

《控制理论综合实验》

《实验十一》

《线性系统的状态反馈的设计与实现》

姓名：曾文正
班级：校交 1701
学号：U201715853
日期：2020 年 7 月 20 日

实验十一 线性系统的状态反馈的设计与实现

一、实验目的和任务

- 理解和掌握系统状态方程表达式的建立。
- 了解和掌握状态反馈的实现方法。
- 熟练掌握极点配置的原理和基本算法，熟练运用 Matlab 对线性系统进行极点配置。

二、实验原理

状态空间和状态方程，线性系统状态空间表达式的建立，线性定常系统的可控性与可观性分析，线性定常系统的状态反馈和状态观测器（极点配置）。

三、实验步骤

本实验在计算机上进行仿真试验，熟悉对线性系统进行极点配置反馈的方法。原系统的模拟电路见图 11-1 所示。（注意：不要更改原系统结构和参数）

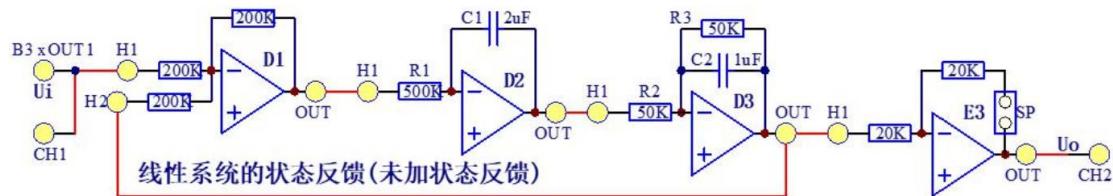


图 11-1 极点配置前系统的模拟电路

1. 线性系统的状态方程表达式的建立

- (1) 列写系统传递函数，求出极点；
- (2) 运用 Matlab 命令建立状态空间表达式及系统的可控标准型、可观测标准型。

2. 状态反馈前的系统响应及性能

(1) 在 Matlab 的 Simulink 环境下，构建系统并运行，记录该系统的阶跃响应曲线，超调量和峰值时间。

(2) 在教学模拟机上构建系统并运行，记录该系统的阶跃响应曲线，超调量和峰值时间。

3. 状态反馈后的系统响应及性能

- (1) 设计状态反馈增益矩阵

$$K = [K_1, K_2]$$

使得加入状态反馈后的系统满足如下时域性能指标：超调量 $M_p \leq 10\%$ ；峰值时间 $t_p \leq 0.5$ 秒，记录期望闭环特征多项式及闭环极点。

(2) 在教学模拟机上构建系统并运行，记录该系统的阶跃响应曲线，超调量和峰值时间。

4. 具有全维观测器的系统响应及性能（2学时回去做，直接交报告）

(1) 设计全维状态观测器增益矩阵

$$K_e = [K_{e1}, K_{e2}]$$

使得全维状态观测器的期望特征值为

$$\mu_1 = -1.8 + j2.4, \quad \mu_2 = -1.8 - j2.4$$

(2) 在 Matlab 的 Simulink 环境下，构建观测-状态反馈系统并运行，记录该系统的阶跃响应曲线，超调量和峰值时间。

四、实验内容和分析

1. 线性系统的状态方程表达式的建立

(1) 列写系统传递函数，求出极点；

(2) 运用 Matlab 命令建立状态空间表达式及系统的可控标准型、可观测标准型。
系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{20}{s(s+20)}$$

系统开环极点为 0 和 -20。

系统闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{20}{s^2 + 20s + 20}$$

由 Matlab 的 tf2zp 函数可以计算出系统闭环极点为 -18.9443 和 -1.0557。

下面建立状态空间表达式：

由 Matlab 的 tf2ss 函数可以建立状态空间表达式为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -20 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [0 \ 20]x$$

利用 Matlab 分别求出系统的可控标准型和可观测标准型为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -20 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [20 \ 0]x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -20 \\ 1 & -20 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [0 \ 1]x$$

可以看出，原系统是可控且可观的。

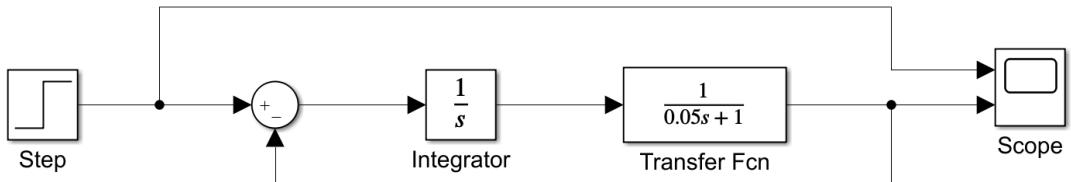
2. 状态反馈前的系统响应及性能

(1) 在 Matlab 的 Simulink 环境下，构建系统并运行，记录该系统的阶跃响应曲线，超调量和峰值时间。

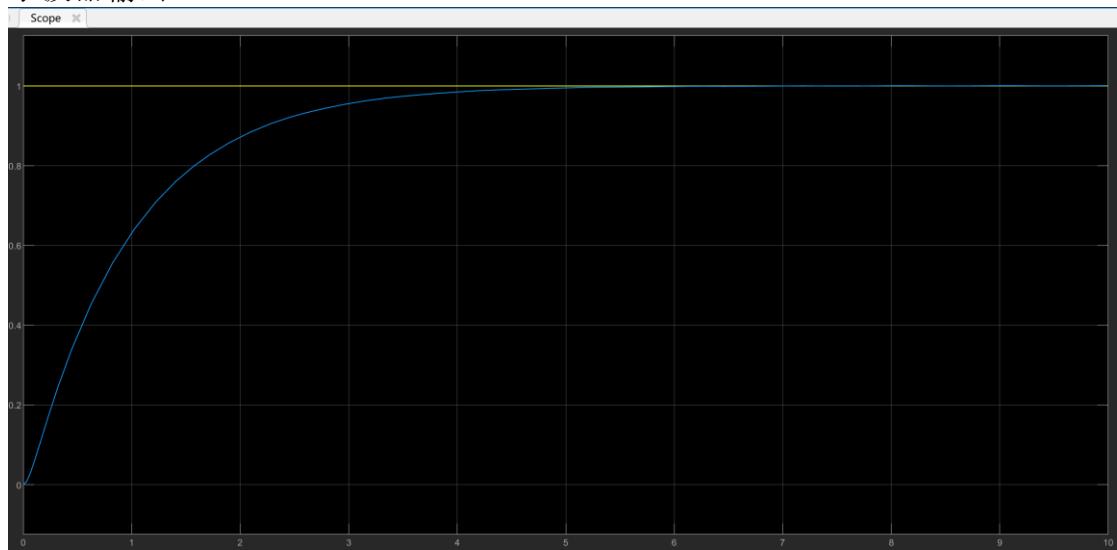
(2) 在教学模拟机上构建系统并运行，记录该系统的阶跃响应曲线，超调量和峰值时间。

利用 Simulink 进行仿真：

实验报告

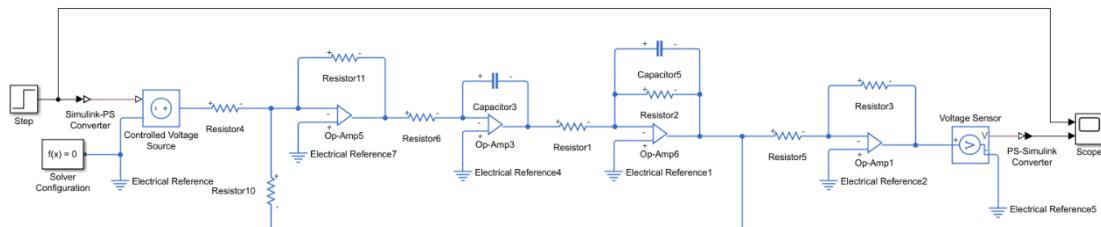


示波器输出：

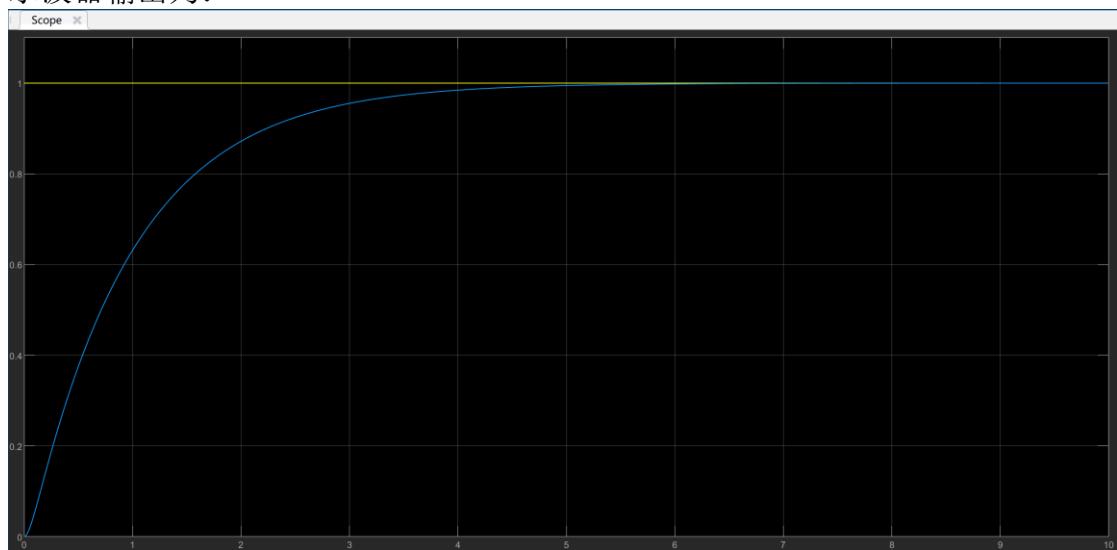


可见，无超调量，峰值时间为无穷大（或不存在）。

利用 Simscape、Simulink 进行电路仿真：



示波器输出为：



和单纯利用传递函数仿真的结果一样。

3. 状态反馈后的系统响应及性能

(1) 设计状态反馈增益矩阵

$$K = [K_1, K_2]$$

使得加入状态反馈后的系统满足如下时域性能指标:超调量 $M_p \leq 10\%$; 峰值时间 $t_p \leq 0.5$ 秒, 记录期望闭环特征多项式及闭环极点。

(2) 在教学模拟机上构建系统并运行, 记录该系统的阶跃响应曲线, 超调量和峰值时间。

(i) 设计闭环传递函数:

原系统的闭环传递函数为:

$$G_B(s) = \frac{20}{s^2 + 20s + 20}$$

原系统是个二阶系统, 由于状态反馈用来改变极点, 而不能增加极点, 因此我就设计一个与原系统同阶的二阶系统, 利用状态反馈进行极点配置, 以将原系统变换为设计的系统。

设典型二阶系统的形式为:

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

根据题目要求可得到如下不等式:

$$\begin{cases} M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 0.1 & ① \\ t_s = \frac{\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}} \leq 0.5 & ② \end{cases}$$

由①可得: $\xi \geq 0.6$, 带入②式, 可得:

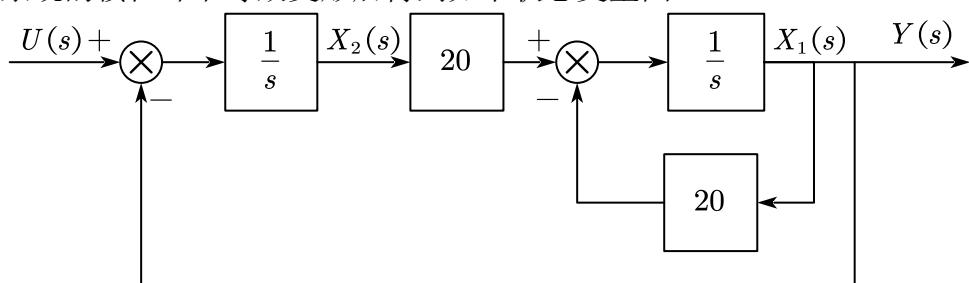
$$w_n \geq \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{0.8} = 7.85398$$

因此, 取 $\xi = 0.6$, $w_n = 10$ 就可以满足题目的指标要求。

因此, 设计的闭环传递函数为: $G(s) = \frac{100}{s^2 + 12s + 100}$

(ii) 利用状态反馈进行极点配置, 以满足设计函数

将原系统的惯性环节等效变形后得到如下状态变量图:

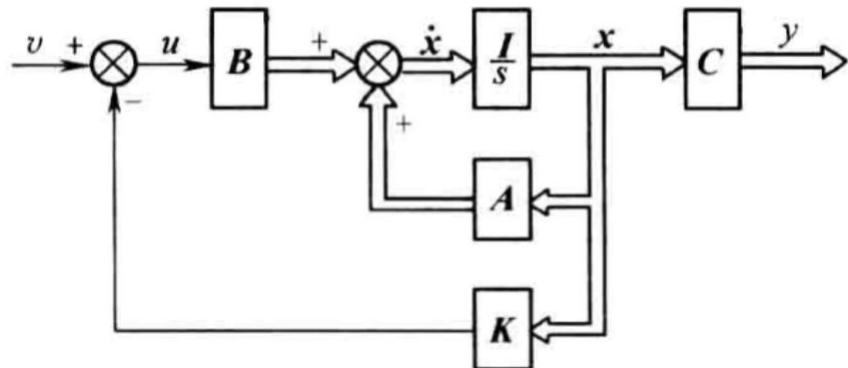


选取的状态变量如图, 由此可以建立状态空间表达式:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 20 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

实际上这与之前用 MATLAB 的 `tf2ss` 求得的结果一样，这里自己推导一遍是为了把问题分析更清楚，便于设计状态反馈。

要设计的状态反馈框图如下：

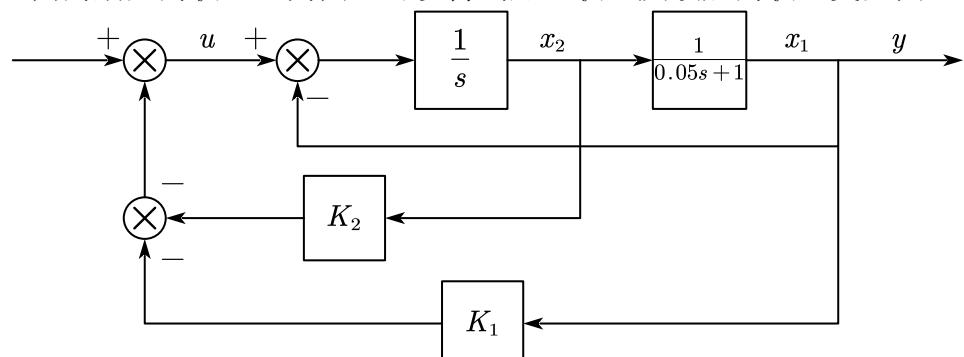


根据此图，可以计算得到 K，方法如下。

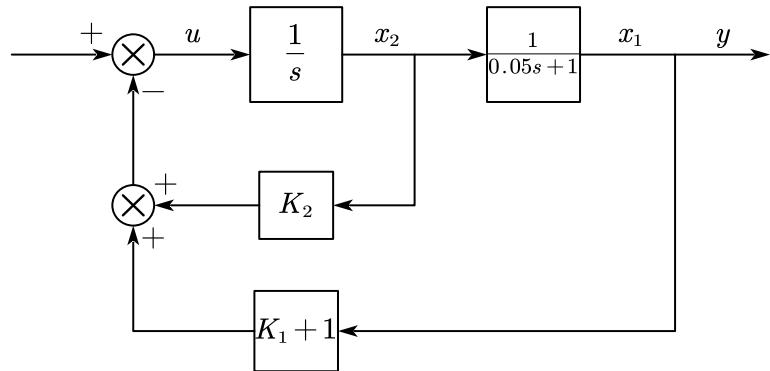
$$\begin{aligned}
|sI - A + BK| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 & 20 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \ K_2] \right| \\
&= \begin{vmatrix} s+20 & -20 \\ K_1+1 & s+K_2 \end{vmatrix} \\
&= s^2 + (K_2 + 20)s + 20K_2 + 20K_1 + 20 \\
&= s^2 + 12s + 100
\end{aligned}$$

通过比较系数可得 $K_1 = 12, K_2 = -8$ 。

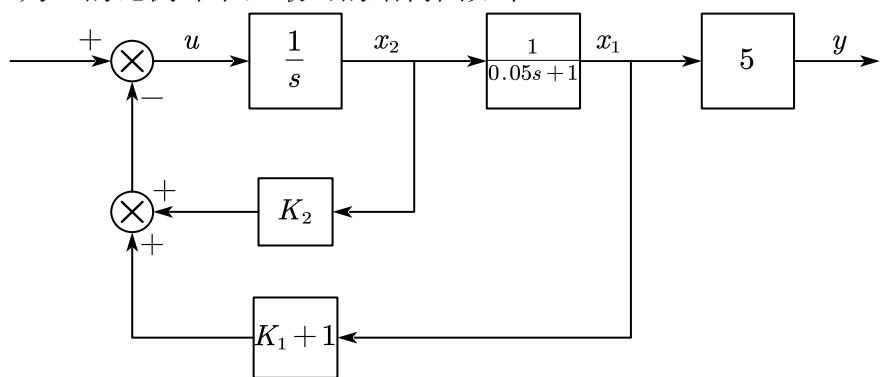
根据上面的期望的状态空间图，可以得到加入状态反馈后的状态变量图。



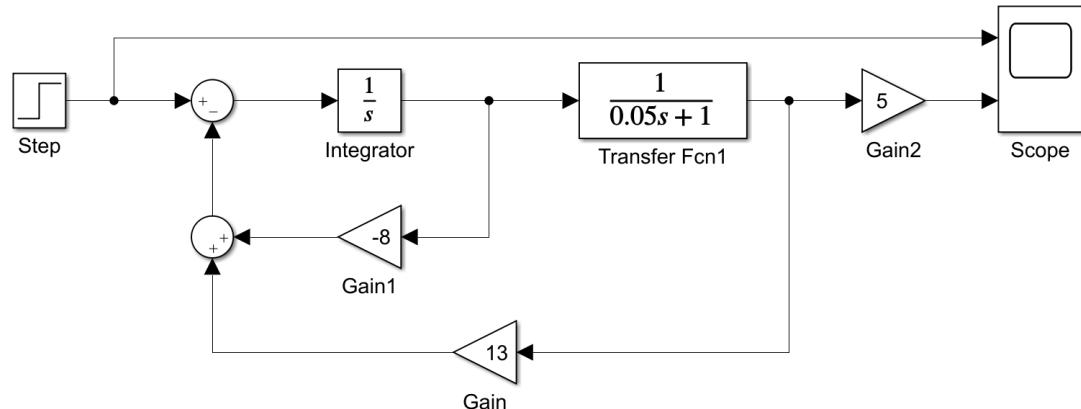
化简后可得：



此时传递函数为 $G(s) = \frac{20}{s^2 + 12s + 100}$ ，发现此时的增益并不是 1，因此在最后补偿个增益为 5 的比例环节，最终的结构图如下：



利用 Simulink 进行仿真：



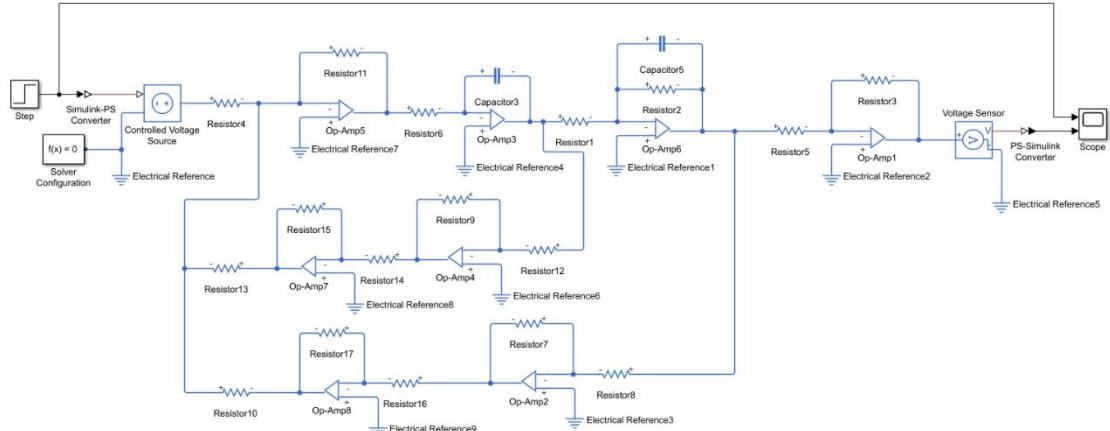
示波器输出：

实验报告

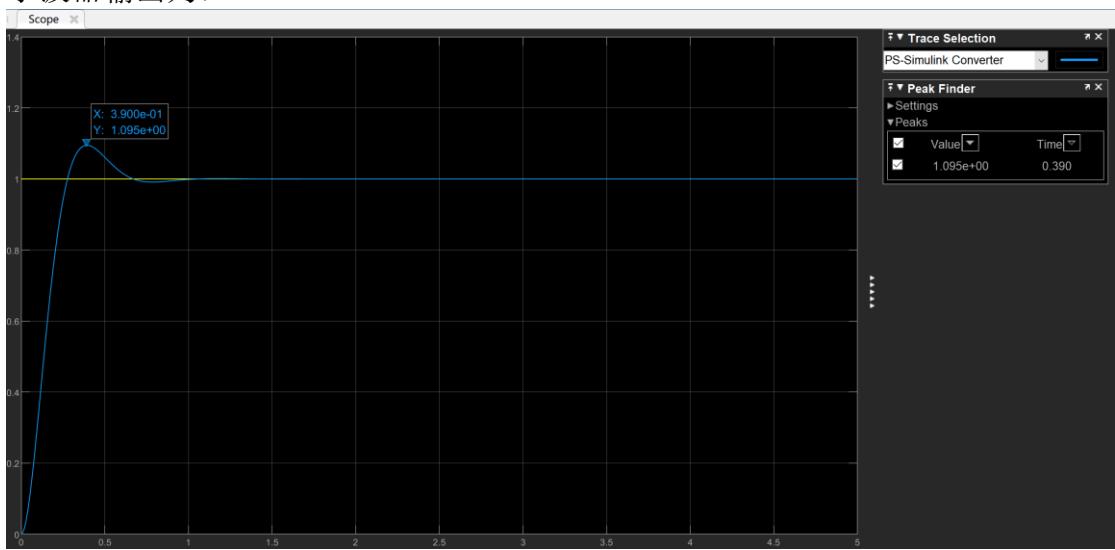


利用 Peak Finder 标出了峰值点的位置，可知超调量 $M_p = 9.5 < 10\%$ ，峰值时间为 $t_p = 0.39s < 0.5s$ ，满足题目要求。

利用 Simulink 搭建电路：



示波器输出为：



利用 Peak Finder 标出了峰值点的位置，可知超调量 $M_p = 9.5 < 10\%$ ，峰值时间为 $t_p = 0.39s < 0.5s$ ，满足题目要求。

4. 具有全维观测器的系统响应及性能 (2 学时回去做, 直接交报告)

(1) 设计全维状态观测器增益矩阵

$$K_e = [K_{e1}, K_{e2}]$$

使得全维状态观测器的期望特征值为

$$\mu_1 = -1.8 + j2.4, \quad \mu_2 = -1.8 - j2.4$$

(2) 在 Matlab 的 Simulink 环境下, 构建观测-状态反馈系统并运行, 记录该系统的阶跃响应曲线, 超调量和峰值时间。

目标在于实现这样的控制结构图:

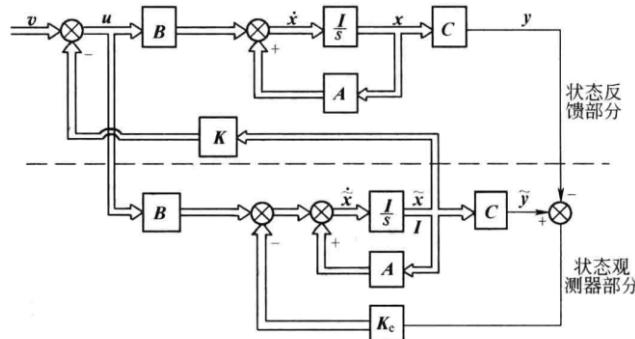


图 9-19 全维状态观测器方块图

构造状态观测器的目的是使状态估计值 \tilde{x} 尽量接近实际系统的状态 x , 由于系统初始状态等因素的影响, \tilde{x} 和 x 之间存在差异, 为减小这种差异, 利用 $\tilde{y} - y$ 负反馈至模拟系统的 \tilde{x} 处。

由于原系统是可控、可观的, 因此由分离定理知, 用状态观测器估值形成状态反馈时, 其系统的极点配置和观测器设计可分别独立进行。因此状态反馈增益矩阵采用第 3 题的 $K = [12 \ -8]$ 。下面来设计状态观测器:

状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -20 & 20 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y = [1 \ 0]x \end{cases}$$

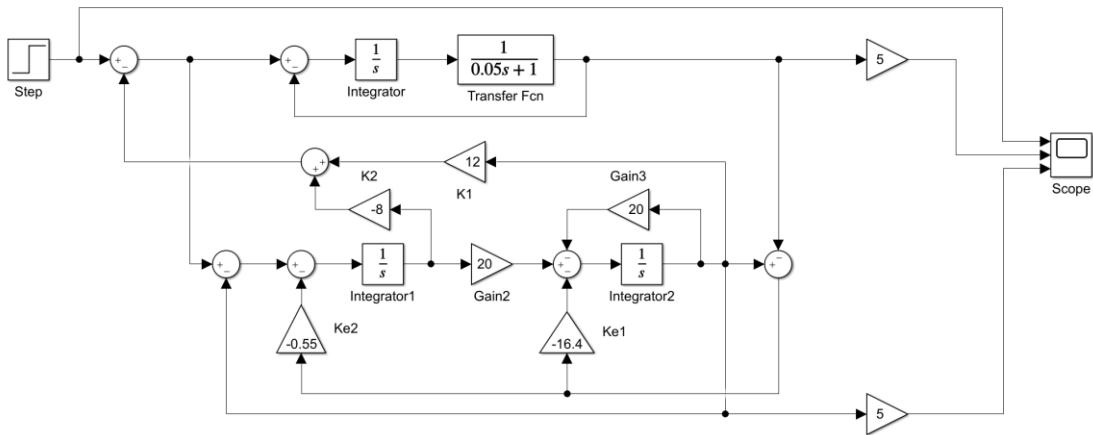
根据类似极点配置的方法:

$$\begin{aligned} |sI - A + K_e C| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 & 20 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \end{bmatrix} [1 \ 0] \right| \\ &= \begin{vmatrix} s + 20 + K_{e1} & -20 \\ K_{e2} + 1 & s \end{vmatrix} \\ &= s^2 + (K_{e1} + 20)s + 20K_2 + 20 \\ &= s^2 + 3.6s + 9 \end{aligned}$$

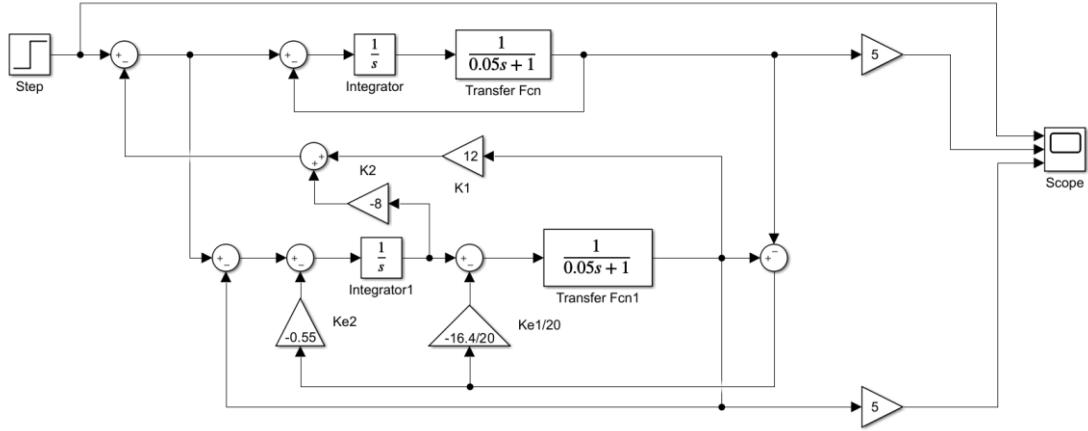
通过比较各项系数可求出观测器增益矩阵为 $K_e = \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16.4 \\ -0.55 \end{bmatrix}$, 将求得的状态反馈增益矩阵和观测器增益矩阵代入到如下的全维状态观测器方块图中即可得到 Simulink 仿真结构。注意, 和上一问同理, 还需要串入一个 5 倍的增益, 因为单纯的极点配置不能保证增益是我们想要的。

实验报告

理论上，构建的结构图应如下。



上图中第二个传递函数我把它拆开了，因为这样可以精确找到状态变量 x_1 的位置，从而加入反馈。不过考虑到实际物理电路中，观测器初始传函所对应器件应和原系统保持一致，最好不要把原来的电路的环节拆开，因此我进一步变形，得到了如下形式的仿真电路：



若受控对象的初始状态相同 (\hat{x} 和 x 之间本来就不存在差异)：

示波器输出：



利用 Peak Finder 标出了峰值点的位置，可知超调量 $M_p = 9.5 < 10\%$ ，峰值时间为 $t_p = 0.39s < 0.5s$ 。对比上一问，可以发现这里的输出和上一问一样，因为对于

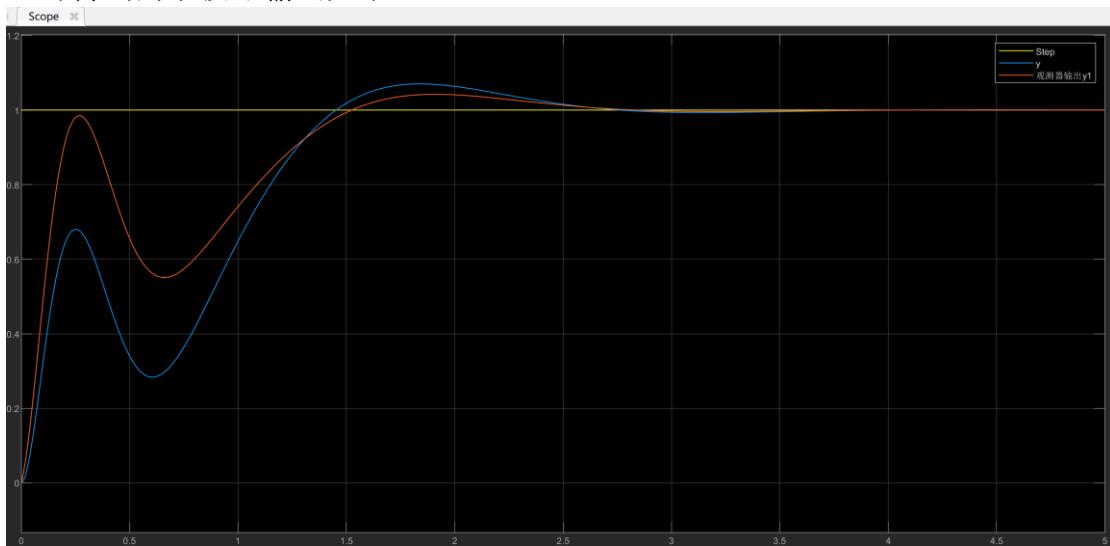
这个观测-状态反馈系统(观测+状态反馈),我使用的状态反馈参数和上一问的一样,且这里 y 和观测器输出的 y_1 完全重合,说明观测器的输出完全跟踪原系统的输出,进一步推出二者状态相同,与理论相符。

若受控对象的初始状态不同 (\tilde{x} 和 x 之间存在差异):

我选择改变其中一个积分环节的初值, $\tilde{x}_2 = c_1 + \int \dot{\tilde{x}}_2$, 改变积分环节的初值 c_1 ,

让 $\tilde{x}_2 \neq x_2$, 使得观测器和原系统的初始状态存在差异。

此时得到的示波器输出如下:



可以看出,开始时原系统和观测器的状态不同(状态是内部变量,不等于输出,但输出不同可以体现出状态不同)。但随着时间的推移,观测器渐渐跟踪原系统,使得二者的输出在后来一致,可推知状态变量在后来一致,也就是实现了跟踪。这与理论相符。

五、实验要求中还未回答的问题

给出实验中观测-状态反馈控制系统的闭环特征多项式及闭环极点。

$$\begin{aligned}
 D(s) &= |sI - A + BK| |sI - A + K_e C| \\
 &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 & 20 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [12 \quad -8] \right| \cdot \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 & 20 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16.4 \\ -0.55 \end{bmatrix} [1 \quad 0] \right| \\
 &= \left| \begin{bmatrix} s + 20 & -20 \\ 13 & s - 8 \end{bmatrix} \right| \cdot \left| \begin{bmatrix} s + 3.6 & -20 \\ 0.45 & s \end{bmatrix} \right| \\
 &= (s^2 + 12s + 100) \cdot (s^2 + 3.6s + 9) \\
 &= (s + 6 - 8j)(s + 6 + 8j)(s + 1.8 - 2.4j)(s + 1.8 + 2.4j) \\
 &= s^4 + 15.6s^3 + 152.2s^2 + 468s + 900
 \end{aligned}$$

可知: 闭环特征多项式为: $s^4 + 15.6s^3 + 152.2s^2 + 468s + 900$

闭环极点为: $-6+8j, -6-8j, -1.8+2.4j, -1.8-2.4j$, 实际上, 这就是我们想要配置的状态反馈极点+观测器极点。

六、实验总结

(1) 状态反馈

对于状态反馈，本质上是为了进行极点配置，将原系统转化为我们想要的系统。我们根据指标需求计算出需要的特征多项式（本题中为二阶系统，那么就设计一个二阶系统），然后根据其极点，算出状态反馈的反馈矩阵，进行反馈。（可控，意味着可以任意配置极点，否则不一定能配置出想要的极点）

需要注意的是，反馈矩阵的求取不能单纯地套公式。因为反馈矩阵是和我们预期的反馈结构相对应的，不同的结构会有不同的计算方法。状态变量的选取，状态空间表达式的建立，预期结构、反馈矩阵的求取这几个要素是需要对应的，否则算出来的不对。而且，状态反馈只保证配置极点，也就是特征多项式（闭环传递函数的分母），但并不能保证闭环传递函数的分子（如增益）是我们想要的。因此可能还要再最后串入一个比例环节来调整增益。

(2) 全维状态观测器

状态观测器的作用是观测原系统中不易直接观测的状态变量。比如在状态反馈时，需要得到状态变量，然后进行反馈，但很多情况下不容易直接获得原系统中的状态变量，这时就需要观测器。观测器的设计的出发点在于让 $e = \tilde{x} - x \approx 0$ ，使得观测器能够跟踪原系统。对于可控可观系统，状态反馈的极点配置与观测器的极点配置可以分开进行。实际上，观测器的设计就是输出反馈到状态微分处的输出反馈设计问题。

(3) 心得体会

刚开始做实验的时候，我只会套公式，然后算出反馈矩阵。不过后来我发现虽然能算出反馈矩阵 K ，但是我不知应该如何把这个 K 恰当地放入电路中。我仔细回顾了一下自控原理书中关于状态反馈这样部分的推导，终于明白了状态反馈设计的来龙去脉。状态变量的选取，状态空间表达式的建立，预期结构、反馈矩阵的求取这几个要素是需要对应的，不能随便乱套公式。由此我终于设计出了符合要求的系统，有了这个经验，再设计观测器的时候就容易些了。全维状态观测器的结构有一点复杂，不过按照原理一步一步推就可以推出来。

还有一点就是设计完后可能还要对增益进行调整，因为极点配置只能保证特征多项式（比如传递函数的分母），而并不能保证闭环传递函数的分子是我们想要的，因此可能还要再最后串入一个比例环节来调整增益。这也是我通过这次实验才深刻意识到的。

通过这次实验，我巩固了以前学习的理论知识。更加深刻地认识了状态反馈和全维状态观测器的本质。通过自己的设计与仿真，证明了实验与理论相符。