$

$$x_{i,j} \leq c_{i,j}, \quad \forall i, j,$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad \forall i, j.$$

Tarefa 4.1

Mostre que as equações acima representam de fato o problema do custo mínimo de fluxo em rede. Lembre-se de definir primeiramente quem são as variáveis de decisão $x_{i,j}$.

Interpretação

As restrições acima são chamadas de **conservação do fluxo**, ou **balanço nodal**, ou ainda **equações de Kirchhoff**, e indicam que o fluxo não pode nem ser criado nem destruído na rede. Especificamente:

- $\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}$ representa o **fluxo total saindo** do vértice v_i,
- $\sum_{k=1}^{m} x_{k,i}$ representa o **fluxo total entrando** no vértice v_i.

As equações de conservação pedem que o **fluxo total passando** por um vértice v_i, expresso como:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} - \sum_{k=1}^{n} x_{k,i},$$

seja igual a b_i. Em particular:

- Se $b_i < 0$, deve haver mais fluxo **chegando** no vértice v_i do que saindo. Como o problema que apresentamos existem restriçõees que estabelecem um limite superior de fluxo nas arestas, então este problema é chamado de capacitado.

Tarefa 4.2

Escreva e resolva o Problema do Custo Mínimo de Fluxo em Rede para o grafo abaixo e resolva-o.

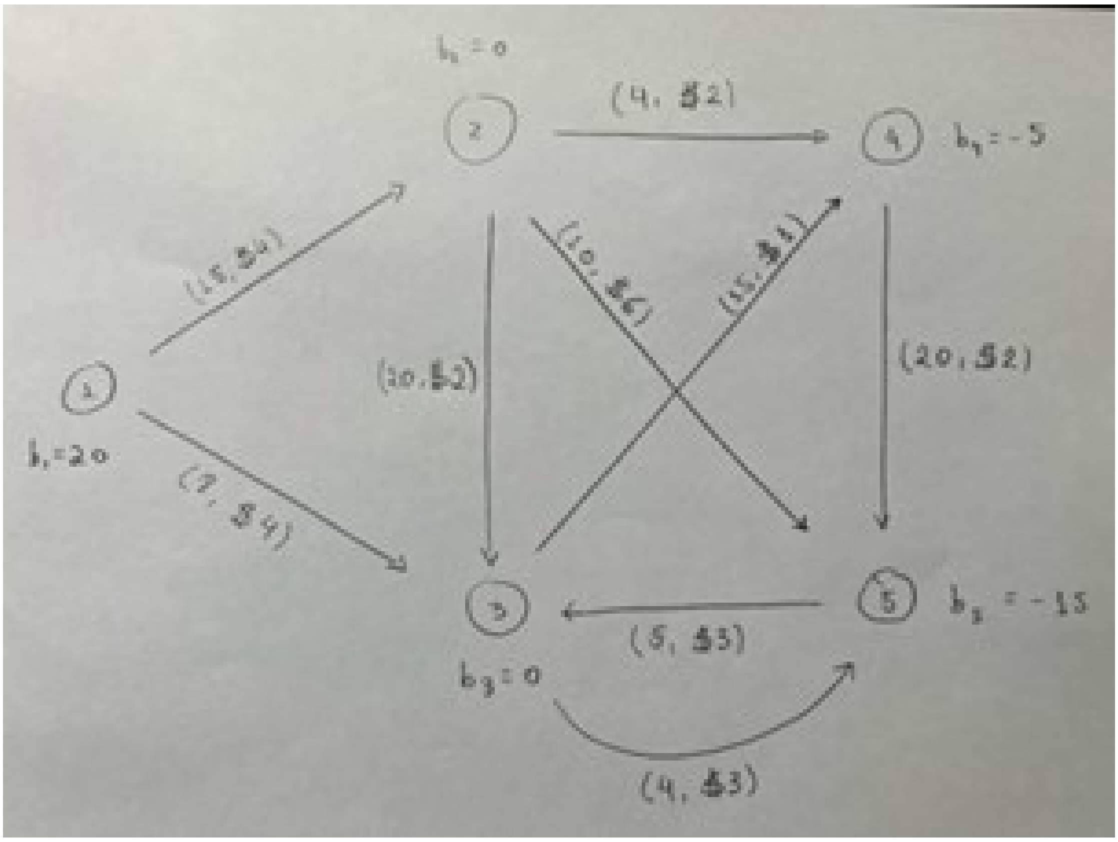

Figura 5: Grafo

- Disponibilidade/Demanda (b_i):

$$b = [20, 0, 0, -5, -15],$$

  onde:

  - $b_1 = 20$ é uma **fonte**,
  - $b_2 = 0$ e $b_3 = 0$ são **vértices intermediários**.
  - $b_4 = -5$ e $b_5 = -15$ são **ralos**,

- Capacidades das arestas (c_{ij}):

$$c_{ij} = \begin{cases} (1,2) : 15, & (1,3) : 8, \\ (2,3) : 20, & (2,4) : 4, \\ (2,5) : 10, & (3,4) : 15, \\ (3,5) : 4, & (4,5) : 20, \\ (5,3) : 5. & \end{cases}$$

- Custos das arestas (p_{ij}):

$$p_{ij} = \begin{cases} (1,2) : 4, & (1,3) : 4, \\ (2,3) : 2, & (2,4) : 2, \\ (2,5) : 6, & (3,4) : 1, \\ (3,5) : 3, & (4,5) : 2, \\ (5,3) : 3. & \end{cases}$$

As variáveis de decisão

x_{ij} : Quantidade de fluxo enviada do nó i para o nó j ao longo do arco (i,j).

Restrições

$$\begin{aligned} &\text{Nó 1:} && x_{12} + x_{13} = 20, \\ &\text{Nó 2:} && -x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 0, \\ &\text{Nó 3:} && -x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} - x_{53} = 0, \\ &\text{Nó 4:} && -x_{24} - x_{34} + x_{45} = -5, \\ &\text{Nó 5:} && -x_{25} - x_{35} - x_{45} + x_{53} = -15. \end{aligned}$$

Capacidades e Custos

$$0 \leq x_{12} \leq 15, \quad 0 \leq x_{13} \leq 8, \quad 0 \leq x_{23} \leq 20, \quad 0 \leq x_{24} \leq 4, \quad 0 \leq x_{25} \leq 10,$$

$$0 \leq x_{34} \leq 15, \quad 0 \leq x_{35} \leq 4, \quad 0 \leq x_{45} \leq 20, \quad 0 \leq x_{53} \leq 5.$$

Função Objetivo

$$\text{Minimizar} \quad 4x_{12} + 4x_{13} + 2x_{23} + 2x_{24} + 6x_{25} + x_{34} + 3x_{35} + 2x_{45} + 3x_{53}.$$

Restrições

$$
\begin{aligned}
x_{12} + x_{13} &= 20 \\
-x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 0 \\
-x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} - x_{53} &= 0 \\
-x_{24} - x_{34} + x_{45} &= -5 \\
-x_{25} - x_{35} - x_{45} + x_{53} &= -15 \\
0 \leq x_{12} &\leq 15 \\
0 \leq x_{13} &\leq 8 \\
0 \leq x_{23} &\leq 20 \\
0 \leq x_{24} &\leq 4 \\
0 \leq x_{25} &\leq 10 \\
0 \leq x_{34} &\leq 15 \\
0 \leq x_{35} &\leq 4 \\
0 \leq x_{45} &\leq 20 \\
0 \leq x_{53} &\leq 5
\end{aligned}
$$

Resultados do LINDO
Value

$x_{12} = 12$: Fluxo de 12 unidades de v_1 para v_2.
$x_{13} = 8$: Fluxo de 8 unidades de v_1 para v_3.
$x_{23} = 8$: Fluxo de 8 unidades de v_2 para v_3.
$x_{24} = 4$: Fluxo de 4 unidades de v_2 para v_4.
$x_{25} = 0$: Nenhum fluxo enviado de v_2 para v_5.
$x_{34} = 15$: Fluxo de 15 unidades de v_3 para v_4.
$x_{35} = 1$: Fluxo de 1 unidade de v_3 para v_5.
$x_{45} = 14$: Fluxo de 14 unidades de v_4 para v_5.
$x_{53} = 0$: Nenhum fluxo enviado de v_5 para v_3.

Reduced cost
Variável X_{25}:

- **Valor (*Value*):** 0.000000
  A variável não está sendo utilizada na solução ótima.
- **Custo reduzido (*Reduced Cost*):** 1.000000
  Isso significa que o coeficiente de X_{25} na função objetivo precisaria reduzir em uma unidade para que X_{25} fosse incluída na solução ótima.

Variável X_{53}:

- **Valor (*Value*):** 0.000000
  A variável também não está sendo utilizada na solução ótima.

- **Custo reduzido (*Reduced Cost*):** 6.000000
  O coeficiente de X_{53} na função objetivo precisaria precisaria reduzir em 6 unidades para que X_{53} passasse a fazer parte da solução ótima.

Slack or Surplus e Dual Price

- **Linha 1 (função objetivo): Slack or Surplus:** 150.0000
  Esse é o valor da função objetivo na solução ótima, representando o resultado final do problema de minimização.

- **Dual Price:** -1.000000
  O valor negativo indica que um aumento unitário no limite superior da função objetivo reduzirá o valor ótimo em uma unidade.

- **Linha 2 (Restrição 1): Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida, sem sobras nem faltas.

- **Dual Price:** -6.000000
  Um valor negativo indica que, se o limite da restrição fosse aumentado em uma unidade, o valor da função objetivo seria reduzido em 6 unidades.

- **Linha 3 (Restrição 2): Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida.

- **Dual Price:** -2.000000
  Um valor negativo indica que o aumento no limite da restrição reduz a função objetivo em 2 unidades por unidade aumentada.

- **Linha 4 (Restrição 3): Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida.

- **Dual Price:** 0.000000
  O valor zero indica que a alteração do limite da restrição não impacta diretamente o valor da função objetivo.

- **Linha 5 (Restrição 4): Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida.

- **Dual Price:** 1.000000
  Esse valor positivo sugere que um aumento unitário no limite da restrição incrementará o valor da função objetivo em 1 unidade.

- **Linha 6 (Restrição 5): Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida.
- **Dual Price:** 3.000000
  Um valor positivo indica que a função objetivo aumentaria em 3 unidades para cada unidade adicionada ao limite da restrição.
- **Linha 7 (Restrição 6): Slack or Surplus:** 3.000000
  Existe uma folga de 3 unidades, indicando que a restrição não está completamente utilizada.
- **Dual Price:** 0.000000
  Como a restrição tem folga, sua alteração não afeta o valor da função objetivo.
- **Linha 8 (Restrição 7): Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida.
- **Dual Price:** 2.000000
  Um aumento unitário no limite dessa restrição aumentará a função objetivo em 2 unidades.
- **Linha 9 (Restrição 8): Slack or Surplus:** 12.00000
  Existe uma folga de 12 unidades, indicando que a restrição não está completamente utilizada.
- **Dual Price:** 0.000000
  Alterações no limite dessa restrição não impactam o valor da função objetivo.
- **Linha 10 (Restrição 9): Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida.
- **Dual Price:** 1.000000
  Um aumento unitário no limite dessa restrição incrementará o valor da função objetivo em 1 unidade.
- **Linha 11 (Restrição 10): Slack or Surplus:** 10.00000
  Existe uma folga de 10 unidades, indicando que a restrição não está completamente utilizada.
- **Dual Price:** 0.000000
  Alterações no limite dessa restrição não impactam o valor da função objetivo.
- **Linha 12 (Restrição 11): Slack or Surplus:** 0.000000
  A restrição está sendo exatamente atendida.

- **Dual Price:** 0.000000
  Essa restrição não impacta diretamente o valor da função objetivo.
- **Linha 13 (Restrição 12): Slack or Surplus:** 3.000000
  Existe uma folga de 3 unidades, indicando que a restrição não está completamente utilizada.
- **Dual Price:** 0.000000
  Alterações nessa restrição não impactam a função objetivo.
- **Linha 14 (Restrição 13): Slack or Surplus:** 6.000000
  Existe uma folga de 6 unidades, indicando que a restrição não está completamente utilizada.
- **Dual Price:** 0.000000
  Essa restrição não afeta a função objetivo.
- **Linha 15 (Restrição 14): Slack or Surplus:** 5.000000
  Existe uma folga de 5 unidades, indicando que a restrição não está completamente utilizada.
- **Dual Price:** 0.000000
  Alterações nessa restrição não impactam a função objetivo.

Referências

- CORREIA, Diogo. *Resumos LEIC-A: Norma. Topologia em* $\mathbb{R}^n$. Disponível em: https://resumos.leic.pt/cdi-ii/norma-topologia/. Acesso em: 16 nov. 2024.

- SILVA, Luiz Paulo Moreira. *Norma ou módulo de um vetor. Mundo Educação.* Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/norma-ou-modulo-um-vetor.htm. Acesso em: 16 nov. 2024.