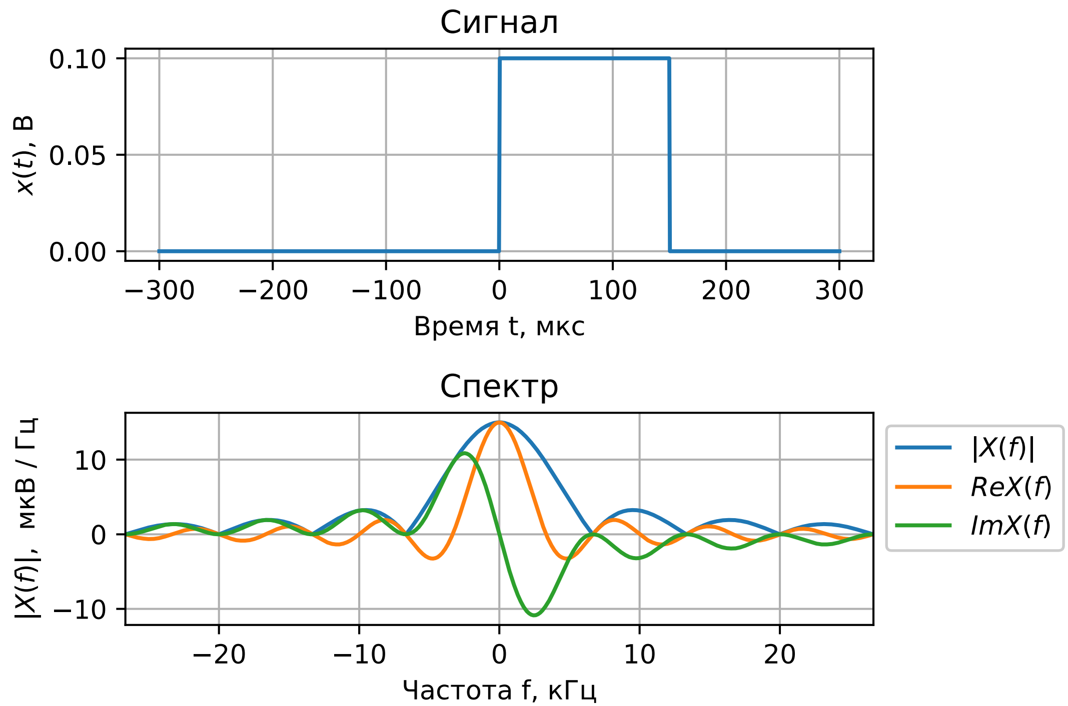
Лабораторная работа №1 «Дискретизация аналоговых сигналов»

Модуль 2. Спектры импульсных и периодических сигналов.

- Преобразование Фурье
- Свойства преобразования Фурье
- Спектры гармонических сигналов
- Спектры импульсных сигналов
- Спектр пачки равноотстоящих импульсов
- Частотные характеристики сигнала
- Свойства симметрии спектра реального сигнала



Преобразование Фурье

Преобразование Фурье

Все реальные сигналы имеют конечную удельную энергию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Например, если $x(t)$ — напряжение (или ток), действующее на единичном сопротивлении, то интеграл представляет собой энергию, выделяемую на единичном сопротивлении, и эта энергия конечна. В этом случае $x(t)$ — функция с интегрируемым квадратом на всей оси. По теореме Планшереля для функции $x(t)$ существует функция $X(f)$ также с интегрируемым квадратом на всей оси, связанна с $x(t)$ соотношением:

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left| X(f) - \int_{-T}^{T} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 df = 0.$$

Причем, если функции $x(t)$ и $X(f)$ абсолютно интегрируемы, то

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt,$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi f t) df.$$

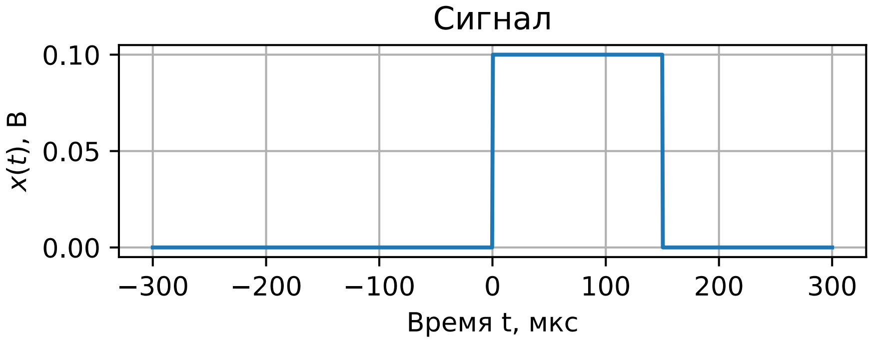
Эти формулы представляют собой пару преобразования Фурье (FT), где частота f измеряется в Герцах (Гц).

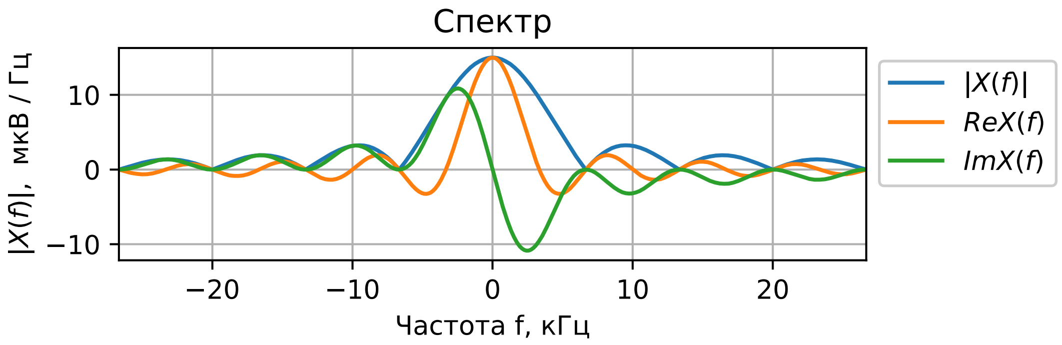
Для частоты циклической частоты $\omega = 2\pi f$, измеряемой в рад/с (радианы в секунду), пара преобразования Фурье имеет вид:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Первый интеграл называется спектральной плотностью, а второй - интегралом Фурье.





Свойства преобразования Фурье

Свойства преобразования Фурье

Далее будем использовать запись вида $x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(f)$, что означает, что для сигнала $x(t)$ преобразование Фурье будет $X(f)$. Предположим, что $x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(f)$ и $y(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}Y(f)$. Тогда справедливы следующие свойства преобразования Фурье.

1. Свойство линейности.

Для заданных чисел $\alpha\in\mathrm{C}$ и $\beta\in\mathrm{C}$

$$\alpha x(t)+\beta y(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\alpha X(f)+\beta Y(f).$$

2. Теорема запаздывания.

Для заданной задержки по времени τ (или опережения в случае $\tau<0$)

$$x(t-\tau)\overset{FT}{\leftrightarrow}\exp(-j2\pi f\tau)X(f).$$

3. Теорема смещения.

$$x(t)\exp(-j2\pi f_0 t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(f+f_0).$$

4. Теорема Парсеваля-Релея.

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)Y^*(f)df.$$

Здесь «*» означает комплексное сопряжение.

5. Теорема о спектре произведения.

$$x(t)y(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(f)\otimes Y(f),$$

$$x(t)y(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\int_{-\infty}^{\infty}X(\tilde{f})Y(f-\tilde{f})d\tilde{f}.$$

6. Теорема о спектре свертки.

$$x(t)\otimes y(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(f)Y(f),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau\overset{FT}{\leftrightarrow}X(f)Y(f).$$

7. Теорема об изменении масштаба.

$$x(at)\overset{FT}{\leftrightarrow}\frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right).$$

8. Теорема о спектре производной.

$$\frac{dx(t)}{dt}\overset{FT}{\leftrightarrow}j2\pi fX(f).$$

9. Теорема о производной спектра:

$$t\cdot x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\frac{1}{j2\pi}\frac{dX(f)}{df}.$$

Напоминание про дельта-функцию

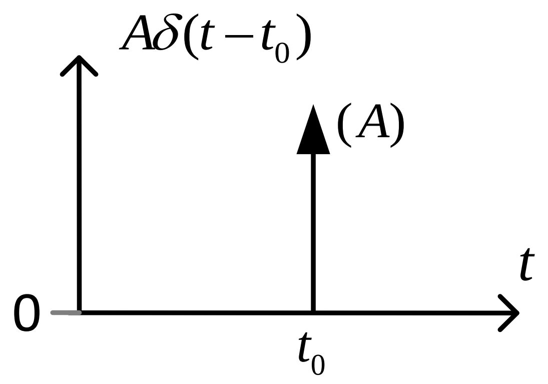
Напоминание про дельта-функцию

Для дельта-функции справедливо соотношение

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \;\; \forall \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим сигнал $y(t) = A\delta(t-t_0), A \in \mathbb{C}$. Это дельта-функция в точке t_0 оси времени. Площадь под графиком

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} A\delta(t-t_0)\,dt = A \;\; \forall \varepsilon > 0.$$



Предположим, что дельта-функция интегрируема по интервалу $(-\infty, t)$. Тогда

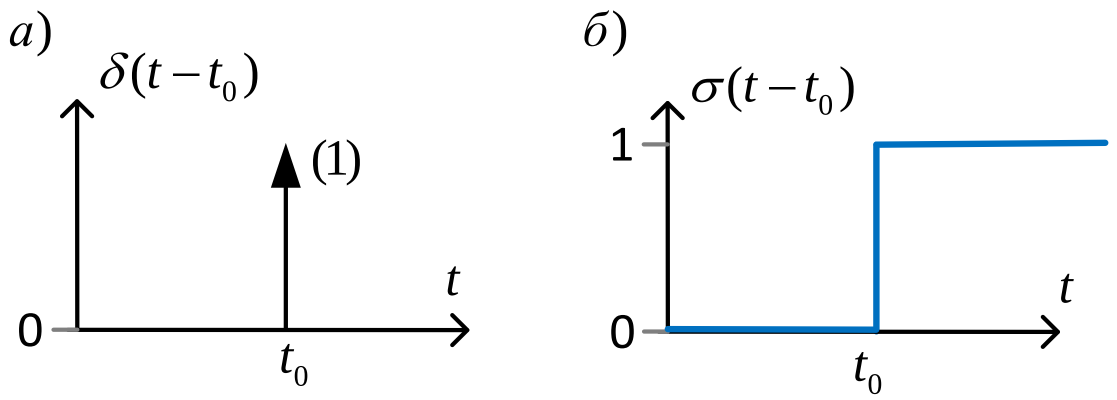
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-t_0)\,d\tau = \sigma(t-t_0),$$

где $\sigma(t-t_0)$ – *функция единичного скачка* или *функция Хевисайда*:

$$\sigma(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \;\; t < t_0, \\ 1/2 & \text{при} \;\; t = t_0, \\ 1 & \text{при} \;\; t > t_0. \end{cases}$$

Функция единичного скачка является интегралом от дельта-функции, а значит

$$\sigma'(t-t_0) = \delta(t-t_0).$$



а – дельта-функция, *б* – функция единичного скачка

Напоминание про дельта-функцию

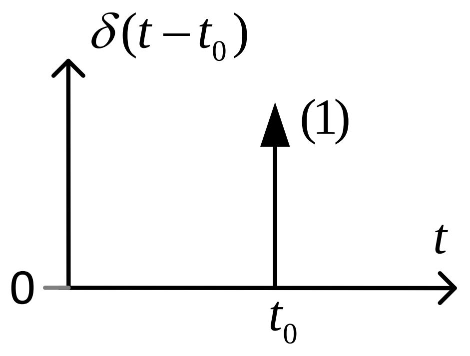
Фильтрующее свойство дельта-функции: её свёртка с любой ограниченной и непрерывной в точке t_0 функцией $x(t)$ равна

$$\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} x(t_0), & a < t_0 < b, \\ (1/2)x(t_0), & t_0 = a \ \text{ или } \ t_0 = b, \\ 0, & t_0 < a, \quad t_0 > b. \end{cases}$$

Если функция $x(t)$ в точке $t = t_0$ имеет разрыв первого рода, то

$$\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)\,dt = (1/2)[x(t_{0+}) + x(t_{0-})], \quad a < t_0 < b,$$

где $x(t_{0+})$ и $x(t_{0-})$ – значения $x(t)$ справа и слева от точки разрыва.



Если a – действительная величина, то выполняются следующие равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-a)\,dt = x(a),$$

$$x(t)\cdot\delta(t-a) = x(a)\cdot\delta(t-a),$$

$$\delta[(t-t_0)/a] = |a|\delta(t-t_0),$$

$$\delta(at-t_0) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t-\frac{t_0}{a}\right).$$

Спектр дельта-функции

Используя преобразование Фурье, находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi f t}dt = e^0 = 1,$$

т. е. спектр дельта-функции постоянен на всех частотах:

$$\delta(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} 1.$$

Спектры гармонических сигналов.

Вычислим обратное преобразование Фурье для $X(f)=\delta(f-f_0)$, т.е. от дельта-функции в точке f_0 оси частот.

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)\exp(j2\pi f t)df=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f-f_0)\exp(j2\pi f t)df.$$

$$x(t)=\exp(j2\pi f_0 t).$$

Тогда с учетом того, что

$$\cos(2\pi f_0 t)=\frac{\exp(j2\pi f_0 t)+\exp(-j2\pi f_0 t)}{2},$$

$$\sin(2\pi f_0 t)=\frac{\exp(j2\pi f_0 t)-\exp(-j2\pi f_0 t)}{2j}.$$

получаем

$$1\overset{FT}{\leftrightarrow}\delta(f),$$

$$\exp(j2\pi f_0 t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\delta(f-f_0),$$

$$\cos(2\pi f_0 t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0),$$

$$\sin(2\pi f_0 t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\frac{1}{2j}\delta(f-f_0)-\frac{1}{2j}\delta(f+f_0).$$

Пример. Определить спектр $X(f)$ гармонического сигнала

$$x(t)=\cos(2\pi f_1 t)+3\cos(2\pi f_2 t)$$

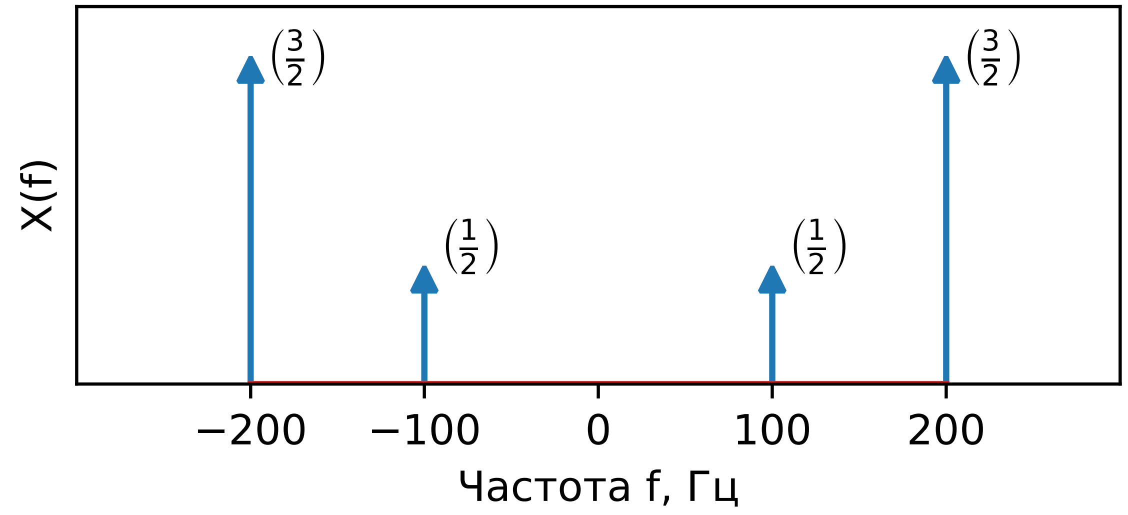
где $f_1=100$ Гц, $f_2=200$ Гц.

Решение. По свойствам преобразования Фурье

$$\cos(2\pi f_0 t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0).$$

Тогда по свойству линейности преобразования Фурье

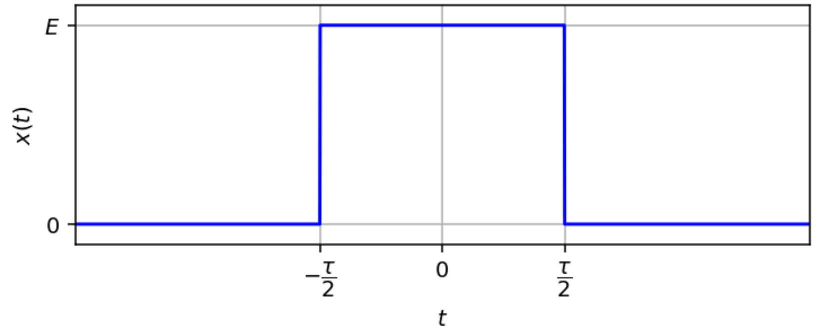
$$X(f)=\frac{1}{2}\delta(f-f_1)+\frac{1}{2}\delta(f+f_1)+\frac{3}{2}\delta(f-f_2)+\frac{3}{2}\delta(f+f_2)$$

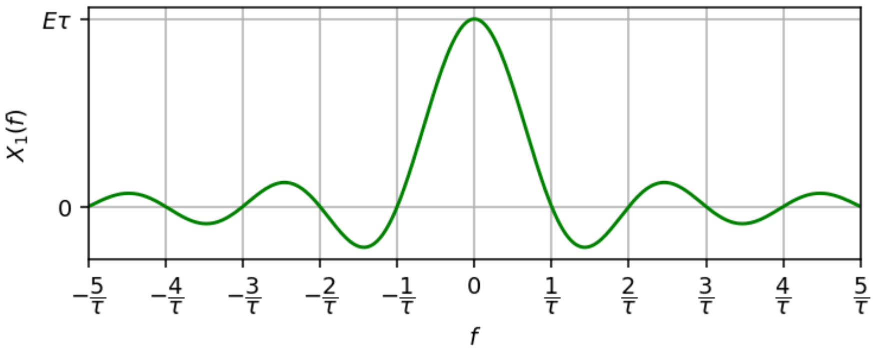


Симметричные прямоугольный и треугольный импульсы

Симметричный прямоугольный импульс длительностью τ.

$$x_1(t)=\begin{cases}E, & \text{если } |t|<\tau/2,\\ 0, & \text{если } |t|\geq\tau/2.\end{cases}$$





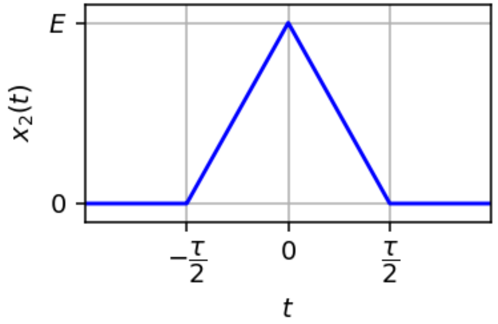
Спектр находим с помощью формулы преобразования Фурье:

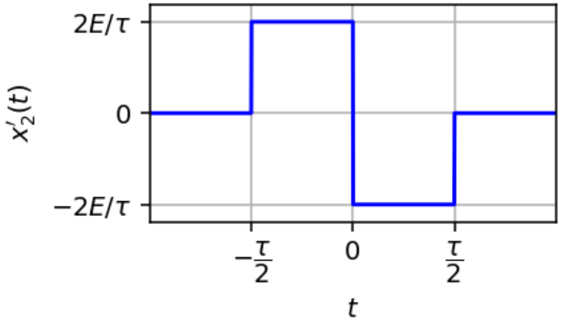
$$X_1(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)\exp(-j2\pi f t)dt=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}E\exp(-j2\pi f t)dt=$$

$$=\frac{E}{-j2\pi f}\exp(-j2\pi f t)\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=E\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f}=E\tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}.$$

Симметричный треугольный импульс длительностью τ.

$$x_2(t)=\begin{cases}E\left(1-\dfrac{2|t|}{\tau}\right), & \text{если } |t|<\tau/2,\\ 0, & \text{если } |t|\geq\tau/2.\end{cases}$$





1) Теорема о спектре производной: если $x_2(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X_2(f)$, то

$$\frac{dx_2(t)}{dt}\overset{FT}{\leftrightarrow}j2\pi f X_2(f).$$

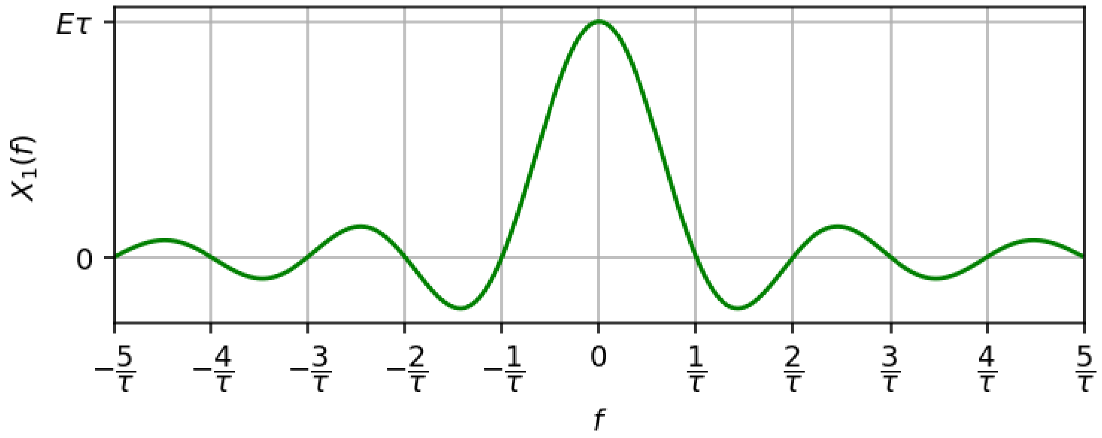
2) Теорема запаздывания: если $x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(f)$, то

$$x(t-\tau)\overset{FT}{\leftrightarrow}\exp(-j2\pi f\tau)X(f).$$

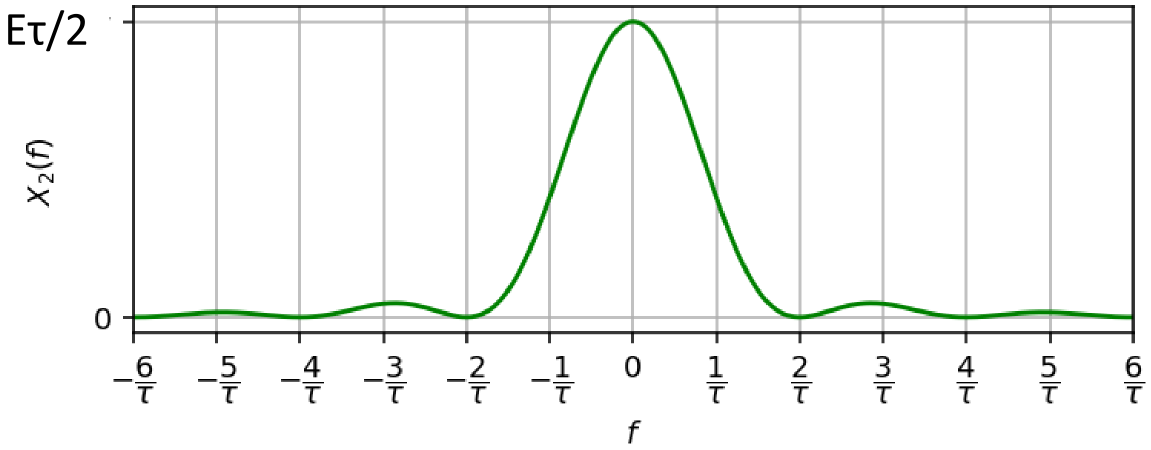
$$X_2(f)=\frac{1}{j2\pi f}\left(e^{j\pi f\tau/2}-e^{-j\pi f\tau/2}\right)\frac{2E}{\tau}\frac{\tau}{2}\frac{\sin(\pi f\tau/2)}{\pi f\tau/2}=\frac{E\tau}{2}\frac{\sin^2(\pi f\tau/2)}{(\pi f\tau/2)^2}$$

Симметричные прямоугольный и треугольный импульсы

Спектр прямоугольного импульса $X_1(f) = E\tau \dfrac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$.

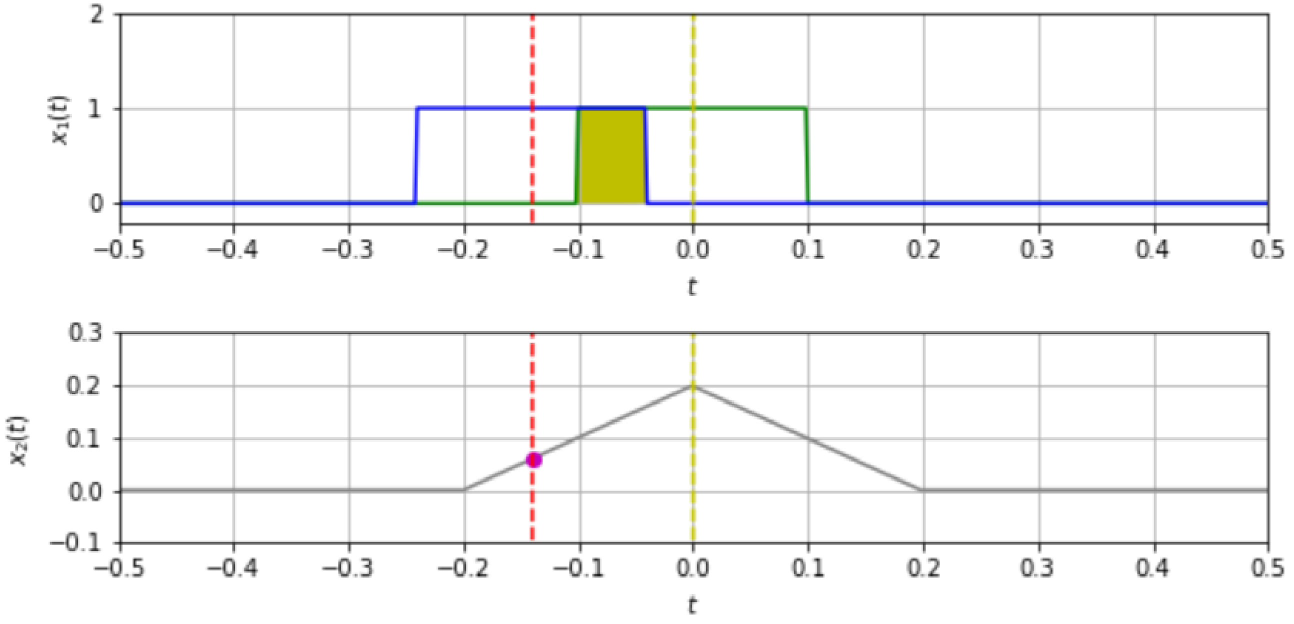


Спектр треугольного импульса $X_2(f) = \dfrac{E\tau}{2} \dfrac{\sin^2(\pi f \tau / 2)}{(\pi f \tau / 2)^2}$



Заметим, что ширина главного лепестка $X_2(f)$ в два раза больше, чем у $X_1(f)$.

Спектр треугольного импульса можно получить, используя теорему о свертке: если $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f)$ и $y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(f)$,, то $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f) Y(f)$. Треугольный импульс можно рассматривать как сверку двух прямоугольных соответствующей высоты с длительностью $\tau / 2$.

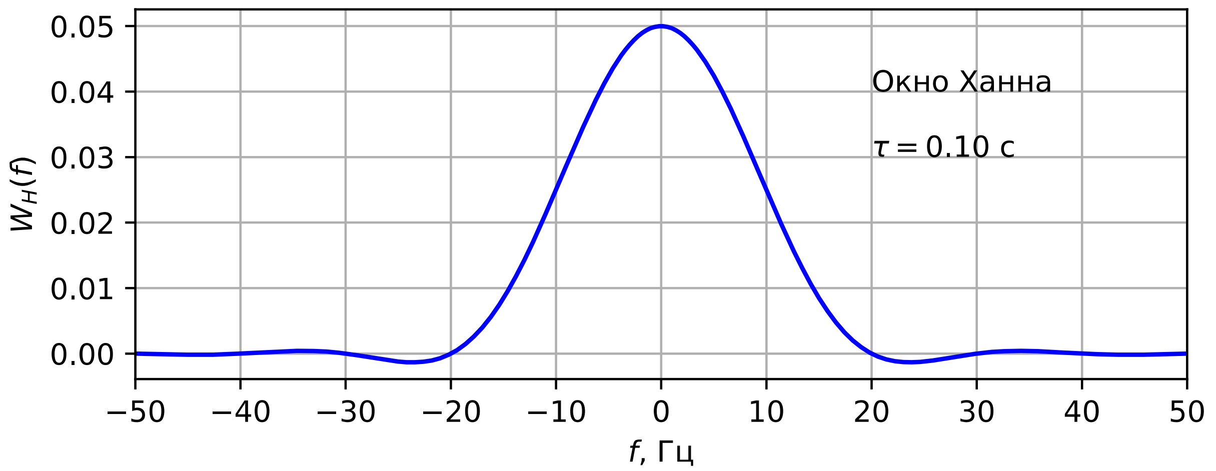


Окно Ханна

Окно Ханна.

Определим спектр $W_H(f)$ аналогового окна Ханна длительностью τ.

$$w_H(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right), & \text{если } |t|<\frac{\tau}{2},\\ 0, & \text{если } |t|\geq\frac{\tau}{2}.\end{cases}$$



Способ 1.

Пусть $w(t)$ — прямоугольное окно той же длительности.

$$w_H(t)=\frac{1}{2}w(t)+\frac{1}{4}w(t)\exp\left(j2\pi t\frac{1}{\tau}\right)+\frac{1}{4}w(t)\exp\left(-j2\pi t\frac{1}{\tau}\right).$$

Тогда по теореме смещения для преобразования Фурье

$$W_H(f)=\frac{1}{2}W(f)+\frac{1}{4}W\left(f-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{1}{4}W\left(f+\frac{1}{\tau}\right).$$

Далее остается подставить $W(f)$.

$$W_H(f)=\frac{\sin(\pi f\tau)}{2\pi f(1-\tau^2 f^2)}.$$

Способ 2.

Рассмотрим сигнал $x(t)=\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right)$.

Его спектр $X(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\delta\left(f-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{1}{4}\delta\left(f+\frac{1}{\tau}\right)$.

При этом $w_H(t)=w(t)x(t)$ и $W_H(f)=W(f)\otimes X(f)$.

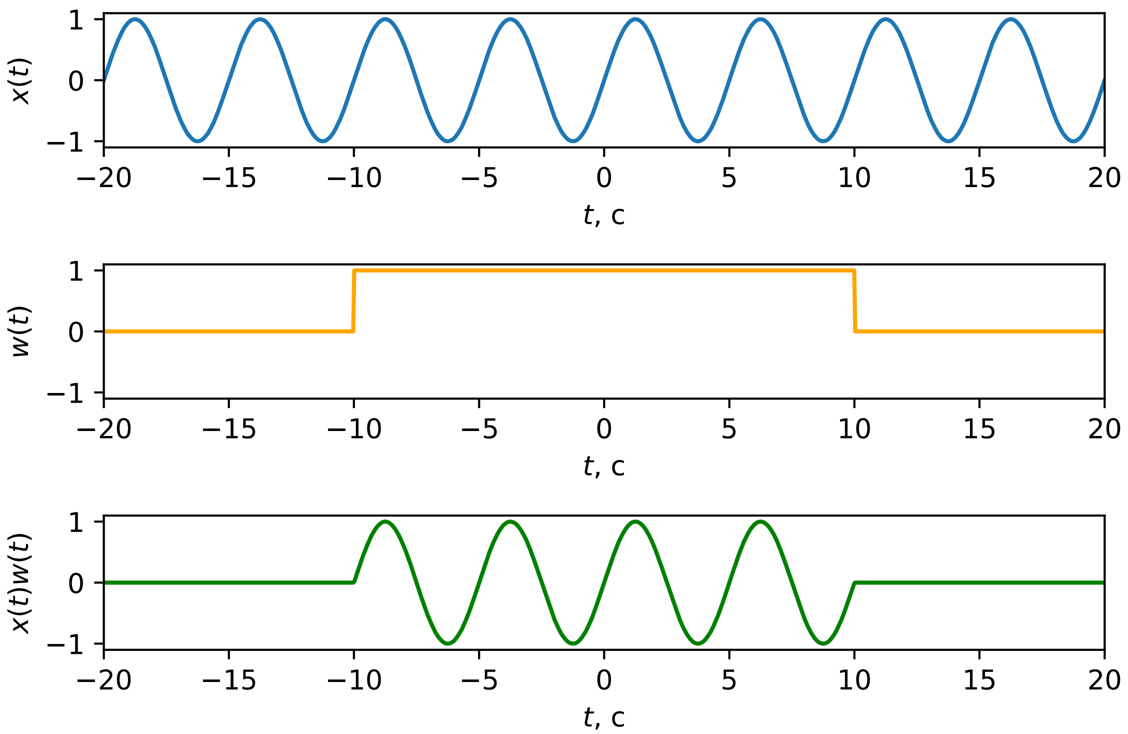
Использую фильтрующее свойство δ-функции, получаем

$$W_H(f)=\frac{1}{2}W(f)+\frac{1}{4}W\left(f-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{1}{4}W\left(f+\frac{1}{\tau}\right).$$

Эффект растекания спектральных компонент

Эффект растекания спектральных компонент при ограничении длительности сигнала

Ограничение сигнала по длительности эквивалентно умножению на прямоугольную оконную функцию: $y(t)=w(t)x(t)$.



Пусть $x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(f),\, w(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}W(f),\, y(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}Y(f)$. Тогда

$$w(t)x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\int_{-\infty}^{\infty}W(\tilde f)X(f-\tilde f)d\tilde f.$$

Пример. Гармонический сигнал $x(t)$ имеет вид

$$x(t)=\cos(2\pi f_1 t)+3\cos(2\pi f_2 t)$$

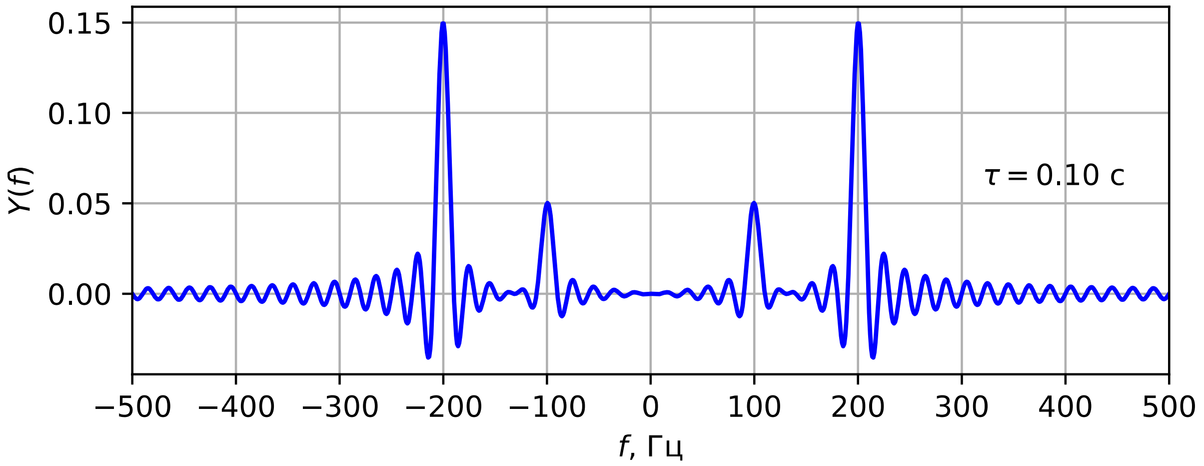
где $f_1=100$ Гц, $f_2=200$ Гц. Определить, какой вид будет иметь спектр для $x(t)w(t)$, где $w(t)$ — некоторая оконная функция.

Решение. Пусть $x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(f),\, w(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}W(f),\, y(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}Y(f)$. Тогда

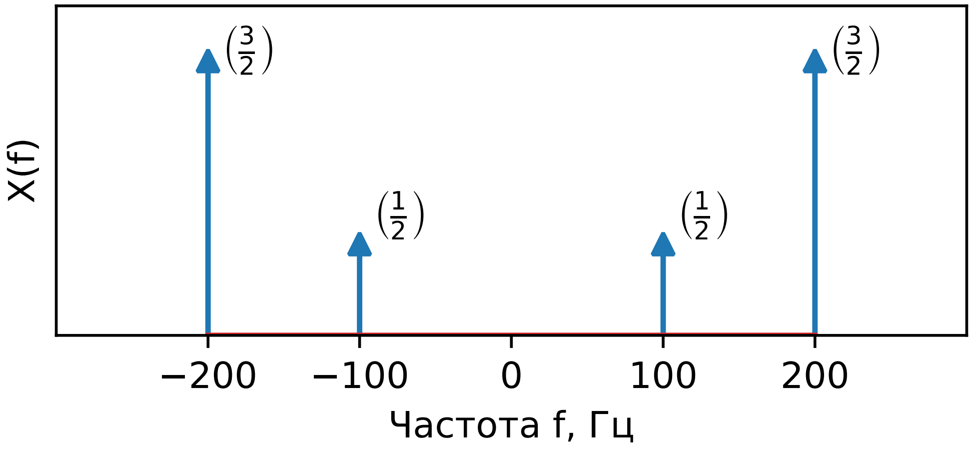
$$X(f)=\frac{1}{2}\delta(f-f_1)+\frac{1}{2}\delta(f+f_1)+\frac{3}{2}\delta(f-f_2)+\frac{3}{2}\delta(f+f_2).$$

$$w(t)x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\int_{-\infty}^{\infty}W(\tilde f)X(f-\tilde f)d\tilde f.$$

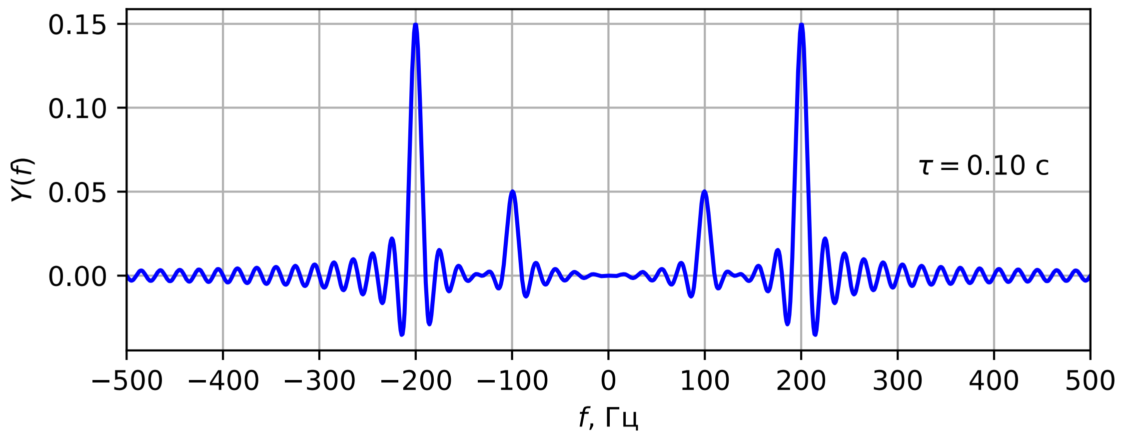
$$Y(f)=\frac{1}{2}W(f-f_1)+\frac{1}{2}W(f+f_1)+\frac{3}{2}W(f-f_2)+\frac{3}{2}W(f+f_2).$$



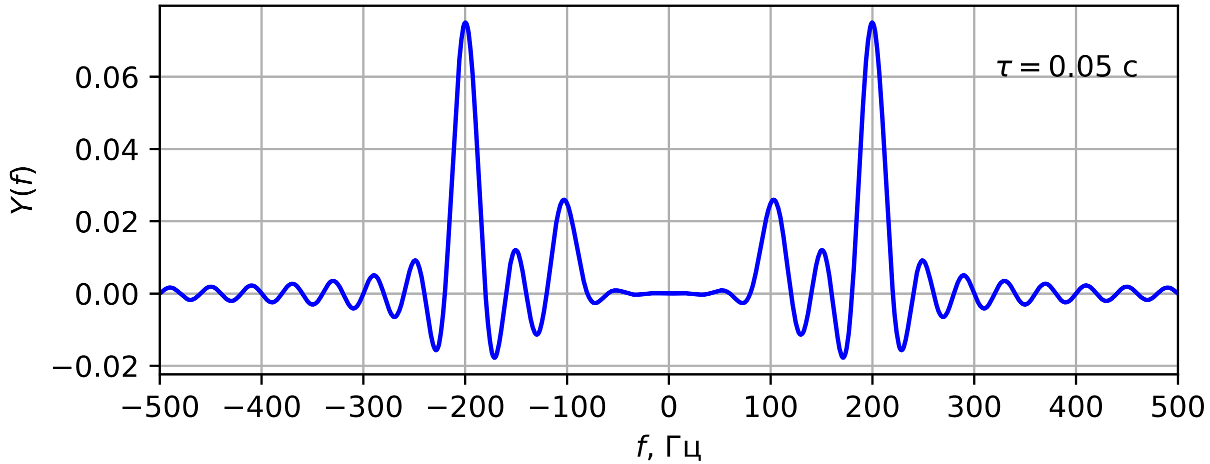
Эффект растекания спектральных компонент



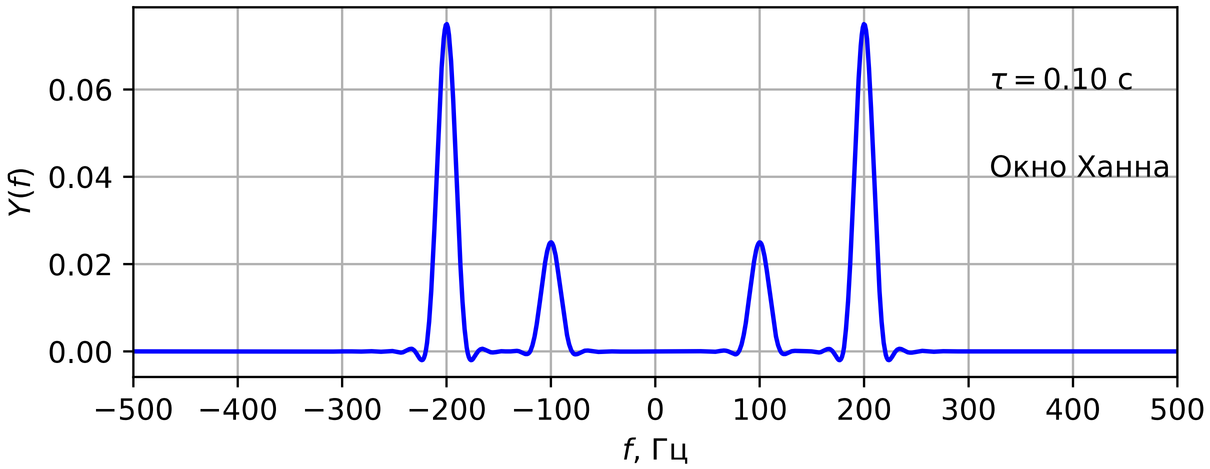
$w(t)$ - прямоугольное окно длиной $\tau = 0{,}1\ c.$



$w(t)$ - прямоугольное окно длиной $\tau = 0{,}05\ c.$



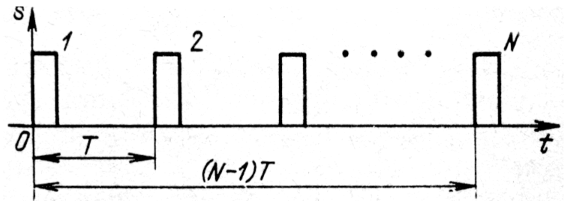
$w(t)$ - окно Ханна длиной $\tau = 0{,}1\ c.$



Спектр пачки равноотстоящих импульсов

Спектр пачки равноотстоящих импульсов

Найдём спектр пачки равноотстоящих импульсов. Для определённости возьмём пачку из N прямоугольных импульсов



Обозначим через $X_1(\omega)$ $(\omega = 2\pi f)$ спектральную плотность первого импульса. Тогда для группы из N равноотстоящих импульсов в соответствии с теоремой запаздывания

$$X(\omega) = X_1(\omega)[1 + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T} + \ldots + e^{-j\omega(N-1)T}] = X_1(\omega)\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega kT}.$$

Суммируя N членов геометрической прогрессии, получаем

$$X(\omega) = X_1(\omega)\frac{1 - e^{-j\omega NT}}{1 - e^{-j\omega T}} = X_1(\omega)\frac{e^{-j\omega NT/2}\left(e^{j\omega NT/2} - e^{-j\omega NT/2}\right)}{e^{-j\omega T/2}\left(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}\right)} =$$

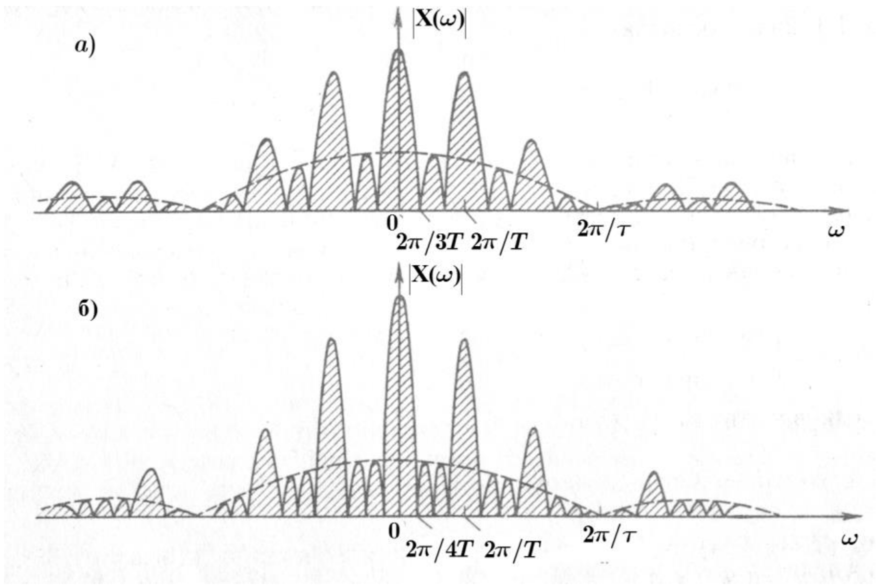
$$= X_1(\omega)\frac{\sin \omega NT/2}{\sin \omega T/2}\exp\left(-j\omega\left(\frac{T}{2}(N-1)\right)\right).$$

Видно, что на частотах $\omega = m2\pi/NT$, где m – целое, $X(\omega) = 0$. Подставляя сюда значение

$$X_1(\omega) = E\tau\frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}\exp\left(-j\omega\frac{\tau}{2}\right),$$

где τ– длительность отдельного импульса, получаем окончательно для спектра пачки из N равноотстоящих прямоугольных импульсов:

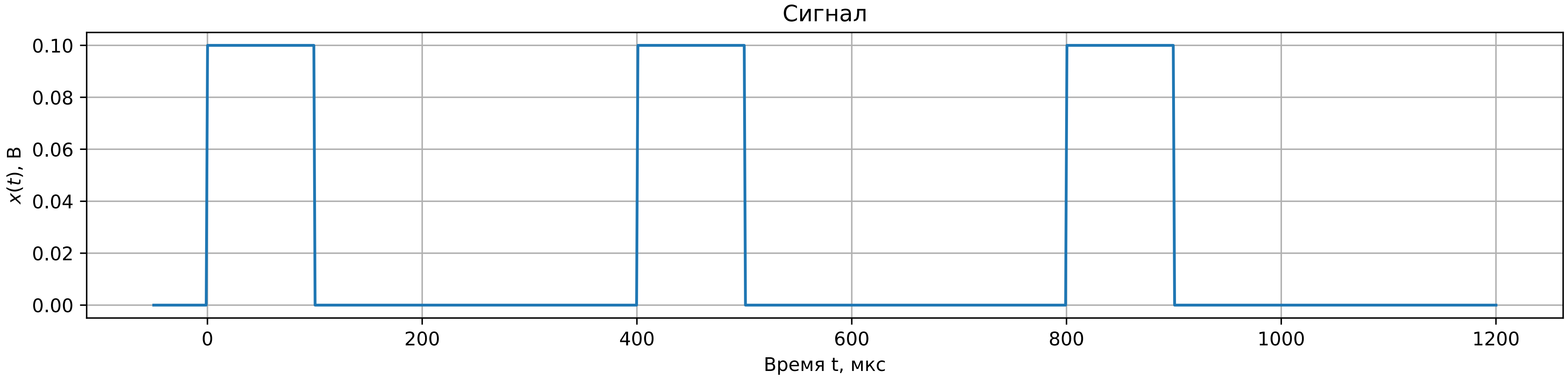
$$X(\omega) = \exp\left(-j\omega\left(\frac{T}{2}(N-1) + \frac{\tau}{2}\right)\right)E\tau\frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}\frac{\sin \omega NT/2}{\sin \omega T/2}.$$

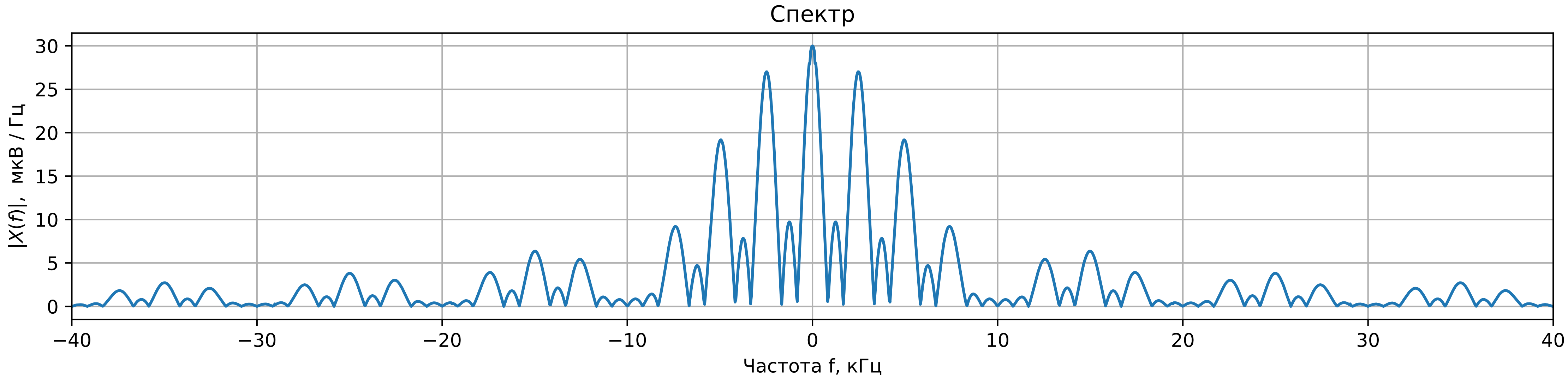


Модуль спектра пачки прямоугольных импульсов: а – три импульса в пачке, б – четыре импульса в пачке. интервал между соседними импульсами $T = 3\tau$. Пунктиром изображён модуль спектра одиночного импульса

Спектр пачки равноотстоящих импульсов

$$X(f)=\exp\left(-j\omega\left(\frac{T}{2}(N-1)+\frac{\tau}{2}\right)\right)E\tau\frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f}\frac{\sin(\pi NTf)}{\sin(\pi Tf)},\ T=400\text{ мкс},\ \tau=100\text{ мкс},\ N=3.\ \ \frac{1}{\tau}=10\text{ кГц},\ \frac{1}{T}=2{,}5\text{ кГц}.$$





Частотные характеристики сигнала, симметрия спектра

Частотные характеристики сигнала

В общем случае спектральная плотность $X(f)$ – комплексная функция частоты:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi f\tau)dt,$$

$$X(f) = \operatorname{Re} X(f) + j\operatorname{Im} X(f) = |X(f)|\, e^{j\varphi(f)},$$

где

$$\operatorname{Re} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos 2\pi f t\, dt,$$

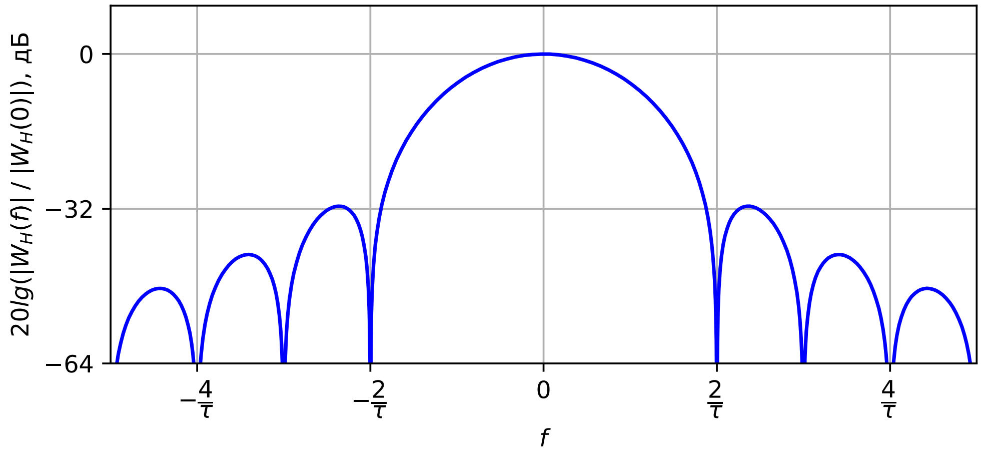
$$\operatorname{Im} X(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin 2\pi f t\, dt,$$

$|X(f)|$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ),

$\varphi(f) = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{Im} X(f)}{\operatorname{Re} X(f)}$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ).

АЧХ в децибелах (дБ) измеряется относительно некоторого значения. Для окон обычно требуется определить уровень на частоте f относительно главного лепестка:

$$20\lg\left|\frac{W(f)}{W(0)}\right| = 10\lg\frac{|W(f)|^2}{|W(0)|^2}.$$



Свойства симметрии спектра реального сигнала

Для действительного сигнала

$$X(f) = X^*(-f).$$

Это означает, что для действительного сигнала $\operatorname{Re} X(f)$ и $|X(f)|$ – чётные функции, а $\operatorname{Im} X(f)$ и $\varphi(f)$ – нечётные функции частоты. Если в дополнение к этому $x(t)$ – чётная функция, то

$$X(f) = X(-f),$$

т. е. спектральная плотность является действительной и чётной функцией частоты f.