



**FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI CALCULATOARE**  
**DEPARTAMENTUL AUTOMATICĂ**

**ANALIZA ȘI CONTROLUL SISTEMELOR NELINIARE**

**LUCRARE DE LICENȚĂ**

Absolvent: **Alexandru ZIGLER**

Coordonator **Asis. dr. ing. Mircea ȘUȘCĂ**  
științific:

**2023**





**FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI CALCULATOARE**  
**DEPARTAMENTUL AUTOMATICĂ**

DECAN,  
**Prof. dr. ing. Liviu MICLEA**

DIRECTOR DEPARTAMENT,  
**Prof. dr. ing. Honoriu VĂLEAN**

Absolvent: **Alexandru ZIGLER**

**ANALIZA ȘI CONTROLUL SISTEMELOR NELINIARE**

1. **Enunțul temei:** *Lucrarea de față prezintă principalele noțiuni de analiză a sistemelor neliniare, alături de exemple sugestive și metode de a controla sistemele neliniare, aplicate pe un exemplu concret.*
2. **Conținutul lucrării:** *Pagina de prezentare, Introducere - Contextul proiectului, Obiectivele proiectului, Studiu bibliografic, Analiza sistemelor neliniare, Metode de control a sistemelor neliniare, Concluzii și preocupări viitoare, Bibliografie.*
3. **Locul documentării:** Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Departamentul Automatică
4. **Data emiterii temei:** 3 Noiembrie 2022
5. **Data predării:** 6 iulie 2023

Absolvent: \_\_\_\_\_

Coordonator științific: \_\_\_\_\_





**FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI CALCULATOARE**  
**DEPARTAMENTUL AUTOMATICĂ**

**Declarație pe propria răspundere privind  
autenticitatea lucrării de licență**

**SINTEZA**

proiectului de diplomă cu titlul:

**Analiza și controlul sistemelor neliniare**

Autor: **Alexandru ZIGLER**

Conducător științific: **Asis. dr. ing. Mircea ȘUȘCĂ**

1. Cerințele temei: Studiul proprietăților, tehnicilor de analiză și control a sistemelor neliniare și aplicarea acestora pe sisteme concrete (convergența stărilor la zero).
2. Soluții alese : Studiul noțiunilor de sisteme planare, stabilitate, cicluri limită, regiune de atracție, pasivitate, forme canonice neliniare și studiul și aplicarea metodelor de control precum: liniarizare prin reacție de la stare, control prin moduri alunecătoare și reglare prin pași înapoi.
3. Rezultate obținute: analiza performanțelor sistemelor în buclă închisă pentru fiecare metodă de control, grafice cu evoluția stărilor și a semnalului de control în timp.
4. Testări și verificări: proiectarea unor algoritmi care verifică posibilitatea de aplicare a metodei de control liniarizare prin reacție de la stare.
5. Contribuții personale: realizarea portretelor de fază și prezentarea exemplelor corespunzătoare noțiunilor de analiză, proiectarea și implementarea celor 3 metode de control.
6. Surse de documentare: cărți și articole din literatura de specialitate a analizei și controlului neliniar, documentația MATLAB pentru Symbolic Math Toolbox.

MINISTERUL EDUCAȚIEI



---

**UNIVERSITATEA TEHNICĂ**  
DIN CLUJ-NAPOCA

---

Semnătura autorului

---

Semnătura conducătorului științific

---



# Cuprins

<b>Capitolul 1</b>	<b>Introducere - Contextul proiectului</b>	<b>1</b>
1.1	Contextul proiectului . . . . .	1
1.2	Sisteme liniare . . . . .	1
1.3	Sisteme neliniare . . . . .	3
<b>Capitolul 2</b>	<b>Obiectivele Proiectului</b>	<b>5</b>
2.1	Tema . . . . .	5
2.2	Obiective . . . . .	5
<b>Capitolul 3</b>	<b>Studiu Bibliografic</b>	<b>7</b>
3.1	Noțiuni matematice . . . . .	7
3.1.1	Condiții Lipschitz . . . . .	7
3.1.2	Clase de continuitate . . . . .	7
3.1.3	Spații euclidiene . . . . .	7
3.1.4	Câmpuri vectoriale . . . . .	8
3.1.5	Forme pătratice . . . . .	9
3.1.6	Mulțimi invariante . . . . .	9
3.1.7	Elemente de geometrie diferențială . . . . .	10
3.2	Literatura sistemelor neliniare . . . . .	11
3.2.1	Elemente de analiză . . . . .	11
3.2.2	Elemente de control . . . . .	11
<b>Capitolul 4</b>	<b>Analiza sistemelor neliniare</b>	<b>12</b>
4.1	Sisteme planare . . . . .	12
4.1.1	Puncte de echilibru și portrete de fază . . . . .	12
4.1.2	Cicluri limită . . . . .	13
4.2	Stabilitatea sistemelor neliniare . . . . .	15
4.2.1	Tipuri de stabilitate . . . . .	15
4.2.2	Liniarizare și stabilitate locală . . . . .	15
4.2.3	Metoda lui Lyapunov . . . . .	17
4.2.4	Principiul invarianței . . . . .	18
4.2.5	Regiunea de atracție . . . . .	19
4.3	Pasivitatea sistemelor . . . . .	21
4.4	Forme canonice ale sistemelor neliniare . . . . .	22
4.4.1	Forma canonică normală . . . . .	22
4.4.2	Forma canonică de control . . . . .	25
4.4.3	Forma canonică de observare . . . . .	27
<b>Capitolul 5</b>	<b>Metode de control a sistemelor neliniare</b>	<b>29</b>
5.1	Liniarizare prin reacție de la stare . . . . .	29
5.1.1	Reacția de la stare . . . . .	29
5.1.2	Descrierea metodei . . . . .	29
5.1.3	Liniarizare parțială prin reacție de la stare . . . . .	30
5.1.4	Studiu de caz . . . . .	30
5.2	Control prin moduri alunecătoare . . . . .	36



5.2.1	Descrierea metodei . . . . .	36
5.2.2	Reducerea fenomenului de <i>chattering</i> . . . . .	38
5.2.3	Studiu de caz . . . . .	40
5.3	Reglare prin pași înapoi . . . . .	42
5.3.1	Descrierea metodei . . . . .	43
5.3.2	Studiu de caz . . . . .	44
<b>Capitolul 6 Concluzii și preocupări viitoare</b>		<b>46</b>
6.1	Concluzii . . . . .	46
6.2	Preocupări viitoare . . . . .	47
<b>Bibliografie</b>		<b>48</b>

# Capitolul 1. Introducere - Contextul proiectului

## 1.1. Contextul proiectului

Un sistem este un ansamblu de componente (mecanice, electrice, organice etc.) care interacționează între ele și influențează starea sistemului în timp. Asupra sistemului, pot acționa forțe exterioare ce se împart în intrări și perturbații. Intrările sunt acțiuni dorite, aplicate în mod conștient sistemului, așteptându-se un anumit răspuns al acestuia, în timp ce perturbațiile sunt nedorite, uneori imprevizibile sau chiar distructive pentru sistem. Ieșirile unui sistem sunt, în general, semnale sau mărimi de interes, care se pot măsura fie cu senzori, traductoare, fie cu obiecte (*hardware* și *software*) specializate în acest scop.

Pentru a se putea descrie dinamica unui sistem continuu în timp, acesta se modelează folosind modele matematice, mai precis sisteme de ecuații diferențiale. Acestea se pot determina prin legi provenite din fizică, de exemplu „A doua lege a lui Newton”, sau ecuațiile Euler-Lagrange. De asemenea, se pot folosi și tehnici de identificare, care presupun efectuarea unor simulări, cu anumite semnale de intrare, pe baza cărora se calculează parametrii relevanți pentru aproximarea unui model matematic. Ecuațiile diferențiale pot avea și condiții inițiale, care corespund condițiilor inițiale ale stărilor din sistem, cu semnificație fizică. Sistemele dinamice se pot clasifica în sisteme invariante în timp, ale căror modele nu depind explicit de variabila timp, și sisteme variabile în timp.

Analiza unui sistem constă în studiul comportării și evoluției acestuia în timp. În acest sens, se definesc noțiunile de regim tranzitoriu și regim staționar. Regimul tranzitoriu reprezintă durata în care răspunsul sistemului are variații considerabile și nu se află în apropierea valorii staționare. Regimul staționar reprezintă durata în care sistemul are variații neglijabile, aflându-se în jurul valorii staționare. În cazul acesta, se poate considera o bandă de  $\pm 2\%$  față de valoarea de regim staționar.

Controlul unui sistem reprezintă specificarea unor performanțe ce se doresc de la răspunsul acestuia, în contextul unor anumite intrări și perturbații. Urmează proiectarea și testarea prin simulări a unui regulator sau lege de control care să respecte performanțele menționate. În final, are loc implementarea regulatorului fie analogică, fie digitală, realizându-se astfel controlul sistemului. Ca performanțe, se pot aminti: stabilitatea sistemului, timpul de răspuns, urmărirea unei referințe, rejectarea perturbațiilor.

## 1.2. Sisteme liniare

Principala caracteristică a sistemelor liniare este aceea că respectă principiul superpoziției. Acesta afirmă că răspunsul unui sistem la o combinație liniară de semnale de intrare va fi identic cu aceeași combinație liniară, dar a răspunsurilor la fiecare semnal de intrare individual.

Modelarea unui sistem liniar se poate face în două moduri: fie prin spațiul stărilor, fie printr-o funcție de transfer.

Considerăm sistemul liniar, descris prin ecuația diferențială în timp:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t). \quad (1.1)$$

Semnalele de timp  $u(t)$  și  $y(t)$  reprezintă intrarea, respectiv ieșirea sistemului, iar coeficienții sunt constante reale. Dacă presupunem condițiile inițiale ale sistemului nule și aplicăm transformata Laplace în ecuația (1.1), obținem

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s). \quad (1.2)$$

sau

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (1.3)$$

Relația (1.3) este definiția generală a unei funcții de transfer și este esențială în studii și analiza sistemelor liniare. Rădăcinile numărătorului se numesc zerouri, iar rădăcinile numitorului se numesc poli.

Un alt mod de a descrie un sistem liniar este prin spațiul stărilor:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.4)$$

Vectorii  $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T$ ,  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ ,  $y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p]^T$  reprezintă intrările, stările, respectiv ieșirile sistemului, toate fiind semnale continue în timp. Observăm că în acest caz, un sistem cu mai multe intrări și ieșiri poate fi descris cu ușurință prin spațiul stărilor, în timp ce, în cazul precedent, ar fi nevoie de o matrice de funcții de transfer.

Stabilitatea unui sistem liniar se poate studia prin polii funcției de tranfer sau prin valorile proprii ale matricei A. Acestea trebuie să fie în semiplanul stâng pentru ca sistemul să fie stabil.

Controlul unui sistem liniar se realizează, în general, cu ajutorul unui regulator, pe baza principiului de reacție negativă, precum în Figura 1.1.

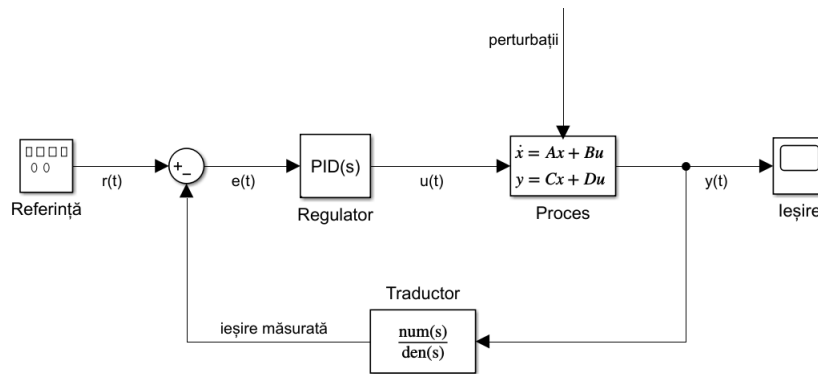


Figura 1.1: Sistem cu reacție negativă

Semnalele din schema de reglare se definesc în felul următor. Referința  $r(t)$  este introdusă de utilizator și se dorește ca sistemul să urmărească acest semnal. Eroarea  $e(t)$  este diferența dintre referință și ieșirea măsurată, iar pe baza ei, regulatorul calculează semnalul de comandă  $u(t)$ , care va fi transmis către proces, cu scopul de a minimiza

eroarea. Ieșirea va fi măsurată cu un traductor și va fi transformată în semnal unificat (de obicei 4-20 mA). De asemenea, semnalele de eroare și comandă ale regulatorului funcționează în acest interval. Ca perturbații, pot exista modificări neprevăzute ale stărilor sau parametrilor procesului, iar schema de control trebuie să rejeteze aceste perturbații.

Sistemul din Figura 1.1 se numește sistem în buclă închisă, deoarece modelul său matematic include modelul matematic al regulatorului și, de asemenea, reacția negativă. De multe ori, pentru controlul sistemului în buclă închisă, se proiectează modelul matematic al acestuia pentru respectarea unor performanțe, iar ulterior se calculează matematic modelul regulatorului. Cele mai întâlnite regulatoare sunt cele de tip PID, cu efectele proporțional, integrator și derivativ. Fiecare efect aduce avantaje în contextul anumitor performanțe. Modelul unui astfel de regulator este:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad \text{sau} \quad \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right).$$

Performanțele unui sistem liniar reprezintă analiza comportamentală a sistemului în buclă închisă. Astfel, amintim timpul de răspuns ce exprimă timpul în care răspunsul sistemului ajunge în regimul staționar. Suprareglajul este o depășire temporară a valorii staționare ce introduce oscilații în răspunsul sistemului, măsurându-se în procente. Erorile staționare la poziție și viteză reprezintă diferențele dintre semnale de referință de tip treaptă, respectiv rampă și răspunsul sistemului la aceste semnale. Acestea exprimă conceptul de urmărire a unei referințe. În cazul răspunsului frecvențial, apar noțiuni precum pulsația de tăiere, pulsația la  $-\pi$ , margine de câștig, margine de fază. Ele se pot ilustra ușor prin diagrame precum Bode, Nyquist, Nichols.

### 1.3. Sisteme neliniare

Sistemele neliniare sunt foarte frecvent întâlnite în aplicații reale, spre deosebire de sistemele liniare. De exemplu, în natură apar sisteme ale căror modele sunt extrem de complexe, precum starea vremii, curgerea fluidelor, sau reacții chimice. Prin urmare, studiul, analiza și controlul unor astfel de sisteme devine o sarcină dificilă, chiar și din punct de vedere computațional.

Proprietățile sistemelor neliniare diferă semnificativ față de cazul liniar. În primul rând, sistemele neliniare nu respectă principiul superpoziției. Pe de altă parte, ecuațiile diferențiale ce descriu sistemul nu se pot rezolva analitic. În unele cazuri soluția este unică, în alte cazuri pot exista o infinitate de soluții. Este posibil ca una din stările sistemului să tindă la infinit într-un timp finit, fenomen care nu se întâlnește în cazul liniar. O altă proprietate este sensibilitatea la condiții inițiale. O variație mică a acestora poate duce la schimbări majore în răspunsul sistemului, fenomen cunoscut sub numele de „Efectul fluturelui”. Ciclul limită reprezintă o traiectorie închisă în spațiul stărilor spre care converg alte traiectorii (ciclul limită stabil) sau dinspre care diverg (ciclul limită instabil). Comportamentul sistemului în acest caz este caracterizat de oscilații.

Modelarea unui sistem neliniar se face exclusiv în spațiul stărilor, întrucât transformata Laplace nu se poate aplica în cazul neliniar. Forma generală a unui sistem neliniar, invariant în timp este următoarea:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 y &= h(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

sau

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x, u) \\
 y &= h(x, u)
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Semnalele  $u$ ,  $x$ ,  $y$  au aceleași semnificații ca în cazul liniar.

Analiza sistemelor neliniare constă în determinarea punctelor de echilibru și determinarea stabilității fiecăruia. În sprijinul metodelor de control neliniar vin alte forme de analiză precum: studiul pasivității, formele canonice neliniare, funcțiile Lyapunov. În cazul sistemele variabile în timp, amintim Principiul Invarianței, Criteriul lui Popov și Criteriul Cercului pentru stabilitate absolută. În particular, sistemele planare (de ordin doi) sunt mai ușor de studiat, întrucât cele două stări se pot reprezenta în portrete de fază, din care se observă comportamentul punctelor de echilibru.

Controlul în cazul neliniar devine o problemă mult mai complexă. Dacă în cazul liniar se dorea ca sistemul în buclă închisă să respecte anumite performanțe, aici se dorește ca legea de control să impună anumite restricții asupra traiectoriilor din spațiul stărilor. Se poate impune ca o traiectorie să convergă spre origine - problemă de stabilizare. Pe de altă parte, se poate impune ca o stare să respecte o anumită traiectorie aleasă dependentă de timp - problemă de urmărire.

O metodă clasică de control este liniarizarea sistemului neliniar în jurul punctelor de echilibru. Urmează proiectarea mai multor regulatoare folosind metodele liniare de control. Aceste regulatoare vor funcționa local, în jurul punctelor de echilibru, având ca efect global controlul sistemului neliniar.

Dintre metodele neliniare de control, amintim metoda liniarizării prin reacție de la stare (engl. *Feedback linearization*), metoda reglării prin pași înapoi (engl. *Backstepping*), control bazat pe pasivitate, control bazat pe estimatoare, control bazat pe funcții Lyapunov.

Unele modele neliniare sunt dependente de parametri care provoacă incertitudini. În acest context, apare nevoia de control robust. O astfel de metodă este controlul prin moduri alunecătoare (engl. *Sliding mode control*).

## Capitolul 2. Obiectivele Proiectului

### 2.1. Tema

Analiza și controlul sistemelor neliniare reprezintă un domeniu extrem de important în ingineria modernă. El favorizează modelarea și înțelegerea aprofundată a sistemelor neliniare din lumea reală. De asemenea, se oferă performanțe superioare controlului clasic, liniar. Tehnicile de control neliniar, alături de controlul robust, adaptiv și optimal sunt cele mai folosite și eficiente soluții pentru problemele reale de control. Acest domeniu este extrem de complex și în continuă dezvoltare, cu sprijinul matematicii aplicate, al fizicii și al interpretărilor geometrice.

Motivația personală pentru alegerea acestei teme este dezvoltarea cunoștințelor generale și competențelor necesare domeniului sistemelor neliniare și, mai ales, a controlului acestora. În plus, cercetarea teoretică ar putea reprezenta un interes considerabil în contextul analizei și tehnicilor de control neliniar. De asemenea, abilitatea de a studia, modela și controla sisteme neliniare precum brațe robotice, drone, sisteme electro-mecanice sau procese industriale reprezintă o oportunitate însemnată pentru un inginer.

Lucrarea de față este alcătuită din șase capitole. Primul este o introducere în contextul sistemelor dinamice liniare, respectiv neliniare, modelarea, comportamentul și proprietățile acestora și metode pentru control. Al doilea capitol expune tema, scopul și obiectivele proiectului. Cel de al treilea capitol prezintă noțiunile matematice necesare studiului sistemelor neliniare, precum și o parte de descriere a literaturii acestui domeniu. Al patrulea capitol cuprinde o parte din proprietățile sistemelor neliniare precum stabilitate, pasivitate, forme canonice. În capitolul cinci se prezintă tehnici de control neliniar, alături de studii de caz pe un sistem real. În ultimul capitol se menționează concluziile și preocupările viitoare.

### 2.2. Obiective

Scopul central al lucrării este înțelegerea conceptelor de analiză, a proprietăților sistemelor neliniare și ilustrarea acestora prin exemple sugestive. Totodată, utilizând aceste noțiuni, și altele adiționale, cu privire la metode de control neliniar, se dorește aplicarea acestora în contextul unui sistem concret.

Obiectivele principale ale lucrării sunt:

- studiul unor noțiuni matematice precum analiză multivariabilă, ecuații diferențiale, mulțimi invariante, elemente de geometrie diferențială;
- studiul sistemelor neliniare planare și realizarea portretelor de fază prin intermediul simulărilor;
- studiul teoriei Lyapunov referitor la stabilitatea sistemelor;
- studiul unor noțiuni precum cicluri limită, regiune de atracție, pasivitate, forme canonice neliniare;

- modelarea unui sistem neliniar și analiza sa comportamentală prin simulări;
- proiectarea unor algoritmi bazați pe concepte de geometrie diferențială care ajută la stabilirea posibilității de aplicare a metodei de control numită liniarizare prin reacție de la stare;
- studiul, aplicarea și testarea unor metode de control pe sistemul considerat;
- analiza performanțelor rezultate și comparația dintre metode.

## Capitolul 3. Studiu Bibliografic

### 3.1. Noțiuni matematice

În Anexa B din [1] se prezintă o serie de termeni, definiții și relații esențiale în studiul sistemelor neliniare.

#### 3.1.1. Condiții Lipschitz

O funcție  $f(t, x) : J \subset \mathbb{R}$  este local Lipschitz în variabila  $x$ , în punctul  $x_0$  dacă există o vecinătate  $N(x_0, r)$  a lui  $x_0$ , definită prin  $N(x_0, r) = \{\|x - x_0\| < r\}$  și există o constantă pozitivă  $L$  astfel încât funcția  $f$  îndeplinește condiția Lipschitz:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \text{ oricare ar fi } t \in J \text{ și oricare ar fi } x, y \in N(x_0, r). \quad (3.1)$$

Funcția  $f$  este local Lipschitz în  $x$  pe un domeniu  $D$ , dacă este local Lipschitz în fiecare punct  $x_0 \in D$ . Funcția  $f$  este Lipschitz pe domeniul  $D$ , dacă satisface condiția (3.1) cu aceeași constantă Lipschitz  $L$ . O funcție este global Lipschitz dacă este Lipschitz pe  $\mathbb{R}^n$ .

#### 3.1.2. Clase de continuitate

Fie  $f : A \rightarrow B$ . Funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0$  dacă, fiind dat  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta > 0$  astfel încât:  $\|x_0 - y\| < \delta \implies \|f(x_0) - f(y)\| < \varepsilon$ . Funcția este continuă pe intervalul  $A$  dacă este continuă în fiecare punct din  $A$ .

Funcția  $f$  este diferențiabilă în punctul  $x_0$  dacă limita  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  există.

Se consideră  $l \geq 1$  și  $f$  o funcție de mai multe variabile. Atunci  $f$  este de clasa  $\mathcal{C}^l$  dacă funcția are derivate parțiale până la ordinul  $l$ , continue. O funcție este de clasa  $\mathcal{C}^0$  dacă este continuă.

#### 3.1.3. Spații euclidiene

Pentru un studiu analitic cât mai complex și mai general al sistemelor dinamice, se folosesc noțiuni matematice abstracte: elemente de algebră liniară, topologie, geometrie diferențială și analiză funcțională.

În capitolele 5, 6 și 7 din [2] se descriu spațiile euclidiene, mai precis spațiul  $\mathbb{R}^n$ .

Un vector din  $\mathbb{R}^n$  are forma  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  și are ca interpretare geometrică un

punct din spațiul  $n$ -dimensional - vârful vectorului. El este complet caracterizat prin coordonatele sale  $x_i$  - numere reale.



Norma unui vector  $x$ , notată  $\|x\|$ , are următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned}\|x\| &\geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \\ \|x + y\| &\geq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n; \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

În general se folosește norma euclidiană  $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} = \sqrt{x^T x}$ .

În  $\mathbb{R}^n$ , vectorii  $V_1, V_2, \dots, V_k$  sunt liniar independenți dacă relația  $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_k V_k = 0$  cu  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  implică  $\alpha_i = 0, \forall i$ .

Un subspațiu al spațiului  $\mathbb{R}^n$  este o colecție ce conține toate combinațiile liniare posibile ale unui set fixat de vectori. De exemplu, fiind dați vectorii de mai sus, spunem că mulțimea  $S = \{\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_k V_k | \alpha_i \in \mathbb{R}\}$  este un subspațiu al lui  $\mathbb{R}^n$ , generat de vectorii  $V_1, V_2, \dots, V_k$ .

O transformare liniară în spațiul  $\mathbb{R}^n$  poate fi descrisă printr-o matrice pătratică de dimensiune  $n$ . Astfel, rezultatul înmulțirii matricii cu un vector fixat va fi un alt vector, fapt ce se poate interpreta ca deplasarea punctului inițial în acest nou punct. Această idee reprezintă intuiția geometrică a evoluției sistemelor dinamice în timp. Folosind acest concept, putem defini vectorii și valorile proprii ale matricii, respectiv ale transformării liniare. Fiind dată relația  $Ax = \lambda x$ , unde  $A$  este o transformare liniară cunoscută, numim perechile  $(\lambda, x)$  valorile proprii, respectiv vectorii proprii ai matricii  $A$ . Ca interpretare geometrică, transformarea nu schimbă direcția vectorilor proprii, ci doar mărimea lor.

În capitolul 1 din [3], se prezintă forma canonică Jordan și importanța acesteia. În esență, orice matrice  $A$  este asemenea (engl. *similar*) cu forma sa canonică Jordan, de forma  $J = P^{-1}AP$ , unde  $P$  se construiește din vectorii proprii generalizați. Fiind o matrice bloc diagonală, matricea  $J$  este utilă în calculul exponențialei matriciale sau în rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale.

### 3.1.4. Câmpuri vectoriale

Un câmp scalar reprezintă o transformare a unui spațiu  $n$ -dimensional într-un spațiu unidimensional. În acest sens, se consideră  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Gradientul unei astfel de funcții este definit prin

$$\nabla f(x) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]^T = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T.$$

Un câmp vectorial reprezintă o transformare a unui spațiu  $n$ -dimensional într-un alt spațiu  $n$ -dimensional. Se atașează fiecărui punct din spațiu un vector, de aici rezultând reprezentarea geometrică bine cunoscută. Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Jacobian-ul unei astfel de funcții este definit prin:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

### 3.1.5. Forme pătratice

Fie  $M$  o matrice constantă, pătratică. Definim forma pătratică, o expresie de tipul  $x^T M x$ , unde  $x$  este un vector coloană  $n$ -dimensional.  $M$  este simetrică dacă  $M = M^T$ .  $M$  este antisimetrică dacă  $M^T = -M$ . Orice matrice  $M$  se poate scrie ca o sumă dintre o matrice simetrică și una antisimetrică astfel:

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2} = M_s + M_a.$$

Se poate atăta că, pentru o matrice antisimetrică  $M_a$ , forma pătratică  $x^T M_a x$  este identic nulă. Prin urmare, definiția formei pătratice se poate restrânge la o matrice  $M$  - simetrică.

O matrice  $M$  se numește pozitiv definită (pozitiv semidefinită) și se notează  $M > 0$  ( $M \geq 0$ ) dacă forma pătratică  $x^T M x > 0$  ( $x^T M x \geq 0$ ),  $\forall x \neq 0$ . O matrice  $M$  se numește negativ definită (negativ semidefinită) dacă matricea  $-M$  este pozitiv definită (pozitiv semidefinită).

Amintim inegalitatea:

$$\lambda_{\min}(M) \|x\|^2 \leq x^T M x \leq \lambda_{\max}(M) \|x\|^2. \quad (3.2)$$

unde  $\lambda_{\min}$  și  $\lambda_{\max}$  sunt cea mai mică, respectiv cea mai mare valoare proprie din spectrul matricii  $M$ .

### 3.1.6. Mulțimi invariante

În capitolul 3 din [1] se descriu noțiuni și definiții ce vin în sprijinul Principiului Invarianței.

Fie  $x(t)$  o soluție a ecuației diferențiale  $\dot{x} = f(x)$ . Un punct  $p$  este un punct de limită pozitivă (engl. *positive limit point*) pentru acea soluție, dacă există șirul  $(t_n)$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = p$ . Mulțimea tuturor punctelor  $p$  se numește mulțime de limită pozitivă (engl. *positive limit set*) pentru  $x(t)$ .

O mulțime  $M$  este invariantă față de  $\dot{x} = f(x)$  dacă are loc implicația:

$$x(0) \in M \implies x(t) \in M \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

O mulțime  $M$  este pozitiv invariantă dacă în relația (3.3),  $t \geq 0$ .

Spunem că  $x(t)$  tinde la o mulțime  $M$  când  $t \rightarrow \infty$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $T > 0$  astfel încât  $\text{dist}(x(t), M) < \varepsilon$ ,  $\forall t > T$ , unde  $\text{dist}(p, M)$  reprezintă cea mai mică distanță de la  $p$  la orice punct din  $M$ .

### 3.1.7. Elemente de geometrie diferențială

În capitolul 1 din [1] se definește noțiunea de difeomorfism.

O transformare de clasă  $\mathcal{C}^1$ ,  $z = T(x)$  este un difeomorfism local în  $x_0$  dacă *Jacobian-ul*  $\frac{\partial T}{\partial x}$  este nesingular în  $x_0$ .  $T$  este un difeomorfism global dacă și numai dacă  $\frac{\partial T}{\partial x}$  este nesingular, pentru orice  $x \in \mathbb{R}^n$  și  $T$  este o transformare proprie:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|T(x)\| = \infty.$$

Considerând câmpurile vectoriale  $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se definește derivata Lie a lui  $h$  față de  $f$ :

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x). \quad (3.4)$$

Notății:

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial L_f h}{\partial x} g(x);$$

$$L_f^i h(x) = \frac{\partial (L_f^{(i-1)} h)}{\partial x} f(x).$$

Definim în continuare paranteza sau croșetul Lie (engl. *Lie bracket*). Fiind date două câmpuri vectoriale  $f$  și  $g$ , croșetul Lie este un alt câmp vectorial, notat  $[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$ , unde  $\frac{\partial g}{\partial x}$  și  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sunt matrici de tip *Jacobian*.

Pentru a repeta croșetul de un anumit număr de ori, se folosește o altă notație:

$$ad_f g(x) = [f, g](x);$$

$$ad_f^i g(x) = [f, ad_f^{i-1} g(x)].$$

Fie câmpurile vectoriale  $f_1, f_2, \dots, f_k$  definite pe  $D \subset \mathbb{R}^n$  și

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$$

subspațiul generat de vectorii  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$  pentru  $x \in D$  fixat. Numim distribuția  $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ , o colecție de spații vectoriale  $\Delta(x)$ , cu  $x \in D$ . Dimensiunea distribuției  $\Delta(x)$  se definește ca  $\dim(\Delta(x)) = \text{rang}[f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$ . Dacă cele  $k$  câmpuri vectoriale ale distribuției sunt liniar independente oricare ar fi  $x \in D$ , atunci  $\dim(\Delta(x)) = k, \forall x \in D$ . În acest caz, spunem că  $\Delta$  este nesingulară.

O distribuție  $\Delta$  este involutivă dacă are loc implicația

$$g_1 \in \Delta, g_2 \in \Delta \implies [g_1, g_2] \in \Delta. \quad (3.5)$$

O distribuție nesingulară  $\Delta$ , generată de  $f_1, f_2, \dots, f_k$  este involutivă dacă și numai dacă

$$[f_i, f_j] \in \Delta, \quad \forall 1 \leq i, j \leq k. \quad (3.6)$$

Aceste noțiuni sunt tratate în detaliu în [4], capitolul 8, însă rezultatele esențiale sunt trecute în capitolul 8 din [1].

### 3.2. Literatura sistemelor neliniare

Sistemele neliniare reprezintă un domeniu extrem de complex ce se află în continuă dezvoltare. Matematica aplicată, modelarea și construcția fizică a sistemelor, puterea de calcul și dezvoltarea algoritmilor sunt concepte fundamentale în progresul acestei ramuri a ingineriei. De aceea, consultarea literaturii este crucială pentru înțelegerea, aprofundarea și furnizarea unor rezultate satisfăcătoare în acest context.

Principalele surse de literatură utilizate sunt [1] și [5]. Ele îmbină tehnici de analiză și metode de control a sistemelor neliniare, cele două concepte fiind strâns legate între ele. Aceste cărți surprind în mod comprimat principalele noțiuni și tehnici rezultate în urma cercetării în acest domeniu, de-a lungul istoriei. Noțiunile sunt prezentate într-un mod inteligibil și clar, cu vastă rigoare matematică și fundamentare teoretică. De asemenea, pentru a ridica gradul de înțelegere al cititorului, se prezintă exemple sugestive ce vin în sprijinul teoremelor și conceptelor descrise.

În continuare se menționează succint elementele de analiză și control desprinse din cele două cărți, dar și din alte referințe bibliografice, însă o parte din noțiuni se vor prezenta în detaliu în următoarele capitole din lucrarea de față. În plus, în articolul [6] se amintesc cronologic, rezultatele deosebite ce au marcat domeniul sistemelor neliniare.

#### 3.2.1. Elemente de analiză

Analiza sistemelor neliniare debutează în 1892 cu studiul matematicianului rus A.M. Lyapunov despre stabilitatea sistemelor dinamice. Tot în acea perioadă, Poincaré a dezvoltat studii cu privire la cicluri limită și teoria bifurcațiilor. Mai târziu, s-au introdus metode de analiză precum funcții de descriere, portrete de fază. Bode și Nyquist au cercetat ulterior răspunsul frecvențial și reacția sistemelor. În 1944, Lur'e introduce problema de stabilitate absolută. În 1961, Vasile M. Popov a dezvoltat criteriul ce îi poartă numele, criteriul lui Popov, și definește conceptul de hiperstabilitate. Ulterior, apar concepte precum estimatoare de stare, pasivitate, stabilitatea relației intrare-stare.

O parte din aceste noțiuni sunt prezentate în capitolul 4 din lucrarea de față, alături de exemple preluate din secțiunile "Exerciții" din [1] sau [5].

#### 3.2.2. Elemente de control

Metodele de control abordate în această lucrare sunt liniarizarea prin reacție de la stare, controlul prin moduri alunecătoare și reglare prin pași înapoi. Pentru prima metodă s-au folosit referințele bibliografice principale [1] și [7], pentru a doua, [8], [9], [10], iar pentru a treia, [1] și [11]. Acestea sunt rezumate în capitolul 5 al lucrării de față, alături de studii de caz pentru fiecare metodă în parte, aplicată pe un sistem neliniar concret.

Alte metode ce pot fi menționate sunt controlul bazat pe pasivitate (engl. *Passivity based control*), controlul bazat pe estimatoare (engl. *Observer based control*) sau planificarea factorului de amplificarea (engl. *Gain scheduling*).

## Capitolul 4. Analiza sistemelor neliniare

### 4.1. Sisteme planare

Sistemele planare sunt sisteme ale căror dinamică se poate descrie prin două stări, iar reprezentarea lor în plan este intuitivă din punct de vedere geometric și ușor de vizualizat. Aceste avantaje duc la o analiză mult mai convenabilă, comparativ cu sistemele de ordin superior. Din această cauză, sistemele planare sunt esențiale pentru studiul general al sistemelor neliniare. Se vor prezenta în continuare aspecte precum: portrete de fază, puncte de echilibru, cicluri limită.

#### 4.1.1. Puncte de echilibru și portrete de fază

Se consideră sistemul autonom, definit pe intervalul  $D \subset \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (4.1)$$

Presupunem că funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  sunt local Lipschitz pe  $D$ . Numim punct de echilibru al sistemului, orice punct  $(x_1, x_2) \in D$ , care respectă simultan condițiile  $f_1(x_1, x_2) = 0$  și  $f_2(x_1, x_2) = 0$ . Intuitiv, un punct de echilibru reprezintă un punct în care nu există dinamică, variația stărilor fiind astfel nulă:  $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$ .

Notăm  $x_0 = (x_{10}, x_{20})$  condițiile inițiale ale sistemului (4.1), la momentul  $t = 0$ . Definim  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  soluția sistemului considerând condițiile inițiale menționate. Geometric, ea se poate reprezenta drept o curbă care pornește în punctul  $x_0$  și evoluează în planul  $x_1x_2$ , în funcție de timp. Ne vom referi la această curbă sub numele de traiectorie. Definim noțiunea de portret de fază ca mulțimea tuturor traiectoriilor. În practică, însă, portretul de fază conține doar traiectorii relevante ce încep din diferite puncte inițiale și care ilustrează în întregime comportamentul global al sistemului. În general, portretele de fază se construiesc numeric, prin simulări, însă există și metode analitice. Pentru o vizualizare mai bună a portretului de fază, se adaugă în grafic un câmp vectorial cu vectori tangenți la traiectoriile sistemului. Pentru un punct  $(x_1, x_2)$  din spațiul stărilor, tangenta la traiectorie va fi vectorul  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ , traslatat astfel încât originea vectorului să fie în punctul  $(x_1, x_2)$ .

Un exemplu de portret de fază este ilustrat în Figura 4.1.

În continuare, vom prezenta tipurile de puncte de echilibru, specifice sistemelor planare liniare.

În cazul în care sistemul liniar are valori proprii reale, distingem trei tipuri de puncte de echilibru. Dacă valorile proprii sunt negative, punctul de echilibru va fi nod stabil, iar dacă sunt pozitive, va fi nod instabil. Ele se pot observa în figurile 4.2, 4.3, iar în figura 4.4, echilibrul se numește punct șar, valorile proprii având semne contrare.

Cazul în care sistemul are valori proprii complex conjugate aduce alte trei categorii de puncte de echilibru. În mod analog, există focar stabil (figura 4.5) și instabil (figura 4.6), corespunzătoare valorilor proprii din semiplanul complex stâng, respectiv drept. Se remarcă aici importanța studiului stabilității sistemelor liniare. Punctul de echilibru din figura 4.7 se numește centru, iar valorile proprii sunt pur imaginare, rezultând un

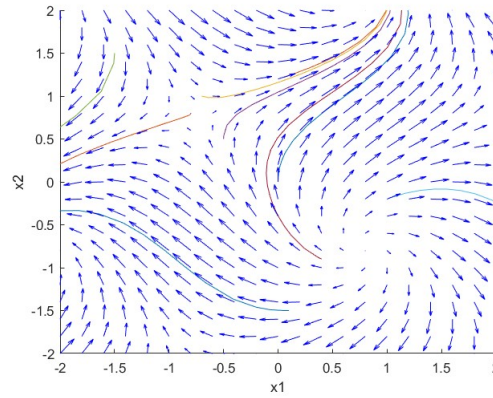


Figura 4.1: Portret de fază

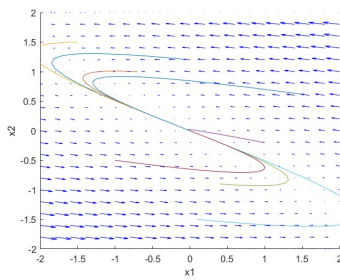


Figura 4.2: Nod stabil

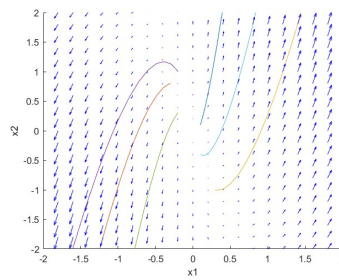


Figura 4.3: Nod instabil

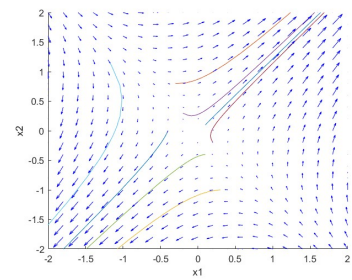


Figura 4.4: Punct șa

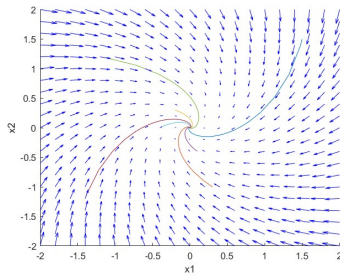


Figura 4.5: Focar stabil

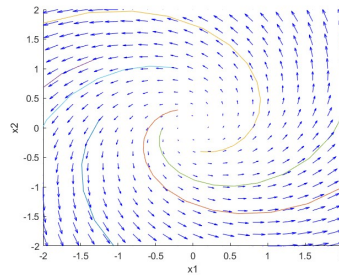


Figura 4.6: Focar instabil

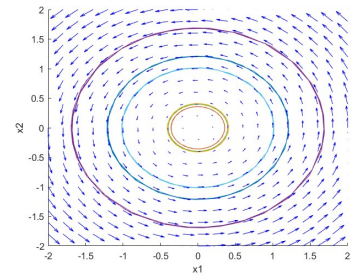


Figura 4.7: Centru

comportament oscilatoriu.

De remarcat faptul că aceste puncte de echilibru sunt corespunzătoare sistemelor planare liniare. Însă, în general prin liniarizarea sistemului neliniar în jurul unui punct de echilibru, comportamentul celor două sisteme ar trebui să fie similar. Problema apare în cazul valorilor proprii pur imaginare. Din studiul teoriei perturbațiilor se poate concluziona că nodurile, focarele și punctele șa sunt structural stabile, spre deosebire de punctele de echilibru de tip centru. În acest sens, se definesc punctele de echilibru hiperbolice, acelea care corespund unor valori proprii cu partea reală nenulă.

#### 4.1.2. Cicluri limită

Ciclurile sau orbite periodice ale unui sistem se pot asocia cu soluțiile periodice ale acestuia. Spunem că o soluție a sistemului (4.1) cu condițiile inițiale  $x_0$ , este periodică, dacă soluția respectă relația  $x(t) = x(t + T)$ ,  $\forall t \geq 0$ . Valoarea  $T > 0$  minimă care îndeplinește egalitatea este numită perioada orbitei periodice  $x(t)$ .

Ciclurile limită reprezintă curbe închise și izolate, situate în planul stărilor și sunt specifice exclusiv sistemelor neliniare. Oscilațiile sunt fenomenul esențial ce caracterizează ciclurile limită, deoarece apar noțiunile de amplitudine, frecvență și fază. Amplitudinea este distanța maximă a soluției sistemului față de punctul de echilibru. Frecvența este numărul de cicluri parcurse în unitatea de timp și este egală cu inversul perioadei. Faza este poziția soluției sistemului la un moment dat.

Stabilitatea ciclurilor limită este o proprietate fundamentală. Un ciclu limită este prin definiție stabil dacă toate traiectoriile din vecinătatea acestuia converg spre el când  $t \rightarrow \infty$ . Un ciclu limită este instabil dacă toate traiectoriile din vecinătatea lui diverg dinspre el când  $t \rightarrow \infty$ . De remarcat faptul că, dacă se înlocuiește  $t$  cu  $-t$  în expresia unui sistem, sau, în mod echivalent, se consideră  $t \rightarrow -\infty$ , atunci un ciclu limită stabil se transformă într-unul instabil și viceversa. De asemenea, există și cicluri limită semi-stabile, în cazul cărora unele traiectorii din vecinătate converg, iar altele diverg când  $t \rightarrow \infty$ .

În [3], capitolul 3, se prezintă în detaliu noțiunile de orbite periodice, cicluri limită și cicluri separatoare, precum și definițiile și teoremele aferente acestora într-un mod formal și riguros din punct de vedere matematic.

Amintim teorema următoare din [5], capitolul 2, specifică sistemelor planare. Ea simplifică semnificativ studiul ciclurilor limită în acest context.

**Teoremă 4.1 (Poincaré - Bendixson)** *Dacă o traiectorie a unui sistem autonom planar rămâne într-o regiune finită  $\Omega$ , atunci una din următoarele afirmații este adevărată:*

- *traiectoria tinde spre un punct de echilibru;*
- *traiectoria tinde la un ciclu limită asimptotic stabil;*
- *traiectoria este ea însăși un ciclu limită.*

Ca exemplu, se consideră sistemul:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 \cdot (1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \cdot (1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Un portret de fază relevant este descris în Figura 4.8. Sistemul va fi analizat în detaliu în secțiunea 4.2.

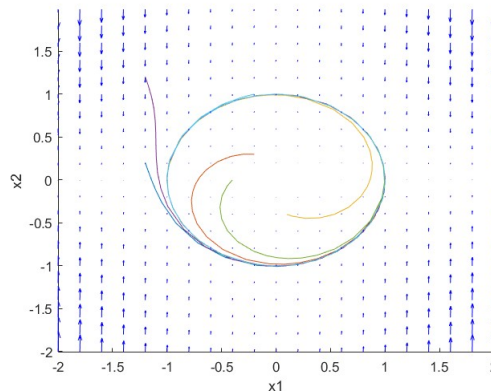


Figura 4.8: Ciclu limită stabil

## 4.2. Stabilitatea sistemelor neliniare

Stabilitatea unui sistem este de multe ori cea mai importantă proprietate a sa, în special în cazul sistemelor neliniare. De multe ori se dorește proiectarea unei legi de control pentru stabilizarea unui sistem. Ca metode de a studia stabilitatea, menționăm tehnica liniarizării, funcțiile Lyapunov, metode pentru studiul stabilității sistemelor cu reacție negativă, metode pentru studiul stabilității din punct de vedere al relației intrare-ieșire.

### 4.2.1. Tipuri de stabilitate

Definim tipurile de stabilitate ale unui punct de echilibru pentru un sistem neliniar. Fără a pierde din generalitate, considerăm punctul de echilibru ca fiind originea spațiului  $n$ -dimensional al stărilor. Orice punct de echilibru se poate transla cu ușurință în origine cu o schimbare de variabile corespunzătoare.

**Definiție 4.1** Fie  $f(x)$  o funcție local Lipschitz definită pe un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^n$ , care conține originea ca punct de echilibru. Atunci originea este un punct de echilibru stabil dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta > 0$  astfel încât:

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Ca interpretare geometrică, fiind date două bile în spațiul  $n$ -dimensional de rază  $\varepsilon$ , respectiv  $\delta$ , orice traiectorie care începe în bila de rază  $\delta$ , nu va ieși din bila de rază  $\varepsilon$ . Ca remarcă, un punct de echilibru este instabil dacă nu este stabil.

**Definiție 4.2** Cu ipotezele din definiția 4.1, originea este un punct de echilibru asimptotic stabil dacă este stabil și:

$$\exists \delta_0 > 0 \text{ astfel încât } \|x(0)\| < \delta_0 \implies x(t) \rightarrow 0 \text{ când } t \rightarrow \infty.$$

Stabilitatea asimptotică globală apare atunci când  $\delta_0 = \infty$ , caz în care există un singur punct de echilibru.

**Definiție 4.3** Cu ipotezele din definiția 4.1, originea este un punct de echilibru exponențial stabil dacă există constantele pozitive  $c$ ,  $k$  și  $\lambda$  astfel încât are loc relația:

$$\|x(t)\| \leq k\|x(0)\|e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0, \forall \|x(0)\| < c.$$

În mod analog, stabilitatea exponențială globală apare când inegalitatea de mai sus are loc pentru orice condiții inițiale.

Observăm din definițiile 4.2 și 4.3 că stabilitatea asimptotică este o formă mai slabă de stabilitate exponențială, întrucât aceasta din urmă implică o constantă de timp în care sistemul tinde la origine.

### 4.2.2. Liniarizare și stabilitate locală

Considerăm sistemul  $\dot{x} = f(x)$ , unde  $f$  este local Lipschitz și de clasă  $C^\infty(D)$ , unde  $D$  este domeniul de definiție, ce conține originea ca punct de echilibru.

Aplicăm o dezvoltare în serie Taylor a funcției  $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , în jurul originii.

$$f(x) = f(0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 (x - 0) + \frac{1}{2!} (x - 0)^T \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_0 (x - 0) + \dots, \quad (4.3)$$



unde  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0$  este *Jacobian*-ul, evaluat în origine, iar  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  este *hessian*-ul funcției  $f$ . Neglijăm termenii cu grad mai mare sau egal cu 2 și obținem sistemul liniar:

$$\dot{x} = Ax. \quad (4.4)$$

**Teoremă 4.2 (Metoda indirectă a lui Lyapunov)** *Fie funcția  $f$ , definită anterior. Originea sistemului  $\dot{x} = f(x)$  este asimptotic stabilă dacă sistemul (4.4) este strict stabil, mai precis, toate valorile proprii ale matricii  $A$  au partea reală strict negativă (altfel spus, matricea  $A$  este Hurwitz). Dacă cel puțin o valoare proprie are partea reală pozitivă, atunci originea sistemului neliniar este instabilă.*

Observăm că teorema 4.2 stabilește comportamentul global al originii sistemului neliniar din punct de vedere al stabilității, pe baza studiului sistemului liniarizat. Însă, în cazul valorilor proprii pur imaginare, nu putem afirma nimic despre sistemul neliniar, deoarece dinamica acestuia, relevantă în contextul stabilității, se pierde prin neglijarea termenilor de ordin superior.

### Exemplu 1

Se consideră sistemul:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_2^2 + x_1 - 102 \\ \dot{x}_2 &= 3x_1x_2 - 22x_1 - 13x_2 + 95 \end{aligned}$$

Egalând cu 0 ambele ecuații, și rezolvând sistemul, se găsesc 3 puncte de echilibru:

$$(x_1, x_2) \in \{(4, 7), (-5.21, 7.32), (4.32, -6.98)\}.$$

Pentru a studia fiecare punct de echilibru în parte, ar trebui efectuate 3 schimbări de variabilă pentru a transla, pe rând, fiecare punct în origine. Dar, având în vedere că dorim să calculăm doar sistemele liniarizate, adică matricile *Jacobian* evaluate în origine, putem calcula direct matricea *Jacobian* a sistemului actual și să o evaluăm în punctele de echilibru. Matricea *Jacobian* este aceeași, indiferent de translatarea pe care o facem.

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4x_2 \\ 3x_2 - 22 & 3x_1 - 13 \end{bmatrix};$$

$$A|_{(4,7)} = \begin{bmatrix} 1 & 28 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A|_{(-5.21, 7.32)} = \begin{bmatrix} 1 & 29.28 \\ -0.03 & -28.64 \end{bmatrix};$$

$$A|_{(4.32, -6.98)} = \begin{bmatrix} 1 & -27.95 \\ -42.96 & -0.02 \end{bmatrix}.$$

Punctul de echilibru  $(4, 7)$  corespunde unor valori proprii pur imaginare, deci nu putem afirma nimic despre el. În schimb celelalte două puncte de echilibru corespund unor valori proprii cu semn contrar (puncte șa), deci sunt instabile conform teoremei 4.2.

Din portretul de faze (Figura 4.9), se observă instabilitatea celor două puncte șa. În cazul punctului de echilibru  $(4, 7)$ , constatăm că este stabil, fapt care nu s-a putut stabili prin liniarizare.

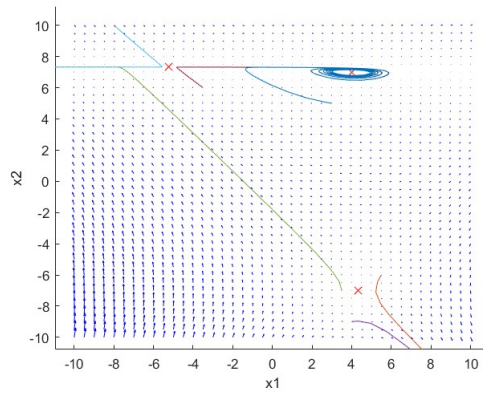


Figura 4.9: Dinamica punctelor de echilibru pentru Exemplul 1

### 4.2.3. Metoda lui Lyapunov

Metoda directă a lui Lyapunov permite studiul stabilității unei game variate de sisteme. Intuiția ce stă la baza metodei este utilizarea unei funcții care are o semnificație fizică, și anume energia sistemului. Metoda prezintă rigoare din punct de vedere matematic, iar demonstrația sa implică elemente de topologie.

**Teoremă 4.3 (Teorema de stabilitate a lui Lyapunov)** *Fie  $f$  o funcție local Lipschitz definită pe  $D$  - domeniul de definiție, ce conține originea ca punct de echilibru. Fie  $V(x)$  o funcție de clasă  $C^1(D)$  astfel încât:*

$$\bullet V(0) = 0 \text{ și } V(x) > 0, \forall x \in D, x \neq 0; \quad (4.5)$$

$$\bullet \dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in D, x \neq 0. \quad (4.6)$$

Atunci originea este un punct de echilibru stabil al sistemului  $\dot{x} = f(x)$ . În plus, dacă

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D, x \neq 0, \quad (4.7)$$

atunci originea este asimptotic stabilă. Dacă  $D = \mathbb{R}^n$  și au loc relațiile (4.5), (4.7) și

$$\|x\| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty, \quad (4.8)$$

atunci originea este global asimptotic stabilă.

Condiția (4.8) se numește condiție de nemărginire radială (engl. *radial unboundedness*). Nu există o metodă standard pentru determinarea unei funcții Lyapunov  $V(x)$ . Condițiile teoremei sunt doar suficiente, iar faptul că o funcție candidat nu respectă condițiile nu ne spune nimic. În general, pentru funcții candidat Lyapunov se folosesc forme pătratice sau de grad superior, dar par, pentru a asigura (4.5). Există însă și alte metode de generare a funcțiilor candidat, precum metoda gradientului variabil sau metodele lui Krasovskii.

### Exemplu 2

Se consideră sistemul:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \cos x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \cos x_1 - x_2 \cos^2 x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_2\end{aligned}$$

Se observă că singurul punct de echilibru al sistemului este originea.

Fie  $V(x) = \frac{1}{2}x^T x = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ .

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= -x_1^2 + x_1 x_2 \cos x_1 + x_1 x_2 \cos x_1 - x_2^2 \cos^2 x_1 + x_2 x_3 - x_2 x_3 \\ &= -(x_1 - x_2 \cos x_1)^2 < 0, \quad \forall x \neq 0.\end{aligned}$$

Cum  $V(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ , are loc implicația  $\|x\| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty$ . Conform teoremei 4.3, se poate afirma că originea este un punct de echilibru global asimptotic stabil.

#### 4.2.4. Principiul invarianței

Principiul invarianței vine în sprijinul Metodei lui Lyapunov, în cazul în care derivata funcției Lyapunov este negativ semidefinită. Conform teoremei 4.3, originea este stabilă. Totuși, dacă arătăm că nicio traiectorie din spațiul stărilor nu poate rămâne permanent în puncte în care  $\dot{V}(x) = 0$  (cu excepția originii), atunci putem afirma că stabilitatea este asimptotică.

**Teoremă 4.4 (Teorema lui LaSalle)** *Fie  $f(x)$  o funcție local Lipschitz, definită pe  $D \subset \mathbb{R}^n$  și  $\Omega \subset D$  o mulțime pozitiv invariantă față de  $\dot{x} = f(x)$ . Fie  $V(x) \in \mathcal{C}^1(D)$  astfel încât  $V(x) \leq 0$  în  $\Omega$ . Fie  $E$  mulțimea tuturor punctelor din  $\Omega$ , unde  $\dot{V}(x) = 0$  și  $M$  cea mai mare mulțime invariantă din  $E$ . Atunci orice soluție care începe în  $\Omega$  tinde la  $M$  când  $t \rightarrow \infty$ .*

**Teoremă 4.5** *Se consideră  $f(x)$  o funcție local Lipschitz, definită pe  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Fie  $V(x) \in \mathcal{C}^1(D)$  astfel încât au loc relațiile (4.6) și (4.8). Fie  $E$  mulțimea tuturor punctelor unde  $\dot{V}(x) = 0$  și  $M$  cea mai mare mulțime invariantă din  $E$ . Atunci toate soluțiile converg global asimptotic spre  $M$  când  $t \rightarrow \infty$ .*

#### Exemplu 3

Se reia sistemul (4.2), menționat în secțiunea 4.1:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 \cdot (1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \cdot (1 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

În primul rând, intuim că sistemul are un ciclu limită, din portretul de faze din figura 4.8. Observăm că:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(1 - x_1^2 - x_2^2) &= -2x_1\dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) - 2x_1x_2 - 2x_2^2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2).\end{aligned}$$

Dacă se continuă procesul de derivare în funcție de timp, se constată că derivata de ordin  $n$  a expresiei  $(1 - x_1^2 - x_2^2)$ , va avea în componență factorul  $(1 - x_1^2 - x_2^2)$ , oricare

ar fi  $n$ . Pe de altă parte, egalitatea  $(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0$  reprezintă ecuația unui cerc de rază unitară, centrat în origine. Deci, dacă ne aflăm pe cerc (are loc egalitatea), rămânem pe cerc (derivata după timp se anulează). Prin urmare, mulțimea  $(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0$  este invariantă. În cazul în care ne aflăm pe cerc, dinamica sistemului devine:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned}$$

Astfel, sistemul particularizat este unul liniar, care are valori proprii pur imaginare. Ele imprimă un caracter oscilatoriu traiectoriei pe cerc, deci acesta reprezintă un ciclu limită.

Fie  $V(x) = (1 - x_1^2 - x_2^2)^2$  o funcție candidat Lyapunov.

$$\dot{V}(x) = 2(1 - x_1^2 - x_2^2) \cdot (-2) \cdot (x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = -4(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)^2.$$

Se observă că  $\dot{V}(x)$  este negativ semidefinită. Definim mulțimea  $E$ , punctele unde se anulează  $\dot{V}(x)$  și anume, originea ( $x_1 = x_2 = 0$ ) și ciclul limită ( $1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ ). Astfel, se poate aplica teorema 4.5. Toate soluțiile converg asimptotic spre mulțimea  $E$ , deci fie spre origine, fie spre ciclul limită. Acest lucru se putea arăta și folosind teorema 4.1. Însă, din portretul de faze din figura 4.8 intuim că originea ar fi instabilă. Arătăm că toate soluțiile converg spre ciclul limită, cu excepția soluției care pornește din origine.

Se observă în figura 4.10 că funcția Lyapunov are un punct de maxim în origine, cu valoarea 1. Pe cercul de rază 1 (ciclul limită), funcția  $V(x)$  se anulează, iar în afara cercului funcția crește ( $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$ ).

Definim regiunea  $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) < 1\}$ , care cuprinde interiorul cercului, cu excepția originii și o parte din exteriorul cercului. Se aplică teorema 4.4 pentru  $\Omega_1$  definit anterior. De această dată, mulțimea  $E$  se restrânge la punctele de pe cerc. Prin urmare, toate soluțiile (cu excepția celei care pornește din origine) converg la ciclul limită, care va fi unul stabil.

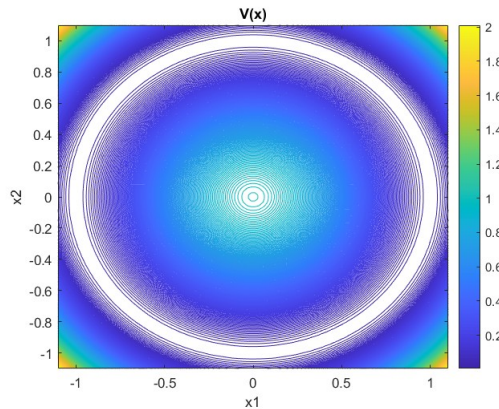


Figura 4.10: Conturul funcției Lyapunov

#### 4.2.5. Regiunea de atracție

Regiunea de atracție a unui punct de echilibru este mulțimea stărilor inițiale ale căror traiectorii converg asimptotic la un punct de echilibru. Ea este o mulțime invariantă, deschisă, iar limitele ei sunt descrise de traiectorii.

**Definiție 4.4** Fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  o funcție local Lipschitz. Se consideră originea sistemului  $\dot{x} = f(x)$  - un punct de echilibru asimptotic stabil. Regiunea de atracție a originii este mulțimea tuturor punctelor  $x_0$  din  $D$  pentru care soluția sistemului  $\dot{x} = f(x)$  converge la origine când  $t \rightarrow \infty$ .

Determinarea sau estimarea regiunii de atracție se poate face prin mai multe moduri. Există metode bazate pe teoria lui Lyapunov. Acestea presupun căutarea unei funcții Lyapunov  $V(x)$  și a unui scalar  $c$ , care respectă condițiile 4.5 și 4.7  $\forall x \in D$ , unde  $D = \{x \neq 0 \mid V(x) \leq c\}$ . Majoritatea metodelor non-Lyapunov au la bază integrarea numerică a sistemului neliniar. Această clasificare se prezintă în [12]. De asemenea, se prezintă o metodă de estimare a regiunii de atracție a unui sistem neliniar necunoscut, bazată pe măsurarea de date experimentale ale traiectoriilor.

#### Exemplu 4

Se consideră sistemul:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + 2x_2^3 - 0.5x_2^5\end{aligned}$$

Singurul punct de echilibru al sistemului este originea. Se calculează matricea *Jacobian* în acest punct:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se consideră funcția pătratică  $V(x) = x^T P x$ , ca funcție Lyapunov candidat. Se alege  $Q$  - matricea identitate pentru a rezolva ecuația Lyapunov  $A^T P + P A = -Q$ , la fel ca în cazul sistemelor liniare. Găsim astfel soluția unică  $P = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$ .

Atunci

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2^3 + 4x_2^4 - \frac{1}{4}x_1 x_2^5 - \frac{1}{2}x_2^6.$$

Pentru a estima regiunea de atracție, se dorește determinarea unei suprafețe Lyapunov  $\Omega_c = \{V(x) \leq c\}$  cât mai mare ( $c$ -maxim), în care  $\dot{V}(x)$  este negativ definită. În acest scop, se caută o bilă  $D = \{\|x\| < r\}$  astfel încât  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \in D$  și  $\Omega_c \subset D$ .

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &\leq -\|x\|^2 + |x_1 x_2| x_2^2 + 4\|x\|^4 - \frac{1}{4}|x_1 x_2| x_2^4 - \frac{1}{2}\|x\|^6 \\ &\leq -\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|x\|^4 + 4\|x\|^4 - \frac{1}{4}\|x\|^6 - \frac{1}{2}\|x\|^6 = -\|x\|^2 + 4.5\|x\|^4 - \frac{5}{8}\|x\|^6.\end{aligned}$$

S-au folosit  $|x_1 x_2| < \frac{1}{2}\|x\|^2$  și  $x_2^2 < \|x\|^2$ . Din relația  $-r^2 + 4.5r^4 - \frac{5}{8}r^6 = 0$ , obținem  $r^2 = 0.23$ . Pentru determinarea suprafeței Lyapunov, se alege  $c < \lambda_{\min}(P)\|x\|^2$ , mai precis  $c < 0.691 \cdot 0.23 = 0.1589$ . În final, mulțimea  $\Omega_c$ , cu  $c = 0.158 < 0.1589$  este o estimare a regiunii de atracție.

În figura 4.11 se poate observa suprafața Lyapunov  $V(x) = 0.158$ , determinată anterior ca estimare a regiunii de atracție. De asemenea, se poate observa și o estimare mai puțin conservativă, realizată prin forță brută.

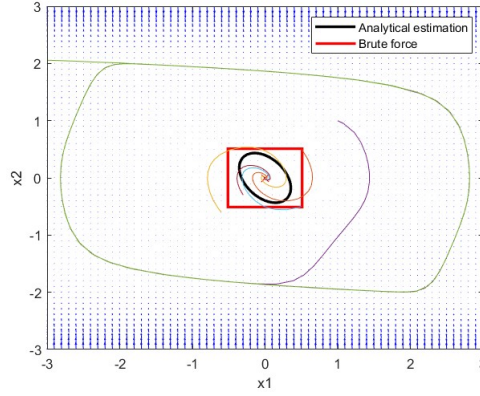


Figura 4.11: Estimarea regiunii de atracție

### 4.3. Pasivitatea sistemelor

Pasivitatea reprezintă o proprietate a sistemelor sau reguletoarelor, care asigură stabilitate și robustețe. Pe baza acestei proprietăți s-au dezvoltat metode de control care presupun proiectarea unui regulator pasiv. Intuitiv, un sistem este pasiv, dacă el nu poate produce energie de unul singur, iar energia stocată inițial poate fi disipată. Se poate face o analogie cu funcțiile Lyapunov, asociate energiei, în cazul sistemelor în care aceasta are semnificație fizică. În mod similar, funcția Lyapunov rămâne constantă sau scade în timp, derivata sa fiind negativ semidefinită. Matematic, pasivitatea unei realții intrare-ieșire  $(u - y)$  se poate defini prin inegalitatea  $\int_0^T u^T(t)y(t)dt \geq 0, \forall T \geq 0$ .

În cazul sistemelor liniare, proprietatea de pasivitate se poate exprima mai simplu. O realizare de stare a unui sistem liniar, invariant în timp, este pasivă dacă funcția de transfer corespunzătoare este pozitiv reală. Informal, o funcție de transfer este pozitiv reală dacă diagrama sa Nyquist se află în semiplanul drept al spațiului complex [13].

Se consideră sistemul:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad y = h(x, u), \quad (4.9)$$

unde  $f$  este local Lipschitz iar  $h$  continuă.

**Definiție 4.5** Sistemul (4.9) este pasiv dacă există o funcție  $V(x) \geq 0 \in C^1(D)$ , numită funcție de stocare, care respectă relația  $u^T y \geq \dot{V}, \forall (x, u)$ . Sistemul este:

- fără pierderi (engl. *lossless*) dacă  $u^T y = \dot{V}$ ;
- strict pasiv din punct de vedere al intrării (engl. *input strictly passive*) dacă  $u^T y \geq \dot{V} + u^T \varphi(u), u^T \varphi(u) > 0$ ;
- strict pasiv din punct de vedere al ieșirii (engl. *output strictly passive*) dacă  $u^T y \geq \dot{V} + y^T \rho(y), y^T \rho(y) > 0$ ;
- strict pasiv (engl. *strictly passive*) dacă  $u^T y \geq \dot{V} + \psi(x), \psi(x) > 0$ .

Originea sistemului  $\dot{x} = f(x, 0)$  este asimptotic stabilă dacă sistemul (4.9) este strict pasiv sau strict pasiv din punct de vedere al ieșirii și observabil de stare zero (engl. *zero-state observable*). Spunem că sistemul (4.9) este observabil de stare zero dacă singura soluție a ecuației  $\dot{x} = f(x, 0)$  ce rămâne identic în mulțimea  $\{h(x, 0) = 0\}$  este soluția  $x(t) \equiv 0$ .

În [14] se prezintă neliniaritățile de tip sector, stabilitatea acestora în contextul conexiunilor cu reacție, relația cu sistemele pasive și disipative și calculul numeric al indicilor de pasivitate.

### Exemplu 5

Se consideră ecuațiile Euler pentru rotația unui corp, din [1], capitolul 5:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 &= (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 + u_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 + u_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 &= (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 + u_3, \end{aligned}$$

unde  $\omega$  este vectorul vitezelor unghiulare,  $u$  este vectorul intrărilor de tip cuplu, iar  $J_1, J_2, J_3$  sunt momente de inerție. Să se arate că sistemul cu intrarea  $u$  și ieșirea  $\omega$  este fără pierderi. Fie  $u = -K\omega + v$ , unde  $K$  este o matrice simetrică, pozitiv definită. Să se arate că sistemul cu intrarea  $v$  și ieșirea  $\omega$  este strict pasiv.

Sistemul de la  $u$  la  $\omega$  este fără pierderi implică relația

$$u^T y = u_1 \omega_1 + u_2 \omega_2 + u_3 \omega_3 = \dot{V}(\omega).$$

Fie  $V(\omega) = \frac{1}{2}a_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}a_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}a_3\omega_3^2$ , cu  $a_1, a_2, a_3$  constante.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\omega) &= a_1 \omega_1 \left( \frac{J_2 - J_3}{J_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{u_1}{J_1} \right) + a_2 \omega_2 \left( \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega_3 \omega_1 + \frac{u_2}{J_2} \right) + a_3 \omega_3 \left( \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega_1 \omega_2 + \frac{u_3}{J_3} \right) \\ &= \frac{a_1}{J_1} \omega_1 u_1 + \frac{a_2}{J_2} \omega_2 u_2 + \frac{a_3}{J_3} \omega_3 u_3 + \omega_1 \omega_2 \omega_3 \left( a_1 \frac{J_2 - J_3}{J_1} + a_2 \frac{J_3 - J_1}{J_2} + a_3 \frac{J_1 - J_2}{J_3} \right). \end{aligned}$$

Se aleg convenabil  $a_1 = J_1, a_2 = J_2, a_3 = J_3$ .

În cazul controlului cu reacție de la stare  $u = -K\omega + v$ , păstrăm funcția  $V$  și avem:

$$\dot{V}(\omega) = u^T \omega = (-K\omega + v)^T \omega = (-\omega^T K + v^T) \omega = v^T \omega - \omega^T K \omega \implies \dot{V}(\omega) + \omega^T K \omega = v^T \omega.$$

Deci se respectă condiția de pasivitate strictă din cadrul definiției 4.5, cu  $\psi(\omega) = \omega^T K \omega$  - pozitiv definită.

## 4.4. Forme canonice ale sistemelor neliniare

Formele canonice neliniare sunt reprezentări matematice care transformă un sistem neliniar într-un sistem echivalent, dar mai ușor de analizat sau controlat. Formele canonice care se vor trata sunt: forma canonică normală, forma canonică de control și forma canonică de observare, ele fiind prezentate în [1]. Menționăm că există și alte forme canonice în literatură.

### 4.4.1. Forma canonică normală

Se consideră sistemul  $n$ -dimensional, cu o intrare și o ieșire:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x), \quad (4.10)$$

unde  $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$  sunt câmpuri vectoriale netede.

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f h(x) + L_g h(x)u.$$

Dacă  $L_g h(x) = 0$ , atunci  $\dot{y} = L_f h(x)$ .

$$\ddot{y} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u.$$

Procedând în mod analog, ajungem la:

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u,$$

ținând cont de relațiile  $L_g L_f^{i-1} h(x) = 0$ ,  $i = \overline{1, \rho-1}$  și  $L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$ . Astfel,  $u$  nu apare în ecuațiile  $y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)}$ , însă apare în ecuația lui  $y^{(\rho)}$ . Spunem așadar că  $\rho$  este ordinul relativ (engl. *relative degree*) al sistemului (4.10). Se poate arăta că  $1 \leq \rho \leq n$ .

Scopul formei canonice normale este de a separa stările sistemului în  $\rho$  stări compuse din derivatele ieșirii (până la ordinul  $\rho-1$ ), grupate în vectorul  $\xi$  și  $(n-\rho)$  stări care nu depind de intrarea  $u$ , grupate în vectorul  $\eta$ . Acest proces se face prin determinarea unei schimbări de variabilă  $z = T(x)$ , care transformă sistemul original în forma canonică normală, cele două fiind echivalente.

$$\text{Fie } \xi = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(\rho-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix}.$$

În cazul în care  $\rho = n$ , nu există vectorul  $\eta$ , iar schimbarea de variabilă este  $z = T(x) = \xi$ .

În cazul în care  $\rho < n$ , se folosește schimbarea de variabilă:

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \frac{\phi_{n-\rho}(x)}{h(x)} \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

unde funcțiile  $\phi_1(x), \dots, \phi_{n-\rho}(x)$  se aleg așa încât  $T(x)$  să fie un difeomorfism. De asemenea,  $\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) = 0$ ,  $i = \overline{1, n-\rho}$ , pentru ca ecuațiile diferențiale corespunzătoare vectorului  $\eta$  să nu depindă de  $u$ .

Astfel, schimbarea de variabilă (4.11) transformă sistemul (4.10) în forma canonică normală:

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (4.12)$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c [L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u] \quad (4.13)$$

$$y = C_c \xi, \quad (4.14)$$



unde  $\xi \in \mathbb{R}^\rho$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{n-\rho}$ ,  $(A_c, B_c, C_c)$  este o reprezentare a unui lanț de  $\rho$  integratoare și

$$f_0(\eta, \xi) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right|_{x=T^{-1}(z)}.$$

Forma canonică normală este compusă din dinamica internă - ecuația (4.12) și dinamica externă - ecuațiile (4.13) și (4.14).

Dacă  $y(t)$  este identic zero, atunci și  $\xi(t)$  este identic zero. Astfel,  $\xi(t) \equiv 0 \implies \dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ , ce se numește dinamica zero (engl. *zero dynamics*). Spunem că sistemul este de fază minimă, dacă dinamica zero are un punct de echilibru asimptotic stabil. Dacă înlocuim  $\xi(t) \equiv 0$  în (4.13), dinamica zero se mai poate reprezenta prin:

$$u(t) \equiv -\frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)};$$

$$L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = \overline{1, \rho}.$$

În cazul în care  $\rho = n$ , forma normală este:

$$\dot{z} = A_c z + B_c [L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x) u], \quad y = C_c z.$$

### Exemplu 6

Se consideră sistemul:

$$\dot{x}_1 = -\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = -x_3 + u$$

$$y = x_2,$$

unde  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sunt netede și aparțin sectoarelor  $[\alpha_1, \beta_1]$ , respectiv  $[\alpha_2, \beta_2]$ ,  $0 < \alpha_1 < \beta_1$  și  $0 < \alpha_2 < \beta_2$ . O funcție  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aparține sectorului  $[\alpha, \beta]$  dacă imaginea sa aparține regiunii planului complex, mărginită de dreptele  $y = \alpha x$  și  $y = \beta x$ .

Calculăm derivatele Lie ale ieșirii:

$$L_f^0 h(x) = y = x_2;$$

$$L_f h(x) = \dot{y} = -x_1 - x_2 + x_3;$$

$$L_f^2 h(x) = \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} f(x) = [-1 \quad -1 \quad 1] f(x) = \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) + x_1 + x_2 - 2x_3;$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} g(x) = [-1 \quad -1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Observăm că ordinul relativ al sistemului este  $\rho = 2$ . Schimbarea de variabilă va fi

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Se respectă condițiile  $T(x)$  - difeomorfism global și  $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} g(x) = 0$ .

Atunci ecuațiile diferențiale ale noului sistem sunt:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -\varphi_1(\eta - \xi_1) + \varphi_2(\xi_2) + \xi_2 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \varphi_1(\eta - \xi_1) - \varphi_2(\xi_2) - 2\xi_2 - \eta + u \\ y &= \xi_1. \end{aligned}$$

Pentru dinamica zero,  $\xi(t) \equiv 0 \implies \dot{\eta} = -\varphi_1(\eta) + \varphi_2(0)$ . Cum  $\varphi_2$  aparține sectorului  $[\alpha_2, \beta_2]$  și este netedă, graficul ei va trece prin origine, deci  $\phi_2(0) = 0$ . Prin urmare, dinamica zero compusă din  $\dot{\eta} = -\phi_1(\eta)$  are ca punct de echilibru originea. Acest punct este asimptotic stabil. Un sistem scalar  $\dot{x} = f(x)$  este asimptotic stabil dacă și numai dacă  $xf(x) < 0$  într-o vecinătate a originii. Această proprietate are loc și în cazul de față întrucât  $\varphi_1$  aparține sectorului  $[\alpha_1, \beta_1]$ . În final, putem afirma că sistemul este de fază minimă.

#### 4.4.2. Forma canonică de control

Forma canonică de control a unui sistem neliniar este dată de relația

$$\dot{x} = Ax + B[\psi(x) + \gamma(x)u]. \quad (4.15)$$

Folosind legea de control cu reacție de la stare  $u = \gamma^{-1}(x)[- \psi(x) + v]$ , se poate transforma sistemul (4.15) într-un sistem liniar  $\dot{x} = Ax + Bv$ . Se presupune că perechea  $(A, B)$  este controlabilă.

Se consideră sistemul cu o singură intrare, cu  $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \quad (4.16)$$

Spunem că un sistem este liniarizabil prin reacție de la stare (engl. *feedback linearizable*) dacă este în forma canonică de control sau poate fi adus, printr-o transformare, la această formă.

Sistemul (4.16) este liniarizabil prin reacție de la stare într-o vecinătate a lui  $x_0 \in D$  dacă și numai dacă există  $h(x)$  astfel încât sistemul compus din (4.16) și  $y = h(x)$  are ordinul relativ  $n$  într-un domeniu  $D_x \subset D$ , sau  $h(x)$  respectă relațiile:

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, i = \overline{1, n-1}, \quad L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0. \quad (4.17)$$

**Teoremă 4.6** Sistemul (4.16) este liniarizabil prin reacție de la stare într-o vecinătate a lui  $x_0 \in D$  dacă și numai dacă există un domeniu  $D_x \subset D, x_0 \in D_x$ , astfel încât:

- matricea  $\mathcal{G}(x) = [g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-1} g(x)]$  are rangul  $n$  pentru orice  $x \in D_x$ ;
- distribuția  $\mathcal{D} = \text{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$  este involutivă în  $D_x$ .

**Exemplu 7**

Se consideră sistemul:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3(1 + x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (1 + x_2)u \\ \dot{x}_3 &= x_2(1 + x_1) - x_3u\end{aligned}$$

Se poate arăta că sistemul este liniarizabil prin reacție de la stare.

Pentru a transforma sistemul în forma canonică de control, se determină funcția  $h(x)$ , care respectă condițiile (4.17).

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} x_3(1 + x_2) + \frac{\partial h}{\partial x_2} x_1 + \frac{\partial h}{\partial x_3} x_2(1 + x_1);$$

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = \frac{\partial h}{\partial x_2} (1 + x_2) + \frac{\partial h}{\partial x_3} (-x_3) = 0 \implies \frac{\partial h}{\partial x_3} = \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot \frac{1 + x_2}{x_3};$$

$$\begin{aligned}L_g L_f h(x) &= \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x_2} \cdot (1 + x_2) + \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x_3} \cdot (-x_3) \\ &= (1 + x_2) \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} x_3(1 + x_2) + \frac{\partial h}{\partial x_1} x_3 + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} x_1 + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} x_2(1 + x_1) + \frac{\partial h}{\partial x_3} (1 + x_1) \right] - \\ &\quad - x_3 \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} x_3(1 + x_2) + \frac{\partial h}{\partial x_1} (1 + x_2) + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} x_1 + \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} x_2(1 + x_1) \right].\end{aligned}$$

Se folosesc relațiile  $\frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot \frac{1 + x_2}{x_3} \right) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \cdot \frac{1 + x_2}{x_3} + \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{x_3}$  și analoagele pentru  $\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3}$  și  $\frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2}$ . Astfel, obținem:

$$\begin{aligned}L_g L_f h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x_2} \left( \frac{x_2(1 + x_1)(1 + x_2)}{x_3} + \frac{(1 + x_1)(1 + x_2)^2}{x_3} - x_1 - \frac{x_2(1 + x_1)(1 + x_2)}{x_3} + \right. \\ &\quad \left. \frac{x_2(1 + x_1)(1 + x_2)}{x_3} \right) + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \left( x_1(1 + x_2) + \frac{x_2(1 + x_1)(1 + x_2)^2}{x_3} - x_1(1 + x_2) - \frac{x_2(1 + x_1)(1 + x_2)^2}{x_3} \right).\end{aligned}$$

În final,  $L_g L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot \frac{(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + 2x_2) - x_1 x_3}{x_3} = 0$ . Considerăm doar cazul

în care  $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + 2x_2) - x_1 x_3 \neq 0$ . Prin urmare,  $\frac{\partial h}{\partial x_2} = 0 = \frac{\partial h}{\partial x_3}$ .

Rămâne condiția  $L_g L_f^2 h(x) \neq 0$ . Rescriem  $L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} x_3(1 + x_2)$ .

$$L_f^2 h(x) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} x_3^2(1 + x_2)^2 + \frac{\partial h}{\partial x_1} x_1 x_3 + \frac{\partial h}{\partial x_1} x_2(1 + x_1)(1 + x_2);$$

$$\begin{aligned}
L_g L_f^2 h(x) &= (1+x_2) \left( 2(1+x_2)x_3^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial h}{\partial x_1} (1+x_1)(1+2x_2) \right) - \\
x_3 \left( 2x_3 \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} (1+x_1)^2 + \frac{\partial h}{\partial x_1} x_1 \right) &= \frac{\partial h}{\partial x_1} ((1+x_1)(1+x_2)(1+2x_2) - x_1 x_3) \neq 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_1} &\neq 0. \text{ Atunci se alege } h(x) = x_1.
\end{aligned}$$

Transformarea care aduce sistemul în forma canonică de control este:

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3(1+x_2) \\ x_1 x_3 + x_2(1+x_1)(1+x_2) \end{bmatrix}.$$

Sistemul devine:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
\dot{z}_3 &= [((1+x_1)(1+x_2)(1+2x_2) - x_1 x_3)u + \\
&\quad x_3(1+x_2)(x_3 + x_2 + x_2^2) + (x_1 + x_1^2)(1+3x_2)] \Big|_{x=T^{-1}(z)}
\end{aligned}$$

#### 4.4.3. Forma canonică de observare

Se consideră modelul:

$$\dot{x} = Ax + \psi(u, y), \quad y = Cx. \quad (4.18)$$

Spunem că dacă perechea  $(A, C)$  este observabilă, sistemul neliniar descris prin (4.18) este în forma canonică de observare.

De obicei, pentru a transforma un sistem în forma canonică de observare, este nevoie, ca în cazurile precedente, de o schimbare de variabilă de tipul:

$$[h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{n-1} h(x)]^T$$

În [1], capitolul 8, se prezintă în detaliu condițiile de existență a unui difeomorfism  $T(x)$  care transformă un sistem în forma canonică de observare.

#### Exemplu 8

Se consideră sistemul:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_2^2 - x_1 + x_3 \\
\dot{x}_3 &= u \\
y &= x_2
\end{aligned}$$

Putem rescrie sistemul în felul următor:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ y^2 \\ u \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Pentru studiul observabilității perechii  $(A, C)$ , se calculează matricea de observabilitate:

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rangul matricii este 3, prin urmare sistemul este complet observabil și, de asemenea, în formă canonică de observare.

## Capitolul 5. Metode de control a sistemelor neliniare

### 5.1. Liniarizare prin reacție de la stare

Liniarizare prin reacție de la stare este o metodă de control des utilizată în aplicații și probleme de control, alături de alte metode. Ea presupune o transformare a sistemului neliniar inițial într-un sistem liniar, sau parțial liniar urmând ca, ulterior, să se poată folosi tehnici clasice de control. Motivația care stă la baza acestei metode este reprezentarea diferită a spațiului stărilor astfel încât să se elimine neliniaritățile din punct de vedere matematic, folosind semnalul de intrare.

#### 5.1.1. Reacția de la stare

În cazul sistemelor liniare, reacția de la stare este o metodă de control care plasează polii sistemului în buclă închisă în anumite valori din semiplanul stâng, pentru stabilizarea sistemului.

Considerăm sistemul:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Se impune legea de control  $u = -Kx$ , unde  $K$  este o matrice de câștig calculată astfel încât matricea  $A - BK$  să fie Hurwitz. Astfel, dinamica sistemului va fi  $\dot{x} = (A - BK)x$ , a cărei soluție  $e^{(A - BK)t}x_0$  va tinde la 0 când  $t \rightarrow \infty$ . De menționat faptul că perechea  $(A, B)$  trebuie să fie controlabilă.

De multe ori, se liniarizează sistemul în jurul unui punct sau a mai multor puncte de funcționare. Se proiectează pentru fiecare punct un regulator liniar, care va funcționa local, într-o vecinătate a punctului în care s-a efectuat liniarizarea.

#### 5.1.2. Descrierea metodei

Se consideră modelul neliniar:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u. \quad (5.1)$$

Presupunem existența unui difeomorfism  $T(x)$ , unde  $T(x) = 0$ , care asigură transformarea sistemului în forma canonică de control:

$$\dot{z} = Az + B(\psi(x) + \gamma(x)u).$$

Pentru eliminarea matematică a neliniarității, se folosește legea de control  $u = \gamma^{-1}(x)(-\psi(x) + v)$ , unde  $v$  este noul semnal de intrare. Noul sistem devine  $\dot{z} = Az + Bv$ . Pentru controlul său se pot folosi tehnici liniare, cea mai folosită în acest caz fiind reacția de la stare. Aceasta implică legea de control  $v = -Kz$  și stabilitatea exponențială a sistemului rezultat  $\dot{z} = (A - BK)z$ .

Dacă se dorește păstrarea coordonatelor  $x$ , legea de control se poate rescrie  $u =$

$$\gamma^{-1}(x)(-\psi(x) - KT(x)).$$

Deoarece această metodă presupune cunoașterea exactă a funcțiilor  $\gamma, \psi$  și  $T$ , apar probleme în eliminarea neliniarității. Problemele sunt provocate de incertitudini în modelare sau erori numerice. Din această cauză, în implementarea reală pe un sistem de calcul, se vor folosi aproximările  $\hat{\gamma}, \hat{\psi}, \hat{T}$ .

Dacă  $u = \hat{\gamma}^{-1}(x)(-\hat{\psi}(x) - K\hat{T}(x))$ , atunci sistemul în buclă închisă devine:

$$\dot{z} = Az + B[\psi(x) + \gamma(x)\hat{\gamma}^{-1}(x)(-\hat{\psi}(x) - K\hat{T}(x))].$$

Se poate studia robustețea acestui sistem cu ajutorul teoriei perturbațiilor și a stabilității Lyapunov [15].

### 5.1.3. Liniarizare parțială prin reacție de la stare

Se reconsideră sistemul (5.1). Presupunem existența unui difeomorfism  $T(x)$ , unde  $T(x) = 0$  care definește schimbarea de variabile:

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix}.$$

În urma transformării, noul sistem are forma

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= A\xi + B(\psi(x) + \gamma(x)u), \end{aligned} \tag{5.2}$$

care este echivalentă cu forma canonică normală(ecuațiile (4.12) și (4.13)). Vectorul de stare  $\xi$  are dimensiunea  $\rho$ , iar  $\eta$  are dimensiunea  $(n - \rho)$ , unde  $\rho$  este ordinul relativ al sistemului, iar  $(A, B)$  pereche controlabilă.

Cu legea de control anterioară  $u = \gamma^{-1}(x)(-\psi(x) + v)$  se elimină din nou neliniaritatea, iar sistemul (5.2) devine:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= A\xi + Bv \end{aligned}$$

Se folosește din nou legea  $v = -K\xi$  pentru stabilizarea sistemului, rezultând:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= (A - BK)\xi \end{aligned}$$

Această formă se poate reprezenta ca o conexiune cascadă între sistemul cu vectorul de stare  $\eta$  și cel cu vectorul de stare  $\xi$ .

### 5.1.4. Studiu de caz

Se conideră modelul unui sistem mecanic, preluat din [16], compus din două mase, două resorturi neliniare și două amortizoare. Parametrii mecanici sunt menționați în articol și amintiți în tabelul 5.1. Intrările reprezintă forțele exterioare aplicate celor două mase, iar ieșirile reprezintă deplasările maselor.

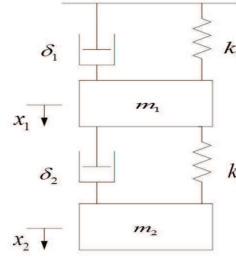


Figura 5.1: Sistem mecanic

Tabela 5.1: Parametri mecanici

Parametru	Descriere	Valoare
$k(N/m)$	constante elastice	$k_1 = \frac{2}{5}, k_2 = 1$
$m(Kg)$	mase	$m_1 = 1, m_2 = 2$
$\delta(Ns/m)$	coeficienți de amortizare	$\delta_1 = \frac{1}{10}, \delta_2 = \frac{1}{5}$
$\mu$	coeficienți neliniari	$\mu_1 = \frac{1}{6}, \mu_2 = \frac{1}{10}$

Ecuatiile diferențiale care descriu sistemul sunt:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -\delta_1 \dot{x}_1 - k_1 x_1 + \mu_1 x_1^3 - k_2(x_1 - x_2) + \mu_2(x_1 - x_2)^3 + u_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -\delta_2 \dot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) + \mu_2(x_2 - x_1)^3 + u_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Pentru a simplifica sistemul, reducem numărul intrărilor la una singură. Astfel, impunem  $u_1(t) \equiv 0$ . Se rescrie:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{\delta_1}{m_1} x_3 - \frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{\mu_1}{m_1} x_1^3 - \frac{k_2}{m_1} (x_1 - x_2) + \frac{\mu_2}{m_1} (x_1 - x_2)^3 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{\delta_2}{m_2} x_4 - \frac{k_2}{m_2} (x_2 - x_1) + \frac{\mu_2}{m_2} (x_2 - x_1)^3 + \frac{u_2}{m_2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Studiem în continuare dacă sistemul este liniarizabil prin reacție de la stare.

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}^T ; \\ ad_f g(x) &= \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & -\frac{\delta_2}{m_2^2} \end{bmatrix}^T ; \\ ad_f^2 g(x) &= -\frac{\partial f}{\partial x} ad_f g(x) = - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\delta_2}{m_2^2} \\ -\frac{k_2}{m_1 m_2} - \frac{\mu_2}{m_1 m_2} (-3x_1^2 + 6x_1 x_2 - 3x_2^2) \\ \frac{k_2}{m_2^2} - \frac{\mu_2}{m_2^2} (3x_1^2 - 6x_1 x_2 + 3x_2^2) - \frac{\delta_2^2}{m_2^3} \end{bmatrix} ; \\ ad_f^3 g(x) &= \frac{\partial (ad_f^2 g)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} ad_f^2 g. \end{aligned}$$



Se observă că pe măsură ce crește gradul parantezelor Lie, crește și complexitatea algebrică a expresiilor acestora. Astfel, apare necesitatea unui algoritm recursiv care calculează paranteza Lie de ordinul  $n$  a două câmpuri vectoriale  $f$  și  $g$ , pe baza relației  $[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x}f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}g(x)$ , iar  $ad_f^n g(x) = [f, ad_f^{n-1}g(x)]$ .

---

**Algoritm 5.1** Calculează parantezele Lie pentru ordin variabil

---

**Intrare:**  $x, f, g, ord$

**Ieșire:**  $mat = \{g(x) \quad ad_f g(x) \quad \dots \quad ad_f^{ord} g(x)\}$

```

1:  $col(mat, 1) \leftarrow g$   $\triangleright col(mat, k)$  reprezintă coloana cu indexul  $k$  din matricea  $mat$ 
2: for  $i = 1$  to  $ord$  do
3:    $col(mat, i + 1) \leftarrow \frac{\partial}{\partial x}(col(mat, i)) * f - \frac{\partial f}{\partial x} * col(mat, i)$ 
4: end for
5: return  $mat$ 

```

---

Conform teoremei 4.6, pentru a stabili dacă un sistem este liniarizabil prin reacție de la stare, trebuie să demonstrăm proprietatea unei distribuții de a fi involutivă. În acest context, se motivează implementarea unui algoritm care determină dacă o distribuție are sau nu această proprietate. Reamintim faptul că o distribuție nesingulară, generată de vectorii  $f_1, f_2, \dots, f_k$ , este involutivă dacă  $\forall \quad 1 \leq i, j \leq k$ , paranteza Lie  $[f_i, f_k]$  aparține distribuției (spațiului generat de vectorii ei).

---

**Algoritm 5.2** Verifică dacă o distribuție este involutivă

---

**Intrare:**  $x, mat$

**Ieșire:**  $\{bit, ip, jp\}$

```

1:  $ip \leftarrow -1$ 
2:  $jp \leftarrow -1$ 
3:  $[imax, jmax] \leftarrow \text{size}(mat)$ 
4: if  $imax \leq jmax$  then
5:   return
6: end if
7:  $bit \leftarrow true$   $\triangleright col(mat, k)$  reprezintă coloana cu indexul  $k$  din matricea  $mat$ 
8: for  $i = 1$  to  $jmax$  do
9:   for  $j = 1$  to  $jmax$  do
10:     $a \leftarrow \text{lie\_bracket}(x, col(mat, i), col(mat, j), 1)$ 
11:     $newmat \leftarrow [mat, col(a, 2)]$   $\triangleright$  Se concatenează  $mat$  cu vectorul  $col(a, 2)$ 
12:    if  $\text{rank}(newmat) \neq \text{rank}(mat)$  then
13:       $bit \leftarrow false$ 
14:       $ip \leftarrow i$ 
15:       $jp \leftarrow j$ 
16:    end if
17:   end for
18: end for
19: return  $bit, ip, jp$ 

```

---

Algoritmii 5.1 și 5.2 au fost implementați în mediul de dezvoltare MATLAB. Pentru reprezentarea funcțiilor  $f$ ,  $g$  și a parantezelor Lie s-au folosit variabile simbolice din

*Symbolic Math Toolbox* [17], iar pentru calculul derivatelor parțiale s-a folosit funcția *jacobian*.

Definim matricea  $\mathcal{G} = [g(x) \quad ad_f g(x) \quad ad_f^2 g(x) \quad ad_f^3 g(x)]$  și distribuția  $\mathcal{D} = \text{span}\{g(x) \quad ad_f g(x) \quad ad_f^2 g(x)\}$ . Folosind implementările menționate mai sus, se constată că rangul matricii  $\mathcal{G}$  este 4, iar distribuția  $\mathcal{D}$  este involutivă. Conform teoremei 4.6, putem afirma că sistemul 5.4 este liniarizabil prin reacție de la stare.

În continuare, se dorește transformarea sistemului în forma canonică de control. În acest sens, se caută o funcție  $h(x)$ , cu  $h(0) = 0$ , care respectă condițiile (4.17).

Prima condiție este  $\frac{\partial(L_f^0 h(x))}{\partial x} \cdot g = 0 \implies \frac{\partial h}{\partial x} \cdot g = 0 \implies \frac{\partial h}{\partial x_4} = 0$ . Atunci  $h(x)$  este independentă de  $x_4$ .

$$\text{Scriem } L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot x_3 + \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot x_4 + \frac{\partial h}{\partial x_3} \cdot \dot{x}_3.$$

A doua condiție este  $L_g L_f h(x) = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \cdot g = 0$ . Din forma funcției  $g$ , rezultă  $\frac{\partial(L_f h(x))}{\partial x_4} = 0$ . Cum  $h(x)$  este independentă de  $x_4$ , atunci orice derivată parțială a lui  $h(x)$  este independentă de  $x_4$ . De asemenea,  $\dot{x}_3$  este independent de  $x_4$ . Atunci  $\frac{\partial(L_f h(x))}{\partial x_4} = 0$  devine  $\frac{\partial}{\partial x_4} \left( \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot x_4 \right) = 0 \implies \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0$ . Astfel,  $h(x)$  este independentă

de  $x_2$ . Rescriem  $L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot x_3 + \frac{\partial h}{\partial x_3} \cdot \dot{x}_3$ .

$$\text{Scriem } L_f^2 h(x) = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \cdot f(x).$$

$$\text{A treia condiție este } L_g L_f^2 h(x) = \frac{\partial L_f^2 h(x)}{\partial x} \cdot g = 0 \implies \frac{\partial L_f^2 h(x)}{\partial x_4} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4} \left( \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x_1} \cdot x_3 + \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x_2} \cdot x_4 + \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x_3} \cdot \dot{x}_3 + \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x_4} \cdot \dot{x}_4 \right) = 0.$$

Cum  $\frac{\partial L_f h(x)}{\partial x_4} = 0$ , se anulează primul și ultimii doi termeni. Atunci  $\frac{\partial L_f h}{\partial x_2} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot x_3 + \frac{\partial h}{\partial x_3} \cdot \dot{x}_3 \right) = 0$   
 $\implies \frac{\partial h}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{\delta_1}{m_1} x_3 - \frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{\mu_1}{m_1} x_1^3 - \frac{k_2}{m_1} (x_1 - x_2) + \frac{\mu_2}{m_1} (x_1 - x_2)^3 \right) = 0$   
 $\implies \frac{\partial h}{\partial x_3} \left( \frac{k_2}{m_1} + \frac{\mu_2}{m_1} \cdot (-3x_1^2 + 6x_1 x_2 - 3x_2^2) \right) = 0 \quad \forall x \implies \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0$ , deci  $h(x)$  independentă de  $x_3$ .

$$\text{Rescriem } L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot x_3 \text{ și } L_f^2 h(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot x_3 \right) \right) \cdot f(x) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} \cdot x_3 + \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \dot{x}_3$$

$$\text{Scriem } L_f^3 h(x) = \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x_1} \cdot x_3 + \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x_2} \cdot x_4 + \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x_3} \cdot \dot{x}_3 + \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x_4} \cdot \dot{x}_4.$$

$$\text{A patra condiție este } L_g L_f^3 h \neq 0 \implies \frac{\partial L_f^3 h}{\partial x_4} \neq 0 \implies \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x_2} \neq 0 \implies$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} \left( \frac{k_2}{m_1} + \frac{\mu_2}{m_1} \cdot (-3x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2) \right) \neq 0 \quad \forall x \implies \frac{\partial h}{\partial x_1} \neq 0. \text{ Alegem astfel } h(x) = x_1.$$

$$\text{Fie schimbarea de variabile } z = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ L_f^3 h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \\ L_f^3 h(x) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_3 \\ z_3 = -\frac{\delta_1}{m_1}x_3 - \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{\mu_1}{m_1}x_1^3 - \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2) + \frac{\mu_2}{m_1}(x_1 - x_2)^3 \\ z_4 = x_3 \left( -\frac{k_1}{m_1} + \frac{3\mu_1}{m_1}x_1^2 - \frac{k_2}{m_1} + 3\frac{\mu_2}{m_1}(x_1 - x_2)^2 \right) + \\ + x_4 \left( \frac{k_2}{m_1} - 3\frac{\mu_2}{m_1}(x_1 - x_2)^2 \right) - \frac{\delta_1}{m_1}z_3 \end{cases}$$

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = x_3 = z_2;$$

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_3 = z_3;$$

$$\dot{z}_3 = -\frac{\delta_1}{m_1}z_3 - \frac{k_1}{m_1}x_3 + 3\frac{\mu_1}{m_1} \cdot x_1^2x_3 - \frac{k_2}{m_1}(x_3 - x_4) + 3\frac{\mu_2}{m_1} \cdot (x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4) = z_4;$$

$$\dot{z}_4 = -\frac{k_1 + k_2}{m_1}z_3 + \dot{x}_3 \left( \frac{3\mu_1}{m_1}x_1^2 + \frac{3\mu_2}{m_1}(x_1 - x_2)^2 \right) + \frac{6\mu_1}{m_1}x_1x_3^2 + \frac{6\mu_2}{m_1}x_3(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + \\ + \frac{1}{m_1m_2} (k_2 - 3\mu_2(x_1 - x_2)^2) u + \left( \frac{k_2}{m_1} - \frac{3\mu_2}{m_1}(x_1 - x_2)^2 \right).$$

$$\left( -\frac{\delta_2}{m_2}x_4 - \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1) + \frac{\mu_2}{m_2}(x_2 - x_1)^3 \right) - \frac{6\mu_2}{m_1}x_4(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) - \frac{\delta_1}{m_1}z_4;$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2^2}{m_1m_2} & 0 & -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{\delta_1}{m_1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix} (\psi(x) + \gamma(x)u). \quad (5.5)$$

Ecuția (5.5) este reprezentarea sistemului în forma canonică de control, scrisă generic  $\dot{z} = Az + B(\psi(x) + \gamma(x)u)$ . Ea conține partea liniară, formată dintr-un lanț de 3 integratoare, iar partea neliniară este restrânsă în ultima ecuație, permițând astfel legii de control să o anuleze din punct de vedere matematic.

Conform noțiunilor teoretice prezentate mai-sus, impunem legea de control  $u = \gamma^{-1}(x)(-\psi(x) - KT(x))$ , unde  $K$  este matricea de câștig proiectată prin metoda reacției de la stare pentru controlul sistemului  $\dot{z} = Az + Bv$ . Studiem mai întâi controlabilitatea sistemului liniar, descris prin perechea  $(A, B)$ .

Matricea de controlabilitate  $[B \ AB \ A^2B \ A^3B]$  are rangul 4, egal cu ordinul sistemului, deci sistemul este complet controlabil. Pentru calculul matricii de câștig  $K$  se folosește metoda plasării polilor. Se impun polii în buclă închisă cu valorile  $s_1 = -3, s_2 = -4, s_3 = -5, s_4 = -6$ . Cu funcția "place" se determină  $K = [ \ 360.5 \ 342 \ 117.6 \ 17.9 ]$ .

Menționăm că  $\gamma^{-1}(x) = \frac{m_2}{k_2 - 3\mu_2(x_1 - x_2)^2}$ , iar  $\psi(x)$  este partea neliniară din  $\dot{z}_4$ , care nu depinde de  $u$ .

Legea de control este astfel complet determinată.



funcțiile  $T(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $\psi(x)$ .

În acest caz, problema de control a fost stabilizarea celor 4 stări și convergența lor exponențială la origine. De multe ori însă, problema este una de urmărire. O idee de a trece de la o problemă la alta, sugerată în [5] este specificarea referinței dorite  $x_d(t)$  și modelarea erorii  $e(t) = x(t) - x_d(t)$ . Aplicarea metodei de control va duce la o convergență exponențială a erorii la zero, iar de aici problema de urmărire este, în teorie, rezolvată.

Ca și concluzii, metoda liniarizării prin reacție de la stare folosește, în cazul de față, un semnal de comandă cu amplitudine mare. Acest fapt poate reprezenta o problemă majoră în cazuri practice pentru elementele de execuție. De asemenea, o altă problemă ce poate apărea este ca valorile stărilor să iasă din domeniul de definiție specificat. O variantă ce se poate lua în calcul este ideea de saturație a semnalului de control.

## 5.2. Control prin moduri alunecătoare

Metoda de control prin moduri alunecătoare (engl. *Sliding mode control*) este o tehnică robustă de control care presupune descrierea unei hipersuprafețe sau varietate topologică (engl. *manifold*), spre care converg toate traiectoriile. Odată ajunse aici, traiectoriile vor „aluneca” pe această suprafață. Sistemele cu structură variabilă sunt numite astfel, datorită caracterului discontinuu al semnalului de control. Există, de asemenea și metode de control hibrid, care utilizează atât semnale continue de control cât și discontinue, în funcție de anumite proprietăți.

### 5.2.1. Descrierea metodei

Se consideră sistemul neliniar, descris prin:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t)u(t). \quad (5.6)$$

, unde  $x, f$  și  $g \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , iar  $f$  și  $g$  sunt funcții continue și netede, cu posibile incertitudini, mărginite. Cele asociate funcției  $g$  sunt numite în literatură „*matched uncertainties*”, respectiv cele asociate funcției  $f$  se numesc „*unmatched*”.

Pentru a facilita dezvoltarea metodei de control, se preferă aducerea sistemului în formă regulată. Aceasta presupune separarea vectorului de stare în două partiții, una care este independentă de semnalul de control  $u$ , iar cealaltă care îl conține explicit în ecuațiile diferențiale. Pentru a aduce sistemul în această formă se folosesc transformări de tip difeomorfism, însă în multe cazuri poate fi un proces dificil.

Scopul acestei metode este determinarea unei legi de control de tip reacție de la stare, care forțează stările sistemului să convergă la origine. Metoda presupune două faze, una în care traiectoriile converg, într-un timp finit, spre o hipersuprafață bine determinată, iar cealaltă, în care traiectoriile alunecă pe suprafața respectivă ajungând la origine sau la un punct specificat.

Primul pas este descrierea suprafeței de alunecare, sau, mai riguros, a varietății topologice  $\sigma(x) = 0$ . Acest lucru se face, de obicei, printr-o combinație liniară (sumă ponderată) a stărilor sistemului.

$$\sigma(x) = s_1x_1 + s_2x_2 + \dots s_nx_n. \quad (5.7)$$

Se dorește convergența variabilei  $\sigma$ , numită variabilă de alunecare, la zero, utilizând semnalul de comandă  $u$ . Acest lucru se va realiza folosind teoria lui Lyapunov.

În figura 5.5 se descrie un portret de faze al unui sistem de ordin 2. Suprafața de

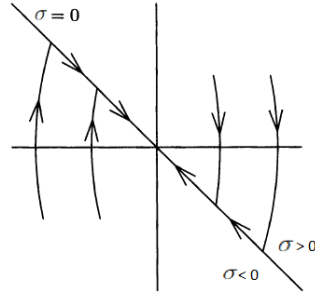


Figura 5.5: Convergența traiectoriilor la suprafața de alunecare în spațiul stărilor

alunecare este o dreaptă, care trece prin origine. Toate traiectoriile din spațiul stărilor care nu aparțin dreptei vor converge spre ea. Ulterior, traiectoriile urmează dinamica descrisă prin dreaptă, ajungând la echilibru, în acest caz originea. În situația în care dimensiunea sistemului este mai mare, dreapta se transformă într-un hiperplan de aceeași dimensiune cu sistemul.

Metoda de față presupune o suprafață de alunecare de ordin 1, de aceea definiția varietății topologice implică o combinație liniară a stărilor sistemului. Există însă și metode de control de ordin mai mare, cunoscute în literatură ca „*high order sliding mode control*”. Acestea definesc suprafața de alunecare printr-o funcție neliniară care depinde de stările sistemului. Performanțele unor astfel de metode pot crește sau scădea în funcție de sistemul ce se dorește a fi controlat.

Revenim la suprafața de alunecare  $\sigma(x) = s_1x_1 + s_2x_2 + \dots + s_nx_n$  și scriem dinamica

$$\dot{\sigma}(x) = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n] (f(x, t) + g(x, t)u). \quad (5.8)$$

Se definește funcția candidat Lyapunov  $V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2$ . Teorema 4.3 impune condițiile (4.5) de definire pozitivă a funcției  $V$ , (4.7) de definire negativă a derivatei sale și de nemărginire radială (4.8). Condițiile (4.5) și (4.8) sunt îndeplinite din forma funcției  $V$ , în timp ce, conform capitolului 1 din [8], relația  $\dot{V}(\sigma) < 0$  se poate înlocui cu  $\dot{V}(\sigma) \leq -\alpha V^{1/2}$ , pentru a obține convergență într-un timp finit. Astfel, timpul de convergență va depinde de constanta pozitivă  $\alpha$ .

Derivata funcției  $V$  se scrie ca  $\dot{V}(\sigma) = \sigma \dot{\sigma} = \sigma \cdot (s_1\dot{x}_1 + s_2\dot{x}_2 + \dots + s_n\dot{x}_n)$  sau

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma \cdot (\beta(x) + \delta(x, t) + \gamma(x)u), \quad (5.9)$$

unde  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ ,  $\beta(x)$  este  $f(x, t)$ , din care se scad incertitudinile,  $\gamma(x)$  este  $g(x, t)$ , din care se scad incertitudinile, iar  $\delta(x, t)$  cuprinde incertitudinile din  $f$  și  $g$ . Astfel,  $\delta(x, t) = f(x, t) - \beta(x) + g(x, t) - \gamma(x)$ .

Impunem legea de control

$$u = -\gamma(x)^{-1}(\beta(x) - v). \quad (5.10)$$

Se obține  $\dot{V}(x) = \sigma \cdot (v + \delta(x, t)) = \sigma\delta(x, t) + \sigma v \leq |\sigma|L + \sigma v$ , unde  $L$  reprezintă limita superioară a incertitudinilor sistemului 5.6.

Se consideră  $v = -\rho \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$ , unde  $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ , și  $\rho > 0$ .

Obținem  $\dot{V}(\sigma) \leq |\sigma|L - |\sigma|\rho = -|\sigma|(\rho - L)$ , cu observația că  $\sigma \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) = |\sigma|$ .

Trebuie să arătăm că  $\dot{V}(\sigma) \leq -\alpha V^{1/2}$ , dar  $V^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\sigma|$ , din definiția funcției candidat Lyapunov, deci  $\dot{V}(\sigma) \leq -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma|$ . Atunci rezultă  $\rho - L = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ .

$$\rho = L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}. \quad (5.11)$$

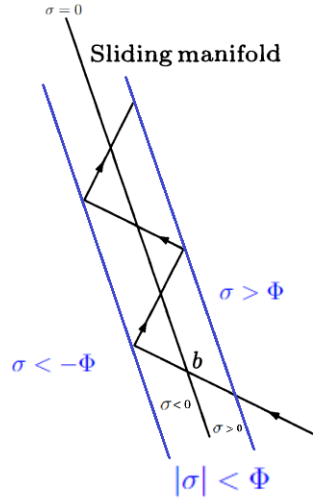
Legea de control de tip reacție de la stare se poate împărți în două componente. Prima este reprezentată de  $u_{eq} = -\gamma(x)^{-1}\beta(x)$  din ecuația 5.10 și se numește controlul echivalent, dezvoltat alături de metoda controlului echivalent de către Vadim Utkin. Controlul echivalent se determină folosind ecuația  $\dot{\sigma}(x) = 0$ , din care se scrie  $u$  care anulează partea cunoscută (fără incertitudini) din  $\dot{\sigma}$ . Această componentă de control este responsabilă cu menținerea traiectoriilor pe suprafața de alunecare, odată ce acestea au convers spre ea. Apare, astfel, prin restricția întregului spațiu al stărilor la suprafața de alunecare, o reducere a ordinului sistemului. Fenomenul se numește în literatură colapsul dinamicii (engl. *dynamical collapse*). Varietatea topologică devine astfel o mulțime invariantă, cât timp nu apar perturbații.

Cea de a doua componentă din legea de control este  $u_{switch} = v = -\rho \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$  se numește controlul discontinuu sau de comutație. El are rolul de a aduce toate traiectoriile într-un timp finit la varietatea topologică  $\sigma(x) = 0$ , care reprezintă, de altfel, un sistem de ordin redus. Până acum, toate semnalele cu care s-a lucrat au fost semnale continue, deci cu funcții local Lipschitz. Semnalul  $v$  este unul discontinuu, ceea ce implică un sistem în buclă închisă a cărui ecuații diferențiale nu sunt local Lipschitz. Întreaga teorie a sistemelor neliniare prezentată până acum s-a bazat pe astfel de funcții. Studiul lui Filippov cu privire la sisteme de ecuații diferențiale neliniare cu funcții discontinue presupune construcția unei soluții ca o medie a soluțiilor ce tind la punctul de discontinuitate din diferite direcții, după cum se prezintă în capitolul 2 din [8].

### 5.2.2. Reducerea fenomenului de *chattering*

Metoda de control prezentată are un dezavantaj semnificativ în aplicații practice. Semnalul de control de tip reacție de la stare prezintă o oscilație de frecvențe foarte mari. Aceasta nu poate fi modelată perfect de elemente de execuție electro-mecanice precum relee, comutatoare, întrucât acestea nu acționează instantaneu. Din această cauză, apare fenomenul cunoscut în literatură sub numele de „*chattering*”. Întârzierile provocate de acest fenomen se regăsesc în traiectoriile care, în loc să alunece pe varietatea topologică, oscilează în apropierea sa, precum în figura 5.6.

Traectoria din figura 5.6 este sub acțiunea controlului de comutație până în punctul b, când atinge suprafața de alunecare. În acest moment, traiectoria ar trebui să alunece pe dreapta  $\sigma = 0$  (suntem în cazul unui sistem de ordin 2). Din cauza întârzierilor, controlul discontinuu va comuta când  $\sigma = -\Phi$ , dar ideal, ar trebui să comute mai repede, în momentul când se schimbă semnul lui  $\sigma$ . Următoarea comutație va avea loc când  $\sigma = \Phi$ , iar procesul se repetă. Locul geometric determinat de inegalitatea  $|\sigma| < \Phi$  se numește strat limită (engl. *boundary layer*).


 Figura 5.6: Fenomenul de *chattering*

Acest comportament oscilatoriu al semnalului de control și al traiectoriilor din spațiul stărilor nu este de dorit, deoarece elementele mecanice și comutatoarele fizice din sistem se deteriorează, iar în modelul procesului pot interveni dinamici nedorite. Pentru reducerea sau eliminarea acestui fenomen, există tehnici precum metoda stratului limită, metode de filtrare sau aproximare a semnalului de control, sau o proiectare mai complexă a suprafeței de alunecare.

Prima metodă ce se tratează este cea a stratului limită, propusă de Slotine. Ea presupune un strat limită bine definit  $B = \{x \mid |\sigma(x, t)| \leq \Phi\}$ , precum în figura 5.6 și o aproximare continuă a controlului de comutație. Se aproximează funcția  $\text{sgn}(\sigma)$  cu funcția  $\text{sat}\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)$ , unde  $\text{sat}(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } |x| \leq 1 \\ \text{sgn}(x) & \text{dacă } |x| > 1 \end{cases}$ , iar  $\mu > 0$  este panta dreptei ce face legătura între cele două valori de comutație, după cum se observă în figura 5.7. Se remarcă relația  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \text{sat}\left(\frac{\sigma}{\mu}\right) = \text{sgn}(\sigma)$ .

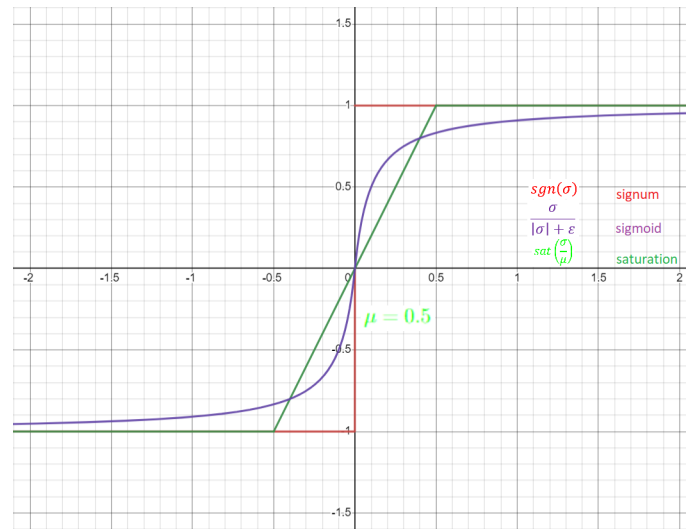


Figura 5.7: Aproximările funcției signum

Se alege  $\mu = \Phi$ , astfel încât dinamica sistemului în buclă închisă în afara stratului limită să nu se schimbe. Din raționamentul prezentat anterior, bazat pe teoria Lyapunov,



trajectoriile converg la stratul limită în timp finit, acesta devenind o mulțime invariantă. Această aproximare ce netezește semnalul de control în stratul limită, introduce o eroare în problemele de stabilizare și urmărire, cu prețul reducerii amplitudinii oscilației. Astfel, se face un compromis între eroare și eliminarea fenomenului de *chattering*.

O altă metodă de aproximare a controlului de comutație este funcția din figura 5.7, de tip „sigmoid”, definită prin  $\frac{\sigma}{|\sigma| + \varepsilon}$ . În mod analog, performanțele ideale asociate metodei de control vor fi ușor afectate în urma acestei aproximări. Și de această dată apare o variabilă ce se poate modifica, iar dacă o facem să tindă la zero, aproximarea funcției va tinde la funcția aproximată  $\text{sgn}(\cdot)$ . Această metodă se găsește în literatură sub numele de „*quasi-sliding mode*”.

### 5.2.3. Studiu de caz

Se reconsideră sistemul mecanic din figura 5.1 descris prin sistemul de ecuații diferențiale 5.4.

Începem prin a descrie suprafața de alunecare sub forma unei sume ponderate a stărilor:  $\sigma(x) = x_4 + ax_3 + bx_2 + cx_1$ , cu constantele pozitive  $a, b, c$ . În general, coeficientul stării care conține variabila de control se consideră unitar. De asemenea, precizăm că sistemul este în formă regulată.

Dinamica de pe suprafața de alunecare este:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(x) = & -\frac{\delta_2}{m_2}x_4 - \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1) + \frac{\mu_2}{m_2}(x_2 - x_1)^3 + \frac{u_2}{m_2} + \\ & a \left( -\frac{\delta_1}{m_1}x_3 - \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{\mu_1}{m_1}x_1^3 - \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2) + \frac{\mu_2}{m_1}(x_1 - x_2)^3 \right) + bx_4 + cx_3 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Impunem  $\dot{\sigma}(x) = 0$  și calculăm controlul echivalent:

$$\begin{aligned} u_{eq} = & -m_2 \left[ -\frac{\delta_2}{m_2}x_4 - \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1) + \frac{\mu_2}{m_2}(x_2 - x_1)^3 + bx_4 + cx_3 + \right. \\ & \left. a \left( -\frac{\delta_1}{m_1}x_3 - \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{\mu_1}{m_1}x_1^3 - \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2) + \frac{\mu_2}{m_1}(x_1 - x_2)^3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Controlul de comutație este de forma  $u_s = -\rho \cdot \text{sgn}(\sigma)$ , unde factorul de amplificare se calculează ca  $\rho = L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ , precum în relația 5.11. Alegem  $L = 1$ , reprezentând limita superioară a incertitudinii și  $\alpha = 5$ . Cu cât  $\alpha$  este mai mare, cu atât trajectoriile converg mai repede la suprafața de alunecare. După cum se menționează și în [18], o amplitudine suficient de mare a factorului de amplificare va asigura robustețea sistemului în buclă închisă.

Semnalul de control final este dat de relația 5.10, și anume  $u = u_{eq} + m_2 \cdot u_s$ . Coeficienții  $a, b$  și  $c$  sunt determinați empiric, prin simulări, aceasta devenind o problemă de optimizare. Se observă că dacă se cresc acești coeficienți, timpul de convergență al stărilor la zero scade. Pentru simulări, s-au ales  $a = b = c = 50$ . În figura 5.8 se poate observa implementarea schemei de control în mediul Simulink, cu semnalul de control și coeficienții prezentați anterior.

Rezultatele simulării sistemului fără incertitudini, în prezența condițiilor inițiale, mai precis stările controlate și semnalul de control sunt prezentate în figurile 5.9, respectiv

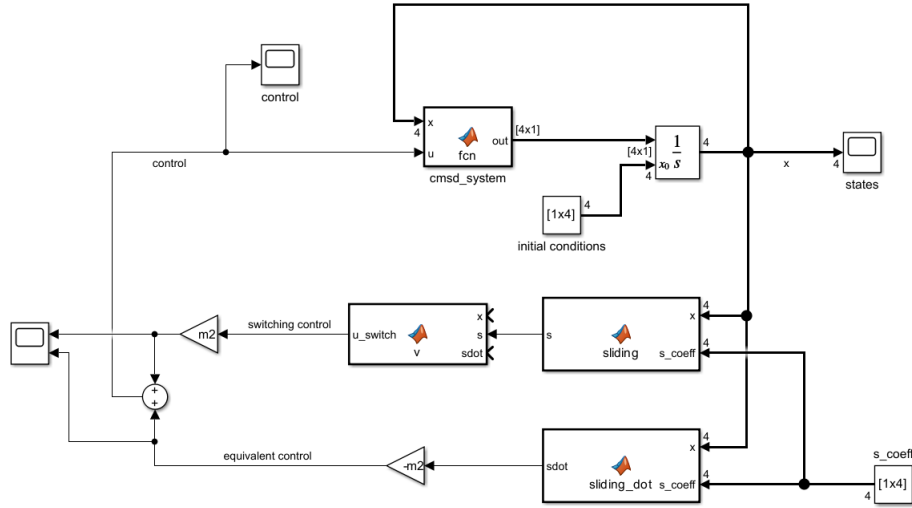


Figura 5.8: Schemă de control prin moduri alunecătoare

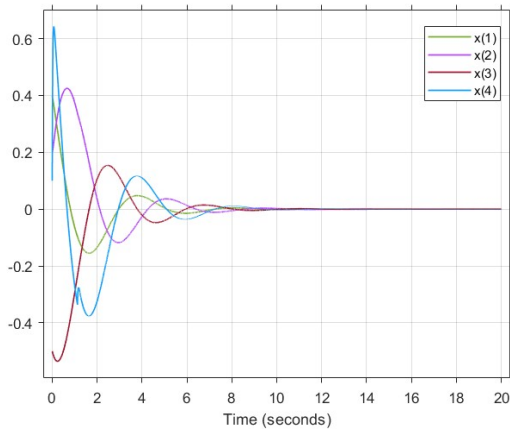


Figura 5.9: Stările controlate

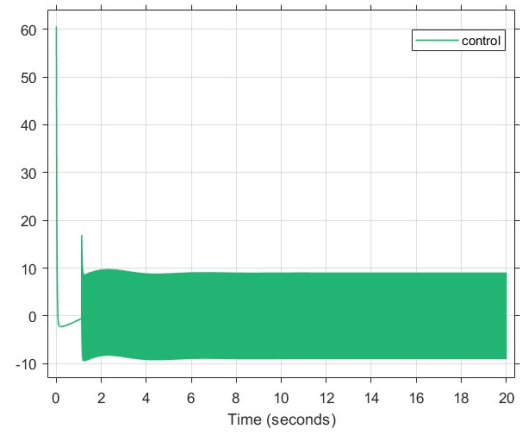


Figura 5.10: Semnalul de control

5.10. Stările converg și în acest caz la zero, însă considerabil mai lent ca în cazul metodei precedente, anume liniarizarea prin reacție de la stare. Semnalul de comandă prezintă un caracter oscilant, nedorit, de frecvențe extrem de mari. Fenomenul de chattering este întărit și de starea  $x_4$ , care prezintă oscilație în jurul valorii de zero, dar cu amplitudine scăzută.

În continuare s-a testat robustețea metodei de control prin moduri alunecătoare, prin păstrarea schemei de control, dar schimbarea parametrilor procesului, anume masele  $m_1$  și  $m_2$ . Inițial, în proiectarea controlului, s-a considerat  $m_1 = 1$  kg și  $m_2 = 2$  kg. În figura 5.11a sunt descrise stările sistemului în buclă închisă, cu parametrii mecanici  $m_1 = m_2 = 0.1$  kg. Se constată că stările converg la zero chiar mai repede decât în cazul anterior, când nu existau incertitudini. Totuși, din punct de vedere practic, masele fiind mai ușoare, sistemul devine mai ușor de controlat. Pe de altă parte, în figura 5.11b sunt prezentate stările în cazul în care se măresc masele  $m_1 = 8$  kg și  $m_2 = 4$  kg. Convergența stărilor la zero se păstrează, ceea ce reprezintă un avantaj major față de alte tehnici de control mai puțin robuste. Totuși, timpul de convergență este semnificativ mai mare, iar domeniul de variație al stărilor ar putea atrage probleme practice în construcția sistemului mecanic.

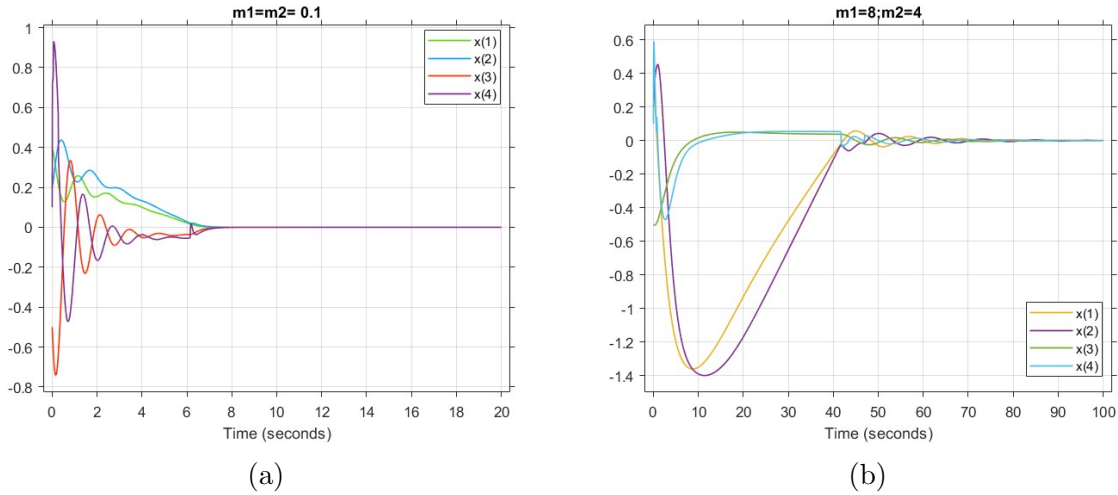


Figura 5.11: Stările sistemului cu incertitudini

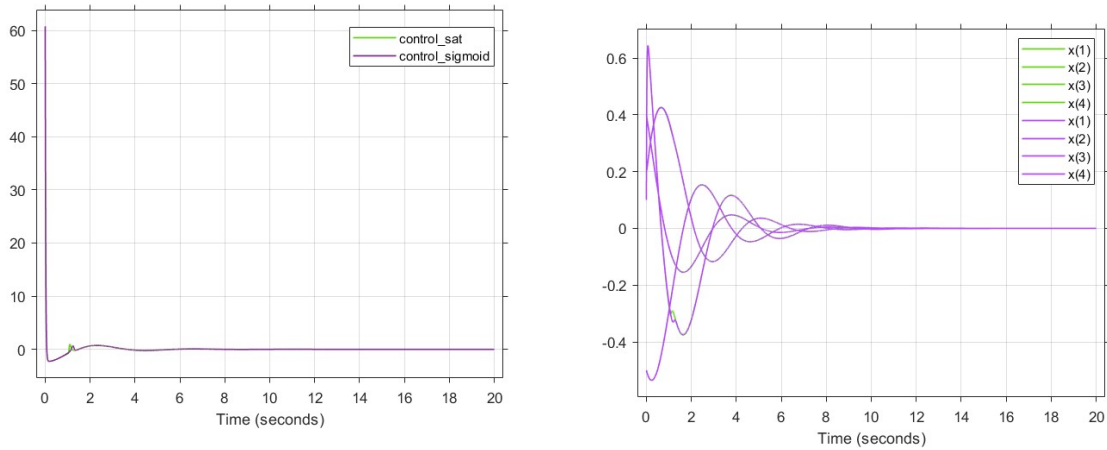
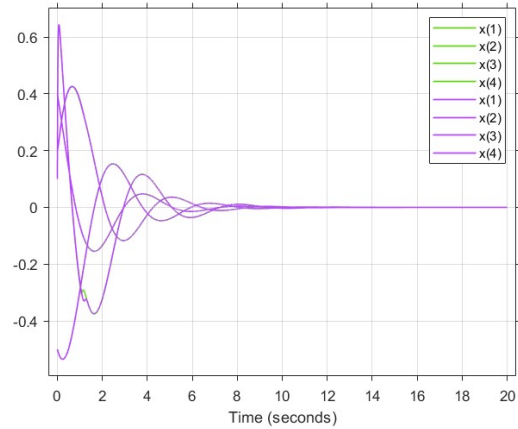


Figura 5.12: Semnalele de control folosind aproximări

Figura 5.13: Stările folosind aproximări



În final, se dorește eliminarea fenomenului de *chattering* și analiza performanțelor în situația respectivă. În acest scop, se folosesc aproximările continue ale controlului de comutație, propuse anterior, în figura 5.7. Pentru funcția saturație, s-a ales  $\mu = 0.3$ , iar pentru funcția sigmoid, s-a ales  $\varepsilon = 0.1$ . Rezultatele simulărilor sunt ilustrate în figurile 5.12 și 5.13. Se constată că oscilația nu mai este prezentă în semnalele de control și nici în stările controlate. Ne așteptăm, în schimb, să apară erori de convergență. După un timp de simulare de 20 de secunde, erorile sunt de ordinul  $10^{-5}$ , comparabile cu cazul inițial, în care se folosea funcția signum.

### 5.3. Reglare prin pași înapoi

Metoda reglării prin pași înapoi (engl. *Backstepping*) este o metodă apărută în jurul anului 1990 și este de asemenea, o metodă de control bazată pe reacție de la stare. Ea presupune descompunerea sistemului în subsisteme conectate în cascadă, metoda aplicându-se recursiv pentru stabilizarea fiecărui sistem folosind semnale de control virtual (engl. *virtual control*).

### 5.3.1. Descrierea metodei

Se consideră sistemul:

$$\dot{\eta} = f_a(\eta) + g_a(\eta)\xi \quad (5.14)$$

$$\dot{\xi} = f_b(\eta, \xi) + g_b(\eta, \xi)u, \quad (5.15)$$

unde  $\eta$  și  $\xi$ , cu dimensiunile  $n$ , respectiv 1, reprezintă vectorul de stări, iar  $u$  este intrarea, unidimensională. Sistemul reprezintă o conexiune cascade între 5.14 cu intrarea  $\xi$  și 5.15 cu intrarea  $u$ . Se presupune că subsistemul 5.14 poate fi controlat (stabilitate asimptotică) de o lege de tip reacție de la stare  $\xi = \phi(\eta)$ ,  $\phi(0) = 0$ .

În acest sens, se consideră funcția Lyapunov  $V_a(\eta)$ , care respectă relația:

$$\dot{V}_a(\eta) \leq -W(\eta), \quad (5.16)$$

unde  $W(\eta)$  este pozitiv definită.

Rescriem 5.14 ca:

$$\dot{\eta} = f_a(\eta) + g_a(\eta)\phi(\eta) + g_a(\eta)[\xi - \phi(\eta)]. \quad (5.17)$$

Schimbarea de variabile  $z = \xi - \phi(\eta)$  transformă sistemul 5.14-5.15 în:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_a(\eta) + g_a(\eta)\phi(\eta) + g_a(\eta)z \\ \dot{z} &= f_b(\eta, \xi) + g_b(\eta, \xi)u - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f_a(\eta) + g_a(\eta)\phi(\eta) + g_a(\eta)z] \end{aligned} \quad (5.18)$$

Se definește o nouă funcție Lyapunov,  $V(\eta, \xi) = V_a(\eta) + \frac{1}{2}z^2$ . Calculând derivata lui  $V$ , obținem:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_a + z\dot{z} = \frac{\partial V_a}{\partial \eta} [f_a(\eta) + g_a(\eta)\phi(\eta) + g_a(\eta)z] + z\dot{z} \\ \dot{V} &\leq -W(\eta) + \frac{\partial V_a}{\partial \eta} g_a(\eta)z + z \left( f_b(\eta, \xi) + g_b(\eta, \xi)u - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f_a(\eta) + g_a(\eta)\phi(\eta) + g_a(\eta)z] \right) \end{aligned}$$

Pentru a ne asigura că  $\dot{V}$  este negativ definită, impunem legea de control:

$$u = -\frac{1}{g_b(\eta, \xi)} \left( \frac{\partial V_a}{\partial \eta} g_a(\eta) + f_b(\eta, \xi) - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f_a(\eta) + g_a(\eta)\phi(\eta) + g_a(\eta)z] + kz \right), \quad (5.19)$$

care implică  $\dot{V} \leq -W(\eta) - kz^2$  - negativ definită pentru  $k > 0$ .

Metoda recursivă presupune repetarea metodei anterioare, pe rând, pentru fiecare subsistem din 5.20. Se calculează de fiecare dată, semnalul de control (virtual) care stabilizează sistemul curent, utilizând informațiile cunoscute despre subsistemele anterioare (semnale de control și definiții de funcții Lyapunov). În final, ultimul semnal de control determinat este cel real, care se aplică la intrarea sistemului inițial. Sistemul 5.20 este în formă de reacție strictă (engl. *strict-feedback form*).

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1 \\
 \dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2 \\
 \dot{z}_2 &= f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2)z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{k-1} &= f_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1}) + g_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1})z_k \\
 \dot{z}_k &= f_k(x, z_1, \dots, z_k) + g_k(x, z_1, \dots, z_k)u
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

În [1] și [11] se prezintă detaliat metoda reglării prin pași înapoi, varianta recursivă a acestora și exemple sugestive.

### 5.3.2. Studiu de caz

Se reconsideră sistemul mecanic din figura 5.1 descris prin:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3 \\
 \dot{x}_2 &= x_4 \\
 \dot{x}_3 &= -\frac{\delta_1}{m_1}x_3 - \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{\mu_1}{m_1}x_1^3 - \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2) + \frac{\mu_2}{m_1}(x_1 - x_2)^3 \\
 \dot{x}_4 &= -\frac{\delta_2}{m_2}x_4 - \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1) + \frac{\mu_2}{m_2}(x_2 - x_1)^3 + \frac{u}{m_2}
 \end{aligned}$$

Notăm  $\eta = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  și  $\xi = x_4$ . Fie  $V_a(\eta) = \frac{1}{2}\eta^T\eta$ . Numărul maxim de pași ce pot fi făcuți este 1, deci nu se poate aplica varianta recursivă.

$$\dot{V}(\eta) = x_1x_3 + x_2\phi(\eta) + x_3 \left( -\frac{\delta_1}{m_1}x_3 - \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{\mu_1}{m_1}x_1^3 - \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2) + \frac{\mu_2}{m_1}(x_1 - x_2)^3 \right)$$

Înlocuim  $m_1 = 1$  și rescriem:

$$\dot{V}_a = x_2\phi(\eta) + \mu_1x_1^3x_3 + \mu_2(x_1^3x_3 - 3x_1^2x_2x_3 + 3x_1x_2^2x_3 - x_2^3x_3) + (1 - k_1 - k_2)x_1x_2 + k_2x_2x_3.$$

$$\dot{V}_a(\eta) = (\mu_1 + \mu_2)x_1^3x_3 + x_2(\phi(\eta) - 3x_1^2x_3 + 3x_1x_2x_3 - x_2^2x_3 + (1 - k_1 - k_2)x_1 + k_2x_3) \leq -W(\eta).$$

Fie  $\phi(\eta) = 3x_1^2x_3 - 3x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 - (1 - k_1 - k_2)x_1 - k_2x_3$ .

Nu avem garanția că  $\dot{V}_a(\eta) \leq -W(\eta)$ , dar condiția  $\phi(0) = 0$  nu permite anularea stării  $x_2$ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} (6x_1x_3 - 3x_2x_3 + k_1 + k_2 - 1) & (-3x_1x_3 + 2x_2x_3) & (3x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 - k_2) \end{bmatrix}$$

$$f_a(\eta) = \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \quad g_a(\eta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_b = \dot{x}_4 - \frac{u}{m_2} \quad g_b = \frac{1}{m_2}$$

$$f_a(\eta) + g_a(\eta)\phi(\eta) + g_a(\eta)z = \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \phi(\eta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_4 - \phi(\eta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}$$

$$u = -m_2 \left( x_2 - \frac{\delta_2}{m_2} x_4 - \frac{k_2}{m_2} (x_2 - x_1) + \frac{\mu_2}{m_2} (x_2 - x_1)^3 - x_3 (6x_1x_3 - 3x_2x_3 + k_1 + k_2 - 1) - \right. \\ \left. x_4 (-3x_1x_3 + 2x_2x_3) - \left( -\frac{\delta_1}{m_1} x_3 - \frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{\mu_1}{m_1} x_1^3 - \frac{k_2}{m_1} (x_1 - x_2) + \frac{\mu_2}{m_1} (x_1 - x_2)^3 \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot (3x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 - k_2) + k(x_4 - 3x_1^2x_3 + 3x_1x_2x_3 - x_2^2x_3 + (1 - k_1 - k_2)x_1 + k_2x_3) \right) \quad (5.21)$$

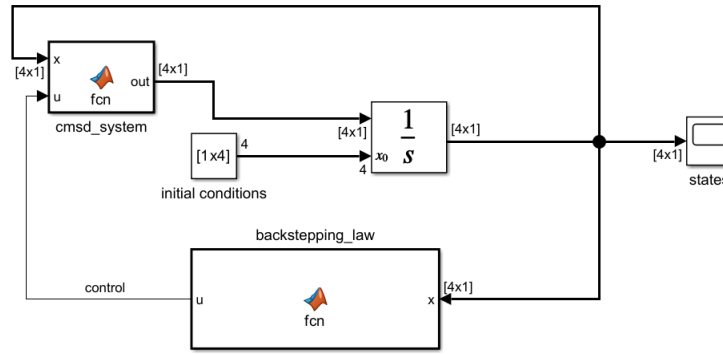


Figura 5.14: Schemă de control prin pași înapoi

În figura 5.14 se poate descrie implementarea schemei de control în mediul Simulink. Funcția `backstepping_law` este reprezentarea numerică a relației 5.21.

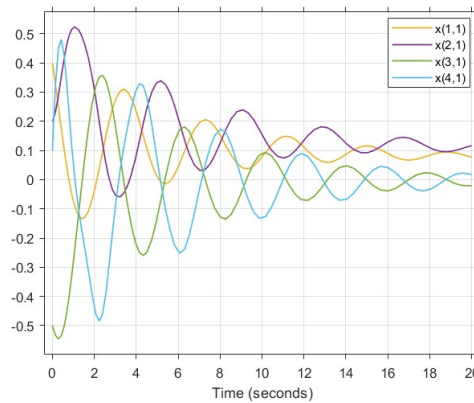


Figura 5.15: Rezultatele metodei de control prin pași înapoi

Se observă că rezultatele din figura 5.15 nu sunt satisfăcătoare. Acest lucru era previzibil, întrucât funcția  $\phi(\eta)$  nu a reușit să îndeplinească 5.16. Prin urmare, această metodă de control nu este fezabilă pentru sistemul de față. Totuși, se poate studia existența unei alte funcții candidat Lyapunov  $V_a(\eta)$ , care duce la performanțe mai bune.

## Capitolul 6. Concluzii și preocupări viitoare

### 6.1. Concluzii

Studiul analizei și controlului neliniar este un proces complex și îndelungat, care necesită cunoștințe temeinice de teoria sistemelor, control liniar și modelare prin ecuații diferențiale. Pe lângă acestea se adaugă algebră liniară, geometrie diferențială și analiză matematică multivariabilă.

În cadrul analizei neliniare, există o serie vastă de proprietăți ce pot fi atribuite unui sistem neliniar. Portretele de fază sunt esențiale pentru studiul sistemelor planare, datorită interpretării și vizualizării geometrice a dinamicii. Ciclurile limită stabile sunt importante în practică datorită invarianței și caracterului lor oscilatoriu. Studiul teoriei Lyapunov, alături de Principiul Invarianței stau la temelia sistemelor neliniare, exprimând stabilitatea acestora. Un alt concept util în studiul sistemelor neliniare este estimarea regiunii de atracție a sistemului în buclă deschisă și proiectarea unei regiuni de atracție dorite pentru sistemul în buclă închisă. Pasivitatea, respectiv pasivizarea sistemelor reprezintă concepte folositoare în controlul bazat pe pasivitate. Formele canonice neliniare facilitează aplicarea unor metode de control specifice și în înțelegerea aprofundată a sistemului. Contribuțiile personale sunt realizarea portretelor de fază și prezentarea exemplelor aferente noțiunilor discutate, cu scopul de a intensifica înțelegerea acestora. În opinia mea, cele mai dificile aspecte sunt determinarea funcțiilor Lyapunov și a transformărilor unu-la-unu (engl. *one-to-one*) de tip difeomorfism și inversele lor. În practică se folosesc metode de aproximare, interpolare, regresie sau tabele (engl. *lookup tables*) [19].

În cadrul controlului neliniar, lucrarea de față tratează trei metode de control. Contribuțiile personale sunt proiectarea unor algoritmi care ajută la stabilirea faptului că un sistem este liniarizabil prin reacție de la stare (s-au folosit elemente de geometrie diferențială precum derivata și croșetul Lie), dar și aplicarea, simularea și analizarea rezultatelor celor trei metode. Acestea s-au realizat în mediul MATLAB/Simulink. Cu toate că simulările sunt absolut necesare înaintea testării unui sistem real și a schemei de control, ele au anumite dezavantaje. Ele nu modelează zgomotul, întârzierile, erorile de calcul sau anumite incertitudini ce pot interveni în schema reală de control. Problema de control pentru fiecare metodă a fost convergența stărilor la zero. În fiecare caz, legea de control a fost de tip reacție de la stare, fapt ce implică nevoia de a cunoaște stările în timp real (*online*). De multe ori, în practică, acest lucru nu este posibil, fie din lipsa unor senzori, fie că sistemul nu este complet observabil și nu se poate proiecta un estimator de stare. Alte probleme ce pot să apară sunt domeniul de definiție în care funcționează sistemul și implicit stările sale, sau limitări fizice ale semnalului de control. În acest caz, simulările au un rol vital.

Liniarizarea prin reacție de la stare este specifică sistemelor cu o intrare și o ieșire (*SISO*) și presupune anularea matematică a neliniarității. De aceea, se impune cunoașterea unui model cât mai apropiat de realitate. În cazul sistemului considerat în capitolul 5, stările au convers într-un timp scurt la zero, dar semnalul de control a avut o amplitudine mare. De asemenea, complexitatea metodei constă în aducerea sistemului

în forma canonică de control.

Controlul prin moduri alunecătoare este o metodă foarte generală de control neliniar, întrucât introduce un grad de robustețe, foarte util în practică. Complexitatea ei este în determinarea celor două semnale de control, cel echivalent și cel de comutație, urmând definirea și acordarea suprafeței de alunecare. Ca o extindere, suprafețele de alunecare pot avea ordin mai mare, fapt ce poate aduce îmbunătățiri ale performanțelor. Totodată, ca avantaj, această metodă se poate aplica și sistemelor cu mai multe intrări, respectiv ieșiri (*MIMO*). În cazul considerat, stările au converș la zero relativ mai lent ca în cazul anterior. Totuși, s-a identificat o gamă largă de variație a parametrilor în care schema de control funcționează. Mai mult, aproximările realizate în semnalul de control au dus la eliminarea fenomenului de *chattering*, fără a afecta semnificativ performanțele.

Reglarea prin pași înapoi este o tehnică mai restrictivă de control ce presupune descompunerea unui sistem într-o conexiune cascade de mai multe subsisteme. Eficiența ei constă în aplicarea sa recursivă pentru fiecare subsistem în parte. În studiul de caz din lucrarea de față, sistemul de ordin 4 s-a descompus într-un sistem de ordin 3 și un sistem unidimensional. Stabilizarea sistemului de ordin 3 nu a reușit prin cazul clasic, folosind funcții Lyapunov. Totuși, metoda este extrem de utilă în multe cazuri prezente în literatura de specialitate.

## 6.2. Preocupări viitoare

Principalele preocupări viitoare sunt extinderea cunoștințelor de analiză și control cu domenii precum control robust, adaptiv, predictiv și optimal, studiul sistemelor neliniare de tip *MIMO*, studiul avansat al stabilității intrare-ieșire asociat spațiilor  $L_p$  sau al stabilității intrare-stare (engl. *Input to state stability*), studiul sistemelor neliniare variabile în timp. Totodată, pentru aplicarea cunoștințelor acumulate pe sisteme reale, se dorește studiul discret al sistemelor neliniare și implementarea metodelor de control pe sisteme de calcul precum *microcontroller*-e.

O altă metodă de dezvoltare a acestui domeniu este proiectarea unor algoritmi care ajută în procesul general de control al sistemelor, realizând diferite sarcini precum: estimarea regiunii de atracție, determinarea optimă a suprafeței de alunecare în cazul metodei controlului prin moduri alunecătoare, determinarea transformărilor care aduc sistemele în diferite forme canonice. Ca un ultim aspect, se menționează studiul estimatoarelor neliniare și conceptul de îmbinare a metodelor de control.



## Bibliografie

- [1] H. Khalil, *Nonlinear Control, Global Edition*. Pearson Education, 2015.
- [2] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, ser. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2003.
- [3] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd ed. Springer, 2001.
- [4] L. Ornea, *O introducere în Geometrie Diferențială*. București, România: Editura Universității din București, 2002.
- [5] J.-J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [6] J. Iqbal, M. Ullah, S. Khan, K. Baizid, and S. Ćuković, “Nonlinear control systems – a brief overview of historical and recent advances,” *Nonlinear Engineering*, vol. 6, 06 2017.
- [7] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, ser. Communications and Control Engineering. Springer London, 1995.
- [8] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant, *Sliding Mode Control and Observation*. Springer, 06 2013.
- [9] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems, Second Edition*, ser. Automation and Control Engineering. Taylor & Francis, 2009.
- [10] V. I. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, ser. Communications and Control Engineering Series. Springer, 1992.
- [11] S. Vaidyanathan and A. Azar, *Backstepping Control of Nonlinear Dynamical Systems*, ser. Advances in Nonlinear Dynamics and Chaos (ANDC). Elsevier Science, 2020.
- [12] B. K. Colbert and M. M. Peet, “Estimating the region of attraction using stable trajectory measurements,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 40, no. 1, pp. 104–117, 2017.
- [13] M. Xia, P. J. Antsaklis, and V. Gupta, “Passivity indices and passivation of systems with application to systems with input/output delay,” in *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2014, pp. 783–788.
- [14] M. Xia, P. Gahinet, N. Abroug, C. Buhr, and E. Laroche, “Sector bounds in stability analysis and control design,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 30, no. 18, 2020.

- [15] J. de Jesús Rubio, “Robust feedback linearization for nonlinear processes control,” *ISA Transactions*, vol. 74, pp. 155–164, 2018.
- [16] S. RANNEN, C. GHORBEL, and N. B. BRAIEK, “Nonlinear identification and control of coupled mass-spring-damper system using polynomial structures,” *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, vol. 8, no. 5, 2017.
- [17] \*\*\*\*\*, *Symbolic Math Toolbox User’s Guide, Version 9.3*, MathWorks, Natick, MA, 03.2023.
- [18] J. Hung and R. Nelms, “Using a boundary layer technique to reduce chatter in sliding mode controllers,” in *[Proceedings] APEC ’91: Sixth Annual Applied Power Electronics Conference and Exhibition*, 1991, pp. 195–201.
- [19] J. Farrell and M. Polycarpou, *Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches*, ser. Adaptive and Cognitive Dynamic Systems: Signal Processing, Learning, Communications and Control. Wiley, 2006.
- [20] V. Ionescu, *Teoria sistemelor: sisteme liniare*. Editura Didactica si Pedagogica, 1985.