Teoria probabilităţilor şi statistică matematică

Bărbăcioru Iuliana Carmen

CURSUL 8

Cuprins

Capitolul 1

Vectori aleatori bidimensionali

1.1 Variabile aleatoare vectoriale

Până acum am vorbit despre variabile aleatoare ale căror valori posibile sunt numere. Aceste variabile aleatoare se numesc unidimensionale. Există însă şi variabile aleatoare ale căror valori posibile sunt sisteme de câte două, trei,..., n numere. Aceste variabile aleatoare se numesc bi-dimensionale, tri-dimensionale,..., n-dimensionale.

Vom nota cu (X, Y) un vector (variabilă) bidimensional.

Dacă (X, Y) este un vector aleator, atunci componentele sale X şi Y sunt variabile aleatoare unidimensionale şi se numesc **variabile aleatoare marginale**.

Definiţia 1.1.1 *Spunem că vectorul aleator (X, Y) este:*

1. **discret,** *dacă variabilele aleatoare componente sunt discrete;*

2. **continuu,** *dacă variabilele aleatoare componente sunt continue.*

1.2 Repartiţia unui vector aleator bidimensional discret

Asemeni repartiţiei variabilelor aleatoare unidimensionale discrete, prin repartiţie a unui vector aleator bidimensional discret vom înţelege enumerearea valorilor posibile ale vectorului, adică enumerarea perechilor de numere reale (x_i, y_j), $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, şi a probabilităţilor lor corespunzătoare π_{ij}.

Repartiţia unui vector aleator bidimensional discret se scrie sub forma unui tablou cu dublă intrare:

X \ Y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m	**p**
x_1	π_{11}	π_{12}	...	π_{1j}	...	π_{1m}	p_1
x_2	π_{21}	π_{22}	...	π_{2j}	...	π_{2m}	p_2
...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	π_{j1}	π_{j2}	...	π_{ij}	...	π_{im}	p_i
...	...	...	...	...	...	...	...
x_n	π_{n1}	π_{n2}	...	π_{nj}	...	π_{nm}	p_n
q	q_1	q_2	...	q_j	...	q_m	1

Pe coloana lui X sunt trecute toate valorile posibile ale lui X: $x_1, x_2...x_n$, iar pe linia lui Y sunt trecute toate valorile posibile ale lui Y: $y_1, y_2, ..., y_m$. Pe coloana lui **p** sunt trecute toate probabilităţile corespunzătoare valorilor posibile ale lui X: $p_1, p_2...p_n$, iar pe linia lui Y sunt trecute toate probabilităţile corespunzătoare valorilor posibile ale lui Y: $q_1, q_2, ..., q_m$.La intersecţia liniei valorii i a lui $X : x_i$, cu coloana j a lui $Y : y_j$ este trecută probabilitatea π_{ij} ca vectorul aleator să ia valoarea (x_i, y_j).

Deoarece evenimentele $(X = x_i, Y = y_j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, formează un sistem complet de evenimente, suma tuturor probabilităţilor din căsuţele tabloului este egală cu 1:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} = 1 \tag{1.1}$$

Definiţia 1.2.1 *Dacă $Z = (X, Y)$ este un vector aleator discret atunci:*

1. *numerele*

$$\pi_{ij} = P(Z = z_{ij}) = P(X = x_i, Y = y_j),\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

reprezintă ***repartiţia probabilistă comună*** *a variabilelor aleatoare X şi Y sau repartiţia probabilistă a vectorului aleator (X, Y);*

2. *numerele*

$$p_i = P(X = x_i),\ q_j = P(Y = y_j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

*reprezintă **repartiţiile probabiliste individuale** ale componentelor vectorului aleator (X, Y) sau repartiţiile probabiliste marginale ale vectorului aleator (X, Y).*

Dacă se cunoaşte repartiţia comună atunci se poate determina în mod unic fiecare repartiţie marginală.

Într-adevăr, evenimentele:

$$(X = x_1, Y = y_1), (X = x_1, Y = y_2), ..., (X = x_1, Y = y_m) \tag{1.2}$$

sunt incompatibile şi deci probabilitatea π_{1j} ca X să ia valoarea x_1 este egală cu:

$$\pi_{1j} = \pi_{11} + \pi_{12} + ...\pi_{1m} \tag{1.3}$$

Deci probababilitatea ca X să ia valoarea x_1 este egală cu suma probabilităţilor de pe linia lui x_1. Analog, pentru a găsi probabilitatea π_{i1}, ca Y să ia valoarea y_j trebuie să facem suma probabilităţilor de pe coloana lui y_j.

Observaţia 1.2.2 *Dacă se dau repartiţiile marginale atunci determinarea repartiţiei comune este o problemă nedeterminată.*

Exemplul 1.2.3 *Fie $Z = (X, Y)$ un vector aleator discret a cărui repartiţie probabilistă este dată în tabelul de mai jos. Calculaţi repartiţiile componentelor X şi Y.*

$X \setminus Y$	-1	0	1	2
1	1/12	1/24	1/48	1/48
2	1/24	1/6	1/24	1/12
3	1/8	1/8	1/8	1/8

Soluţie: Deducem imediat că:

$$\begin{aligned}
\pi_{1j} &= 1/12 + 1/24 + 1/48 + 1/48 = 8/48 \\
\pi_{2j} &= 1/24 + 1/6 + 1/24 + 1/12 = 8/24 \\
\pi_{3j} &= 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 4/8
\end{aligned}$$

Deci X va avea repartiţia:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8/48 & 8/24 & 4/8 \end{pmatrix}$$

Analog,

$$\begin{aligned}
\pi_{i1} &= 1/12 + 1/24 + 1/8 = 6/24 \\
\pi_{i2} &= 1/24 + 1/6 + 1/8 = 8/24 \\
\pi_{i3} &= 1/48 + 1/24 + 1/8 = 9/48 \\
\pi_{i4} &= 1/48 + 1/12 + 1/8 = 11/48
\end{aligned}$$

Deci Y va avea repartiţia:

$$Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 6/24 & 8/24 & 9/48 & 11/48 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

1.3 Funcţia de repartiţie a unui vector aleator bidimensional

Să considerăm vectorul aleator bidimensional (discret sau continuu) $Z = (X, Y)$.

Funcţia de repartiţie a vectorul aleator bidimensional $Z = (X, Y)$ are forma:

$$F(z) = F(x, y) = P(Z < z) = P(X < x, Y < y) \tag{1.4}$$

După cum se observă, $F(x, y)$ variază după cum x şi y variază deci $F(x, y)$ este funcţie de x şi y.

Geometric, egalitatea (1.4) poate fi interpretată astfel:

$F(x, y)$ reprezintă probabilitatea ca punctul de coordonate (X, Y) să se găsească în domeniul plan haşurat din figura de mai jos:

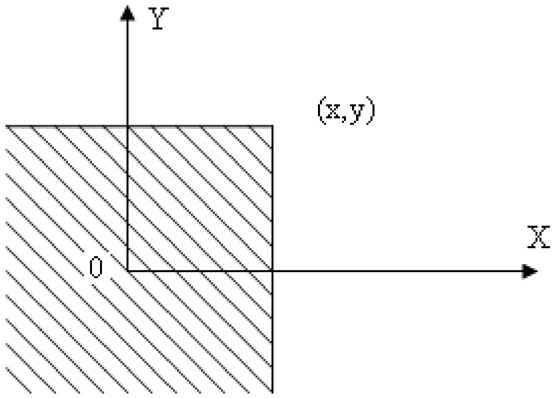

Figura 8.1

Ca şi în cazul unidimensional ($n = 1$), funcţia de repartiţie a unui vector aleator bidimensional are următoarele proprietăţi:

Propoziţia 1.3.1 *Valorile funcţiei de repartiţie $F(x, y)$ sunt cuprinse în intervalul* $[0, 1]$

$$0 \leq F(x, y) \leq 1 \tag{1.5}$$

Propoziţia 1.3.2 *Funcţia de repartiţie $F(x, y)$ este nedescrescătoare în raport cu fiecare argument:*

$$F(x_1, y) \leq F(x_2, y) \text{ pentru orice } x_1 < x_2 \tag{1.6}$$

$$F(x, y_1) \leq F(x, y_2) \text{ pentru orice } y_1 < y_2 \tag{1.7}$$

Propoziţia 1.3.3 *Au loc:*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0 \tag{1.8}$$

$$\lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0 \tag{1.9}$$

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0 \tag{1.10}$$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x, y) = 1 \tag{1.11}$$

Propoziţia 1.3.4 *Funcţia de repartiţie a variabilei X este egală cu:*

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) \tag{1.12}$$

Funcţia de repartiţie a variabilei Y este egală cu:

$$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y) \tag{1.13}$$

Observaţia 1.3.5 *Funcţiile de repartiţie $F_X(x)$ şi $F_Y(y)$ se numesc **funcţii de repartiţie marginale** (sau individuale) ale vectorului aleator Z.*

Se poate arăta că:

$$\begin{aligned}
P(x_1 &< X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y) \\
P(X &< x, y_1 < Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1) \\
P(x_1 &< X < x_2, y_1 < Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)
\end{aligned}$$

1.4 Densitate de probabilitate bidimensională

Să considerăm vectorul aleator bidimensional continuu $Z = (X, Y)$.

Definiţia 1.4.1 *Se numeşte **densitate de probabilitate bidimensională** a doua derivată parţială mixtă (dacă există) a funcţiei de repartiţie $F(x, y)$*

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \tag{1.14}$$

Proprietăţile densitatăţii de probabilitate bidimensionale sunt analoage celor densitatăţii de probabilitate unidimensionale:

$$f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; \tag{1.15}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx dy = 1; \tag{1.16}$$

Dacă se cunoaşte densitatea de repartiţie $f(x, y)$ atunci se poate determina funcţia de repartiţie $F(x, y)$ cu ajutorul relaţiei:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du dv \tag{1.17}$$

Geometric, densitatea de repartiţie poate fi interpretată astfel: dacă Δx şi Δy sunt suficient de mici, atunci produsul $f(x,y)\,\Delta x \Delta y$ poate fi interpretat ca fiind aproximativ egal cu probabilitatea ca punctul de coordonate X şi Y să se găsească în dreptunghiul din figura de mai jos:

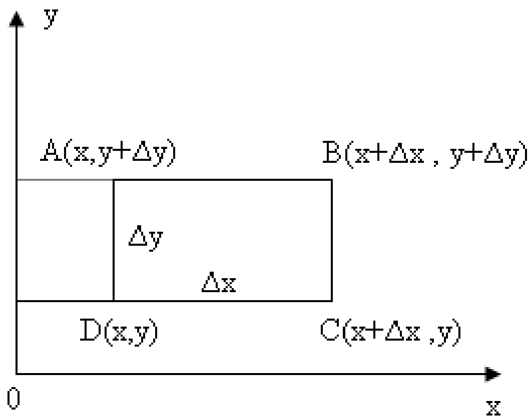

Figura 8.2

Teorema 1.4.2 *Probabilitatea ca punctul de coordonate (X,Y) să se găsească într-un domeniu plan D (fig 8.3) este egală cu integrala dublă a densităţii de probabilitate bidimensionale luate pe domeniul D:*

$$P\left[(X,Y)\in D\right]=\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy \tag{1.18}$$

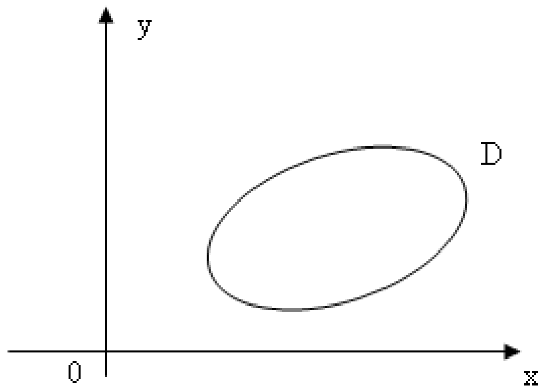

Figura 8.3

Propoziţia 1.4.3 *Dacă notăm cu $h(x)$ şi $g(y)$ densităţile de repartiţie ale variabilelor aleatoare X şi Y atunci au loc relaţiile:*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \tag{1.19}$$

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \tag{1.20}$$

Demonstraţie: Conform relaţiei (1.12) $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y)$ iar dacă ţinem cont de relaţia (1.17) avem mai departe $\lim_{y\to\infty} F(x,y) = \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,dudv$. Avem deci:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dudv \tag{1.21}$$

Derivând în raport cu x şi ţinând cont de faptul că am notat cu $h(x)$ *densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare X obţinem:*

$$(F_X(x))' = h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,dv \tag{1.22}$$

Analog obţinem şi cealaltă relaţie. ■

Exemplul 1.4.4 *Fie* $Z = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *o variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate:*

$$f_Z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1+xy}{4} & \text{dacă} \quad (x,y) \in (-1,1) \times (-1,1) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Să se determine densităţile şi funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare X, Y*;*
b) Să se determine funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare X^2, Y^2 *şi funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare* $W = \left(X^2, Y^2\right)^t$*;*

Soluţie: a)

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Z(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_{-1}^{1} \dfrac{1+xy}{4} dy & \text{dacă} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{dacă } |x| \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dacă} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{dacă } |x| \geq 1 \end{cases}$$

În mod analog obţinem că:

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_Z(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_{-1}^{1} \dfrac{1+xy}{4} dx & \text{dacă} \quad |y| < 1 \\ 0 & \text{dacă } |y| \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dacă} \quad |y| < 1 \\ 0 & \text{dacă } |y| \geq 1 \end{cases}$$

Funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare X respectiv Y vor fi:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{dacă } x \in (-1,1] \\ 1 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,\mathrm{d}v = \begin{cases} 0 & \text{dacă } y \leq -1 \\ \frac{y+1}{2} & \text{dacă } y \in (-1,1] \\ 1 & \text{dacă } y > 1 \end{cases}$$

b) $F_{X^2}(x) = P\left(X^2 < x\right) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq 0 \\ P\left(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}\right) & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq 0 \\ F_X\left(\sqrt{x}\right) - F_X\left(-\sqrt{x}\right) & \text{dacă } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{dacă} \quad x \in (0,1] \\ 1 & \text{dacă} \quad x > 1 \end{cases}$$

şi în mod analog

$$F_{Y^2}(y)=\begin{cases}0 & \text{dacă } y\le 0\\ \sqrt{y} & \text{dacă } y\in(0,1]\\ 1 & \text{dacă } y>1\end{cases}$$

Funcţia de repartiţie ale variabilei aleatoare $W=\left(X^2,Y^2\right)^t$ va fi:

$$F_W(x,y)=P\left(X^2<x,Y^2<y\right)=\begin{cases}0 & \text{dacă } x\le 0 \text{ sau } y\le 0\\ \sqrt{x} & \text{dacă } (x,y)\in(0,1]\times(1,\infty)\\ \sqrt{y} & \text{dacă } (x,y)\in(1,\infty)\times(0,1]\\ \sqrt{xy} & \text{dacă } (x,y)\in(0,1]\times(0,1]\\ 1 & \text{dacă } (x,y)\in(1,\infty)\times(1,\infty)\end{cases}$$

Într-adevăr, dacă $x\le 0$ sau $y\le 0$ atunci

$$F_W(x,y)=P(\emptyset)=0$$

dacă $(x,y)\in(0,1]\times(1,\infty)$ atunci ţinând seama că $P\left(Y^2<y\right)=1$ deducem că:

$$F_W(x,y)=P\left(X^2<x,Y^2<y\right)=P\left(X^2<x\right)=\sqrt{x}$$

dacă $(x,y)\in(1,\infty)\times(0,1]$ atunci ţinând seama că $P\left(X^2<x\right)=1$ deducem că:

$$F_W(x,y)=P\left(X^2<x,Y^2<y\right)=P\left(Y^2<y\right)=\sqrt{y}$$

dacă $(x,y)\in(0,1]\times(0,1]$ avem:

$$F_W(x,y)=P\left(-\sqrt{x}<X<\sqrt{x},-\sqrt{y}<Y<\sqrt{y}\right)=\int_{-\infty}^{\sqrt{x}}\int_{-\infty}^{\sqrt{y}}\frac{1+uv}{4}dudv=\sqrt{xy}$$

dacă $(x,y)\in(1,\infty)\times(1,\infty)$ avem:

$$F_W(x,y)=P\left(-\sqrt{x}<X<\sqrt{x},-\sqrt{y}<Y<\sqrt{y}\right)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1+uv}{4}dudv=1$$

■

Index