

Control predictiv - aplicații

Alexandru Zigler

2025

1 Generalități

Controlul predictiv reprezintă o tehnică avansată de control, folosită pentru varietatea de avantaje pe care le oferă, în special în cardul sistemelor de timp-real. Reduce semnificativ complexitatea controlului sistemelor cu număr ridicat de intrări și ieșiri (*MIMO*). Metoda de control se bazează pe rezolvarea unei probleme de optimizare la fiecare timp de eșantionare, deci se preferă implementarea sa pe sisteme de calcul, în favoarea unor alte metode. Un alt aspect este posibilitatea de a respecta un set de constrângeri, care pot fi *hardware* (provenite din limitări fizice ale sistemului) sau *software* (impuse). De asemenea, după cum sugerează și numele, controlul predictiv are capacitatea de a anticipa evenimente sau comportamente din viitor și de a lua decizii în funcție de acestea. Folosește un model dinamic al procesului controlat, care calculează (prezice) valorile unor stări la momente de timp ulterioare momentului curent, momente numite colectiv, orizont de predicție. Dintre toate scenariile prezise, se alege rezultatul problemei de optimizare, care minimizează o funcție de cost. Semnalul de control corespunzător este aplicat la momentul curent, iar procesul se repetă, orizontul de predicție deplasându-se și el în momentul trecerii la eșantionul următor.

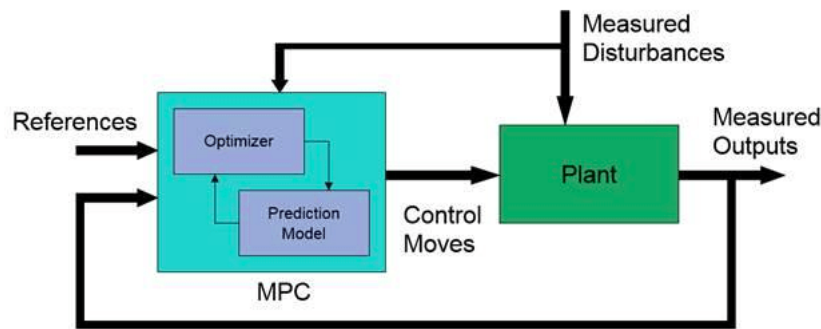


Figure 1: Arhitectură de control

Parametri de proiectare

Timpul de eșantionare

Este esențial în discretizarea sistemului, care depinde de constantele de timp prezente. Acest parametru influențează semnificativ dinamica sistemului discret, prin urmare va avea efecte și asupra performanțelor de control (urmărirea referinței și rejectarea perturbațiilor).

Orizontul de predicție

Acest parametru reprezintă numărul de eșantioane viitoare luate în considerare de regulator la momentul curent, în vederea determinării stărilor în care va ajunge sistemul real, bazându-se pe modelul de predicție. Dacă orizontul este prea mic, există riscul ca semnalul de control să nu reacționeze la timp, iar unele constrângeri ar putea să nu mai fie respectate. În cazul în care este prea mare, volumul de calcule crește nejustificat, în special dacă apar perturbații. Se recomandă totuși ca orizontul de predicție să acopere regimul tranzitoriu al sistemului.

Orizontul de control

Orizontul de control reprezintă durata de timp în eşantioane în care se optimizează şi se planifică semnalul de control. Acest parametru poate fi mai mic sau egal cu orizontul de predicţie. După terminarea orizontului de control, semnalul de control va fi menţinut constant până ce se termină şi orizontul de predicţie. Acest fenomen reduce volumul de calcule fără a pierde din performanţele de control.

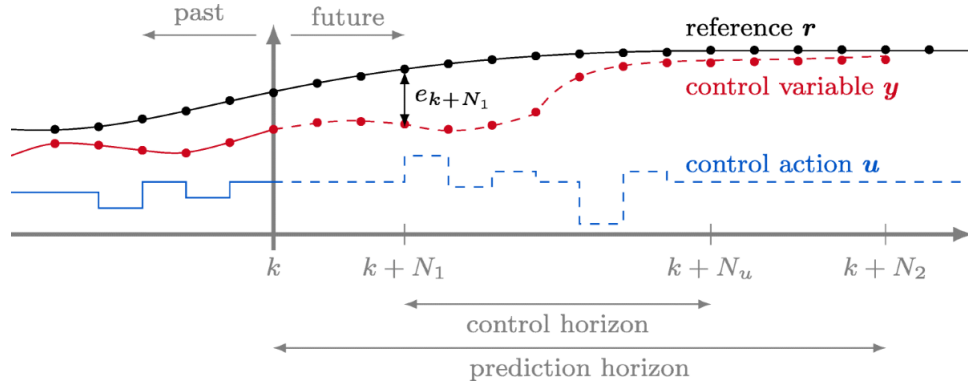


Figure 2: Evoluția semnalelor în contextul controlului predictiv

Funcția de cost

Aceasta descrie problema de optimizare, în funcție de performanțele dorite de la sistemul de control, de exemplu minimizare erorii de urmărire sau reducerea efortului de control. Funcția de cost poate îngloba ponderi care oferă priorități anumitor obiective. Acest procedeu este util în special în cazul controlului sistemelor *MIMO*.

2 Studiu de caz

Se conideră modelul unui sistem mecanic, compus din două mase, două resorturi neliniare și două amortizoare. Parametrii mecanici sunt menționați în tabelul 1. Intrările reprezintă forțele exterioare aplicate celor două mase, iar ieșirile reprezintă deplasările maselor.

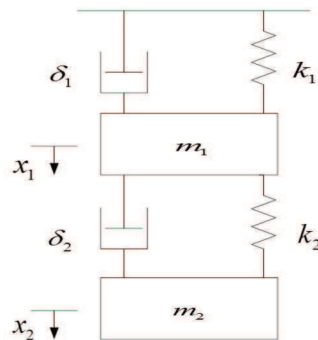


Figure 3: Sistem mecanic

Table 1: Parametri mecanici

Parametru	Descriere	Valoare
$k(N/m)$	constante elastice	$k_1 = \frac{2}{5}, k_2 = 1$
$m(Kg)$	mase	$m_1 = 1, m_2 = 2$
$\delta(Ns/m)$	coeficienți de amortizare	$\delta_1 = \frac{1}{10}, \delta_2 = \frac{1}{5}$
μ	coeficienți neliniari	$\mu_1 = \frac{1}{6}, \mu_2 = \frac{1}{10}$

Ecuatiile diferențiale care descriu sistemul sunt:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -\delta_1 \dot{x}_1 - k_1 x_1 + \mu_1 x_1^3 - k_2(x_1 - x_2) + \mu_2(x_1 - x_2)^3 + u_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -\delta_2 \dot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) + \mu_2(x_2 - x_1)^3 + u_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Se rescrie sistemul în spațiul stărilor:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{\delta_1}{m_1} x_3 - \frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{\mu_1}{m_1} x_1^3 - \frac{k_2}{m_1} (x_1 - x_2) + \frac{\mu_2}{m_1} (x_1 - x_2)^3 + \frac{u_1}{m_1} \\ \dot{x}_4 &= -\frac{\delta_2}{m_2} x_4 - \frac{k_2}{m_2} (x_2 - x_1) + \frac{\mu_2}{m_2} (x_2 - x_1)^3 + \frac{u_2}{m_2} \\ \mathbf{y} &= [x_1 \quad x_2]^T \end{aligned} \quad (2)$$

Dacă notăm $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, atunci matricea jacobian a sistemului se scrie:

$$J(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{3\mu_1}{m_1}x_1^2 + \frac{\mu_2}{m_1}(3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2) & \frac{k_2}{m_1} + \frac{\mu_2}{m_1}(-3x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2) & -\frac{\delta_1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} + \frac{\mu_2}{m_2}(-3x_2^2 + 6x_1x_2 - 3x_1^2) & -\frac{k_2}{m_2} + \frac{\mu_2}{m_2}(3x_2^2 - 6x_1x_2 + 3x_1^2) & 0 & -\frac{\delta_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

Considerăm punctul de funcționare $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, în jurul căruia dorim să liniarizăm sistemul. Obținem astfel, noua realizare de stare:

$$\begin{aligned} A = J(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_1} & -\frac{\delta_1}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{\delta_2}{m_2} \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se discretizează sistemul liniar de mai-sus, iar pe baza lui se vor dezvolta legi de control predictiv și se vor prezenta particularitățile acestora.

$$A_d = I + T_s A, \quad B_d = T_s B, \quad C_d = C, \quad D_d = D.$$

2.1 Control predictiv propriu-zis

Se pornește de la modelul liniar discret, generalizat la cazul *MIMO*.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) &= C_d x(k), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (3)$$

Se folosesc notațiile $\Delta x(k+1) := x(k+1) - x(k)$ și $\Delta y(k+1) := y(k+1) - y(k)$ pentru construirea modelului augmentat.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_d & 0_{n \times p} \\ C_d A_d & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ C_d B_d \end{bmatrix} \Delta u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0_{p \times n} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Rescriem compact sistemul (4):

$$\begin{aligned} x_a(k+1) &= \Phi_a x_a(k) + \Gamma_a \Delta u(k) \\ y(k) &= C_a x_a(k), \quad x_a \in \mathbb{R}^{n+p}, \quad \Gamma_a \in \mathbb{R}^{(n+p) \times m}, \quad C_a \in \mathbb{R}^{p \times (n+p)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Notăm N_p și N_c orizontul de predicție, respectiv orizontul de control. Scriem traiectoria dorită a semnalului de control, care este, de altfel, o secvență cu rezultatele problemelor de optimizare de la fiecare timp de eșantionare:

$$\Delta U = [\Delta u(k) \quad \Delta u(k+1) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_c-1)]^T.$$

Având semnalele de control pentru eșantioanele viitoare, se pot scrie următoarele N_p stări prezise la momentul curent k :

$$\begin{aligned} x_a(k+1|k) &= \Phi_a x_a(k) + \Gamma_a \Delta u(k) \\ x_a(k+2|k) &= \Phi_a^2 x_a(k) + \Phi_a \Gamma_a \Delta u(k) + \Gamma_a \Delta u(k+1) \\ &\dots = \dots \\ x_a(k+N_p|k) &= \Phi_a^{N_p} x_a(k) + \Phi_a^{N_p-1} \Gamma_a \Delta u(k) + \dots + \Phi_a^{N_p-N_c} \Gamma_a \Delta u(k+N_c-1). \end{aligned} \quad (6)$$

Înmulțim la stânga egalitățile din (6) cu C_a pentru a obține vectorul ieșirilor prezise.

$$\begin{bmatrix} C_a x_a(k+1|k) \\ C_a x_a(k+2|k) \\ \vdots \\ C_a x_a(k+N_p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_a \Phi_a \\ C_a \Phi_a^2 \\ \vdots \\ C_a \Phi_a^{N_p} \end{bmatrix} x_a(k) + \begin{bmatrix} C_a \Gamma_a & 0 & \dots & 0 \\ C_a \Phi_a \Gamma_a & C_a \Gamma_a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_a \Phi_a^{N_p-1} \Gamma_a & C_a \Phi_a^{N_p-2} \Gamma_a & \dots & C_a \Phi_a^{N_p-N_c} \Gamma_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_c-1) \end{bmatrix}.$$

Rescriem compact:

$$Y = [y(k+1|k) \quad y(k+2|k) \quad \dots \quad y(k+N_p|k)]^T = W x_a(k) + Z \Delta U. \quad (7)$$

Se consideră funcția de cost:

$$J(\Delta U) = \frac{1}{2} (r - Y)^T Q (r - Y) + \frac{1}{2} \Delta U^T R \Delta U. \quad (8)$$

Matricile Q și R sunt simetrice și pozitiv definite, reprezentând ponderile urmăririi referinței r , respectiv ponderile pentru minimizarea efortului de control. Ca și mențiune, prin expresia $r - Y$ se înțelege $[r - y(k + 1|k) \quad r - y(k + 2|k) \quad \dots \quad r - y(k + N_p|k)]^T$.

Se înlocuiește ecuația (7) în (8).

$$J(\Delta U) = \frac{1}{2}(r - Wx_a(k) - Z\Delta U)^T Q (r - Wx_a(k) - Z\Delta U) + \frac{1}{2}\Delta U^T R \Delta U$$

$$J(\Delta U) = \frac{1}{2}[r - Wx_a(k)]^T Q [r - Wx_a(k)] - [r - Wx_a(k)]^T Q Z \Delta U + \frac{1}{2}\Delta U^T (Z^T Q Z + R) \Delta U. \quad (9)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = 0 \implies -Z^T Q (r - Wx_a(k)) + (Z^T Q Z + R) \Delta U = 0 \quad (10)$$

Atunci soluția problemei de optimizare este $\Delta U^* = (R + Z^T Q Z)^{-1} Z^T Q (r - Wx_a)$. Mai departe, se extrage $\Delta u(k)$ și se calculează $u(k)$.

Rezultate

Pentru simulare, s-au ales parametrii $T_s = 0.1$, $N_p = 10$, $N_c = 10$, $R = 0.1I_{20}$, $Q = I_{20}$, $r(t) = [1 \quad -2]^T$.

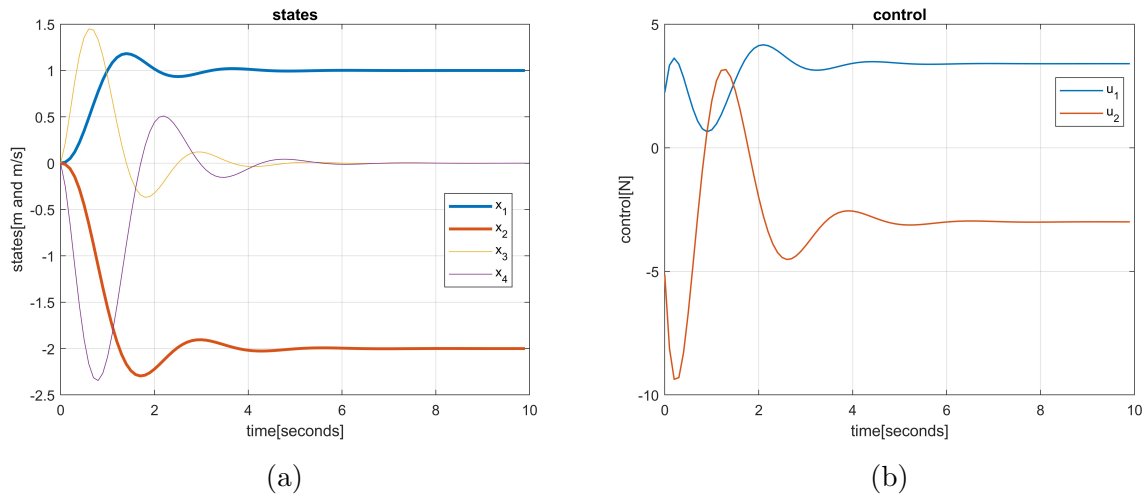


Figure 4: Evoluția stărilor și semnalelor de control pentru sistemul liniarizat

Se constată că metoda controlului predictiv liniar are performanțe bune pentru sistemul liniarizat (Figura 4). Eroarea staționară la poziție este nulă, iar timpul de răspuns este aproximativ 4 secunde pentru ambele ieșiri. Semnalele de control au amplitudini rezonabile.

O altă observație este faptul că scăderea timpului de eșantionare duce la instabilitate. De asemenea, creșterea orizontului de predicție duce la îmbunătățiri ale performanțelor, de exemplu dispare suprareglajul și se reduc oscilațiile din semnalul de comandă.

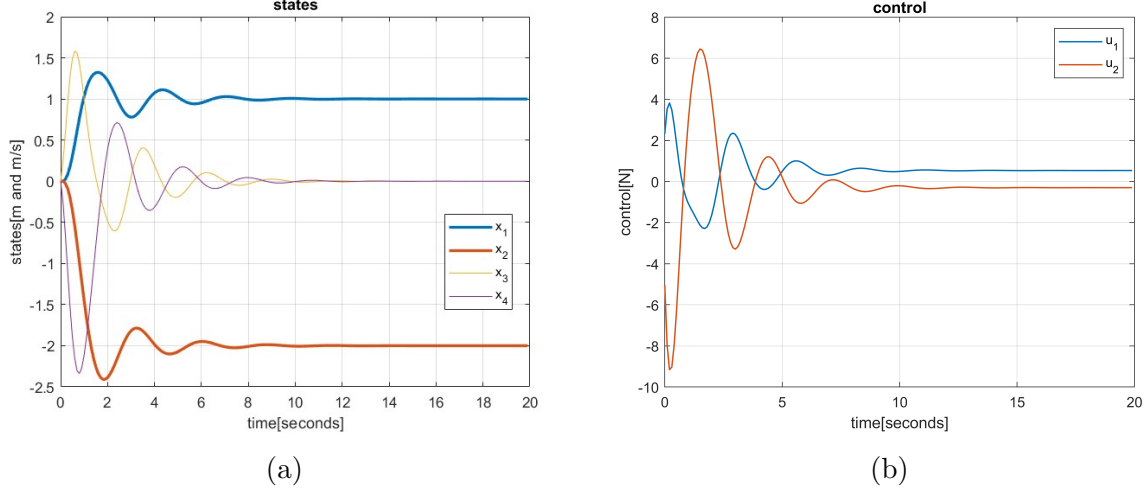


Figure 5: Evoluția stărilor și semnalelor de control pentru sistemul neliniar

Mai departe, validăm legea de control proiectată pe baza sistemului liniarizat, pe sistemul neliniar original (Figura 5). Performanțele scad relativ la sistemul liniarizat, însă urmărirea referinței se realizează în continuare fără eroare. Apar comportamente oscilatorii în evoluția stărilor și a comenzii, dar ele s-au atenuat folosind un orizont mai mare de predicție ($N_p = 50$). Totuși, referința aleasă $r(t) = [1 \ -2]^T$ este departe de punctul de funcționare (i.e. $x_0 = 0$). Când referința se îndepărtează îndeajuns de mult, sistemul trece în instabilitate.

2.2 Control predictiv cu constrângeri

Considerăm un set de constrângeri asupra semnalului de control:

$$u_{min} \leq U(k) \leq u_{max}, \text{ sau, echivalent, } \begin{bmatrix} -U(k) \\ U(k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -u_{min} \\ u_{max} \end{bmatrix}.$$

Are loc egalitatea:

$$\begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+N_p-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} u(k-1) + \begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots & 0 \\ I_m & I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_m & I_m & \dots & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_c-1) \end{bmatrix},$$

sau, scris compact, $U(k) = Eu(k-1) + H\Delta U(k)$.

Proiectarea unei legi de control predictiv cu constrângeri este similară cu cea prezentată anterior. Singura diferență este problema de optimizare, care va fi supusă constrângerilor impuse.

Din cele două ecuații scrise mai-sus, se pot descrie matematic constrângerile considerate.

$$\begin{bmatrix} -H \\ H \end{bmatrix} \Delta U(k) \leq \begin{bmatrix} -u_{min} + Eu(k-1) \\ u_{max} - Eu(k-1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Aceste constrângeri se adaugă la funcția de cost (8), iar problema de optimizare rezultată este cunoscută ca și programare pătratică. Printre tehnicile de programare dinamică se numără condițiile Karush-Kuhn-Tucker, metoda setului activ (*Active-set method*), procedeul lui Hildreth. Pentru rezolvarea problemei de optimizare s-a folosit funcția *quadprog*.

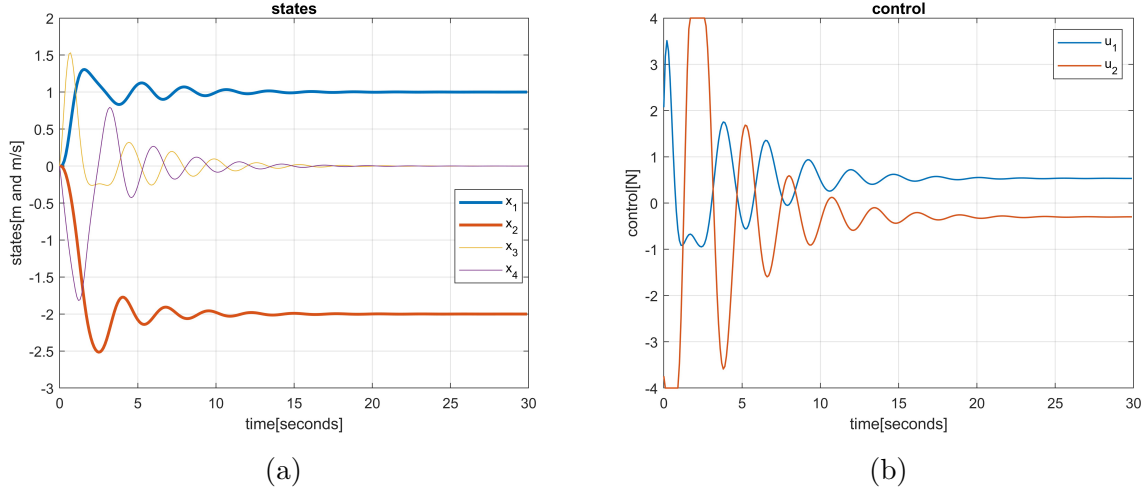


Figure 6: Evoluția stărilor și semnalelor de control pentru sistemul neliniar, cu constrângeri pe semnalele de control

S-au impus constrângerile $-4 \leq u_1, u_2 \leq 4$ (Figura 6). Ele se respectă în totalitate în reprezentarea semnalului de control. Și de această dată se păstrează performanțe mulțumitoare din punct de vedere al urmăririi referinței.

Într-un mod similar s-ar proceda și în vederea trasării unor constrângeri pentru ieșirile sistemului.

3 Concluzii

Concluzionând, controlul predictiv are o utilitate semnificativă în rândul tehnicilor de control avansat. Capacitatea de a determina predicții în legătură cu stările viitoare ale sistemului are nenumărate aplicații și avantaje. Un alt aspect este libertatea de a proiecta legea de control pe baza unor constrângeri, esențiale pentru funcționarea dorită și siguranța unor sisteme. Ca și complexitate de proiectare, dificultatea stă în principal în rezolvarea problemei de optimizare, care depinde mult de complexitatea modelului procesului. În cazul liniar, problema se poate rezolva analitic fără probleme. Aici intervin diferite ramuri ale controlului predictiv și optimal. Liniarizarea în jurul mai multor puncte de funcționare și adaptarea controlului predictiv în funcție de acestea este o variantă care poate atrage riscul de instabilitate numerică. Controlul predictiv neliniar folosește ca și model de predicție un sistem neliniar, iar complexitatea crește prin identificarea sau modelarea neliniară, dar mai ales la optimizarea funcției de cost neliniare, a cărei convexitate trebuie studiată. Din punct de vedere al implementării fizice, controlul predictiv este solicitant ca volum computațional. Se dezvoltă echipamente de calcul specializate în această direcție, precum și aplicații de generare automată de cod. Există și varianta de control predictiv explicit, a cărei problemă de optimizare se rezolvă *offline*.

Bibliografie

- J. M. Maciejowski, “Predictive Control with Constraints,” Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.
- Liuping Wang. 2009. Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB (1st. ed.). Springer Publishing Company, Incorporated.
- Bo Bernhardsson, Karl Johan Åström, Department of Automatic Control LTH, ”Model Predictive Control” Lecture Lund University
- <https://www.mathworks.com/videos/series/understanding-model-predictive-control.html>