

# Analiza mișcării stick-slip folosind modelul de frecare LuGre

Alexandru Zigler

2024

# 1 Modelul LuGre

Frecarea reprezintă un fenomen extrem de des întâlnit în cazuri precum interacțiunea componentelor din sisteme mecanice, probleme de aerodinamică sau curgerea fluidelor. Datorită complexității dinamicii frecării, modelarea ei se neglijează de multe ori. Însă există cazuri care necesită a se lua în calcul frecarea, deoarece apar diferențe inacceptabile între dinamica modelului matematic și realitate. Astfel, performanțele problemei de control nu pot fi atinse, chiar folosind metode de control avansate.

În literatură s-au propus multe modele pentru a exprima dinamica forței de frecare. Modelele clasice presupun combinații între forțele de frecare statică, vâscoasă, Coulomb sau Stribek. Un alt model de frecare, bazat pe comportamentul unui resort a fost propus de Dahl. Pe lângă acestea, se pot menționa modelele Karnopp, Bliman–Sorine și LuGre.

Modelul LuGre a fost dezvoltat în urma colaborării dintre grupurile de control Lund și Grenoble. Este o extindere a modelului Dahl, care cuprinde efectul Stribek și poate descrie astfel, mișcarea stick-slip.

## 1.1 Model matematic

$$\begin{cases} \dot{z} = v - zh(v) = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \\ F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + f(v), \end{cases} \quad \text{unde} \quad \begin{aligned} g(v) &= F_c + (F_s - F_c) e^{-|v/v_s|^\alpha} \\ f(v) &= \sigma_2 v \end{aligned}$$

Parametri:

- $v$  - viteza dintre cele 2 suprafețe de contact
- $z$  - starea internă a frecării (interpretare fizică - "average bristle deflection")
- $F$  - forța de frecare aproximată de model
- $\sigma_0$  - rigiditatea resortului la microscală (a se vedea modelele Tomlinson și Bristle)
- $\sigma_1$  - amortizarea la microscală
- $\sigma_2$  - coeficientul forței de frecare vâscoasă
- $F_s$  - coeficientul forței de frecare statică (engl. *stiction*)
- $F_c$  - coeficientul forței de frecare Coulomb
- $v_s$  - viteza Stribek

Se poate scrie ecuația forței de frecare în regim staționar  $F_{ss}$  (când  $z = 0$  și  $v = v_0$ ):

$$F_{ss}(v) = g(v) \operatorname{sgn}(v) + f(v).$$

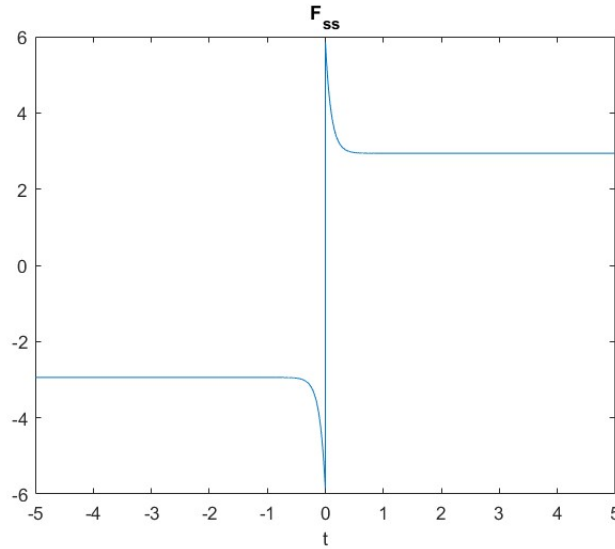


Figure 1: Forța de frecare în regim staționar

## 2 Mișcarea stick-slip

Mișcarea stick-slip presupune, la modul cel mai simplificat, modelarea dinamicii unui corp care se mișcă pe o suprafață (Fig.2). Consecința fundamentală a acestei mișcări este apariția forței de frecare, la suprafața de contact dintre corp și suprafața statică pe care se mișcă. Astfel, după cum sugerează și numele ”stick-slip”, se observă prezența unor fenomene alternative de alunecare și oprire. Acestea oferă un caracter puternic neliniar sistemului.

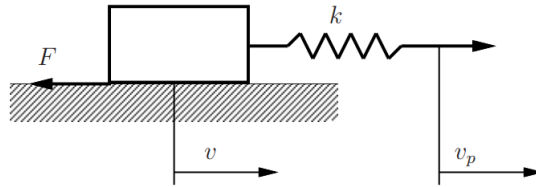


Figure 2: Mișcare stick-slip

Pentru a exprima mai bine cele două fenomene, forța de frecare se clasifică în două categorii, mai precis statică și dinamică. Cea statică reprezintă forța care menține un corp nemișcat, în ciuda aplicării unei forțe de tracțiune. Forța de frecare dinamică se opune forței de tracțiune în momentul mișcării corpului.

### 2.1 Model matematic

$$\begin{cases} \dot{l} = v_p - v \\ m\dot{v} = kl - F \\ \dot{z} = v - zh(v) \\ F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + f(v), \end{cases} \quad \text{unde} \quad \begin{cases} g(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-|v/v_s|^\alpha} \\ f(v) = \sigma_2 v \end{cases}$$

Stările folosite sunt  $l$  - elongație,  $v$  - viteza de deplasare a corpului față de suprafața de contact și  $z$  - o stare internă a modelului de frecare. Intrarea este  $v_p$  - viteza arcului față de sol, iar ieșirea este starea  $v$ .  
Rescriem modelul.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2 \sigma_0 \frac{|x_3|}{F_c + (F_s - F_c) \exp(-|x_3/v_s|^\alpha)} \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{m} \left( kx_1 - (\sigma_1 + \sigma_2)x_3 - \sigma_0 x_2 \left( 1 - \frac{\sigma_1 |x_3|}{F_c + (F_s - F_c) \exp(-|x_3/v_s|^\alpha)} \right) \right) \end{cases}$$

## 2.2 Liniarizare prin reacție de la stare

Impunem o problemă de control de urmărire, care derivă din problema clasică de stabilizare. Astfel, introducem dinamica erorilor.

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{r}_1 - \dot{x}_1 = \dot{r}_1 - u + x_3 \\ \dot{e}_2 = \dot{r}_2 - \dot{x}_2 = \dot{r}_2 - x_3 + x_2 \sigma_0 \frac{|x_3|}{F_c + (F_s - F_c) \exp(-|x_3/v_s|^\alpha)} \\ \dot{e}_3 = \dot{r}_3 - \dot{x}_3 = \dot{r}_3 - \frac{1}{m} \left( kx_1 - (\sigma_1 + \sigma_2)x_3 - \sigma_0 x_2 \left( 1 - \frac{\sigma_1 |x_3|}{F_c + (F_s - F_c) \exp(-|x_3/v_s|^\alpha)} \right) \right) \end{cases}$$

Pentru simplitatea calculelor, se face notația  $A = \frac{|x_3|}{F_c + (F_s - F_c) \exp(-|x_3/v_s|^\alpha)}$ .

Ieșirea noului sistem, corespunzător sistemului fizic descris anterior, este  $e_3$  adică eroarea vitezei. Se notează  $y = h(e)$ ,  $\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = f(e)$  și  $g(e) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Determinăm gradul relativ al sistemului, derivând pe rând ieșirea.

$$y = e_3 = r_3 - x_3$$

$$\dot{y} = L_f h(e) = \dot{e}_3 = \dot{r}_3 - \frac{1}{m} (kx_1 - (\sigma_1 + \sigma_2)x_3 - \sigma_0 x_2 (1 - \sigma_1 A))$$

$$\ddot{y} = L_f^2 h(e) = \ddot{r}_3 - \frac{1}{m} \left( k(u - x_3) - (\sigma_1 + \sigma_2)\dot{x}_3 - \sigma_0(x_3 - \sigma_0 x_2 A) + \sigma_0 \sigma_1 (Ax_3 - \sigma_0 x_2 A^2 + x_2 \dot{A}) \right)$$

Cum semnalele  $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$  sunt cunoscute, se pot determina și derivatele lor. Observăm că derivata de ordinul 2 a ieșirii conține intrarea  $u$ . Astfel, ordinul relativ al sistemului este  $\rho = 2$ . Se aduce sistemul în formă canonică normală, folosind o transformare de tip difeomorfism.

$$w = T(e) = \begin{bmatrix} \phi(e) \\ h(e) \\ L_f h(e) \end{bmatrix}$$

unde  $\phi(e)$  respectă  $\frac{\partial \phi}{\partial e} g(e) = 0$ . Condiția se rescrie  $\frac{\partial \phi}{\partial e_1} = 0$ . Fie  $\phi(e) = e_2 + me_3$ . Se verifică dacă  $T(e)$  este difeomorfism. Dinamica sistemului după transformare devine:

$$\dot{w}_1 = \dot{e}_2 + m\dot{e}_3 = f_{w0} \left( w_1, \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$\dot{w}_2 = \dot{e}_3 = \dot{r}_3 - \frac{1}{m_1} (kx_1 - (\sigma_1 + \sigma_2)x_3 - \sigma_0x_2(1 - A)) = w_3$$

$$\dot{w}_3 = \ddot{r}_3 - \frac{1}{m} (k(u - x_3) - (\sigma_1 + \sigma_2)\dot{x}_3 - \sigma_0(x_3 - \sigma_0x_2A) + \sigma_0\sigma_1(Ax_3 - \sigma_0x_2A^2 + x_2\dot{A}))$$

Se calculează  $\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial x_3} \dot{x}_3$ .

$$\dot{A} = \dot{x}_3 \frac{\text{sgn}(x_3)(F_c + (F_s - F_c) \exp(-|x_3/v_s|^\alpha)) - |x_3|(F_s - F_c) \exp(-|x_3/v_s|^\alpha) \left( \frac{-1}{v_s^\alpha} \right) \alpha |x_3|^{\alpha-1} \text{sgn}(x_3)}{(F_c + (F_s - F_c) \exp(-|x_3/v_s|^\alpha))^2}$$

$$\dot{A} = \dot{x}_3 \frac{\text{sgn}(x_3)(F_c + (F_s - F_c) \exp(-|x_3/v_s|^\alpha)(1 + |x_3|^\alpha \cdot \frac{\alpha}{v_s^\alpha}))}{(F_c + (F_s - F_c) \exp(-|x_3/v_s|^\alpha))^2} = \frac{\text{sgn}(x_3)(1 + |x_3|^\alpha \cdot \frac{\alpha}{v_s^\alpha})}{F_c + (F_s - F_c) \exp(-|x_3/v_s|^\alpha)} \dot{x}_3.$$

Se rescrie  $\dot{w}_3$ .

$$\dot{w}_3 = \ddot{r}_3 - \frac{1}{m} (ku - (k + \sigma_0)x_3 - (\sigma_1 + \sigma_2)\dot{x}_3 + A(\sigma_0^2x_2 + \sigma_0\sigma_1x_3) - \sigma_0^2\sigma_1x_2A^2 + \sigma_0\sigma_1x_2\dot{A})$$

Reamintim sistemul generic:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = A\xi + B[\psi(x) + \gamma(x)u] \end{cases}$$

Legea de control  $u = \gamma^{-1}(x)[- \psi(x) + v]$  reduce sistemul la:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = A\xi + Bv \end{cases}$$

Revenim la sistemul  $\dot{w}$ .

$$\dot{w}_1 = f_{w0} \left( w_1, \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$\dot{w}_2 = w_3$$

$$\dot{w}_3 = \ddot{r}_3 - \frac{1}{m} (ku - (k + \sigma_0)x_3 - (\sigma_1 + \sigma_2)\dot{x}_3 + A(\sigma_0^2x_2 + \sigma_0\sigma_1x_3) - \sigma_0^2\sigma_1x_2A^2 + \sigma_0\sigma_1x_2\dot{A})$$

Atunci avem corespondențele  $\eta = w_1$ ,  $\xi = [w_2 \ w_3]^T$ ,  $f_0 = f_{w0}$ ,  $A = A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$B = B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma(w) = -\frac{k}{m} \implies \gamma^{-1}(w) = -\frac{m}{k} \text{ și}$$

$$\psi(w) = \ddot{r}_3 - \frac{1}{m} (-(k + \sigma_0)x_3 - (\sigma_1 + \sigma_2)\dot{x}_3 + A(\sigma_0^2x_2 + \sigma_0\sigma_1x_3) - \sigma_0^2\sigma_1x_2A^2 + \sigma_0\sigma_1x_2\dot{A}) \Big|_{x=r-T^{-1}(w)}.$$

Subsistemul  $\begin{bmatrix} \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = A_w \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + Bv$  se poate controla ușor prin reacție de la stare,  $v$  fiind noul semnal de comandă.

Deoarece sistemul generic  $[\dot{\eta} \ \dot{\xi}]^T$ , descris mai sus, este o conexiune cascadă între două subsisteme, apare condiția necesară și suficientă (Lema 9.2, Khalil) ca originea subsistemului  $\dot{w}_1 = f_{w0}(w_1, 0)$  să fie asimptotic stabilă.

Cum  $w_2(t) \equiv w_3(t) = \dot{e}_3(t) \equiv 0$  și  $f_{w0}\left(w_1, \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}\right) = \dot{e}_2 + m\dot{e}_3$ , se poate modifica funcția  $f_{w0} = m\dot{e}_3$  astfel încât dinamica se anulează și sistemul este cel puțin stabil. Această modificare nu afectează condițiile de alegere ale funcției  $\phi(e)$  și nici proprietatea de difeomorfism a transformării  $T$ .

## 2.3 Implementare și rezultate

Parametrii folosiți pentru simulare sunt:

$$m = 1, k = 2, \alpha = 1, \sigma_0 = 2900, \sigma_1 = 107, \sigma_2 = 0, F_c = 2.94, F_s = 5.88, v_s = 0.1.$$

În (Fig.3) se ilustrează răspunsul în buclă deschisă la o intrare treaptă  $v_p = 2$ . Deci dacă resortul este tras cu o viteză constantă, se remarcă prezența unui ciclu limită în viteza corpului. De asemenea, se justifică și denumirea "stick-slip", prin alternanța celor două fenomene.

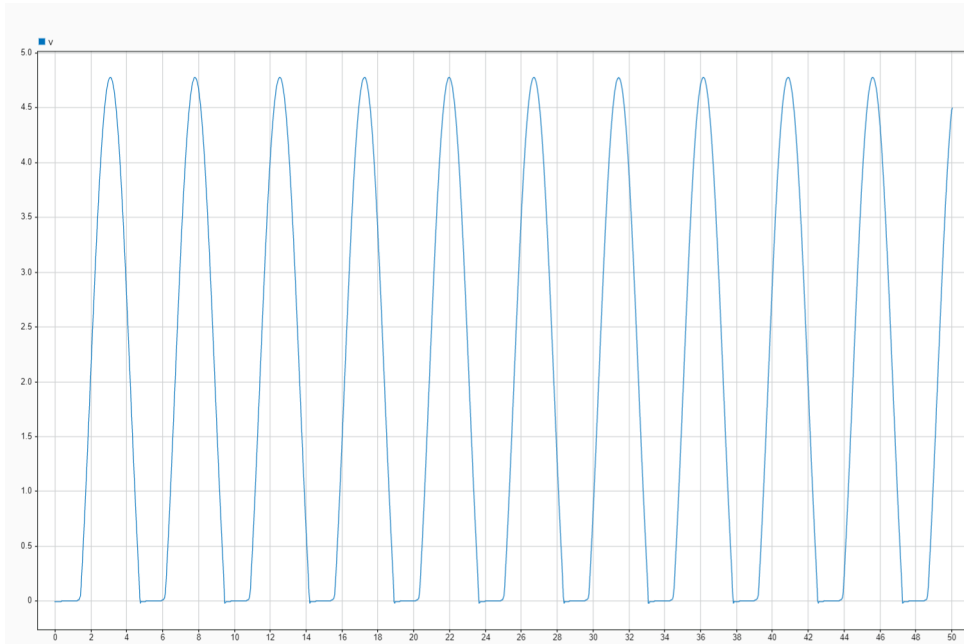


Figure 3: Răspunsul la treaptă al sistemului

Reamintim faptul că problema de control o problemă de urmărire, în particular dorindu-se ca ieșirea  $v$  să urmărească referința. Din acest motiv, s-a descris dinamica erorii, iar legea de control a fost proiectată astfel încât eroarea să tindă la zero.

Legea de control  $u = \gamma^{-1}(x)[- \psi(x) + v]$  este bine cunoscută în domeniul liniarizării prin reacție de la stare, iar funcțiile sunt descrise în secțiunea anterioară. Noul semnal de comandă  $v$  este folosit pentru controlul sistemului liniar obținut artificial prin eliminarea matematică a neliniarității. În acest sens, se consideră un control cu reacție de la stările  $w$ . Se impun poli corespunzători în semiplanul stâng pentru sistemul închis.

În (Fig.4) se reprezintă răspunsul sistemului închis la semnale treaptă. Observăm eroarea la poziție este mereu nulă (așa cum s-a impus) și că timpul de răspuns este

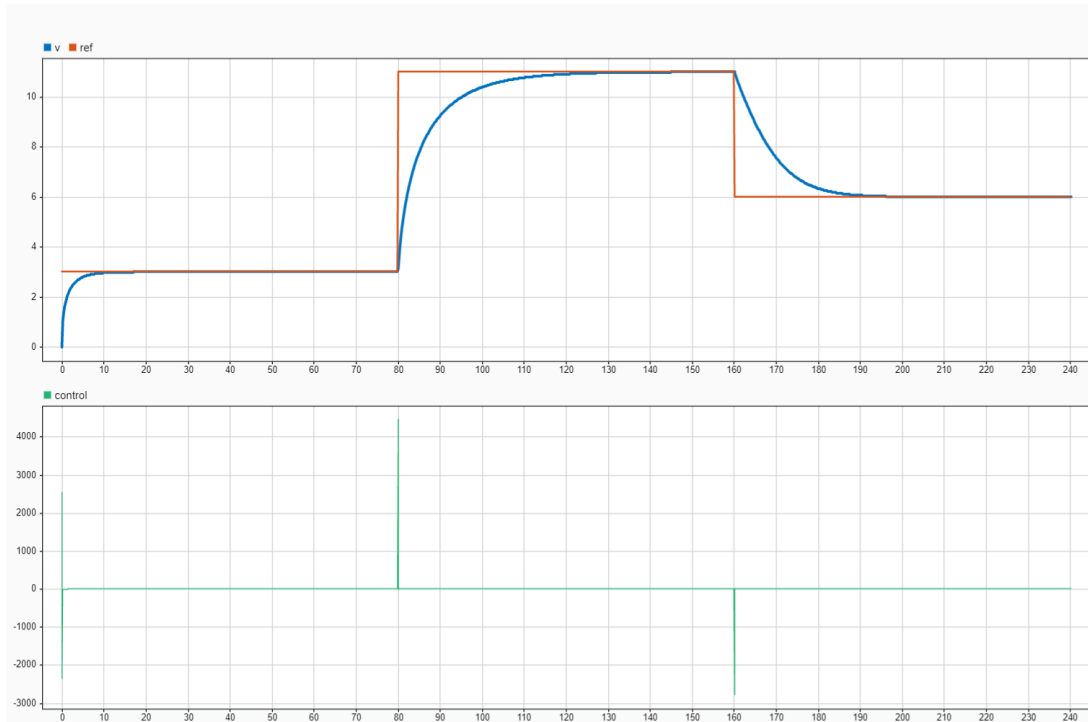


Figure 4: Urmărirea semnalelor treaptă

variabil în funcție de valorile inițiale ale stărilor. Semnalul de control este mare (imposibil de produs în practică). Polii impuși sunt  $[-35 \quad -30]$ . O pereche de poli mai aproape de zero ar scădea efortul de control, dar ar crește timpul de răspuns.

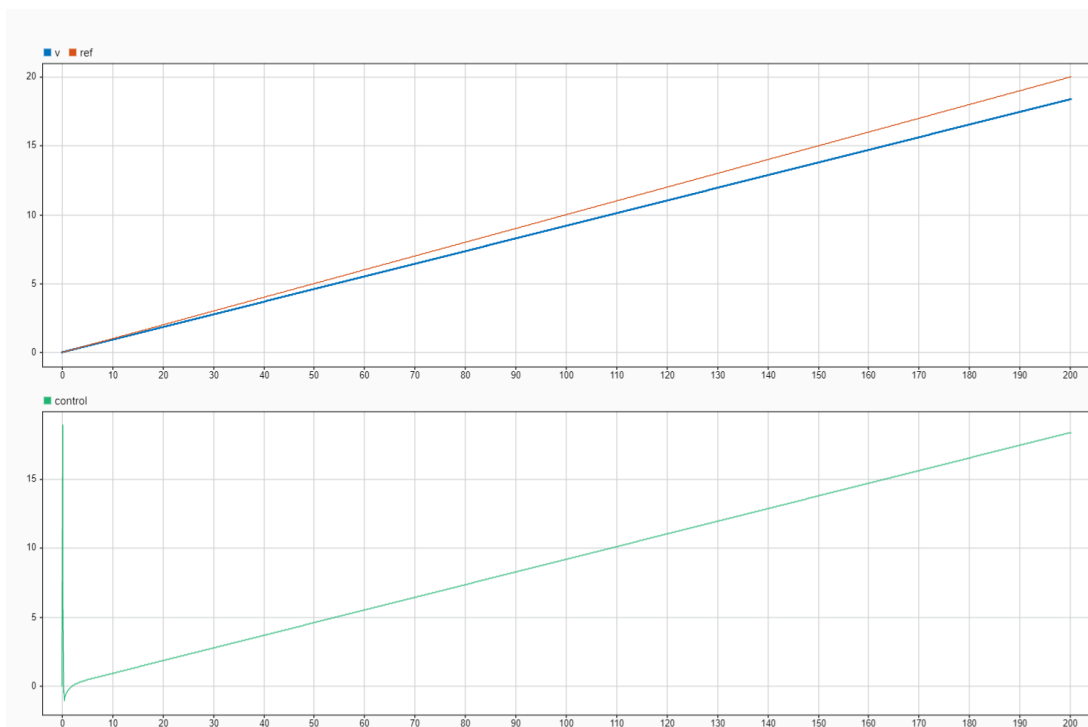


Figure 5: Urmărirea semnalelor rampă

Pentru semnalele de tip rampă (fig. 5 cu panta 0.1), există eroare la viteză, în cazul

de față la 200 de secunde eroarea este 1.6. Această eroare se poate micșora prin impunerea unor poli mai îndepărtați de origine. Semnalul de control are valori normale. Ca observație, urmărirea unei pante de 0.5 duce la instabilitatea numerică a sistemului după 60 secunde.

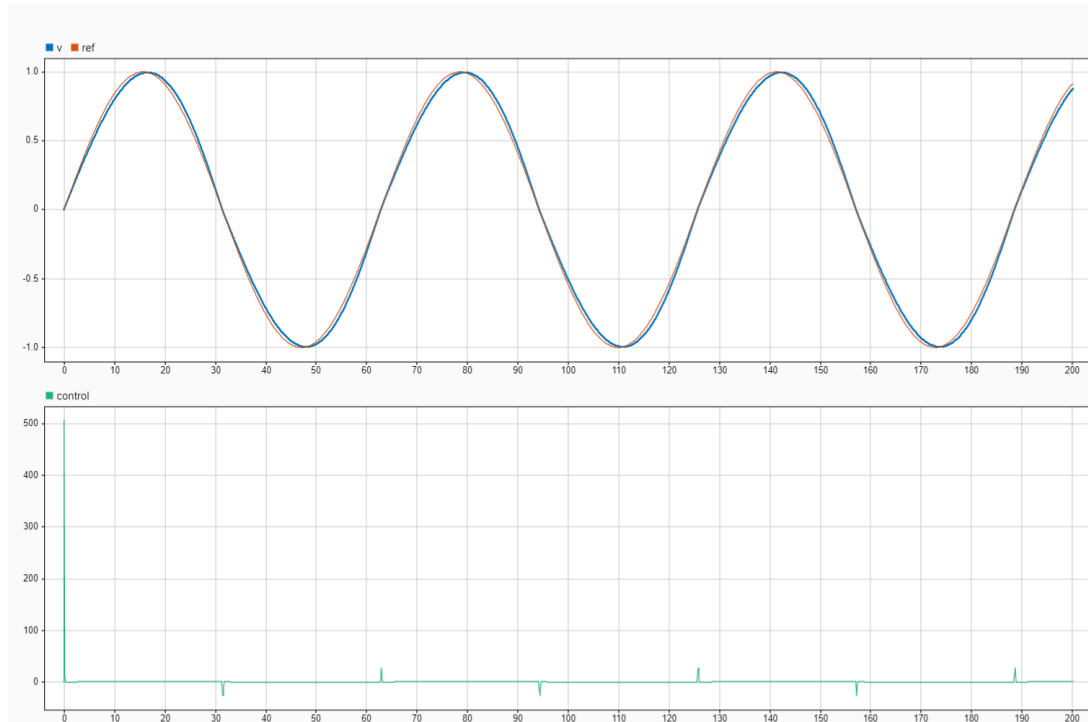


Figure 6: Urmărirea semnalelor frecvențiale

În Fig.6 este reprezentat răspunsul sistemului la un semnal  $r(t) = \sin(2\pi \cdot 0.1 \cdot t)$ . Se constată că performanțele de urmărire sunt satisfăcătoare, însă odată cu creșterea frecvenței, ele vor fi din ce în ce mai slabe. De asemenea, creșterea amplitudinii va afecta performanțele urmăririi. În privința semnalului de control, acesta este mare la condiții inițiale, iar apoi alternează într-un interval relativ favorabil.

Ca și concluzii, liniarizarea prin reacție de la stare are o utilitate evidentă în tratarea sistemelor neliniare. Totuși, complexitatea calculului devine o problemă în cazul sistemelor de ordin mai mare. În privința performanțelor de urmărire, controlul prin reacție de la stare este satisfăcător în cazuri specifice. Însă atunci când apar probleme ca modificarea parametrilor, sau discordanța lor cu realitatea, se preferă folosirea altor metode mai robuste precum controlul prin moduri alunecătoare (engl. *sliding mode*).



### 3 Bibliografie

- Karl Johan Åström, Carlos Canudas de Wit. Revisiting the LuGre friction model. IEEE Control Systems Magazine, 2008, 28 (6), pp.101-114. 10.1109/MCS.2008.929425
- C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Astrom and P. Lischinsky, "A new model for control of systems with friction," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, no. 3, pp. 419-425, March 1995, doi: 10.1109/9.376053.
- H. Khalil, Nonlinear Control, Global Edition. Pearson Education, 2015.
- Gao, B.; Shen, W.; Zheng, L.; Zhang, W.; Zhao, H. A Review of Key Technologies for Friction Nonlinearity in an Electro-Hydraulic Servo System. Machines 2022, 10, 568. <https://doi.org/10.3390/machines10070568>