

# 《控制理论综合实验》

## 《实验九、十》

### 《典型非线性环节》

### 《非线性控制系统的自激振荡分析》

姓名：曾文正

班级：校交 1701

学号：U201715853

日期：2020 年 7 月 18 日

# 实验九 典型非线性环节

## 一、实验目的和原理

1. 了解非线性特性的测试方法;
2. 用相平面法观察和分析典型非线性环节的输出特性。

## 二、实验原理

典型非线性环节、相平面法。

## 三、实验步骤

利用 Matlab Simulink 分别测量数字继电特性、数字饱和特性、数字死区特性和数字间隙特性。需要记录的数据：

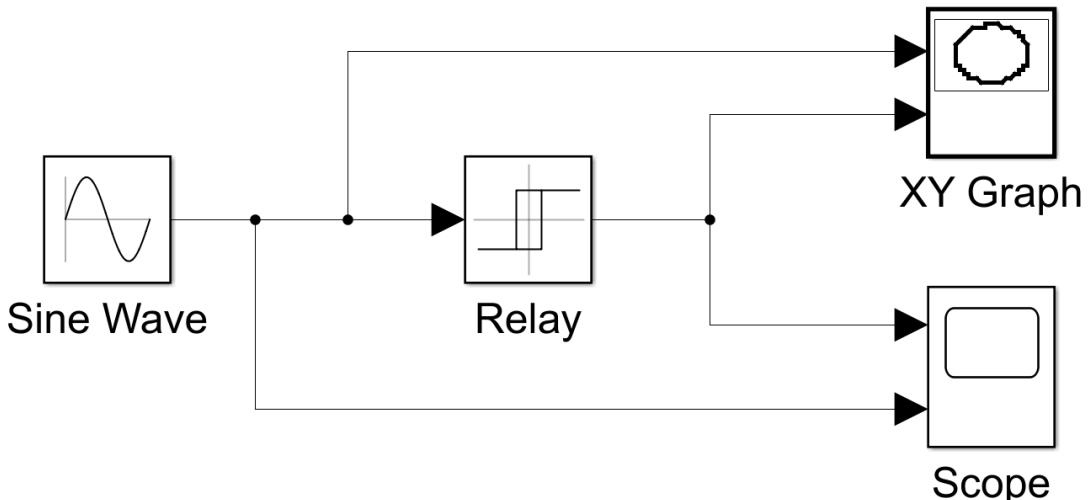
- a) 记录非线性环节的数字继电特性的相轨迹。
- b) 改变被测环节的各项非线性特性参数，调节输入电压，并记录不同的参数下的相轨迹。各非线性环节的参数调整可参考下表。具体参数可以根据个人来选择，不一定要和下表内相同。

继电特性	饱和特性		死区特性		间隙特性	
幅值	幅值	斜率	死区宽度	斜率	间隙宽度	斜率
3.7V	3.7V	2	2.4V	1	2.4V	1
2V	2V	1	1.5V	2	1.6V	2

## 四、实验内容和分析

### 1. 数字继电特性

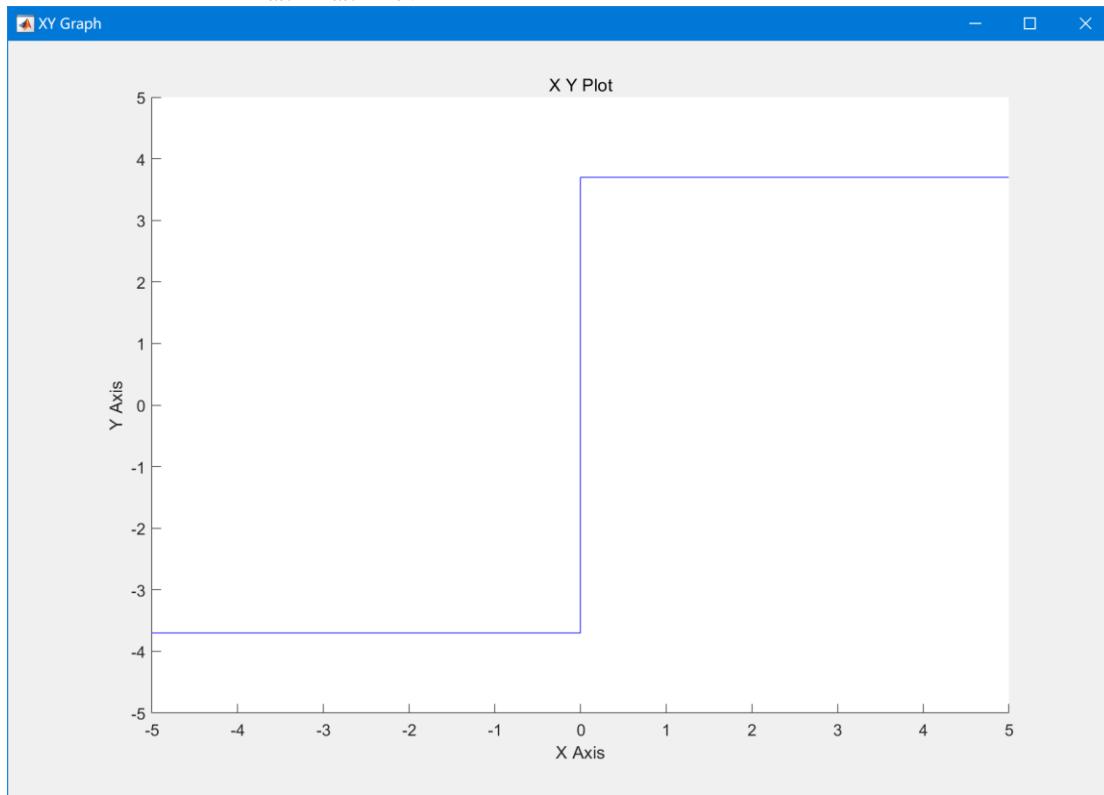
Simulink 仿真电路如下图所示：



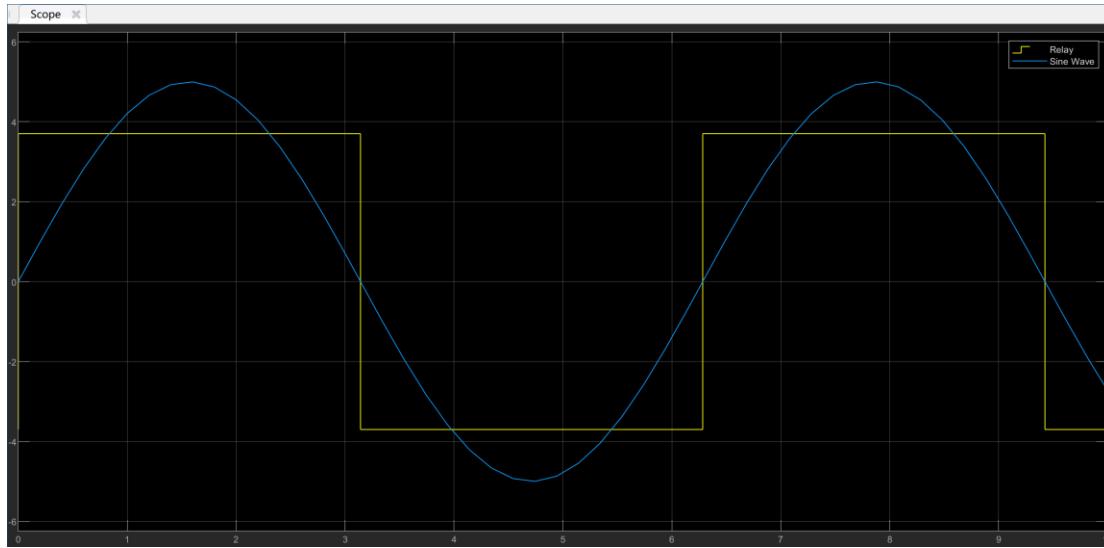
## 实验报告

(1) M=3.7V

相平面波形如下（输入输出特性）

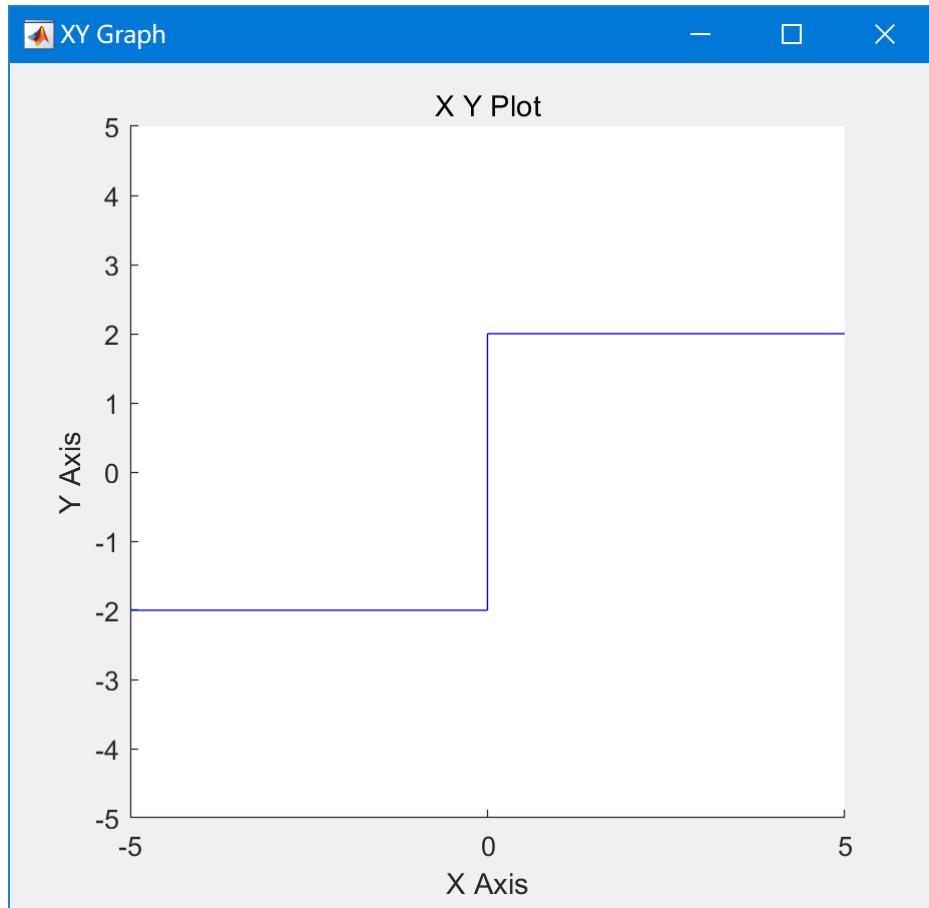


示波器输出如下：



(2) M=2V

相平面波形如下（输入输出特性）



示波器输出如下：

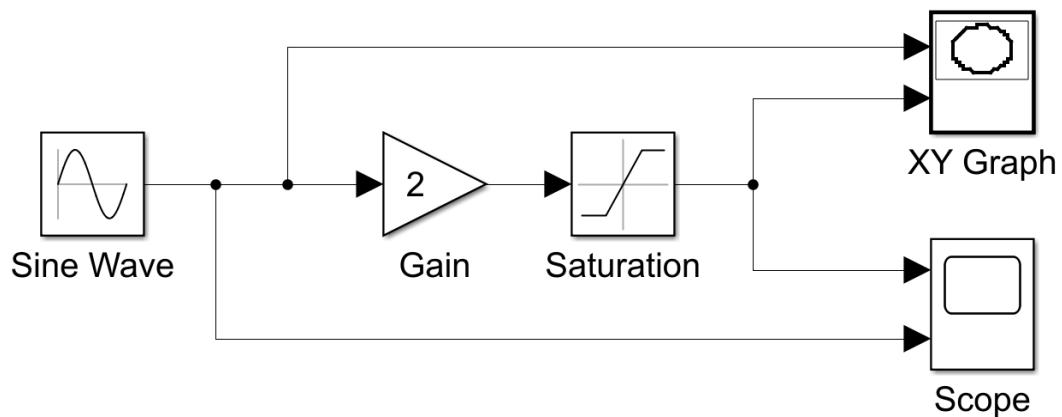


**总结：**继电特性：仿真所采用的为理想继电特性，当输入大于 0 时输出为 M，输入小于 0 时输出为 -M。

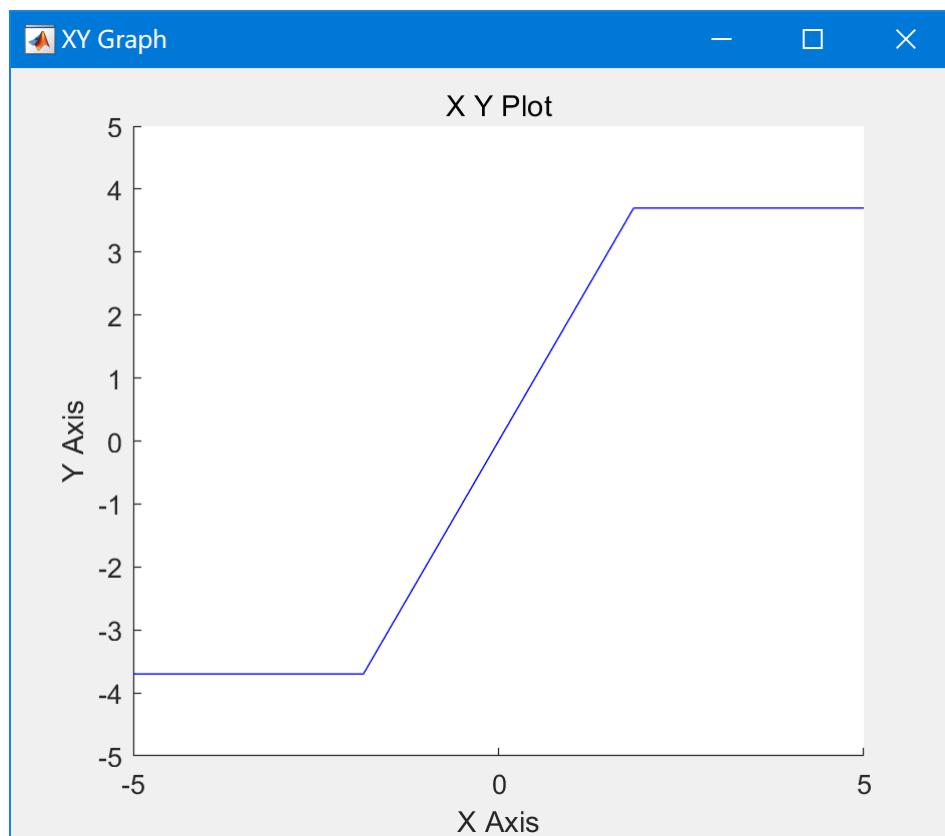
## 2. 数字饱和特性

(1)  $M=3.7, K=2$

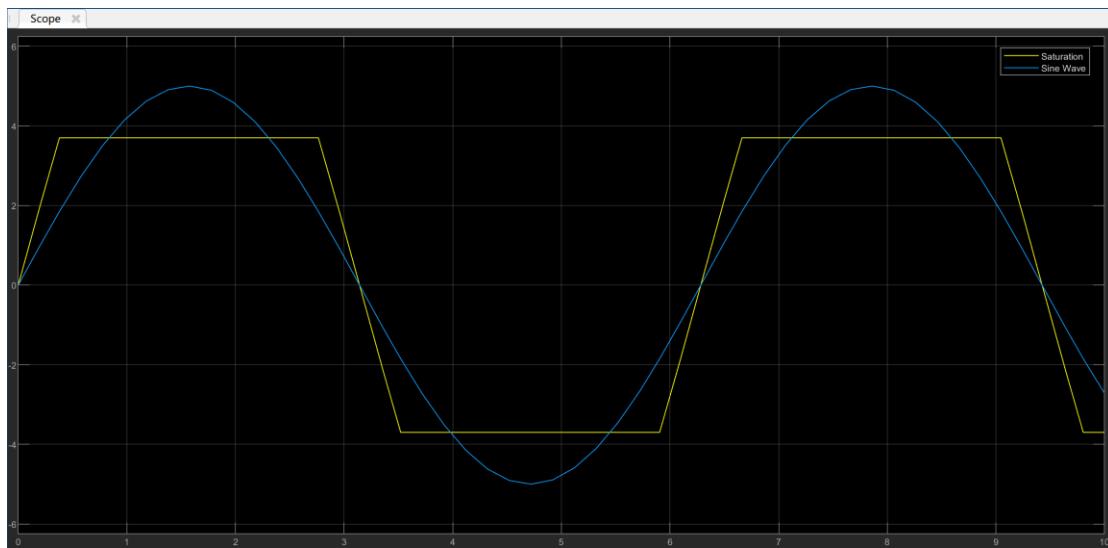
Simulink 仿真电路图如下图所示：



相平面波形如下（输入输出特性）

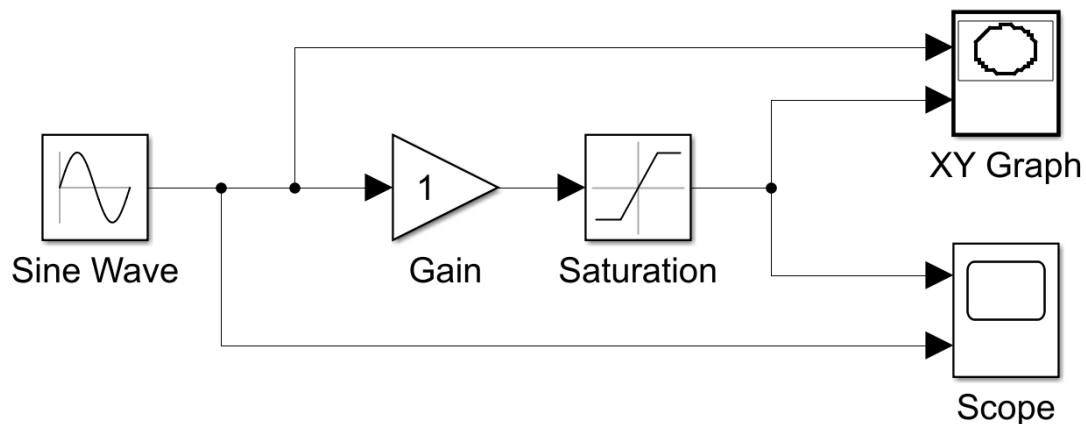


示波器输出如下：

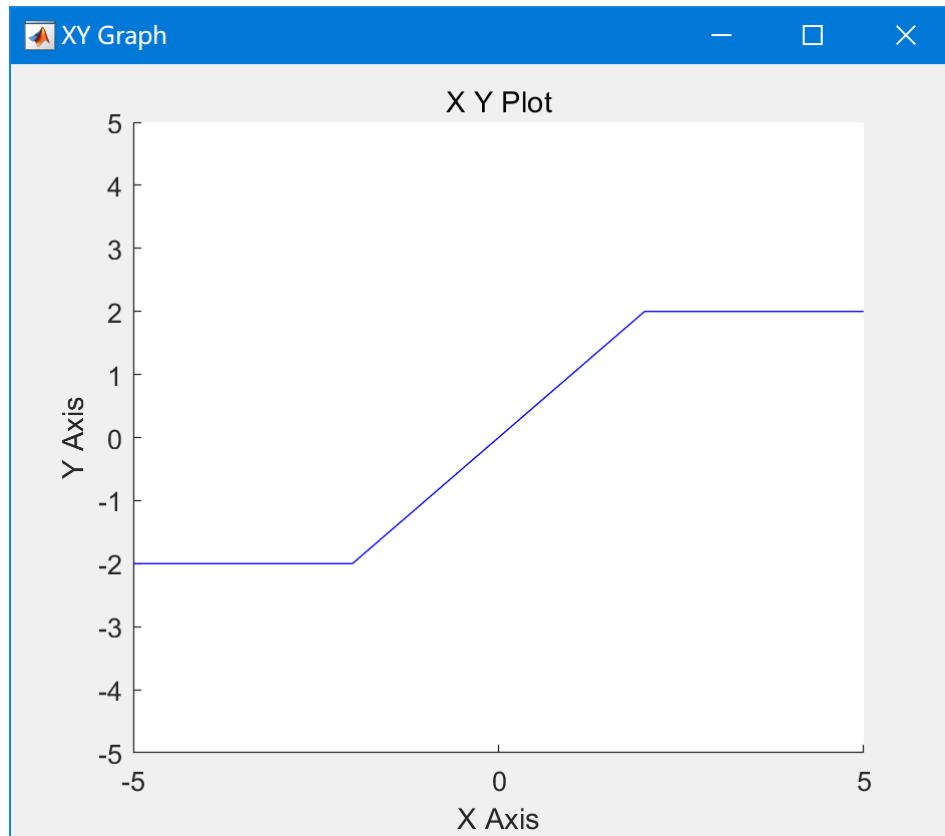


(2)  $M=2V$ ,  $K=1$

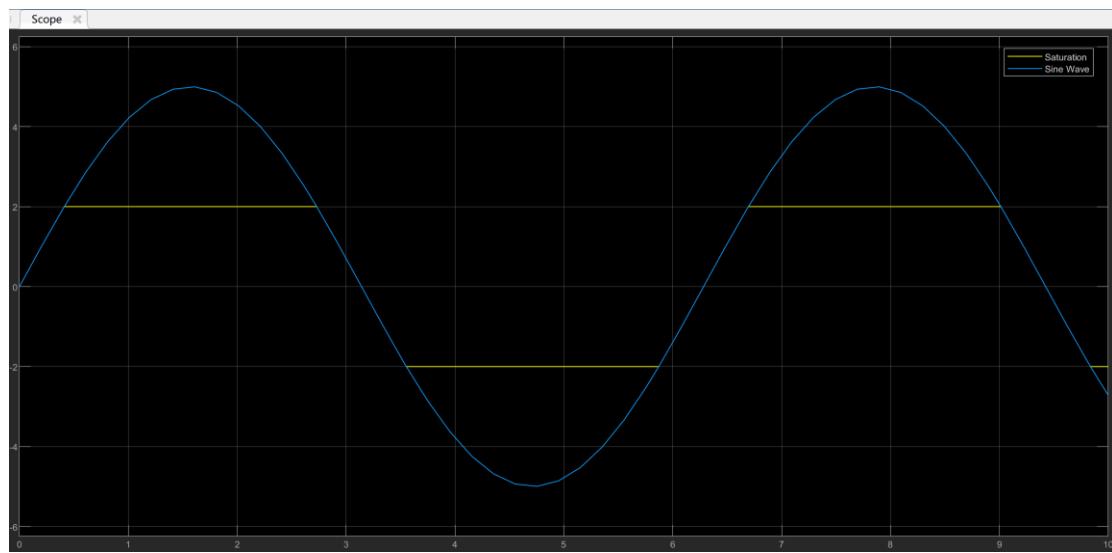
Simulink 仿真电路图如下图所示:



相平面波形如下（输入输出特性）



示波器输出如下：

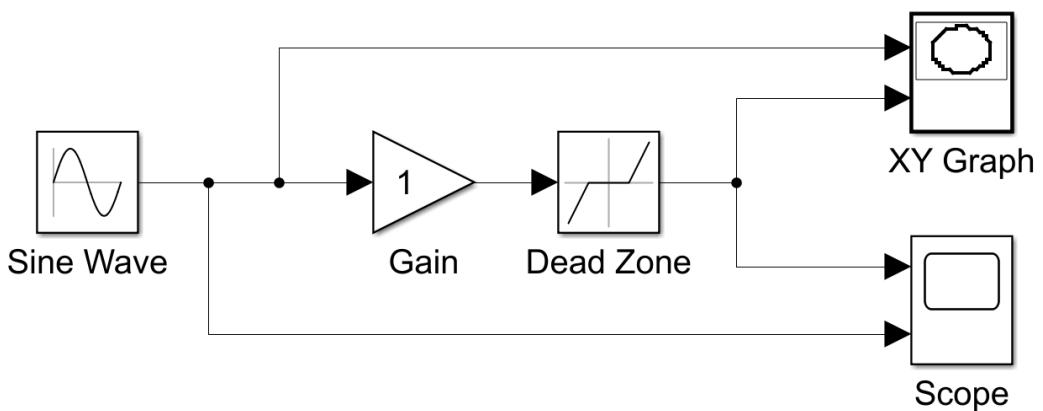


**总结：**饱和特性：由实验时域波形图和输入输出曲线可以看出当外加输入足够大时，非线性装置输出达到饱和，输出不再随着输入呈线性变化，而达到饱和状态。

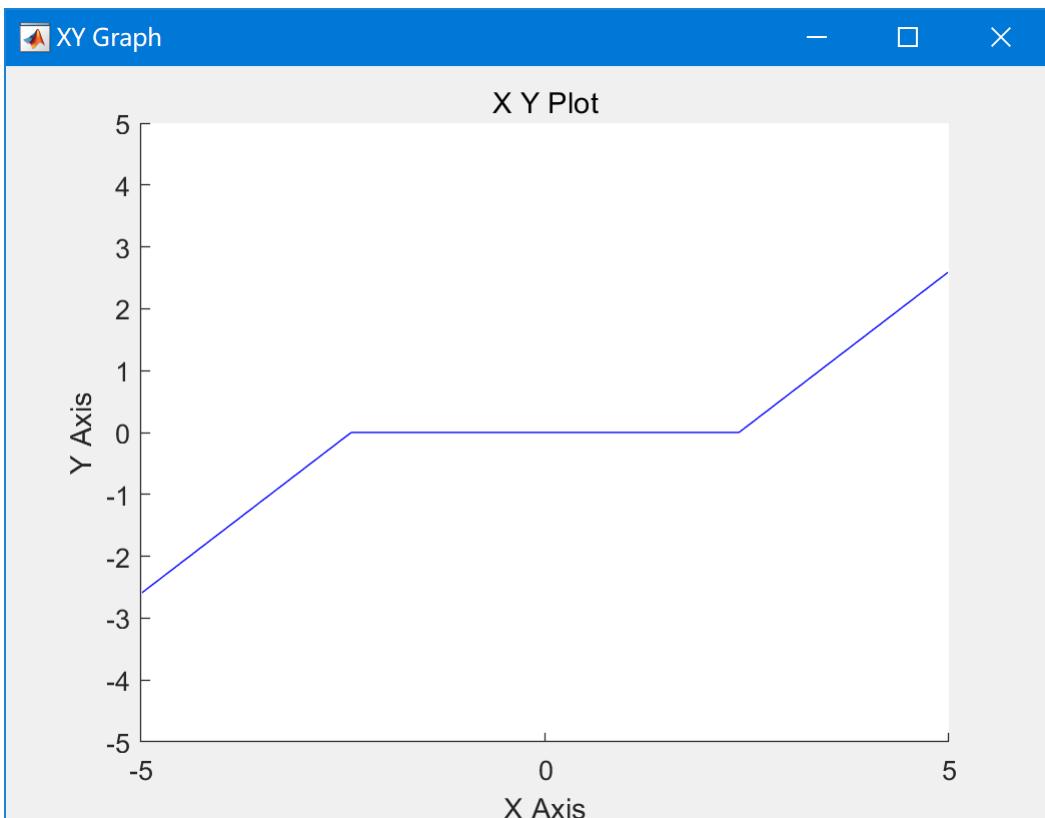
### 3. 数字死区特性

(1)  $a=2.4V$ , 斜率  $K=1$

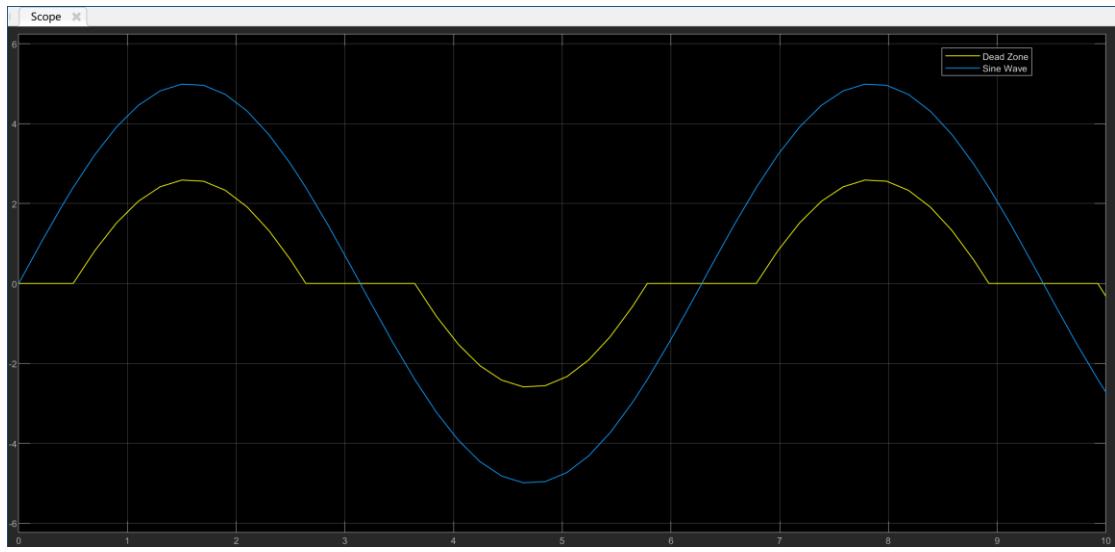
Simulink 仿真电路如下：



相平面波形如下（输入输出特性）

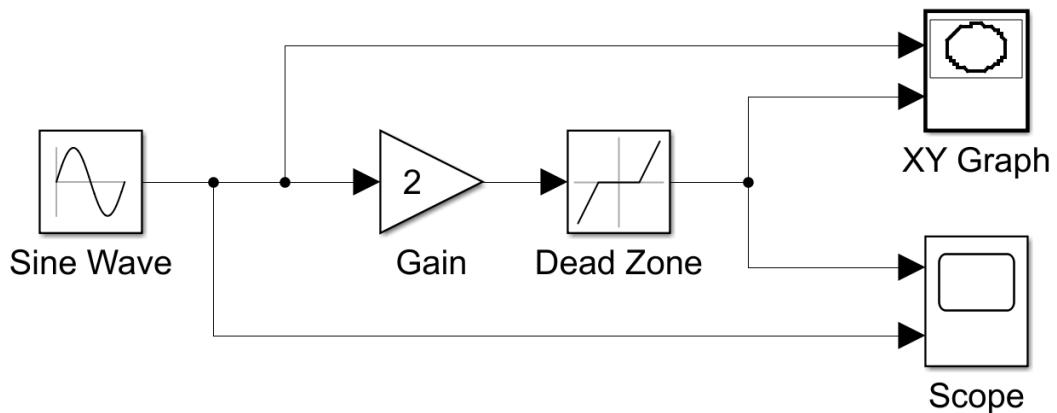


示波器输出如下：

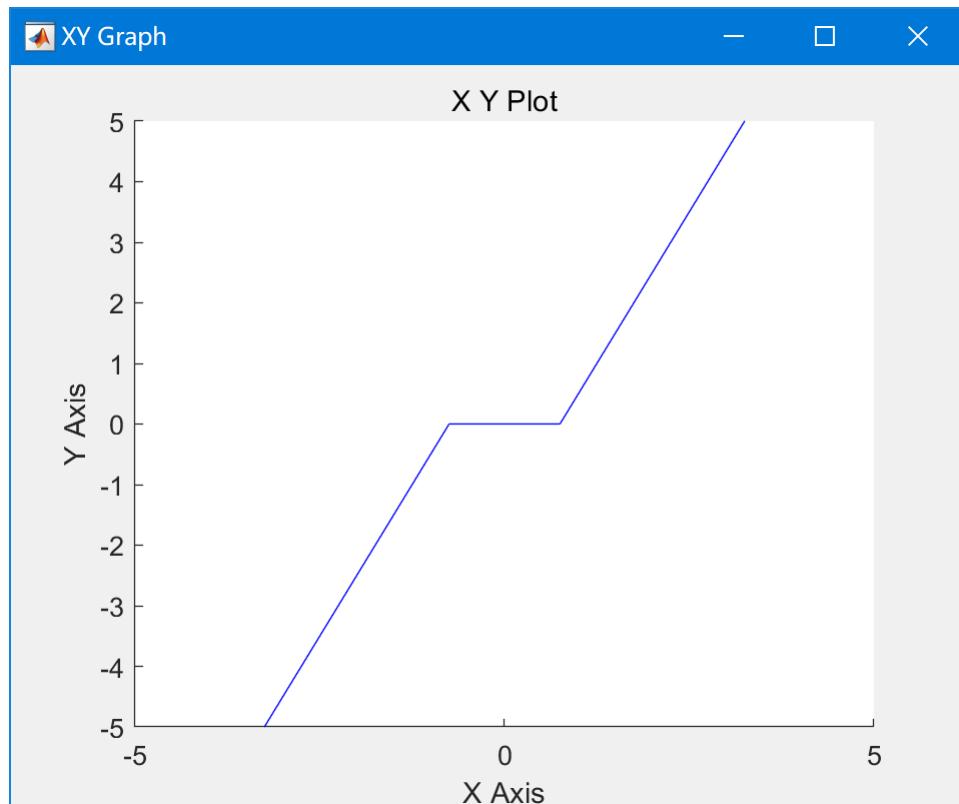


(2)  $a=1.5V$ , 斜率  $K=2$

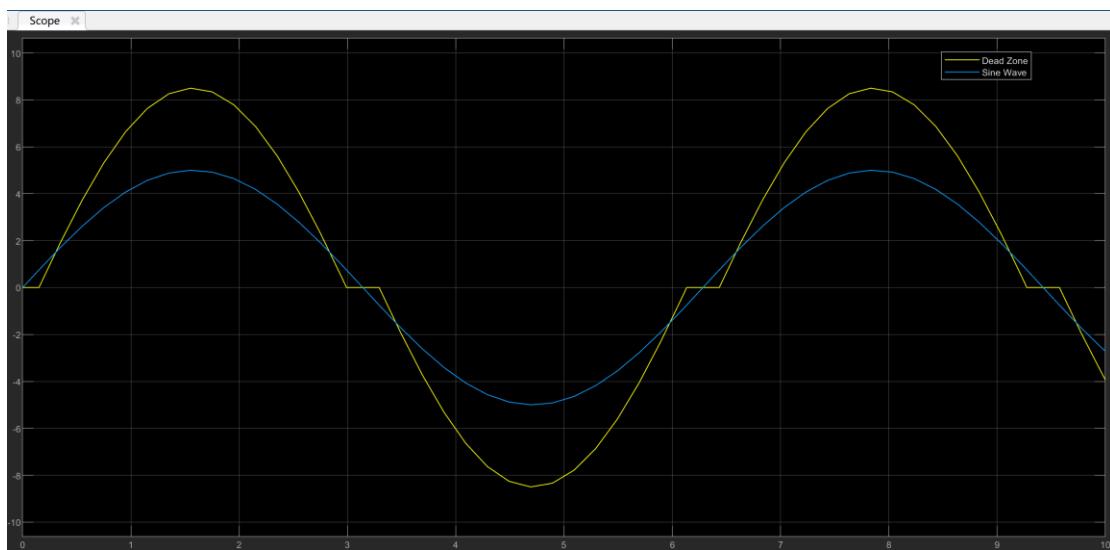
Simulink 仿真电路如下:



相平面波形如下（输入输出特性）



示波器输出如下：

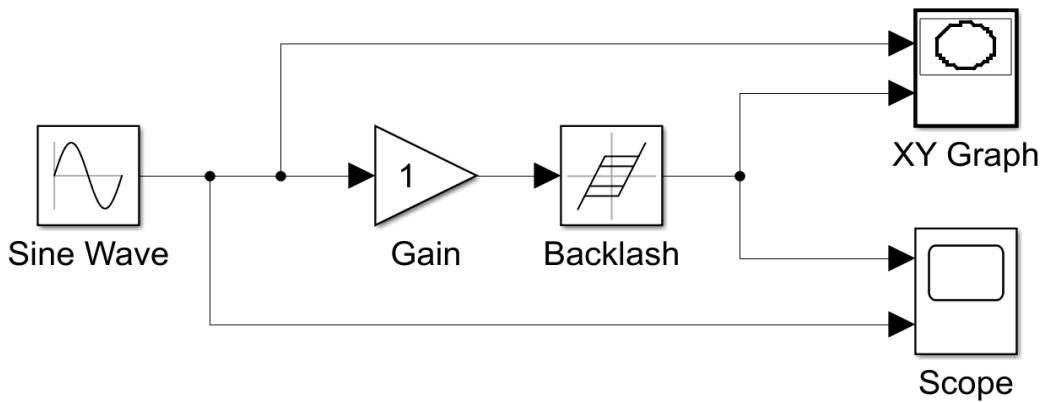


**总结：**死区特性：只要输入没有达到一定值，输出就为 0，一旦输入大于此固定值，输出随输入增加而线性增大。

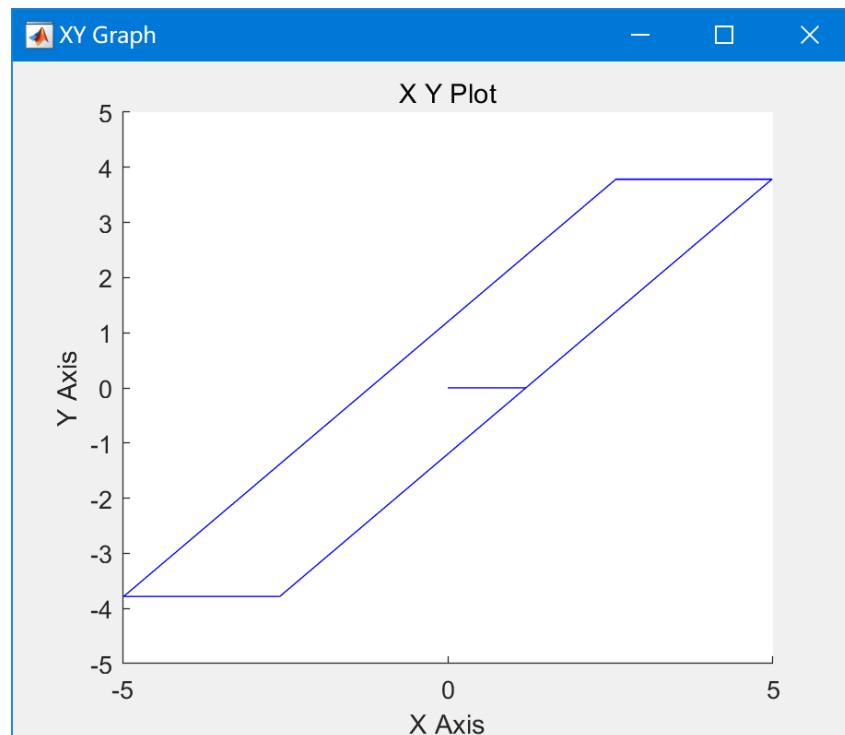
#### 4. 数字间隙特性

(1)  $a=2.4V$ , 斜率  $K=1$

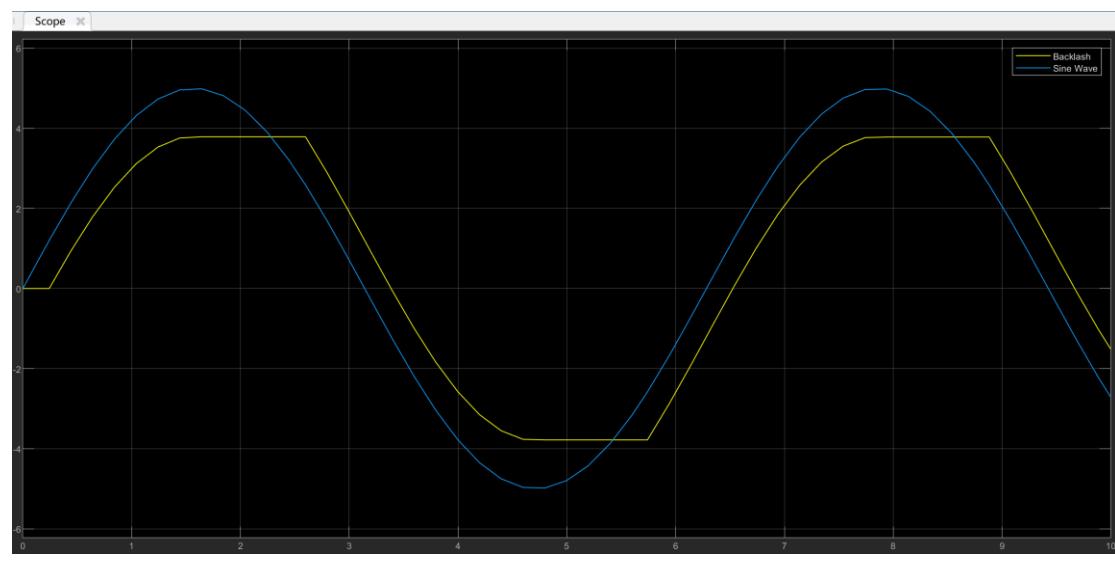
Simulink 仿真电路图如下：



相平面波形如下（输入输出特性）

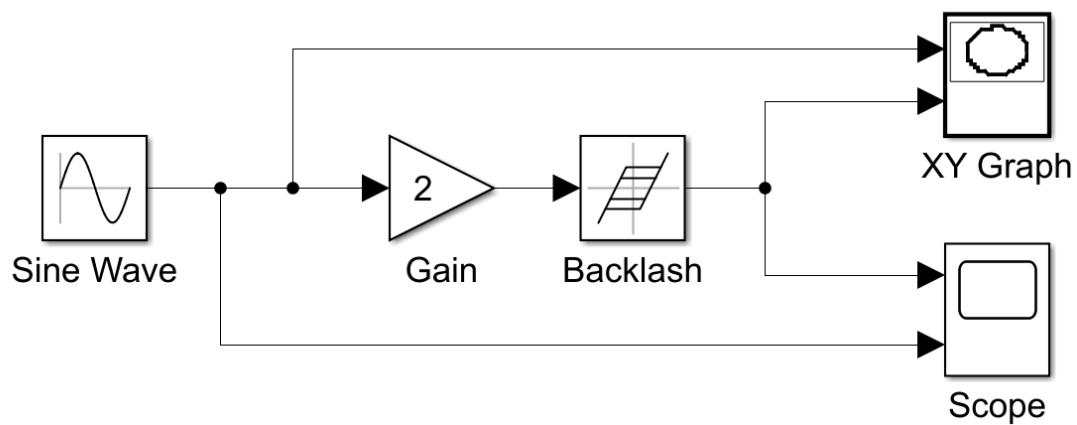


示波器输出如下：

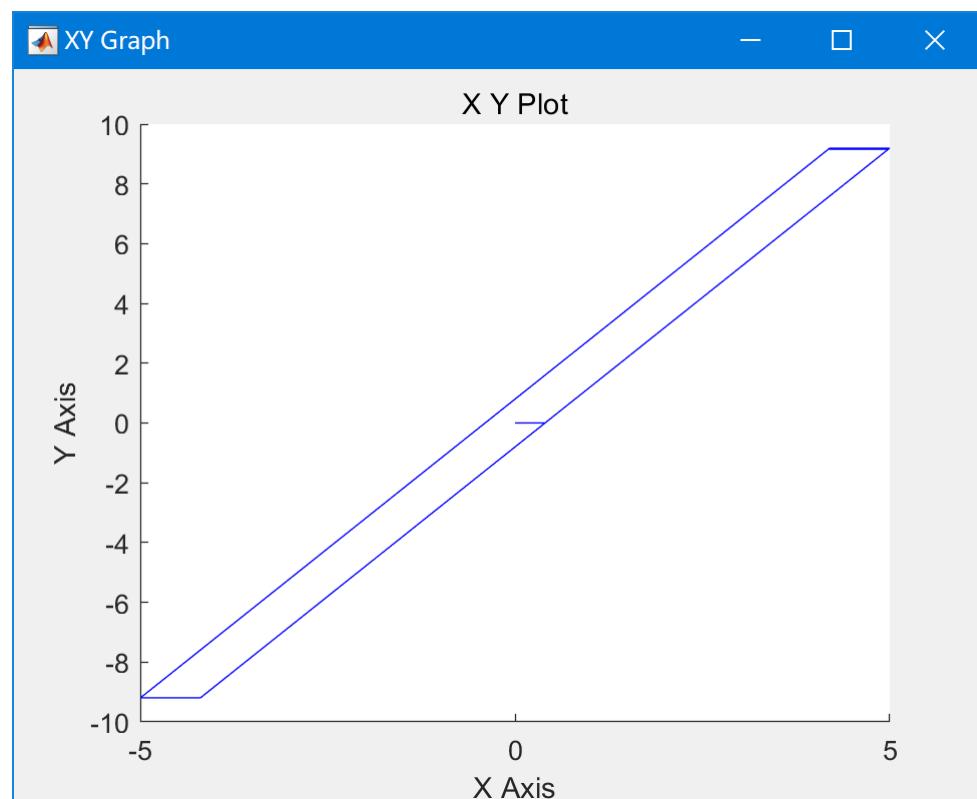


(2)  $a=1.6V$ ,  $K=2$

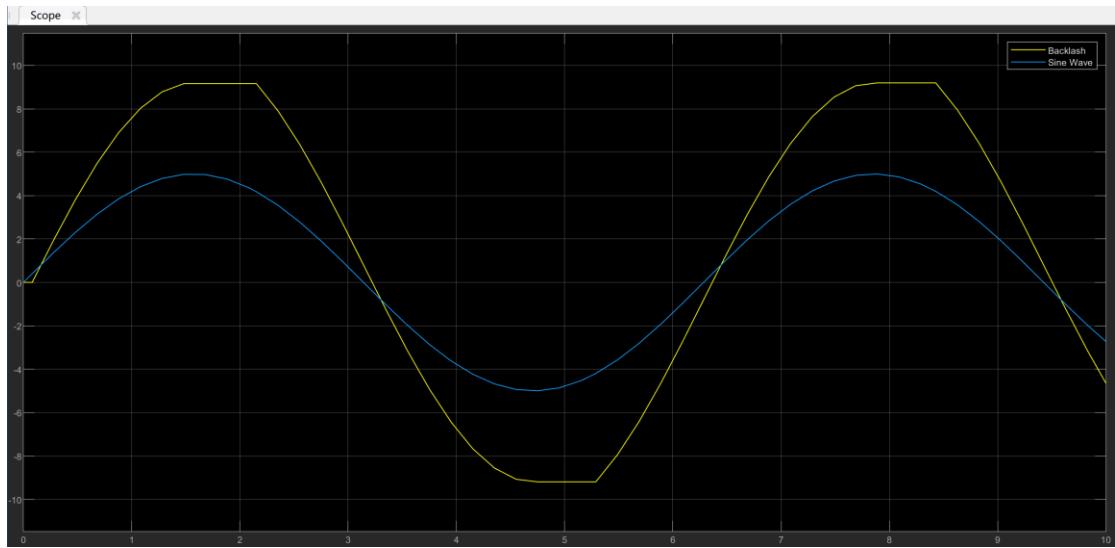
Simulink 仿真电路图如下：



相平面波形如下（输入输出特性）



示波器输出如下：



**总结：**间隙特性：当输入换向时，必须通过一个空移，输出才能继续发生变化。

## 五、思考题以及实验要求中需回答的问题

### 1. 将模拟特性与理想特性进行对比，解释实验中出现的不完全一致的现象。

答：举个例子：对于积分环节，理论上曲线应该是一直上升的，但后期曲线会趋于平缓，这是因为实际电路中的放大器达到了饱和电压（小于等于工作电压）。在 Simscape 中并没有考虑工作电压的影响。此外，由于模拟电路中电容充放电，二极管存在导通电压等等导致模拟特性和理想特性存在细微差别。

### 2. 分析典型非线性环节的输出特性。

继电特性：仿真所采用的为理想继电特性，当输入大于 0 时输出为 M，输入小于 0 时输出为 -M。

饱和特性：由实验时域波形图和输入输出曲线可以看出当外加输入足够大时，非线性装置输出达到饱和，输出不再随着输入呈线性变化，而达到饱和状态。

死区特性：只要输入没有达到一定值，输出就为 0，一旦输入大于此固定值，输出随输入增加而线性增大。

间隙特性：当输入换向时，必须通过一个空移，输出才能继续发生变化。

### 3. 一般继电特性在什么情况下可以分别近似为间隙特性和死区特性？

当继电特性存在定值的稳态误差时就可以近似为死区特性，当继电特性存在定值的稳态误差且前一状态变量的正负有变化的时候可以近似等效为间隙特性。

## 六、实验总结

本次实验主要是通过仿真观察典型非线性环节的输入输出特性，需要注意在仿真时，非线性环节与其他环节的顺序不能随意交换。

## 实验十 非线性控制系统的自激振荡分析

## 一、实验目的和任务

1. 了解和掌握非线性控制系统重要特征——自激振荡，极限环的产生及性质。
  2. 了解和掌握用描述函数法分析非线性控制系统的稳定性和自激振荡的原理。
  3. 观察和分析非线性控制系统的相平面图。

## 二、实验原理

典型非线性环节、相平面法、非线性控制系统的自激振荡和极限环、描述函数法、广义奈奎斯特曲线。

### 三、实验步骤

## 1. 继电型非线性控制系统

### (1) 继电型非线性控制系统的分析与设计

继电性非线性三阶控制系统的模拟电路见图 10-1 所示。

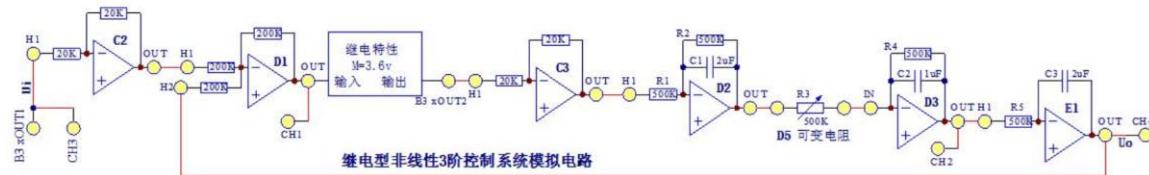


图 10-1 继电型非线性三阶控制系统模拟电路

- ① 列写其线性部分传递函数及非线性部分负倒特性函数，判断系统是否存在周期运动，若存在，求出振荡参数。  
 ② 若调整惯性环节增益（A5 单元的输入电阻 R3），能否使得自激震荡不存在？若存在此类惯性环节增益，计算出相应的振荡参数，若不存在相应惯性环节增益，请分析原因。

## 2. 饱和型非线性控制系统

饱和性非线性三阶控制系统的模拟电路见图 10-2 所示。

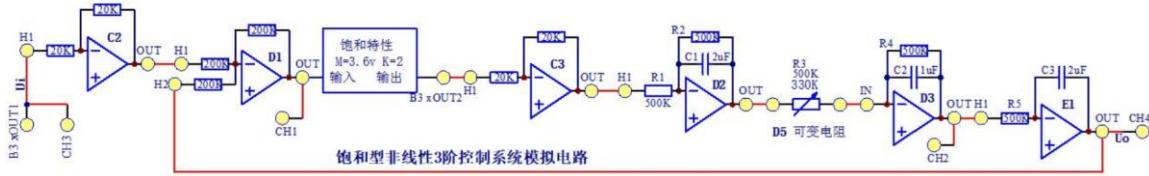


图 10-2 饱和型非线性三阶控制系统模拟电路

- ① 列写其线性部分传递函数及非线性部分负倒特性函数，判断系统是否存在周期运动，若存在，求出振荡参数。
- ② 改变惯性环节增益（改变输入电阻 R3=300K），判断系统是否存在周期运动，若存在，求出振荡参数。
- ③ 保持原惯性环节增益（改变输入电阻 R3=500K），求出使系统存在自激振荡的饱和特性临界斜率 k，并求出振荡参数。

## 四、实验内容和分析

### 1. 继电型非线性控制系统

继电性非线性三阶控制系统的模拟电路见图 10-1 所示。

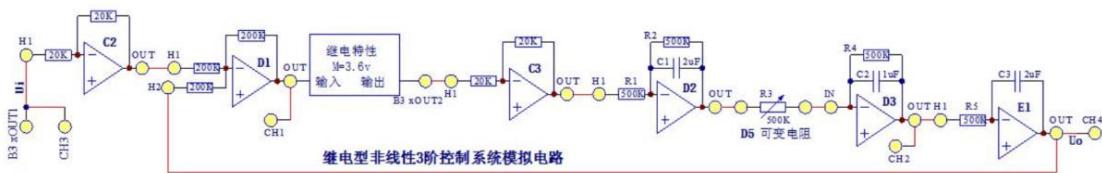


图 10-1 继电型非线性三阶控制系统模拟电路

- ① 列写其线性部分传递函数及非线性部分负倒特性函数，判断系统是否存在周期运动，若存在，求出振荡参数。

继电特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

非线性部分负倒特性函数为

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4M} = -\frac{\pi A}{14.4}$$

线性部分传递函数为

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

对应的频率特性为

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{2}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} \\ &= -\frac{6}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j\frac{2(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} \end{aligned}$$

令  $-\frac{1}{N(A)} = G(j\omega)$  得：

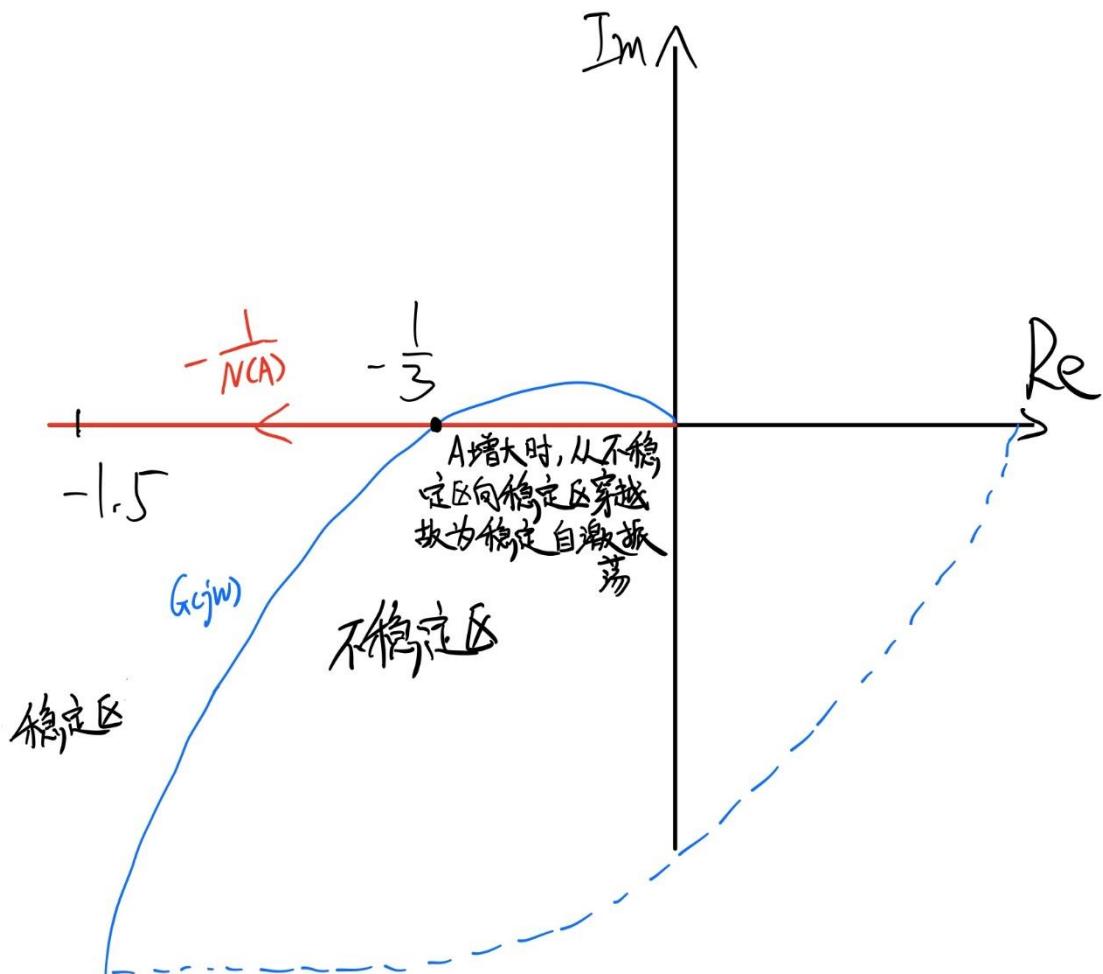
$$-\frac{6}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j\frac{2(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = -\frac{\pi A}{14.4}$$

令实部虚部分别相等，可得：

$$\begin{cases} -\frac{6}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = -\frac{\pi A}{14.4} \\ \frac{2(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = 0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{2} \\ A = 1.528 \end{cases}$$



由上图可知随着 A 增大，负倒曲线从不稳定区向稳定区穿越，故为稳定的自激振荡。（后面几问只计算交点而没画图，道理相同）

② 若调整惯性环节增益（A5 单元的输入电阻 R3），能否使得自激震荡不存在？若存在此类惯性环节增益，计算出相应的振荡参数，若不存在相应惯性环节增益，请分析原因。

非线性部分负倒特性函数为

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4M}$$

线性部分传递函数为

$$G(s) = \frac{2K}{s(s+1)(s+2)}$$

对应的频率特性为

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{2K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} \\ &= -\frac{6K}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j\frac{2K(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} \end{aligned}$$

令  $-\frac{1}{N(A)} = G(j\omega)$  得：

$$-\frac{6K}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j\frac{2K(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = -\frac{\pi A}{4M}$$

令实部虚部相等可得：

$$\begin{cases} -\frac{6k}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = -\frac{\pi A}{4M} \\ \frac{2k(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = 0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{2} \\ A = 1.528k \end{cases}$$

因此无论  $R_3$  取何值，也即  $K$  取任意正数， $\omega$  和  $A$  均有解，因此调整惯性环节增益不能使得自激振荡不存在。

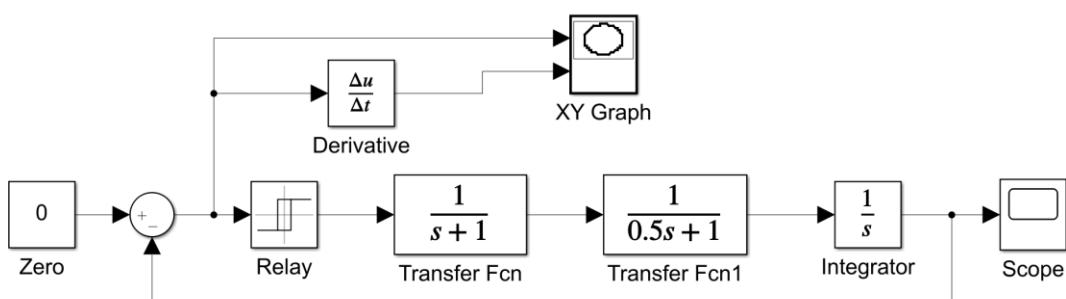
## (2) 系统的观测与调整

利用 Simulink 进行仿真，观察相轨迹，并记录系统时域输出图和在 e-e 平面上的相轨迹；测量自激振荡（极限环）的振幅和周期。

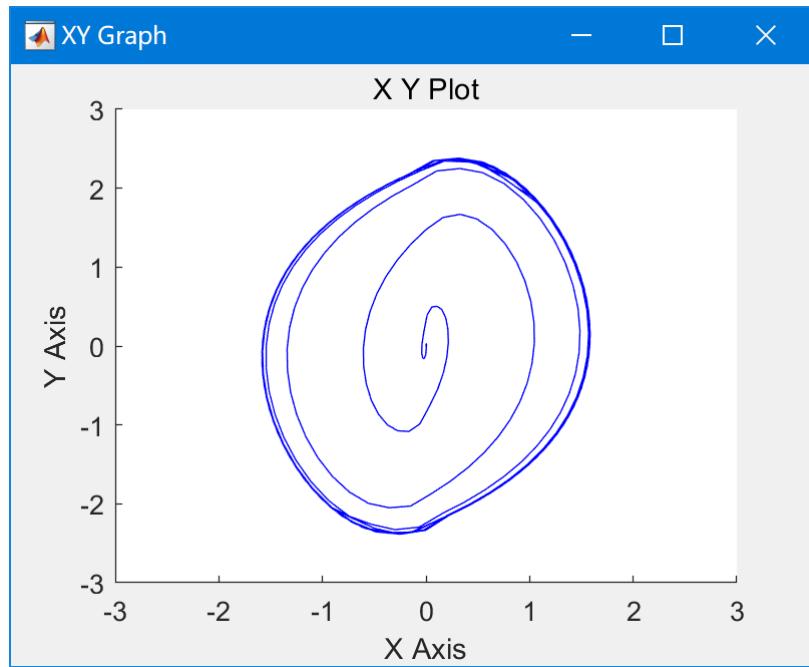
下面进行仿真验证：

$R_3=500K$ ：

Simulink 搭建仿真系统：



下图为相轨迹：



下图为时域响应图：



利用 Peak Finder 得到峰值位置的幅值和时间。如图所示，标记出了 3 个峰值，他们的幅值相同，可认为是稳定的自激震荡。可以得到振幅  $A=1.584$ 。3 个峰值间一共是 4 个周期，由此可以计算出自激振荡周期：

$$T = \frac{61.1 - 42.9}{4} = 4.55s$$

进一步得到自激振荡频率：

$$w_A = 2\pi \frac{1}{T} = 1.381 rad/s$$

## 继电型非线性控制系统的实验记录

惯性环节增益(调节电阻R3)	时域输出	相平面图	自振频率	周期T(s)	振幅A(V)
			$w_A (rad/s)$		
			测量值	测量值	测量值
R3=500K	在上面	在上面	1.381 1.414	4.55 4.44	1.584 1.528

## 2. 饱和型非线性控制系统

## (1) 饱和型非线性控制系统的分析与设计

① 列写其线性部分传递函数及非线性部分负倒特性函数，判断系统是否存在周期运动，若存在，求出振荡参数。

饱和型非线性三阶控制系统的模拟电路见图 10-2 所示。

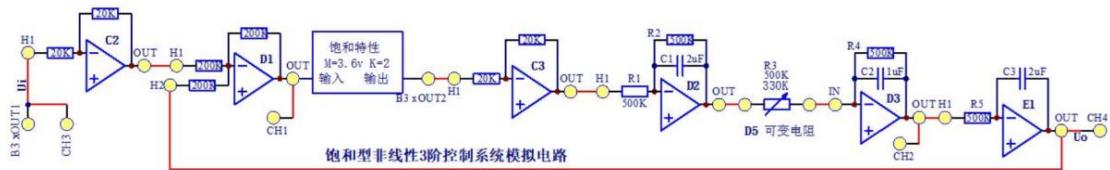


图 10-2 饱和型非线性三阶控制系统的模拟电路

饱和特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{2K}{\pi} \left[ \arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{A} \right)^2} \right]$$

非线性部分负倒特性函数为

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{2K \left[ \arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{A} \right)^2} \right]}$$

当  $A \rightarrow a$  时， $-\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\frac{1}{K}$ ；当  $A \rightarrow \infty$  时， $-\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$ 。

本题中， $K = 2$ ， $a = \frac{M}{K} = 1.8$ ，因此有

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{4 \left[ \arcsin \frac{1.8}{A} + \frac{1.8}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{1.8}{A} \right)^2} \right]}$$

线性部分传递函数为

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

对应的频率特性为

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{2}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} \\ &= -\frac{6}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j\frac{2(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} \end{aligned}$$

令  $-\frac{1}{N(A)} = G(j\omega)$  得：

$$-\frac{6}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j\frac{2(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = -\frac{\pi}{4\left[\arcsin\frac{1.8}{A} + \frac{1.8}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{1.8}{A}\right)^2}\right]}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{6}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = -\frac{\pi}{4\left[\arcsin\frac{1.8}{A} + \frac{1.8}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{1.8}{A}\right)^2}\right]} \\ \frac{2(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = 0 \end{cases}$$

由虚部等于零可知  $\omega = \sqrt{2}$ ，代入第一个方程可得：

$$\arcsin\frac{1.8}{A} + \frac{1.8}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{1.8}{A}\right)^2} - \frac{3\pi}{4} = 0$$

该方程无解，即系统不存在周期运动。

② 改变惯性环节增益（改变输入电阻  $R_3=300K$ ），判断系统是否存在周期运动，若存在，求出振荡参数。

本题中， $K=2$ ， $a=\frac{M}{K}=1.8$ ，因此有

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{4\left[\arcsin\frac{1.8}{A} + \frac{1.8}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{1.8}{A}\right)^2}\right]}$$

此时，线性部分传递函数为

$$G(s) = \frac{3.33}{s(s+1)(s+2)}$$

对应的频率特性为

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{3.33}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} \\ &= -\frac{10}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j\frac{3.33(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} \end{aligned}$$

令  $-\frac{1}{N(A)} = G(j\omega)$  得：

$$-\frac{10}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j \frac{3.33(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = -\frac{\pi}{4 \left[ \arcsin \frac{1.8}{A} + \frac{1.8}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{1.8}{A} \right)^2} \right]}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{10}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = -\frac{\pi}{4 \left[ \arcsin \frac{1.8}{A} + \frac{1.8}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{1.8}{A} \right)^2} \right]} \\ \frac{3.33(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = 0 \end{cases}$$

由虚部等于零可知  $\omega = \sqrt{2}$ , 代入第一个方程可得:

$$\frac{4}{\pi} \left[ \arcsin \frac{1.8}{A} + \frac{1.8}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{1.8}{A} \right)^2} \right] = 1.8$$

利用 Matlab 进行求解可得:

$$A = 2.2350$$

(3) 保持原惯性环节增益(改变输入电阻  $R_3=500K$ ), 求出使系统存在自激振荡的饱和特性临界斜率  $k$ , 并求出振荡参数。

由①知: 负倒特性函数当  $A \rightarrow a$  时,  $-\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\frac{1}{K}$ ; 当  $A \rightarrow \infty$  时,  $-\frac{1}{N(A)} \rightarrow -\infty$ 。

线性部分频率特性为:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{2}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} \\ &= -\frac{6}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j \frac{2(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} \end{aligned}$$

与实轴交点为  $G(j\sqrt{2}) = -\frac{1}{3}$ 。为求得饱和临界斜率, 令负倒特性函数恰好与奈氏曲线相切, 此为临界位置, 即

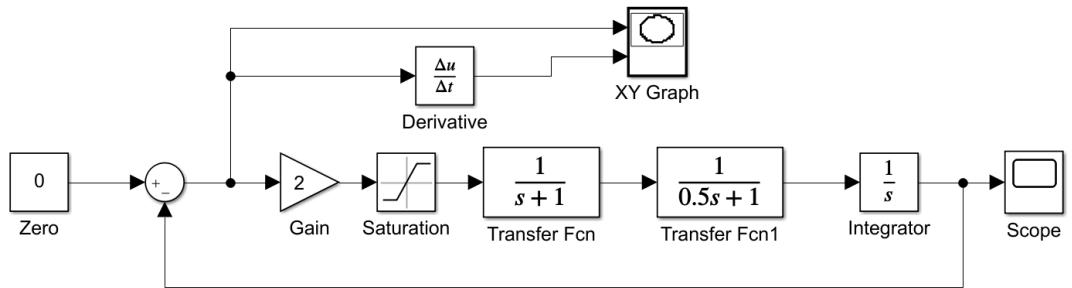
$$-\frac{1}{K} = -\frac{1}{3} \Rightarrow K = 3$$

此时  $A = \frac{3.6}{K} = 1.2$ ,  $w = 1.414$ 。

## (2) 系统的观测与调整

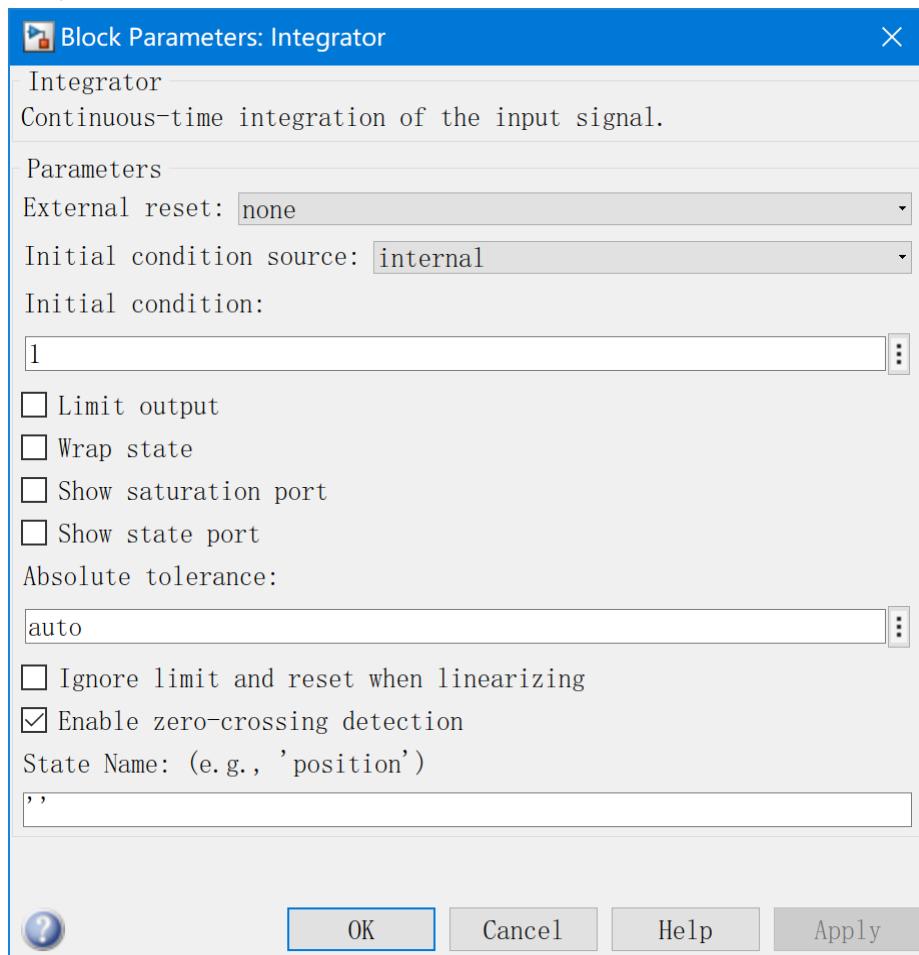
利用 Simulink 进行仿真, 观察相轨迹, 并记录系统时域输出图和在 e-e 平面上的相轨迹; 测量自激振荡(极限环)的振幅和周期。

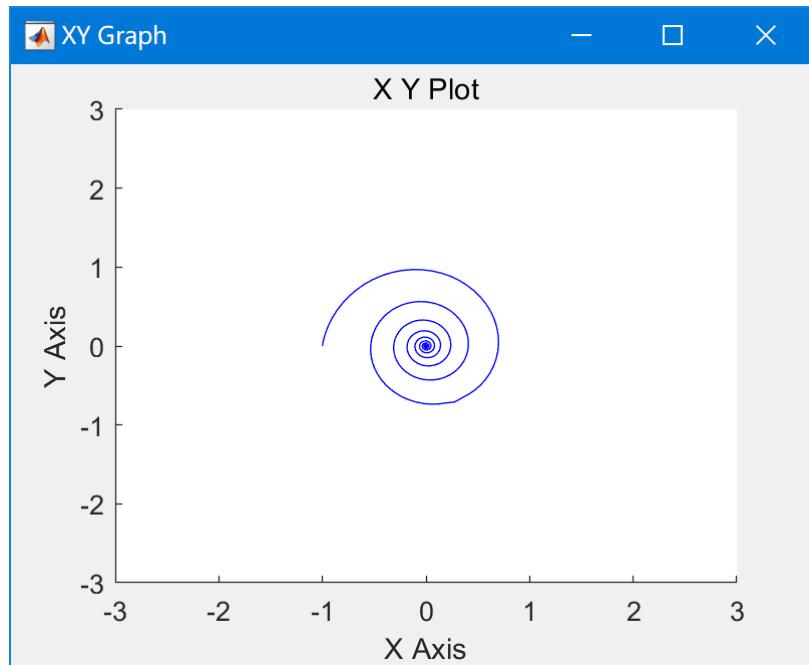
①  $R_3=500K$ , 斜率  $k=2$



本来在这里如果不给输入，输出会一直是 0。原因是这里不能产生自激，需要有一个小的扰动来带动整个系统，最终也会收敛为 0。我发现输入反阶跃或脉冲，都会让相轨迹有不光滑的直线，推测原因是因此这两种输入信号都有突变，在突变处导致相轨迹不光滑。

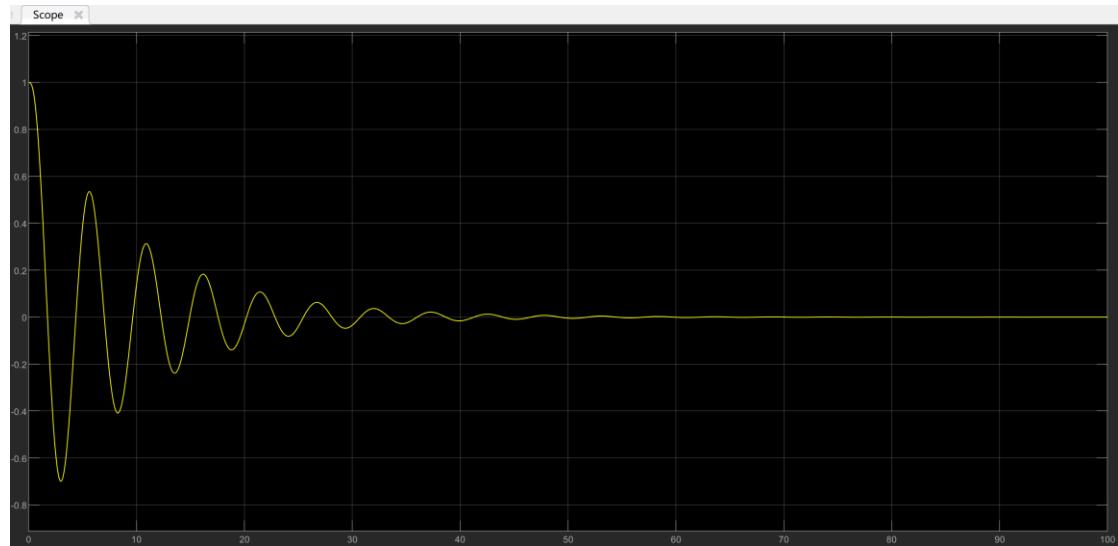
因此，我仍然不给输入（输入为 0），而是选择给一个非 0 的初始状态，在后面的积分环节给初值为 1，也即  $y=1$ ，这样也相当于给了一个扰动，系统在开始时就可以运作起来了。





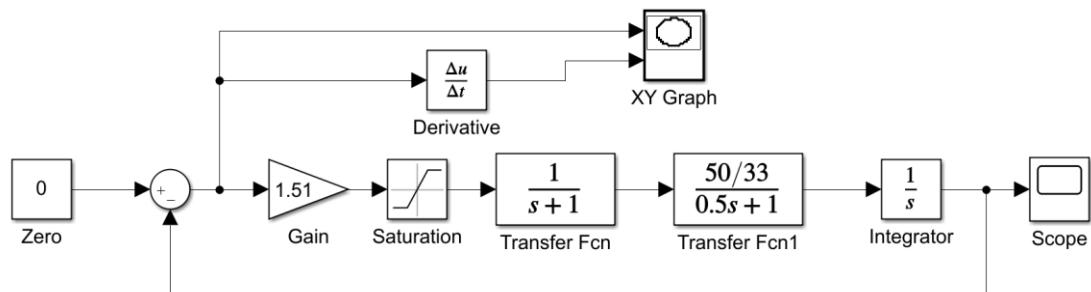
相轨迹如上图，初始时  $y=1$ ，那么反馈到前端， $e=0-1=-1$ 。这也是相轨迹的 x 轴输入，而初始  $e$  的导数为 0。故相轨迹的起点为  $(-1, 0)$ ，由于此系统不会发生自激振荡，在衰减震荡一段时间后会趋于稳定  $(0)$ ，实验结果与理论相符。

下图为示波器输出：



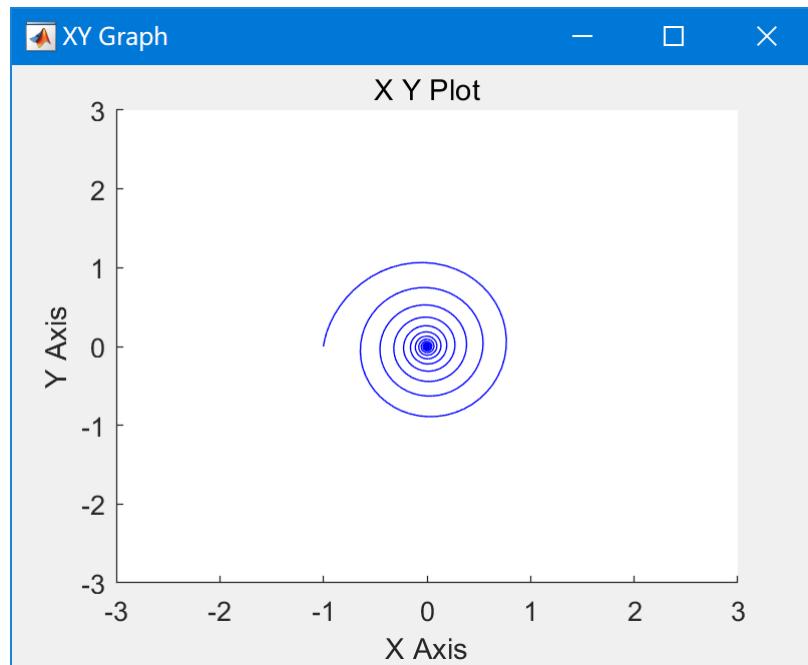
$y$  的初始值为 1，然后渐渐趋于 0，与理论相符。

②  $R_3=330K$  斜率  $k=1.51$

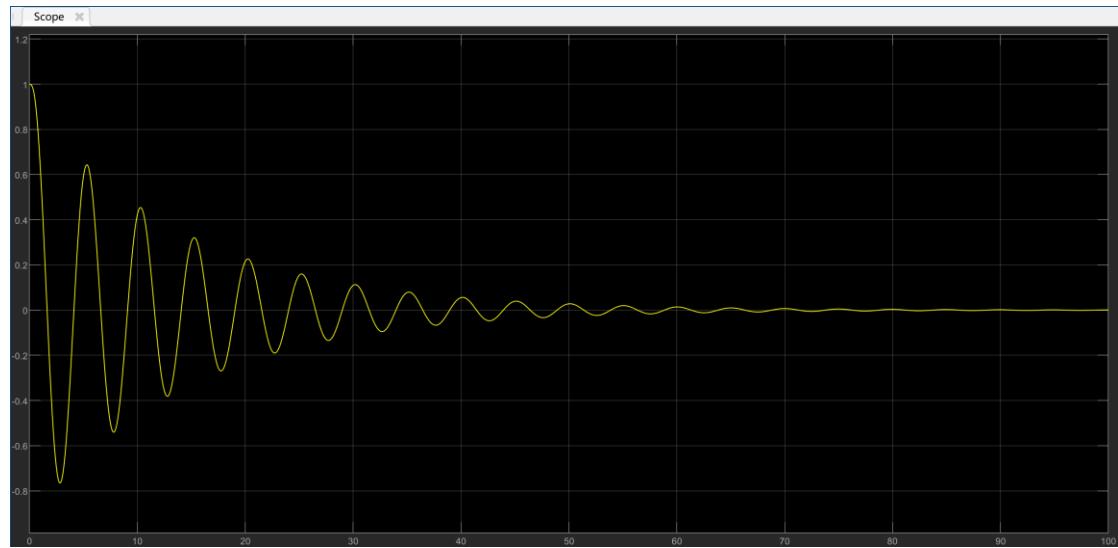


同理，在这里把积分环节的初值设为 1，相当于给一个初始扰动。

相轨迹如下：

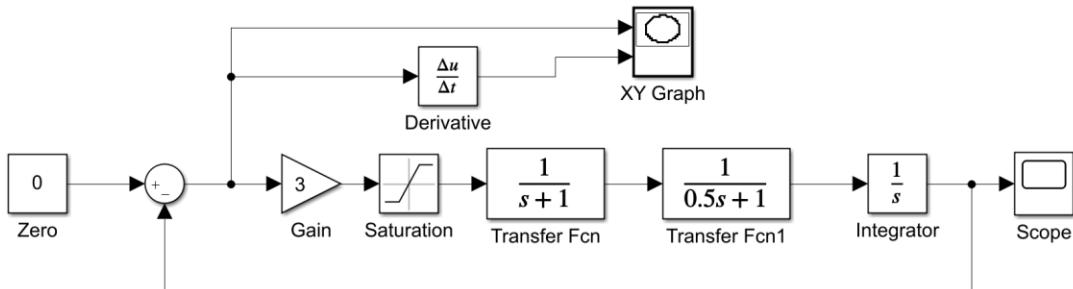


示波器输出如下：

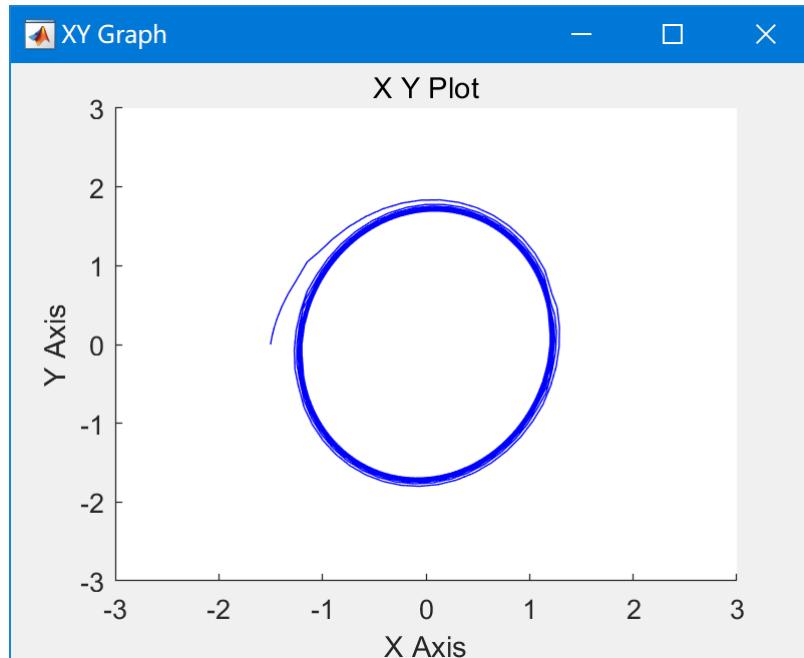


系统并不能维持一个稳定的震荡，最终趋于稳定，与理论相符。

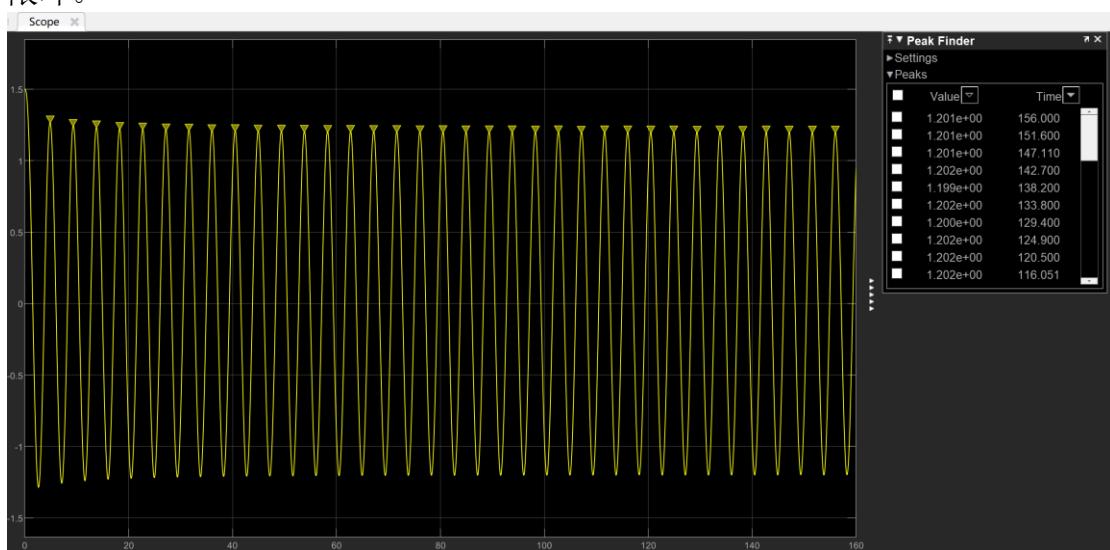
③  $R_3=500K$ , 斜率  $k=3$



同理，在这里把积分环节的初值设为 1，相当于给一个初始扰动。  
相轨迹如下图：



初值是自己设定的，因此不在极限环内，系统慢慢收敛至稳定震荡状态，对应极限环。



利用 Peak Finder 得到峰值位置的幅值和时间。如图所示，标记出了全部峰值，他们的幅值几乎一样，可认为是稳定的自激震荡。可以得到振幅  $A=1.201$ 。取图中的最后 9 个周期进行计算。由此可以计算出自激振荡周期：

$$T = \frac{156 - 116.051}{9} = 4.43878$$

进一步得到自激振荡频率：

$$\omega_A = 2\pi \frac{1}{T} = 1.415 \text{ rad/s}$$

饱和型非线性控制系统的实验记录

惯性环节增益(调节电阻 R3)	时域输出	相平面图	自振频率	周期 T(s)	振幅 A(V)
			$\omega_A$ (rad/s)	测量值	测量值
			理论值	理论值	理论值
R3=500K 斜率 k=2	在上面	在上面	无		
R3=330K 斜率=1.51	在上面	在上面	无		
R3=500K 斜率 k=3	在上面	在上面	1.415 1.414	4.439 4.443	1.201 1.2

## 五、实验要求中还未回答的问题

### 1. 根据理论分析和实验结果总结一下消除自激振荡的方法有哪些。

答：理论上讲，若开环传递函数  $G(jw)$  的奈氏曲线与负倒函数曲线没有交点，则不会产生自激震荡，因此可以调节参数，如比例环节 K，或者改变  $G(jw)$ ，使得二者没有交点，这时就可以消除自激振荡。

## 六、实验总结

本次实验主要是在理论上分析是否会产生自激振荡，并通过仿真来验证。研究的是自激，这意味着输入应该为 0，而不宜给稳定的正弦波、或者阶跃函数。在做饱和型时我发现系统无法启动，分析是需要给一个扰动。通过仿真观察相轨迹和示波器的输出波形，发现仿真结果与理论相符。

需要注意的是搭建仿真模型时，非线性和线性环节的顺序不能随意改变，否则效果不同。