

PARÁMETROS OFICIALES DE TRANSFORMACIÓN PARA MIGRAR A MAGNA-SIRGAS LA INFORMACIÓN EXISTENTE EN DATUM BOGOTÁ

El cambio de las coordenadas de un mismo punto referido a datum diferentes, se obtiene a través de la transformación de coordenadas, la cual puede hacerse utilizando coordenadas cartesianas o geográficas en dos o en tres dimensiones. Para el efecto, se derivan, empíricamente, los parámetros de transformación a partir de puntos comunes a los dos datum de interés. Si bien existen diferentes métodos para el cálculo y aplicación de parámetros de transformación, la metodología seleccionada por el IGAC se ha basado en los siguientes criterios:

- La transformación de coordenadas entre **MAGNA-SIRGAS** y Datum BOGOTÁ debe considerar la variación generada por las diferencias geométricas y de ubicación entre los elipsoides de referencia (GRS80 y el Internacional) y las causadas por las deformaciones implícitas en las redes clásicas.
- El modelo de transformación debe ser ampliamente usado, de modo que esté incluido en las aplicaciones comerciales que administran información georreferenciada (paquetes SIG, cartografía digital, etc.).
- La metodología de aplicación debe ser amigable, eficiente en la transformación de conjuntos grandes de datos y estándar para que todos los usuarios nacionales de la información espacial obtengan resultados coherentes entre sí.

Bajo estas consideraciones, la migración de la información georreferenciada en Datum BOGOTÁ a **MAGNA-SIRGAS** se fundamenta en el modelo de transformación tridimensional de similitud, incluyendo un refinamiento a través de una transformación bidimensional afín.

Dado que la precisión de los parámetros de transformación depende del área y del número de puntos disponibles en los dos sistemas de referencia, y teniendo presente que, debido a las distorsiones de la red geodésica clásica ARENA, los valores de dichos parámetros pueden variar significativamente de un lugar a otro, los parámetros para el modelo de transformación tridimensional de similitud se han determinado para ocho regiones diferentes en el país y son aplicables para la migración de información cartográfica a escalas pequeñas (1 : 3 000 000 ... 1 : 10 000). La transformación afín se utiliza para escalas cartográficas grandes (1 : 500 ... 1 : 5 000) una vez se ha aplicado la transformación tridimensional.

La adopción de **MAGNA-SIRGAS** como datum para Colombia estandarizará la producción de información espacial oficial referida a este sistema. No obstante, es posible que prevalezcan usuarios del sector privado que prefieran continuar con su información geográfica asociada al Datum BOGOTÁ. En estos casos, sería conveniente que ellos aplicaran los parámetros de transformación oficiales del IGAC para llevar, al datum antiguo, la información generada sobre el nuevo sistema.



1. Modelo de transformación tridimensional de similitud

Éste cuantifica el cambio de las coordenadas causado por las diferencias de posición y tamaño (componente sistemática) de los elipsoides asociados al sistema **MAGNA-SIRGAS** y al Datum BOGOTÁ. Se basa en coordenadas cartesianas tridimensionales considerando tres parámetros de traslación $[\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]^T$, tres de rotación $[R_x, R_y, R_z]^T$ y un factor de escala (λ) (figura 1). Dado que el factor de escala es el mismo en todas las direcciones, se denomina transformación de similitud o lineal conforme, es decir, los ángulos (formas) se mantienen después de la transformación, pero las extensiones y posiciones de las líneas cambian. Este método originalmente se conoce como transformación de similitud de Helmert, pero dadas algunas variaciones en su determinación también se habla de los modelos Molodensky-Badekas y Bursa-Wolf. La formulación matemática correspondiente se presenta en la ecuación 1.

$$\begin{bmatrix} X_{MAGNA} \\ Y_{MAGNA} \\ Z_{MAGNA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1 + \lambda) \begin{bmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{BOGOTA} \\ Y_{BOGOTA} \\ Z_{BOGOTA} \end{bmatrix} \quad (1)$$

siendo:

$[X_{MAGNA}, Y_{MAGNA}, Z_{MAGNA}]^T$: Coordenadas geocéntricas del punto de cálculo referidas (transformadas) a **MAGNA-SIRGAS**

$[X_{BOGOTA}, Y_{BOGOTA}, Z_{BOGOTA}]^T$: Coordenadas geocéntricas del punto de cálculo referidas al Datum BOGOTÁ

$[\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]^T$: Parámetros de traslación

$[R_x, R_y, R_z]^T$: Parámetros de rotación

λ : Factor de escala

La altura elipsoidal [h] utilizada para la conversión de coordenadas geográficas $[\varphi, \lambda]$ a coordenadas geocéntricas $[X, Y, Z]$ sobre el Datum BOGOTÁ se obtiene utilizando el modelo geoidal GEOCOL y la relación matemática:

$$h = H + N \quad (2)$$

La utilización de la relación 2 es de muy baja precisión para la definición de alturas elipsoidales, ya que genera una incertidumbre de $\sim \pm 3$ m dada la inexactitud, en este mismo orden, tanto de N como de H. No obstante, ésta se prefiere a la sustitución de las alturas elipsoidales por la niveladas, dado que se introducirían errores de la magnitud de las ondulaciones geoidales en Colombia ($\sim -30 \dots \sim +30$ m).



Los parámetros de transformación para cada región en Colombia (figura 2) han sido calculados mediante compensación por mínimos cuadrados considerando los puntos comunes a los dos sistemas disponibles en cada zona. Los valores obtenidos se presentan en la tabla 1.

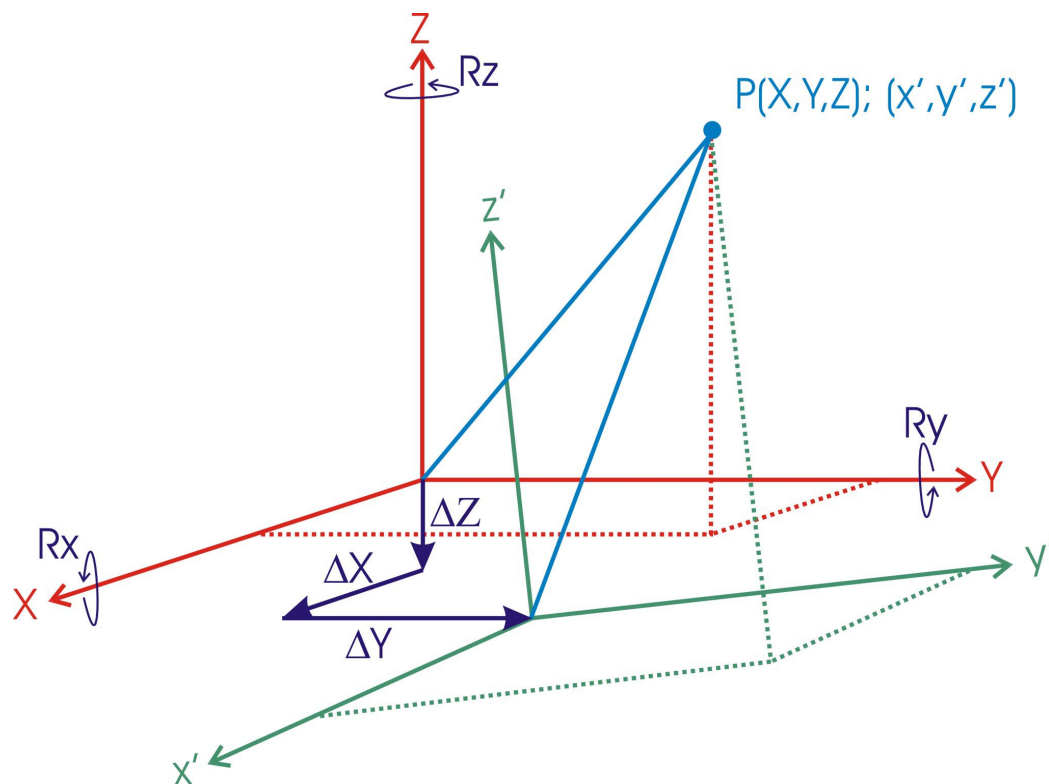


Figura 1 Transformación tridimensional de siete parámetros.

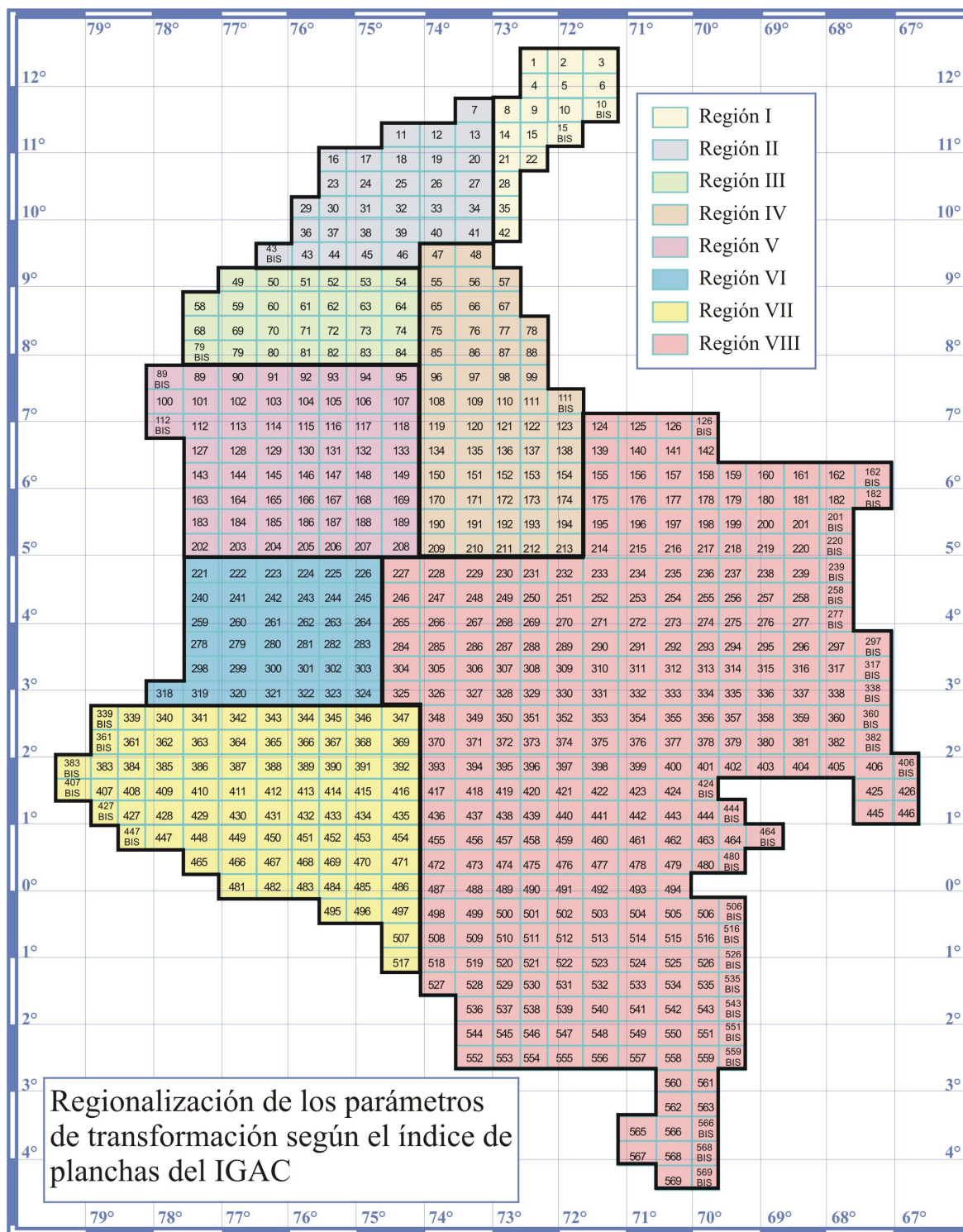


Figura 2 Regionalización de los parámetros de transformación en Colombia según el índice de planchas del IGAC

Tabla 1 Parámetros regionales de transformación, según el método de Helmert, para migrar información georreferencia en Datum BOGOTÁ al sistema **MAGNA-SIRGAS**.

Parámetro	Región			
	I $\varphi = 10,0 \dots 13,0 \text{ N}$ $\lambda = 73,0 \dots 71,0 \text{ W}$	II $\varphi = 9,4 \dots 11,6 \text{ N}$ $\lambda = 76,0 \dots 73,0 \text{ W}$	III $\varphi = 8,0 \dots 9,4 \text{ N}$ $\lambda = 77,6 \dots 74,4 \text{ W}$	IV $\varphi = 5,0 \dots 9,4 \text{ N}$ $\lambda = 74,4 \dots 72,0 \text{ W}$
ΔX [m]	-806,413	100,783	336,026	963,273
ΔY [m]	-263,500	187,382	348,565	486,386
ΔZ [m]	-622,671	-47,000	252,978	190,997
λ	-2,081 616 E-05	-1,356 561 E-05	-5,771 909 E-06	-1,389 914 E-05
R_x [rad]	6,018 583 E-05	-4,471 839 E-05	-8,358 813 E-05	-7,992 171 E-05
R_y [rad]	-1,450 001 E-05	1,175 093 E-05	-3,057 474 E-05	-8,090 696 E-06
R_z [rad]	-1,892 455 E-04	-4,027 967 E-05	7,573 031 E-06	1,051 699 E-04

Parámetro	Región			
	V $\varphi = 5,0 \dots 8,0 \text{ N}$ $\lambda = 78,0 \dots 74,4 \text{ W}$	VI $\varphi = 3,0 \dots 5,0 \text{ N}$ $\lambda = 78,0 \dots 74,4 \text{ W}$	VII $\varphi = 1,0 \text{ S} \dots 3,0 \text{ N}$ $\lambda = 79,0 \dots 74,0 \text{ W}$	VIII $\varphi = 4,5 \text{ S} \dots 3,0 \text{ N}$ $\lambda = 74,0 \dots 66,5 \text{ W}$ $\varphi = 3,0 \dots 5,0 \text{ N}$ $\lambda = 74,4 \dots 66,5 \text{ W}$ $\varphi = 5,0 \dots 7,3 \text{ N}$ $\lambda = 72,0 \dots 66,5 \text{ W}$
ΔX [m]	-90,290	-0,562	-305,356	221,899
ΔY [m]	247,559	244,299	222,004	274,136
ΔZ [m]	-21,989	-456,938	-30,023	-397,554
λ	2,181 658 E-06	3,746 560 E-06	6,325 747 E-06	-2,199 943 E-06
R_x [rad]	-4,216 369 E-05	3,329 153 E-05	-4,698 084 E-05	1,361 573 E-05
R_y [rad]	-2,030 416 E-05	-4,001 009 E-05	5,003 123 E-06	-2,174 431 E-06
R_z [rad]	-6,209 623 E-05	-4,507 206 E-05	-9,578 655 E-05	-1,362 410 E-05

2. Modelo Molodensky-Badekas

En redes geodésicas pequeñas en extensión con coordenadas geocéntricas, se presenta una correlación muy alta entre los parámetros de rotación y translación en el método de Helmert, por tal razón, se acostumbra a calcular los parámetros de transformación en función de las coordenadas del punto central del área. Esta estrategia se conoce como el método Molodensky-Badekas. Su formulación matemática corresponde con (Collier et al. 1998):



$$\begin{bmatrix} X_{MAGNA} \\ Y_{MAGNA} \\ Z_{MAGNA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1 + \lambda) \begin{bmatrix} 1 & Rz & -Ry \\ -Rz & 1 & Rx \\ Ry & -Rx & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{BOGOTA} - X_0 \\ Y_{BOGOTA} - Y_0 \\ Z_{BOGOTA} - Z_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

siendo:

$[X_{MAGNA}, Y_{MAGNA}, Z_{MAGNA}]^T$: Coordenadas geocéntricas del punto de cálculo referidas (transformadas) a **MAGNA-SIRGAS**

$[X_0, Y_0, Z_0]^T$: Coordenadas geocéntricas del punto central

$[X_{BOGOTA}, Y_{BOGOTA}, Z_{BOGOTA}]^T$: Coordenadas geocéntricas del punto de cálculo referidas al Datum BOGOTÁ

$[\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]^T$: Parámetros de translación

$[Rx, Ry, Rz]^T$: Parámetros de rotación

λ : Factor de escala

Los parámetros correspondientes a esta formulación fueron calculados con los mismos puntos que sirvieron para la determinación del método expuesto en 1. Los valores obtenidos se presentan en la tabla 2.

Tabla 2 Parámetros regionales de transformación, según el modelo Molodensky-Badekas, para migrar información georreferencia en Datum BOGOTÁ al sistema **MAGNA-SIRGAS**.

Parámetro	Región			
	I $\varphi = 10,0 \dots 13,0 \text{ N}$ $\lambda = 73,0 \dots 71,0 \text{ W}$	II $\varphi = 9,4 \dots 11,6 \text{ N}$ $\lambda = 76,0 \dots 73,0 \text{ W}$	III $\varphi = 8,0 \dots 9,4 \text{ N}$ $\lambda = 77,6 \dots 74,4 \text{ W}$	IV $\varphi = 5,0 \dots 9,4 \text{ N}$ $\lambda = 74,4 \dots 72,0 \text{ W}$
ΔX [m]	300,449	308,833	311,118	306,666
ΔY [m]	293,757	282,519	289,167	315,063
ΔZ [m]	-317,306	-314,571	-310,641	-318,837
λ	-2,081 615 E-05	-1,356 561 E-05	-5,771 882 E-06	-1,389 912 E-05
Rx [rad]	6,018 581 E-05	-4,471 845 E-05	-8,358 815 E-05	-7,992 173 E-05
Ry [rad]	-1,450 002 E-05	1,175 087 E-05	-3,057 474 E-05	-8,090 698 E-06
Rz [rad]	-1,892 455 E-04	-4,027 981 E-05	7,573 043 E-06	1,051 699 E-04
X_0 [m]	1 891 881,173	1 625 036,590	1 555 622,801	1 845 222,398
Y_0 [m]	-5 961 263,267	-6 054 644,061	-6 105 353,313	-6 058 604,495
Z_0 [m]	1 248 403,057	1 172 969,151	991 255,656	769 132,398



Parámetro	Región			
	V $\varphi = 5,0 \dots 8,0 \text{ N}$ $\lambda = 78,0 \dots 74,4 \text{ W}$	VI $\varphi = 3,0 \dots 5,0 \text{ N}$ $\lambda = 78,0 \dots 74,4 \text{ W}$	VII $\varphi = 1,0 \text{ S} \dots 3,0 \text{ N}$ $\lambda = 79,0 \dots 74,0 \text{ W}$	VIII $\varphi = 4,5 \text{ S} \dots 3,0 \text{ N}$ $\lambda = 74,0 \dots 66,5 \text{ W}$ $\varphi = 3,0 \dots 5,0 \text{ N}$ $\lambda = 74,4 \dots 66,5 \text{ W}$ $\varphi = 5,0 \dots 7,3 \text{ N}$ $\lambda = 72,0 \dots 66,5 \text{ W}$
ΔX [m]	307,871	302,934	295,282	302,529
ΔY [m]	305,803	307,805	321,293	317,979
ΔZ [m]	-311,992	-312,121	-311,001	-319,080
λ	2,181 655 E-06	3,746 562 E-06	6,325 744 E-06	-2,199 976 E-06
R_x [rad]	-4,216 368 E-05	3,329 153 E-05	-4,698 084 E-05	1,361 566 E-05
R_y [rad]	-2,030 416 E-05	-4,001 009 E-05	5,003 127 E-06	-2,174 456 E-06
R_z [rad]	-6,209 624 E-05	-4,507 205 E-05	-9,578 653 E-05	-1,362 418 E-05
X_o [m]	1 594 396,206	1 558 280,49	1 564 000,62	1 738 580,767
Y_o [m]	-6 143 812,398	-6 167 355,092	-6 180 004,879	-6 120 500,388
Z_o [m]	648 855,829	491 954,2193	243 257,9554	491 473,3064

La diferencia entre las coordenadas geocéntricas transformadas por el método de Helmert o el de Molodensky-Badekas es del orden de milímetros. En el presente documento, se exponen ambos, dado que en los paquetes informáticos para la administración de datos espaciales se ofrece uno de las dos.

En general, los valores de translación están en el orden de la magnitud de las deflexiones de la vertical del punto datum (pilastra sur del Observatorio Astronómico de Bogotá); éstos son grandes ya que el elipsoide de referencia utilizado (Internacional de 1924) no es muy cercano al geoide, su radio ecuatorial excede, en 250 m, a aquel elipsoide que mejor se ajusta al tamaño del geoide (GRS80). Los ángulos de rotación reflejan la precisión de las observaciones astronómicas, dada sus magnitudes tan pequeñas podrían obviarse y asumirse paralelismo entre los ejes coordenados de los sistemas de referencia **MAGNA-SIRGAS** y Datum BOGOTÁ. Finalmente, el factor de escala en las secciones antiguas de la red alcanza 10^{-5} , mientras que para las partes más recientes su valor varía en torno a 10^{-6} , lo que refleja los avances técnicos en la medición de distancias.

3. Transformación bidimensional afín

Con el propósito de refinar la migración a **MAGNA-SIRGAS** de la información referida al Datum BOGOTÁ, una vez se ha aplicado el modelo de similitud (Helmert o Molodensky-Badekas), se adelanta una transformación afín de seis parámetros, calculada con



coordenadas planas (Gauss-Krüger o cartesianas). El modelo matemático correspondiente equivale a:

$$E = (k \cos \alpha) E' + (l \sin \beta) N' + c \quad (4a)$$

$$N = -(k \sin \alpha) E' + (l \cos \beta) N' + f \quad (4b)$$

siendo:

[N', E']: Coordenadas planas (Gauss-Krüger o cartesianas) calculadas con la latitud (φ) y longitud (λ) transformadas al utilizar los parámetros Molodensky-Badekas

[N, E]: Coordenadas planas (Gauss-Krüger o cartesianas) refinadas.

Las ecuaciones (4a) y (4b) pueden escribirse como:

$$E = a E' + b N' + c \quad (5a)$$

$$N = -d E' + e N' + f \quad (5b)$$

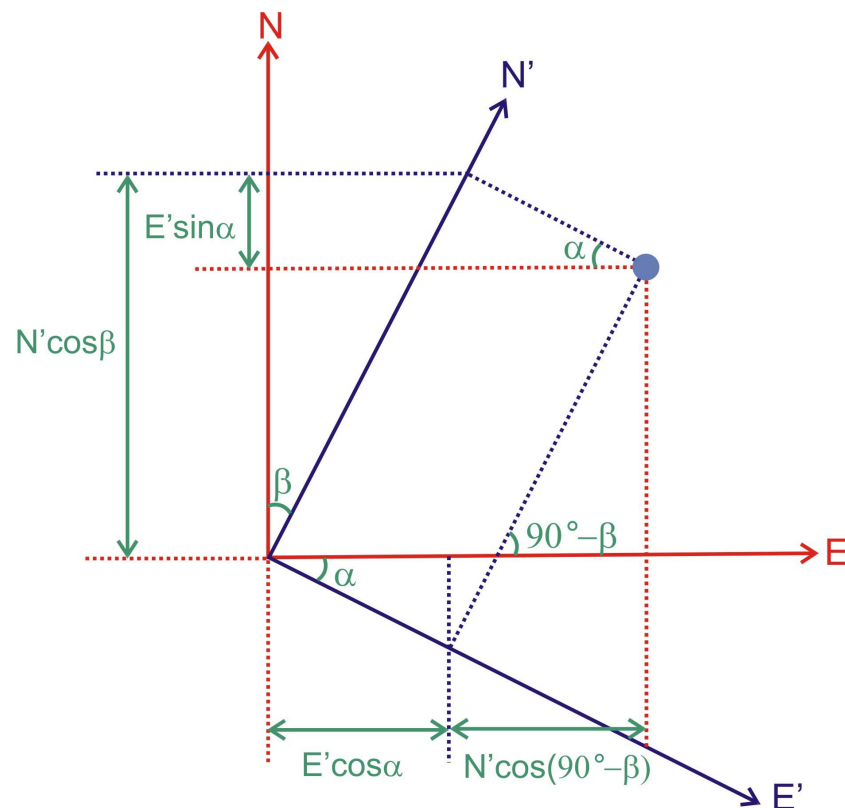


Figura 3 Transformación afín de seis parámetros

De esta forma, los parámetros calculados (a, b, c, d, e y f) permiten conocer las traslaciones, rotaciones y cambios en el factor de escala sobre los ejes N, E (figura 3), mediante:

$$\begin{aligned} k &= (a^2 + d^2)^{1/2} & (5a) & \alpha = \arctan(d/a) & (6c) \\ l &= (b^2 + e^2)^{1/2} & (5b) & \beta = \arctan(b/e) & (6d) \end{aligned}$$

La transformación afín se calcula para áreas pequeñas, como por ejemplo ciudades o municipios; por tal razón, existen tantos conjuntos de parámetros como zonas individuales de análisis.

4. Transformación bidimensional a partir de coordenadas elipsoidales

En caso dado de que el conjunto de datos que se desea transformar no cuente con la componente vertical (altura elipsoidal o sobre el nivel medio del mar), no será posible determinar las coordenadas rectangulares tridimensionales y las formulaciones de Helmert o Molodensky-Badekas no serán aplicable. Como alternativa, se presenta una transformación bidimensional a partir de coordenadas elipsoidales, la cual ofrece precisiones similares y, al igual que éstas, deberá ser refinada mediante la transformación bidimensional afín. La formulación matemática corresponde con (Torge 2001):

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= (\cos\varphi_F \cos\varphi + \sin\varphi_F \sin\varphi \cos(\lambda - \lambda_F)) \delta\varphi_F \\ &\quad - \sin\varphi \sin(\lambda - \lambda_F) \cos\varphi_F \delta\lambda_F + \\ &\quad (\sin\varphi_F \cos\varphi - \cos\varphi_F \sin\varphi \cos(\lambda - \lambda_F)) \\ &\quad \times \left(\frac{dh_F}{a} + \frac{da}{a} + \sin^2\varphi_F df \right) + 2 \cos\varphi (\sin\varphi - \sin\varphi_F) df \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \sin\varphi_F \sin(\lambda - \lambda_1) \frac{\delta\varphi_F}{\cos\varphi} \\ &\quad + \cos(\lambda - \lambda_F) \cos\varphi_F \frac{\delta\lambda_F}{\cos\varphi} \\ &\quad - \cos\varphi_F \sin(\lambda - \lambda_F) \left(\frac{dh_F}{a} + \frac{da}{a} + \sin^2\varphi_F df \right) \left(\frac{1}{\cos\varphi} \right) \end{aligned} \quad (7b)$$

siendo:

$\delta\varphi_F$, $\delta\lambda_F$: Parámetros de transformación del datum BOGOTÁ a **MAGNA-SIRGAS** (tabla 3). Estos valores han sido calculados por el IGAC utilizando los mismos puntos con los que se han estimado los parámetros del modelo Molodensky-Badekas.



$\delta\phi$, $\delta\lambda$: Cambios en latitud y longitud del punto de cálculo al ser transformado del Datum BOGOTÁ a **MAGNA-SIRGAS**.

ϕ_F , λ_F : Coordenadas del punto datum (Observatorio Astronómico de Bogotá) en Datum BOGOTÁ.

ϕ , λ : Coordenadas en Datum BOGOTÁ del punto que se desea transformar.

dh_F : Diferencia de las alturas elipsoidales del punto datum (Observatorio Astronómico de Bogotá) sobre MAGNA SIRGAS y el Datum BOGOTÁ. Dado que estas alturas se asumen idénticas, $dh_F = 0$.

da : Diferencia entre el semieje mayor del elipsoide asociado a **MAGNA-SIRGAS** (GRS80), menos el del elipsoide asociado al Datum BOGOTÁ (Internacional).

df : Diferencia entre el aplanamiento del elipsoide asociado a **MAGNA-SIRGAS** (GRS80), menos el del elipsoide asociado al Datum BOGOTÁ.

a : Semieje mayor del elipsoide del datum geocéntrico, es decir **MAGNA-SIRGAS** (GRS80)

Las coordenadas del punto de cálculo en **MAGNA-SIRGAS** (ϕ' , λ') están dadas por:

$$\phi' = \phi + \delta\phi \quad ; \quad \lambda' = \lambda + \delta\lambda \quad (8)$$

*Tabla 3 Parámetros regionales de transformación, utilizando coordenadas elipsoidales, para migrar información georreferencia en Datum BOGOTÁ al sistema **MAGNA-SIRGAS**.*

Zona	Cobertura		Parámetros de transformación de Datum BOGOTÁ a MAGNA-SIRGAS	
	ϕ	λ	$\delta\phi_F$ ["]	$\delta\lambda_F$ ["]
I	10,0 ... 13,0 N	73,0 ... 71,0 W	-9,866	12,405
II	9,4 ... 11,6 N	76,0 ... 73,0 W	-9,879	12,190
III	8,0 ... 9,4 N	77,6 ... 74,4 W	-9,838	12,199
IV	5,0 ... 9,4 N	74,4 ... 72,0 W	-10,085	12,561
V	5,0 ... 8,0 N	78,0 ... 74,4 W	-9,946	12,159
VI	3,0 ... 5,0 N	78,0 ... 74,4 W	-10,023	11,969
VII	1,0 S ... 3,0 N	79,0 ... 74,0 W	-10,038	11,731
VIII	4,5 S ... 3,0 N 3,0 ... 5,0 N 5,0 ... 7,3 N	74,0 ... 66,5 W 74,4 ... 66,5 W 72,0 ... 66,5 W	-10,249	12,272



PARÁMETROS OFICIALES DE TRANSFORMACIÓN PARA MIGRAR A MAGNA-SIRGAS LA INFORMACIÓN EXISTENTE EN DATUM BOGOTÁ

Este trabajo fue realizado en la División de Geodesia de la Subdirección de Geografía y Cartografía del Instituto Geográfico Agustín Codazzi por la ingeniera Laura Sánchez Rodríguez (lsanchez@igac.gov.co) en julio de 2004



© Instituto Geográfico Agustín Codazzi – 2004
Prohibida la reproducción total o parcial sin la autorización previa del
Instituto Geográfico Agustín Codazzi.

