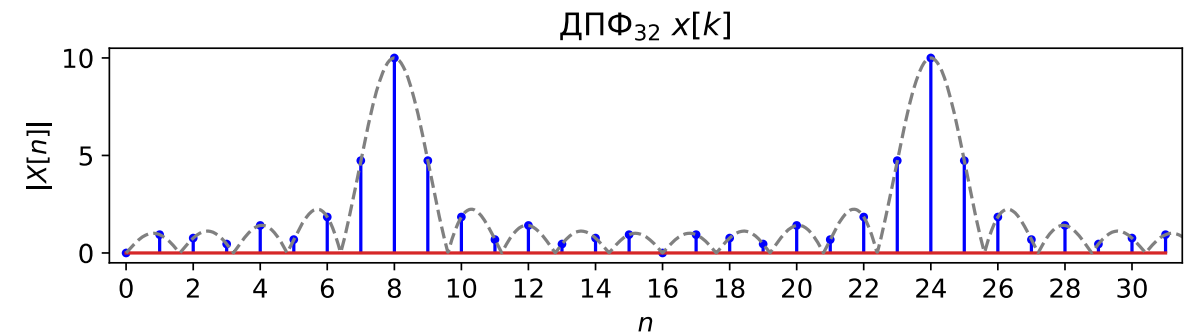


Лабораторная работа №2 «Дискретное и дискретное во времени преобразования Фурье (ДВПФ, ДПФ)»

Модуль 3. Связь между ДВПФ и ДПФ.

- ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.
 - Форма записи ДПФ
 - Связь между ДПФ и ДВПФ в точках $\nu = n / N$.
 - Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал (Zero Padding)
 - Интерполяционная формула восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ в точках $\nu \neq n / N$
- ДПФ периодических последовательностей
 - Форма записи ДПФ
 - Связь между ДПФ и ДВПФ для периодических последовательностей.
- Частотная ось ДПФ



ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Форма записи ДПФ

Пусть $x[k]$ — последовательность отсчетов сигнала длиной в N отсчетов $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) определяется следующим образом

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Функцию $X[n]$ обычно рассматривают только для значений $n = 0, 1, \dots, N - 1$, при этом она является периодической с периодом N , $n \in \mathbb{Z}$.

В обратном преобразовании необходимо ограничить длительность восстанавливаемой последовательности отсчетов сигнала, т.е. рассматривать $x[k]$ для значений

$k = 0, 1, \dots, N - 1$. Если длительность не ограничить, то будет восстановлена последовательность, являющаяся периодическим продолжением $x[k]$.

Связь между ДПФ и ДВПФ в точках $\nu = n / N$.

Рассмотрим N -точечную последовательность $x[k]$. Ее ДВПФ

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi\nu k).$$

ДПФ для последовательности $x[k]$, имеет следующий вид:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j2\pi \frac{n}{N} k\right).$$

Сравнивая формулы, в точках $\nu = n / N$ получаем равенство

$$X(\nu)|_{\nu=n/N} = X[n]$$

Это означает, что коэффициенты ДПФ $X[n]$ равны отсчетам функции $X(\nu)$, взятым в точках $\nu = n / N$ (с шагом $\Delta\nu = 1 / N$).

ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Пример.

Рассмотрим для $N = 20$ последовательность отсчетов

$$x[k] = \begin{cases} \sin\left(2\pi \frac{4,5}{20} k\right) + \sin\left(2\pi \frac{7,5}{20} k\right), & 0 \leq k < N, \\ 0, & \{k < 0\} \cup \{k \geq N\}. \end{cases}$$

ДПФ и ДВПФ этой последовательности для частот $\nu \in [0;1]$ изображены по модулю на рисунке. Заметим, что в точках $\nu = n / 20$

$$X(\nu)\big|_{\nu=n/20} = X[n],$$

т.е. значения ДВПФ и ДПФ (с точностью до использованной нормировки) совпадают. Расстояние между соседними отсчетами по оси частот $\Delta\nu = 1 / N = 1 / 20 = 0,05$.

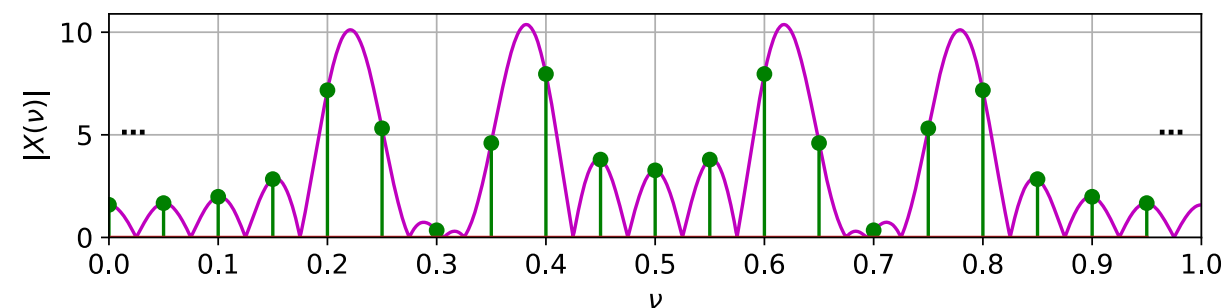
Заметим, что частоты синусоид в ней не совпадают с бинами ДПФ (1 бин соответствует $1 / N$):

$$\nu_1 = \frac{4,5}{20} = 0,225, \quad \nu_2 = \frac{7,5}{20} = 0,375.$$

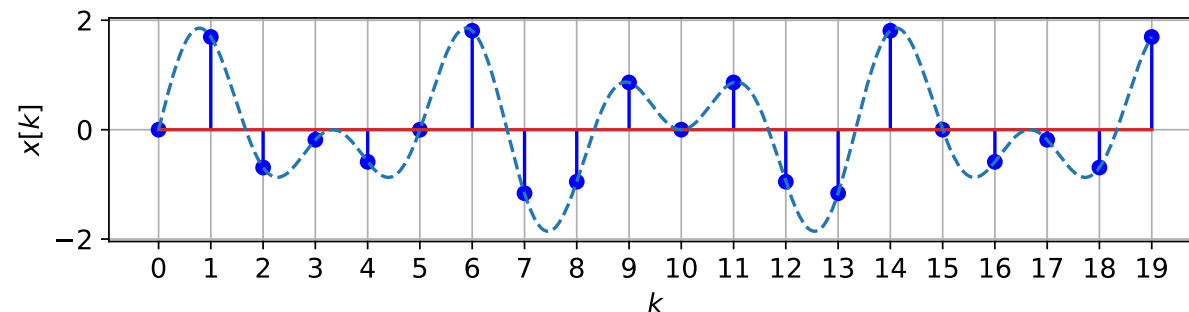
В ДВПФ вблизи¹ этих частот мы наблюдаем максимумы.

Вопрос. Как улучшить качество визуализации этих максимумов с помощью ДПФ?

ДВПФ и ДПФ_{N=20} сигнала $x[k]$ (один период)



Сигнал $x[k]$, $k = 0, 1, \dots, 15$



¹ Максимумы могут быть смещены из-за влияния соседних спектральных компонент.

ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал (Zero Padding)

Улучшим качество визуализации ДВПФ при помощи отсчетов ДПФ. Получим M – точечную последовательность. Добавим в исходную последовательность $x[k]$ $M - N$ отсчетов, равных нулю:

$$y[k] = \begin{cases} x[k], & 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, & N \leq k \leq M-1. \end{cases}$$

Ее ДПФ M – точечное и определяется формулой

$$Y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} y[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{M} nk\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{M} nk\right).$$

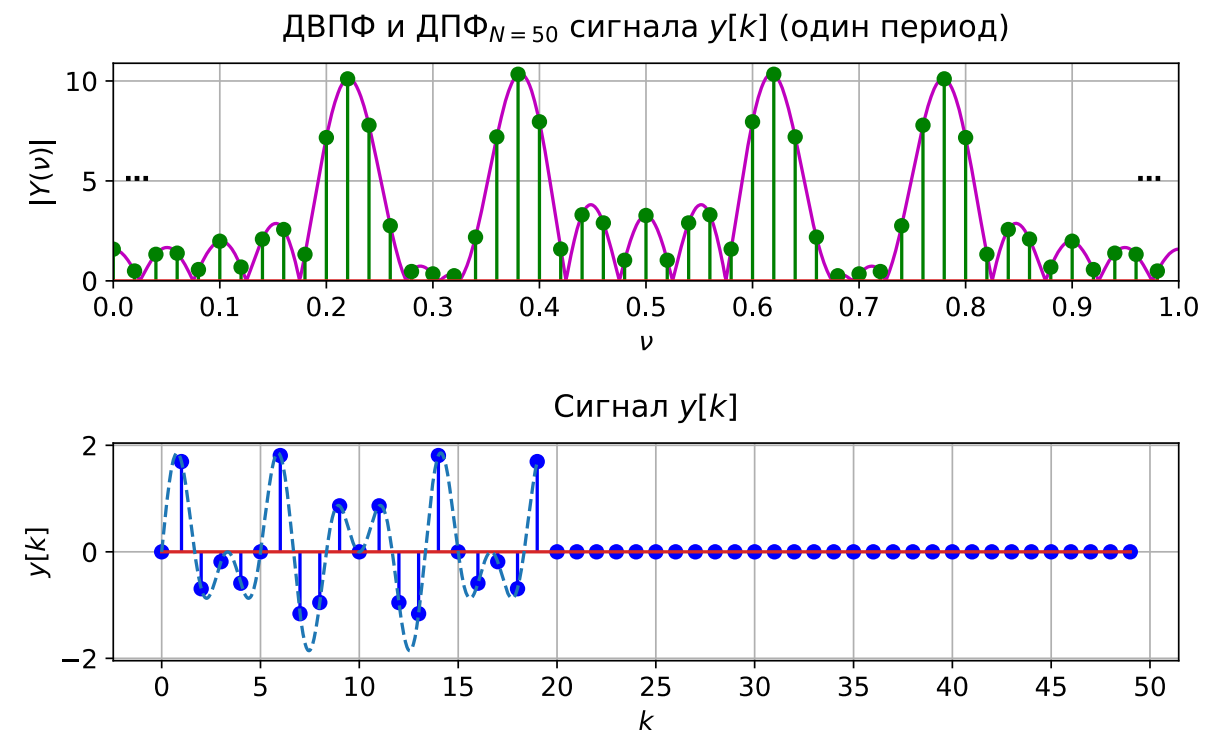
При этом ДВПФ не изменяется:

$$Y(\nu) = \sum_{k=0}^{M-1} x[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi\nu k).$$

С помощью добавления нулевых отсчетов улучшено качество визуализации ДВПФ, поскольку число точек $\nu_n = n/M$ на одном периоде больше, чем $\nu_n = n/N$.

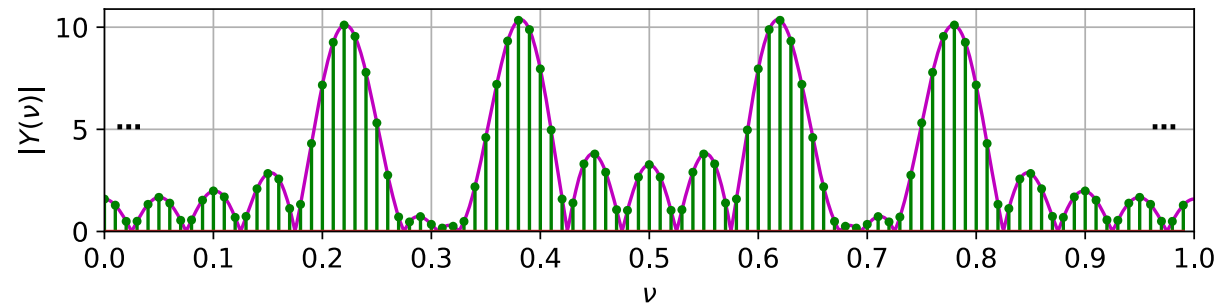
Возврат к примеру.

Теперь дополним рассматриваемый в ДПФ участок сигнала нулевыми отсчетами до длины 50. Отсчетов ДПФ на одном периоде станет больше, расстояние между ними $\Delta\nu = 1/50$.

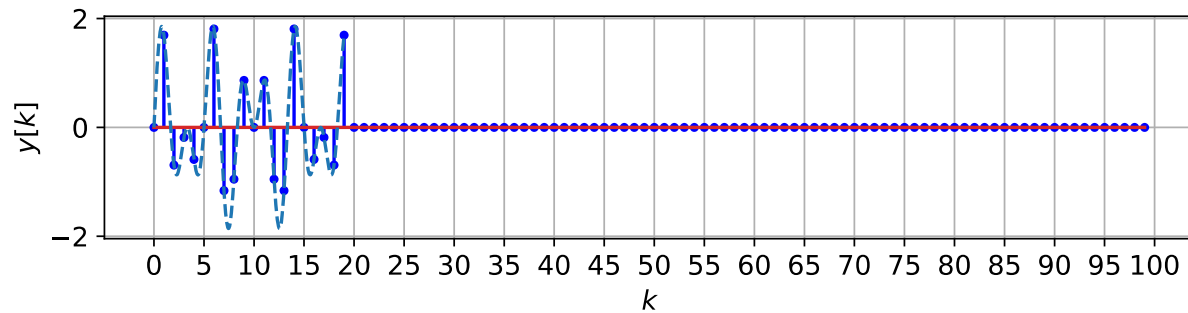


ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

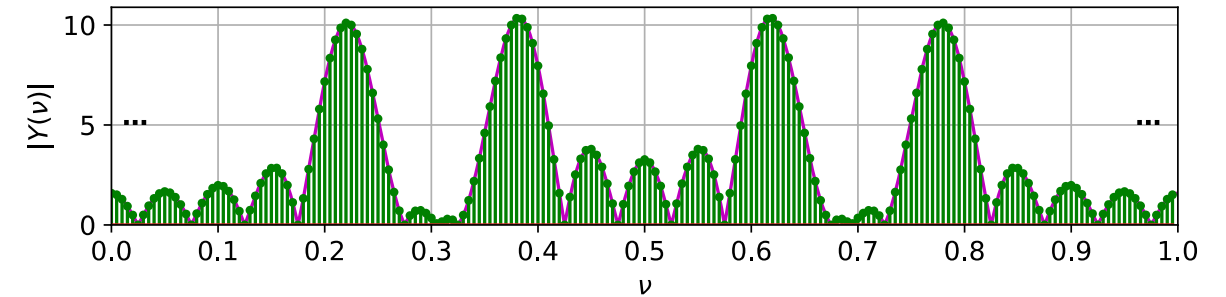
ДВПФ и ДПФ_{N=100} сигнала $y[k]$ (один период)



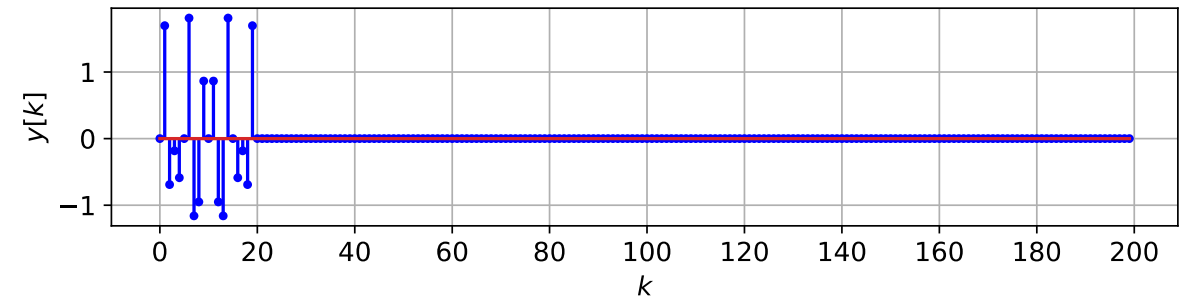
Сигнал $y[k]$



ДВПФ и ДПФ_{N=200} сигнала $y[k]$ (один период)



Сигнал $y[k]$



ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Интерполяционная формула восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ в точках $v \neq n/N$

Рассмотрим N – точечную последовательность $x[k]$. Ее ДВПФ

$$X(v) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi vk).$$

Обратное ДПФ для последовательности $x[k]$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$$

$$\begin{aligned} X(v) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right) \right) \exp(-j2\pi vk) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi \left(v - \frac{n}{N}\right) k\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно множитель $\sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi(v - n/N)k)$.

Это сумма N членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$, и знаменателем $q = \exp(-j2\pi(v - n/N))$.

В точках $v \neq n/N$, где $q \neq 1$, получаем (используя известные формулы $S_N = b_1(1 - q^N)/(1 - q)$ и $\sin \varphi = (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})/(2j)$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi \left(v - \frac{n}{N}\right) k\right) &= \frac{1 - \exp(-j2\pi(v - n/N)N)}{1 - \exp(-j2\pi(v - n/N))} = \\ &= \frac{e^{-j\pi(v - n/N)N} \{ \exp(j\pi(v - n/N)N) - \exp(-j\pi(v - n/N)N) \}}{e^{-j\pi(v - n/N)N} \{ \exp(j\pi(v - n/N)) - \exp(-j\pi(v - n/N)) \}} = \\ &= \exp(-j\pi(v - n/N)(N-1)) \frac{\sin(\pi(v - n/N)N)}{\sin(\pi(v - n/N))} \end{aligned}$$

Подставив формулу для суммы в связь, получаем интерполяционную формулу восстановления континуальной функции $X(v)$ по коэффициентам ДПФ $X[n]$:

$$X(v) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \frac{\sin(\pi(v - n/N)N)}{\sin(\pi(v - n/N))} \exp(-j\pi(v - n/N)(N-1)).$$

Заметим, что для последовательностей конечной длительности ДВПФ непрерывно, а значит для интерполяционной формулы выполняется

$$\lim_{v \rightarrow n/N} X(v) = X[n].$$

ДПФ периодических последовательностей

ДПФ периодических последовательностей

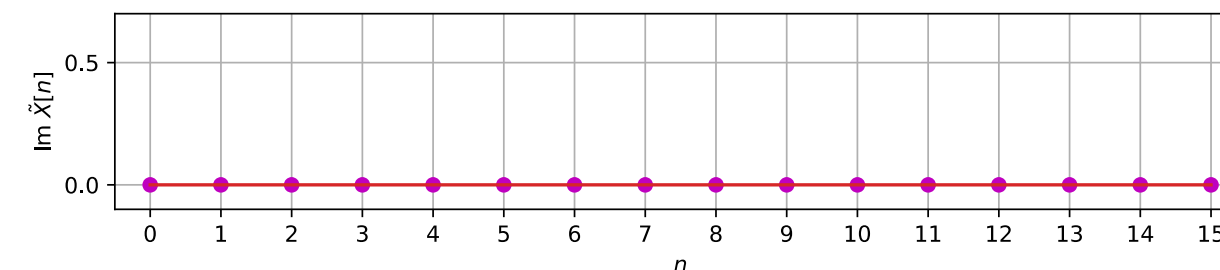
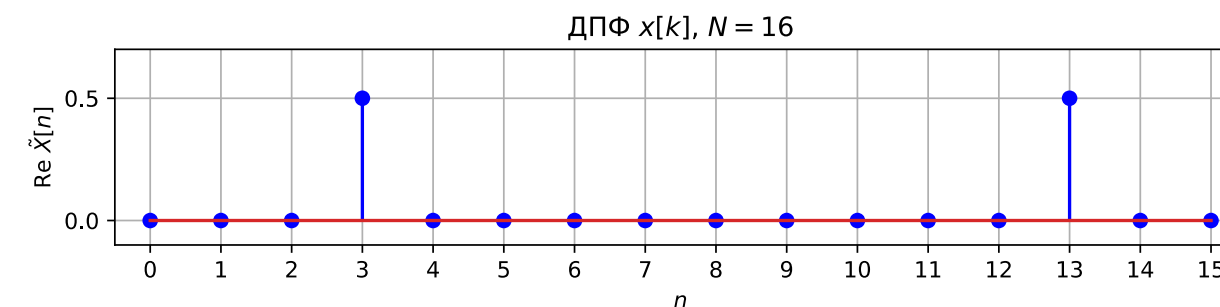
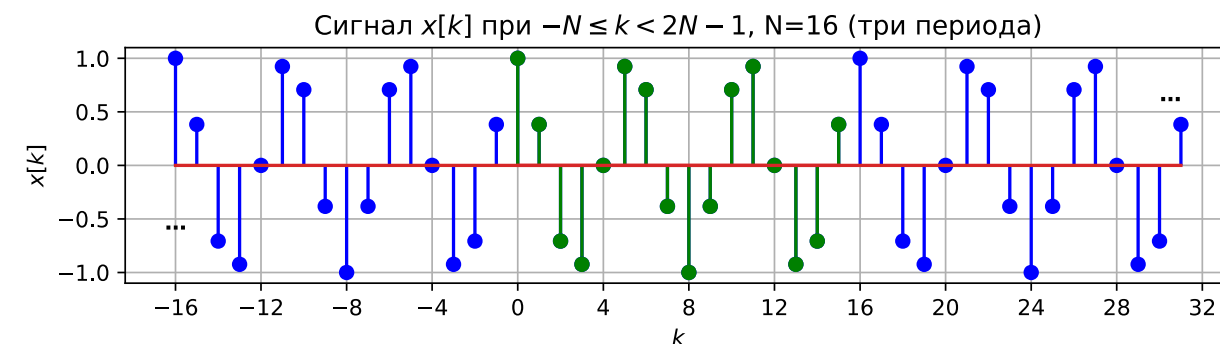
Форма записи ДПФ

Пусть $x[k]$, $k \in \mathbb{Z}$ — периодическая последовательность отсчетов сигнала с периодом N . Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности $x[k]$ определяется следующим образом

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right),$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right).$$

$\tilde{X}[n]$ может рассматриваться как N -точечная последовательность коэффициентов ДПФ (отсчетов ДПФ), где $n = 0, 1, \dots, N-1$. $\tilde{X}[n]$ может также рассматриваться как периодическая последовательность с периодом N , $n \in \mathbb{Z}$. В обратном преобразовании последовательность $x[k]$ также получится периодической.

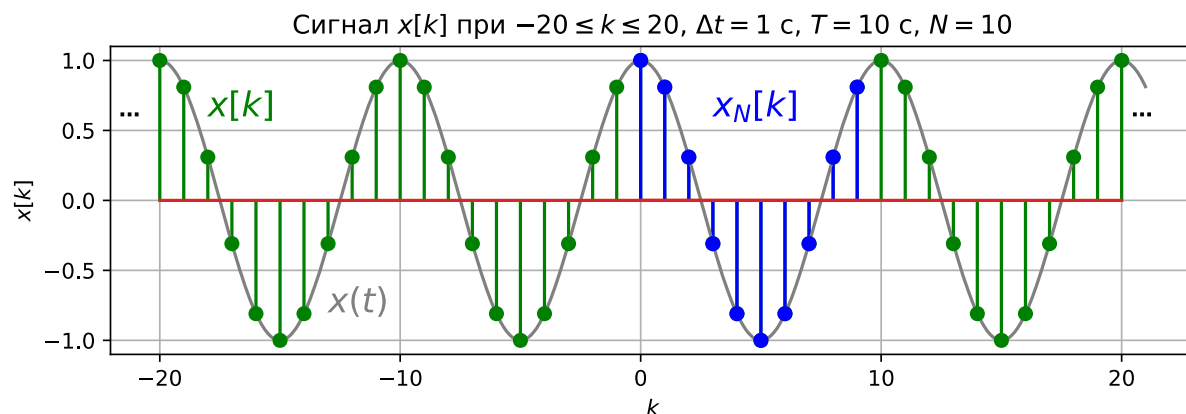


ДПФ периодических последовательностей

Связь между ДПФ и ДВПФ для периодических последовательностей.

Пусть аналоговый периодический сигнал $x(t)$ с периодом T дискретизован с шагом $\Delta t = T / N$. Тогда на одном периоде $x(t)$ будет содержаться N отсчетов (если крайний правый отсчет попадает на границу периода, то будем считать его относящимся к следующему периоду). Выделим для последовательности отсчетов $x[k]$ один период

$$x_N[k] = \begin{cases} x[k], & 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, & \{k < 0\} \cup \{k \geq N\}. \end{cases}$$



Пусть $x_N[k] \xleftrightarrow{DTFT} X_N(\nu)$. Последовательность $x[k]$ может быть представлена в виде дискретной сверки

$$x_N[k] \otimes \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mN].$$

Причем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mN] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

Тогда

$$X(\nu) = \frac{1}{N} X_N(\nu) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

Последовательность $x_N[k]$ имеет конечную длительность, является абсолютно суммируемой. $X_N(\nu)$ непрерывна.

$$X(\nu) = \frac{1}{N} X_N(\nu) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

При этом $X(\nu)$ (ДВПФ периодической последовательности $x[k]$) имеет дискретную структуру, которой в континуальной записи соответствует некоторый периодический набор δ -функции.

ДПФ периодических последовательностей

$$X(v) = \frac{1}{N} X_N(v) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{N}\right).$$

Заметим, что для каждого слагаемого в сумме по свойствам δ -функции выполняется равенство

$$\frac{1}{N} X_N(v) \delta\left(v - \frac{n}{N}\right) = \frac{1}{N} X_N\left(\frac{n}{N}\right) \delta\left(v - \frac{n}{N}\right).$$

Введем периодическую функцию дискретного аргумента $\tilde{X}[n]$, значения которой будут соответствовать площадям дельта-функций в $X(v)$ в точках $v = n / N$:

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[n] \delta\left(v - \frac{n}{N}\right).$$

При этом

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} X_N\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi \frac{n}{N} k).$$

$$\begin{aligned} x[k] &= \int_{-1/2}^{1/2} X(v) \exp(j2\pi vk) dv = \int_0^1 X(v) \exp(j2\pi vk) dv = \\ &= \int_0^1 X_N(v) \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{N}\right) \exp(j2\pi vk) dv = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_N\left(\frac{n}{N}\right) \exp(j2\pi \frac{n}{N} k).$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp(j2\pi \frac{n}{N} k).$$

Получаем следующую пару формул

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp(-j2\pi \frac{n}{N} k),$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] \exp(j2\pi \frac{n}{N} k),$$

определяющую прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ). В ДПФ частотная (n) и временная (k) переменная дискретны, функция $\tilde{X}[n]$ периодична с периодом N , а в качестве главного периода для отсчетов ДПФ выбирают такой, на котором $n = 0, \dots, N - 1$.

ДФ периодических последовательностей

Пример. Предположим, что имеется периодическая последовательность ($-\infty < k < +\infty$)

$$x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k).$$

Учитывая, что

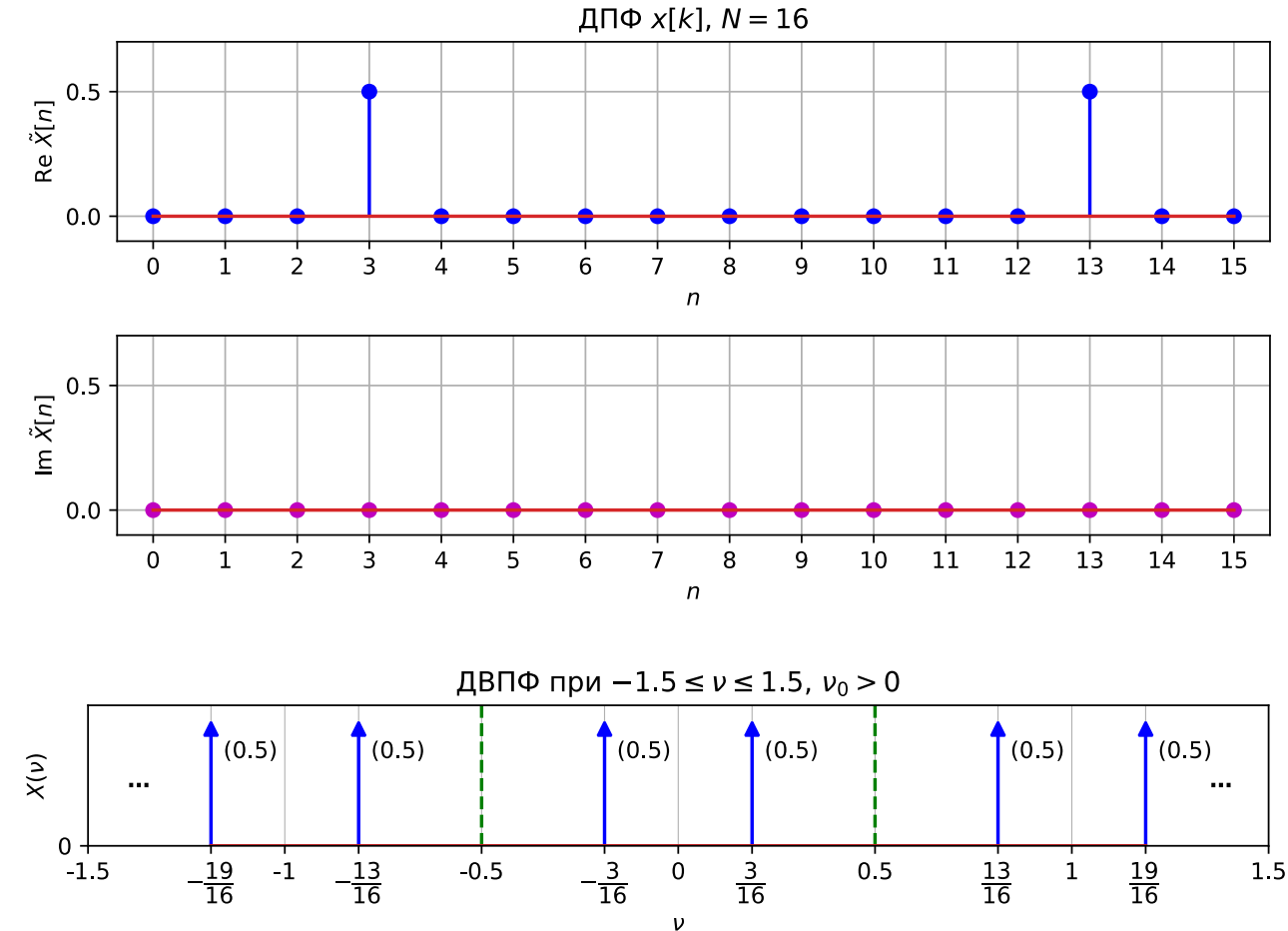
$$\cos(2\pi \frac{3}{16} k) = \frac{1}{2} \exp(j2\pi \frac{3}{16} k) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi \frac{3}{16} k),$$

получаем для ДВПФ этой последовательности

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta(v - \frac{3}{16} - n) + \frac{1}{2} \delta(v + \frac{3}{16} - n).$$

$X(v)$ содержит две δ -функции с площадями $1/2$ на каждом периоде. Рассмотрим период $0 \leq v < 1$ (правую крайнюю точку можем не включать из-за периодичности $X(v)$). На нем содержится две δ -функции в точках $v_1 = \frac{3}{16}$ и $v_2 = \frac{13}{16}$.

Последовательность имеет период $N=16$ точек. Это означает, что можно установить значения 16-точечного ДПФ $\tilde{X}[3]=1/2$, $\tilde{X}[13]=1/2$, а в остальных точках главного периода $\tilde{X}[n]=0$.



Пример. ДВПФ и окна

Пример.

Предположим, что нужно вычислить ДВПФ последовательности отсчетов $y[k] = x[k]w[k]$, где

$$x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16}k),$$

$w[k]$ — прямоугольное окно длиной $N = 16$ отсчетов:

$$w[k] = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k - m].$$

Решение. Заметим, что

$$W(v) = e^{-j(N-1)\pi v} \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)},$$

$$X(v) = 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(v - \frac{3}{16} - m) + 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(v + \frac{3}{16} - m).$$

Способ 1. ДВПФ последовательности $Y(v)$ может быть представлено в виде циклической свертки

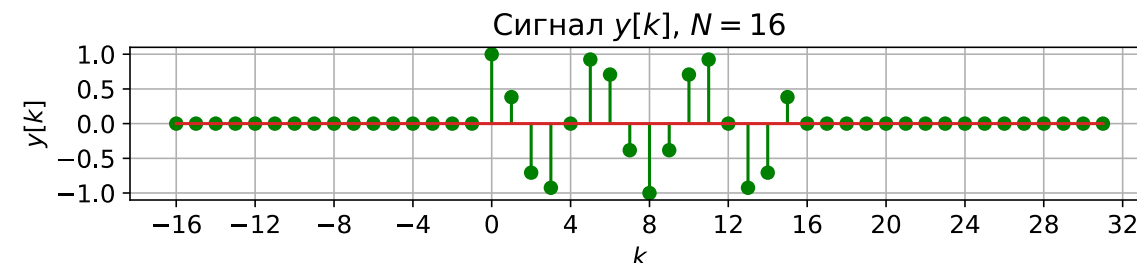
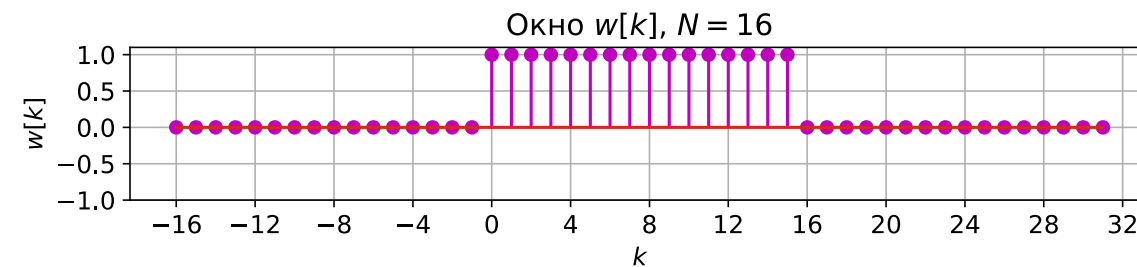
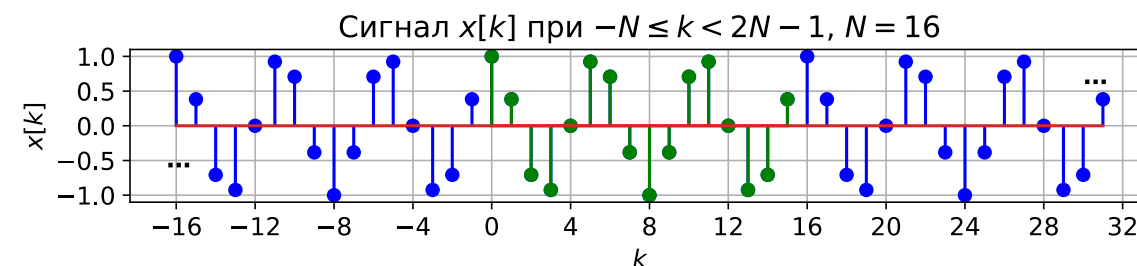
$$Y(v) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})W(v - \tilde{v})d\tilde{v} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\tilde{v})X(v - \tilde{v})d\tilde{v}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(v)\delta(v - v_1)dv = \begin{cases} W(v_1), & a < v_1 < b, \\ 0.5W(v_1), & (v_1 = a) \cup (v_1 = b), \\ 0, & (v_1 < a) \cup (v_1 > b), \end{cases}$$

получаем, что

$$Y(v) = 0.5W(v - \frac{3}{16}) + 0.5W(v + \frac{3}{16}).$$



Пример. ДВПФ и окна

Способ 2. Аналогично через теорему смещения

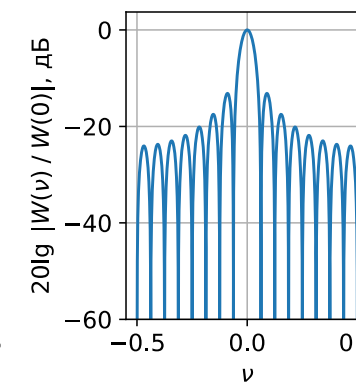
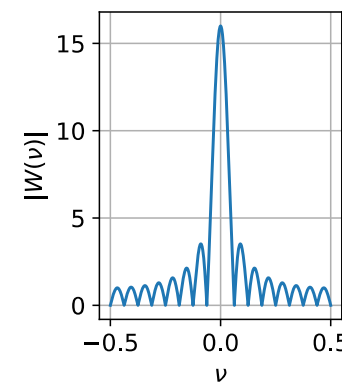
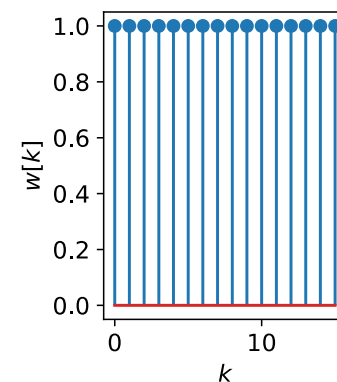
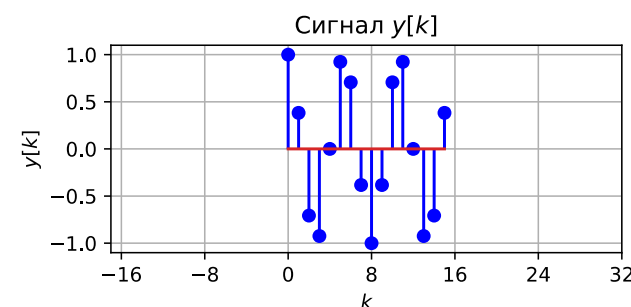
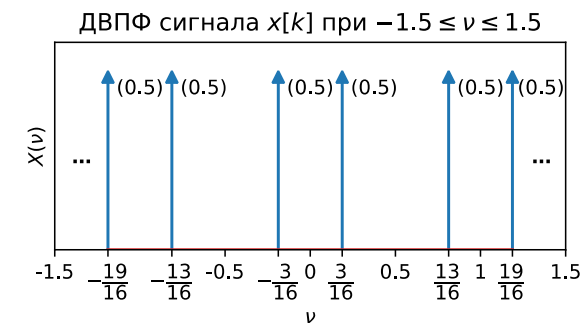
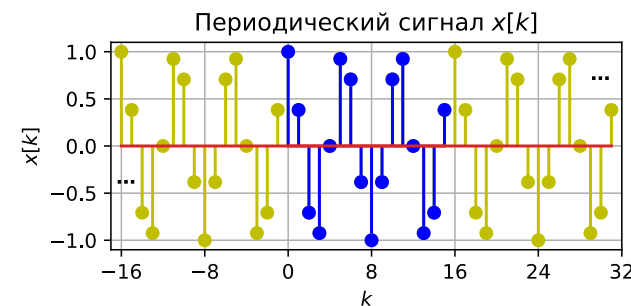
$$y[k] = \left(\frac{1}{2} \exp(j2\pi k \frac{3}{16}) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi k \frac{3}{16}) \right) w[k],$$

$$Y(\nu) = 0.5W(\nu - \frac{3}{16}) + 0.5W(\nu + \frac{3}{16}).$$

ДПВФ последовательности $y[k]$

$$Y(\nu) = \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(\nu - \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(\nu - \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu - \frac{3}{16}))} +$$

$$+ \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(\nu + \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(\nu + \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu + \frac{3}{16}))}.$$



Частотная ось ДПФ

Частотная ось ДПФ

Отчету N – точечного ДПФ с номером n в случае сигнала конечной длительности соответствует значение ДВПФ в точке $\nu = n / N$ по оси нормированных частот:

$$X(\nu)\big|_{\nu=n/N} = X[n].$$

Если рассматривается периодическая последовательность отсчетов, и коэффициенты ДПФ вычисляются по периоду последовательности, то весам дельта-функций в точках $\nu = n / N$ в ДВПФ соответствуют отсчеты ДПФ с номерами n :

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[n] \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

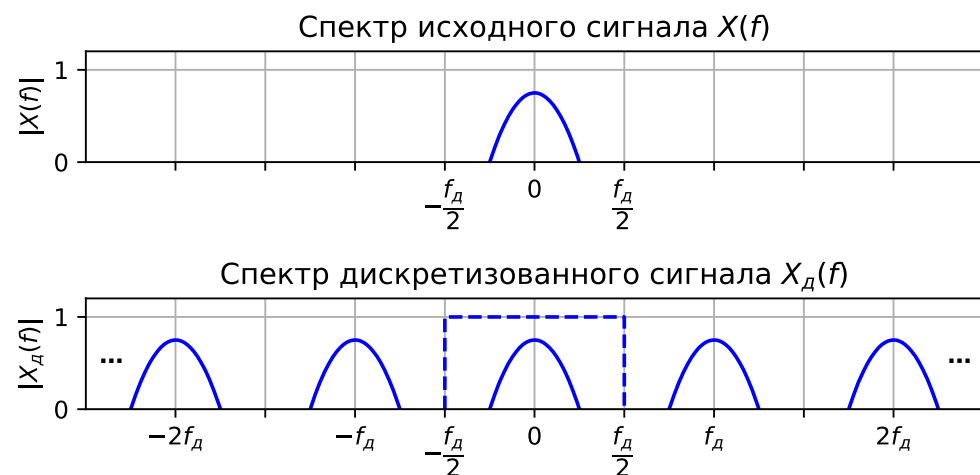
Эти два обстоятельства позволяют сопоставить отсчётам ДПФ частоты в спектре дискретизованного сигнала. Учитывая, что $\nu = f / f_{\text{д}} = f \Delta t$, где $f_{\text{д}}$ – частота дискретизации, Δt – шаг дискретизации, получаем, что отсчету с номером n соответствует частота $f = n f_{\text{д}} / N = n / (N \Delta t)$ Гц. Разрешение по оси частот при ДПФ анализе составляет $f_{\text{д}} / N$ Гц.

Частотная переменная и ее размерность	Связь частотной переменной с номером отсчета ДПФ	Разрешение по частоте	Диапазон изменения частоты, соответствующий отсчетам $[0, N)$
$f, [\text{Гц}]$	$f = \frac{n f_{\text{д}}}{N}$	$\Delta f = \frac{f_{\text{д}}}{N}$	$[0, f_{\text{д}})$
$\omega, [\text{рад/с}]$	$\omega = \frac{n \omega_{\text{д}}}{N}$	$\Delta \omega = \frac{\omega_{\text{д}}}{N}$	$[0, \omega_{\text{д}})$
ν , безразмерная	$\nu = \frac{n}{N}$	$\Delta \nu = \frac{1}{N}$	$[0, 1)$
$\theta, [\text{рад}]$	$\theta = 2\pi \frac{n}{N}$	$\Delta \theta = \frac{2\pi}{N}$	$[0, 2\pi)$

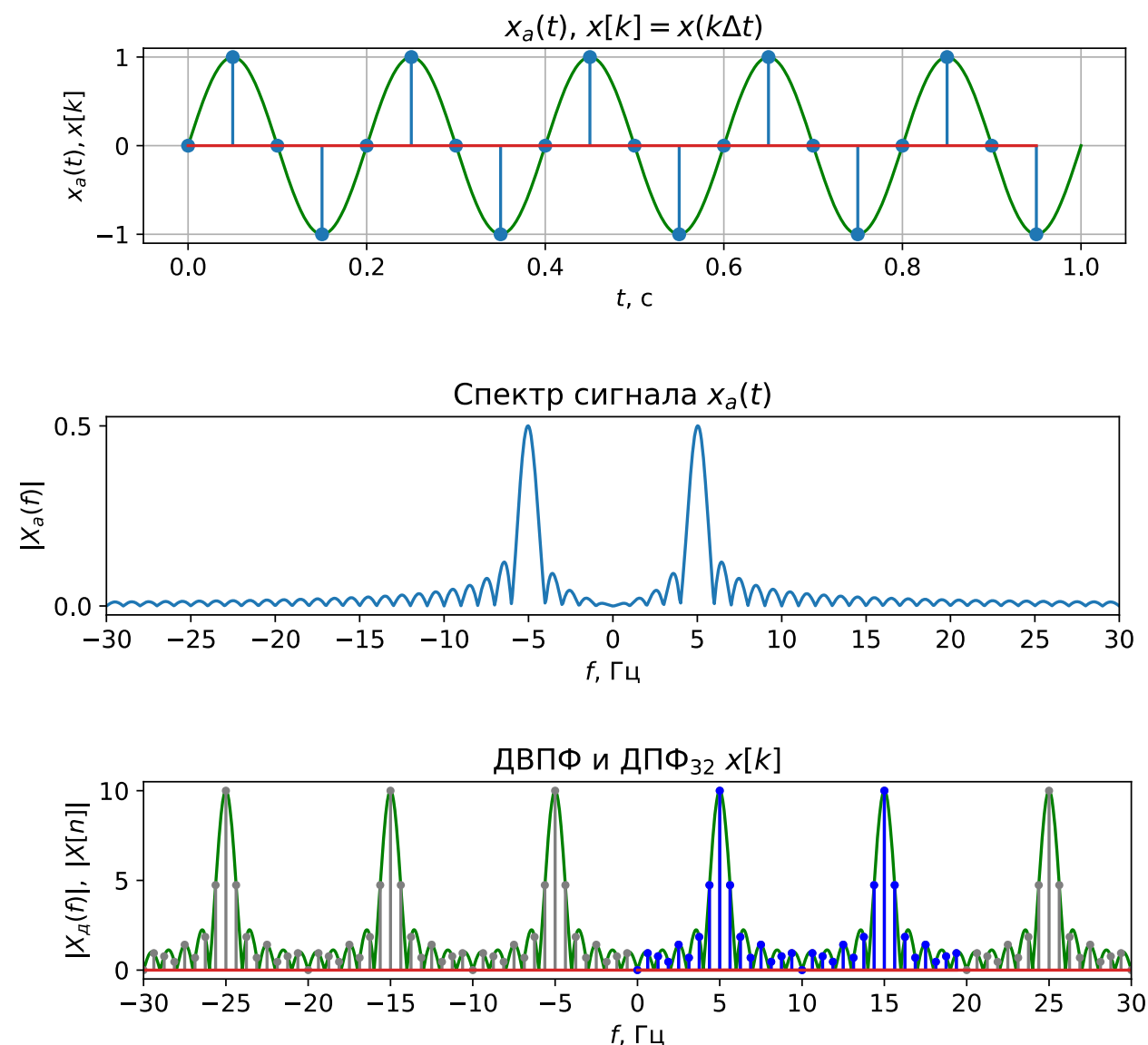
В таблице ниже рассмотрены основные способы введения частотной оси для отсчетов ДПФ.

Частотная ось ДПФ

Заметим, что $f = nf_d / N$ Гц – это частота в спектре дискретизированного сигнала, который при отсутствии наложения спектров образуется путем периодического продолжения (повторения) спектра исходного аналогового сигнала с периодом, равным частоте дискретизации (f_d в случае оси в Гц или 1 в случае оси нормированных частот). Это означает, что отсчет ДПФ с номером n будет соответствовать в спектре аналогового сигнала частоте $f \in [-f_d/2; f_d/2]$, такой, что $f = (n + mN)f_d / N$, где m – целое число.



Пример.



Частотная ось ДПФ

Пояснения к примеру.

Рассмотрим для $f_0 = 5$ Гц сигнал длительностью 1 с вида

$$x_a(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad 0 \leq t < 1.$$

Выберем частоту дискретизации $f_d = 20$ Гц ($\Delta t = 0,05$ с)

Последовательность отсчетов дискретизованного сигнала

$$x[k] = x_a(k\Delta t) = \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_d} k\right).$$

Спектр $X_d(f)$ дискретизованного сигнала связан со спектром $X_a(f)$ аналогового сигнала соотношением

$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_d).$$

где T определено соотношением $x[k] = Tx_a(k\Delta t)$. Если бы эффекта наложения не было, то $X_d(f)$ и $X_a(f)$ совпадали бы на интервале $[-f_d/2, f_d/2]$, т.е. от -10 Гц до 10 Гц.

Заметим, что отсчеты ДПФ размерности $N = 32$ для $n = 0, 1, \dots, N-1$ находятся на полуинтервале $[0, f_d)$.

