Proiect Teoria Sistemelor I

Zigler Alexandru

May 2021

Prezerntarea procesului

Procesul din Fig. 1 reprezintă un sistem mecanic compus din două corpuri cu masele m1 și m2. Acestea sunt legate între ele printr-un resort și un amortizor. De asemenea, există câte un resort între corpul m1 și corpul de referință fix din stânga și unul între corpul m2 și corpul de referință fix din dreapta. Intrarea sistemului este forța u, aplicată asupra corpului 1. Ieșirile sistemului x1 și x2 reprezintă deplasările celor două corpuri.

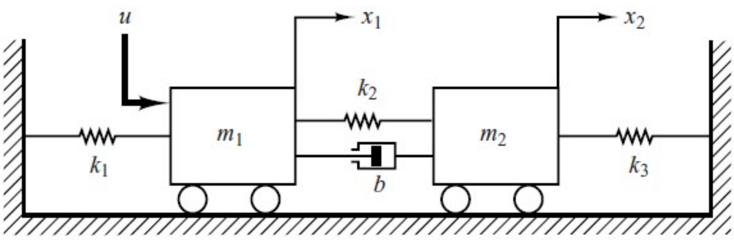

Fig. 1: Sistem mecanic

Considerăm următoarele valori numerice:

- masa corpului 1: $m1 = 40kg$
- masa corpului 2: $m2 = 50kg$
- constanta de elasticitate: $k1 = 200N/m$
- constanta de elasticitate: $k2 = 600N/m$
- constanta de elasticitate: $k3 = 300N/m$
- coeficient de frecare: $b = 20Ns/m$

1. Modelul u/x/y

Scriem legile lui Newton pentru cele 2 corpuri:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

Rescriind ecuațiile, avem:

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 &= b\dot{x}_2 + k_2x_2 + u \\
m_2\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + (k_2+k_3)x_2 &= b\dot{x}_1 + k_2x_1
\end{aligned}
$$

Alegem următoarele variabile de stare:

$$
\begin{aligned}
&x_1 \\
&x_2 \\
&x_3 = \dot{x}_1 \\
&x_4 = \dot{x}_2
\end{aligned}
$$

Astfel, ecuațiile diferențiale devin:

$$
\begin{aligned}
m_1\dot{x}_3 + bx_3 + (k_1+k_2)x_1 &= bx_4 + k_2x_2 + u \\
m_2\dot{x}_4 + bx_4 + (k_2+k_3)x_2 &= bx_3 + k_2x_1
\end{aligned}
$$

Ecuațiile de stare:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_3 \\
\dot{x}_2 = x_4 \\
\dot{x}_3 = -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \frac{b}{m_1}x_3 + \frac{b}{m_1}x_4 + \frac{1}{m_1}u \\
\dot{x}_4 = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2+k_3}{m_2}x_2 + \frac{b}{m_2}x_3 - \frac{b}{m_2}x_4
\end{cases}
$$

Ecuațiile de ieșire:

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 \\
y_2 = x_2
\end{cases}
$$

Realizarea de stare:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Înlocuind cu valorile numerice, obținem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -20 & 15 & -0.5 & 0.5 \\ 12 & -18 & 0.4 & -0.4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.025 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Funcția de transfer și modelul intrare-ieșire

$$m_1\ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 = b\dot{y}_2 + k_2 y_2 + u$$
$$m_2\ddot{y}_2 + b\dot{y}_2 + (k_2 + k_3)y_2 = b\dot{y}_1 + k_2 y_1$$

Aplicăm transformata Laplace acestor ecuații și considerăm condițiile inițiale nule.

$$[m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2]Y_1(s) = (bs + k_2)Y_2(s) + U(s)$$
$$[m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3]Y_2(s) = (bs + k_2)Y_1(s)$$

Înlocuim Y_2 din a doua relație în prima relație.

$$[m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2]Y_1(s) = (bs + k_2)\frac{bs + k_2}{m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3}Y_1(s) + U(s)$$

$$[(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2]Y_1(s) = U(s)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3)$$

$$H_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3}{(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2}$$

$$H_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{bs + k_2}{(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2}$$

$$H_1(s) = \frac{m_2s^2 + bs + k_2 + k_3}{m_1m_2s^4 + b(m_1 + m_2)s^3 + (m_1k_2 + m_1k_3 + m_2k_1 + m_2k_2)s^2 + b(k_1 + k_3)s + k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3}$$

$$H_2(s) = \frac{bs + k_2}{m_1m_2s^4 + b(m_1 + m_2)s^3 + (m_1k_2 + m_1k_3 + m_2k_1 + m_2k_2)s^2 + b(k_1 + k_3)s + k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3}$$

Modelul intrare-ieșire

Din relațiile anterioare putem scrie:

$$U(s)[m_2s^2 + bs + k_2 + k_3] = Y_1(s)[m_1m_2s^4 + b(m_1 + m_2)s^3 +$$
$$(m_1k_2 + m_1k_3 + m_2k_1 + m_2k_2)s^2 + b(k_1 + k_3)s + k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3]$$

$$U(s)[bs + k_2] = Y_2(s)[m_1m_2s^4 + b(m_1 + m_2)s^3 +$$
$$(m_1k_2 + m_1k_3 + m_2k_1 + m_2k_2)s^2 + b(k_1 + k_3)s + k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3]$$

Aplicăm Transformata Laplace inversă celor două ecuații și considerăm condițiile inițiale nule.

$$m_2u''(t) + bu'(t) + (k_2 + k_3)u(t) = m_1m_2y_1^{(4)}(t) + b(m_1 + m_2)y_1^{(3)}(t) + (m_1k_2 + m_1k_3 + m_2k_1 + m_2k_2)y_1''(t)+$$
$$b(k_1 + k_3)y_1'(t) + (k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)y_1(t)$$

$$bu'(t) + k_2u(t) = m_1m_2y_2^{(4)}(t) + b(m_1 + m_2)y_2^{(3)}(t) + (m_1k_2 + m_1k_3 + m_2k_1 + m_2k_2)y_2''(t)+$$
$$b(k_1 + k_3)y_2'(t) + (k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)y_2(t)$$

Funcția de transfer folosind relația cu realizarea de stare

Știm că $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ \frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & s + \frac{b}{m_1} & -\frac{b}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2+k_3}{m_2} & -\frac{b}{m_2} & s + \frac{b}{m_2} \end{bmatrix}$$

$det(sI - A) = \frac{1}{m_1m_2}[m_1m_2s^4 + b(m_1 + m_2)s^3 + (m_1k_2 + m_1k_3 + m_2k_1 + m_2k_2)s^2 + b(k_1 + k_3)s + k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3]$

$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{det(sI-A)} * adj(sI - A)$, unde $adj(sI - A)$ este matricea:

$$\begin{bmatrix} \frac{bk_3+b(m_1+m_2)s^2+m_1m_2s^3+m_1(k_2+k_3)s}{m_1m_2} & -\frac{bk_3-k_2m_2s}{m_1m_2} & \frac{m_2s^2+bs+k_2+k_3}{m_2} & \frac{k_2+bs}{m1} \\ -\frac{bk_1-k_2m_1s}{m_1m_2} & \frac{bk_1+b(m_1+m_2)s^2+m_1m_2s^3+m_2(k_1+k_2)s}{m_1m_2} & \frac{k_2+bs}{m_2} & \frac{m_1s^2+bs+k1+k2}{m_1} \\ -\frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3+m_2(k_1+k_2)s^2+bk_1s}{m_1m_2} & \frac{k_2m_2s^2-bk_3s}{m_1m_2} & \frac{(k_2+k_3)s+bs^2+m_2s^3}{m_2} & \frac{bs^2+k_2s}{m_1} \\ \frac{k_2m_1s^2-bk_1s}{m_1m_2} & -\frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3+m_1(k_2+k_3)s^2+bk_3s}{m_1m_2} & \frac{s(k_2+bs)}{m_2} & \frac{s(m_1s^2+bs+k_1+k_2)}{m_1} \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

În urma celor 2 înmulțiri rămân doar elementele (1,3) și (2,3) din matricea adjunctă, care vor fi înmulțite cu $1/m1$.

$$H(s) = \frac{\begin{bmatrix} \frac{m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3}{m_1 m_2} \\ \frac{k_2 + bs}{m_1 m_2} \end{bmatrix}}{\frac{1}{m_1 m_2}[m_1 m_2 s^4 + b(m_1 + m_2)s^3 + (m_1 k_2 + m_1 k_3 + m_2 k_1 + m_2 k_2)s^2 + b(k_1 + k_3)s + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3]}$$

Se observă că această formă a funcției de transfer este echivalentă cu cea dedusă folosind transformata Laplace, cu mențiunea că în al doilea caz, fracția este simplificată cu $m_1 m_2$, astfel că polinomul de la numitor este monic.

Înlocuim în funcția de transfer valorile numerice.

$$H_1(s) = \frac{0.025s^2 + 0.01s + 0.45}{s^4 + 0.9s^3 + 38s^2 + 5s + 180}$$

$$H_2(s) = \frac{0.01s + 0.3}{s^4 + 0.9s^3 + 38s^2 + 5s + 180}$$

3. Singularități

- $H_1(s)$

  Zerouri: Rădăcinile polinomului $\frac{m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3}{m_1 m_2}$ care sunt de forma $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k_2 m_2 - 4k_3 m_2}}{2m_2}$

  Poli: Rădăcinile polinomului $\frac{1}{m_1 m_2}[m_1 m_2 s^4 + b(m_1 + m_2)s^3 + (m_1 k_2 + m_1 k_3 + m_2 k_1 + m_2 k_2)s^2 + b(k_1 + k_3)s + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3]$

- $H_2(s)$

  Zerouri: Rădăcinile (rădăcina) polinomului $\frac{k_2 + bs}{m_1 m_2}$ care este de forma $-\frac{k_2}{b}$

  Poli: Rădăcinile polinomului $\frac{1}{m_1 m_2}[m_1 m_2 s^4 + b(m_1 + m_2)s^3 + (m_1 k_2 + m_1 k_3 + m_2 k_1 + m_2 k_2)s^2 + b(k_1 + k_3)s + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3]$

Pentru $H_1(s)$ avem zerourile $\mathring{s}_{1,2} = -0.2 \pm 4.2379j$, iar pentru $H_2(s)$ avem un singur zero: $\mathring{s}_1 = -30$.

Polii celor două funcții de transfer coincid deoarece polinoamele de la numitor sunt identice. Aceștia au valorile:

$$\hat{s}_{1,2} = -0.44984 \pm 5.67899j$$
$$\hat{s}_{3,4} = -0.00015 \pm 2.35508j$$

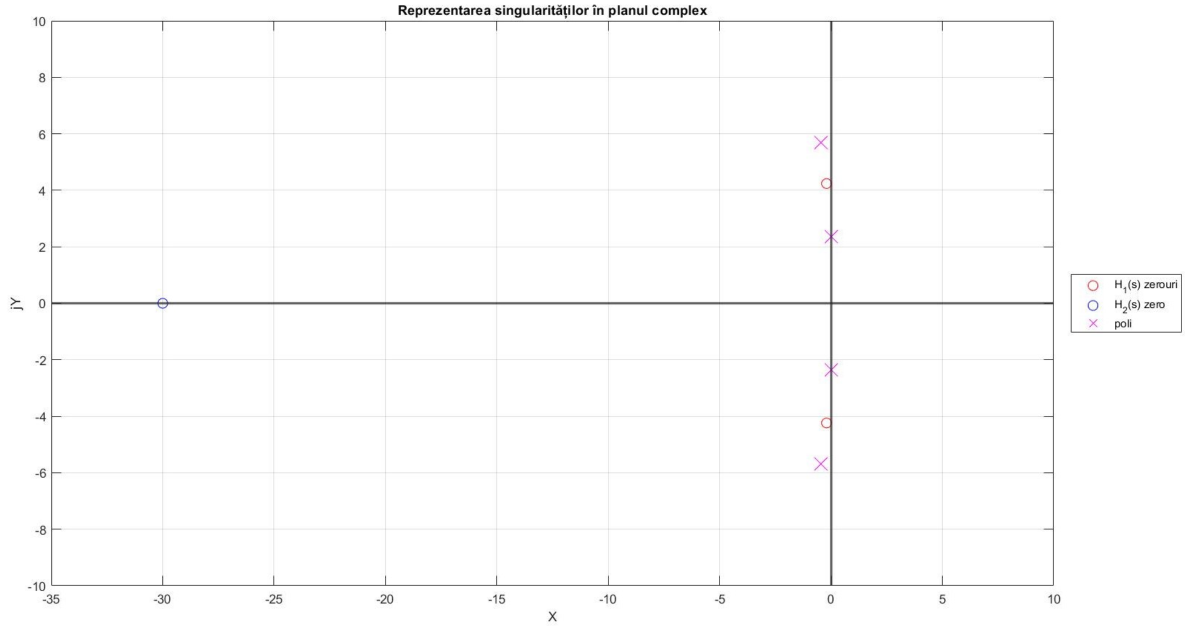

Fig. 2: Singularități

4. FCC și FCO

Pentru formele canonice considerăm doar ieșirea $H_1(s)$.

Forma canonică de control:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{FCC} & B_{FCC} \\ \hline C_{FCC} & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} -0.9 & -38 & -5 & -180 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.025 & 0.01 & 0.45 & 0 \end{array}\right]$$

Forma canonică de observare:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{FCO} & B_{FCO} \\ \hline C_{FCO} & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} -0.9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -38 & 0 & 1 & 0 & 0.025 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0.01 \\ -180 & 0 & 0 & 0 & 0.45 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

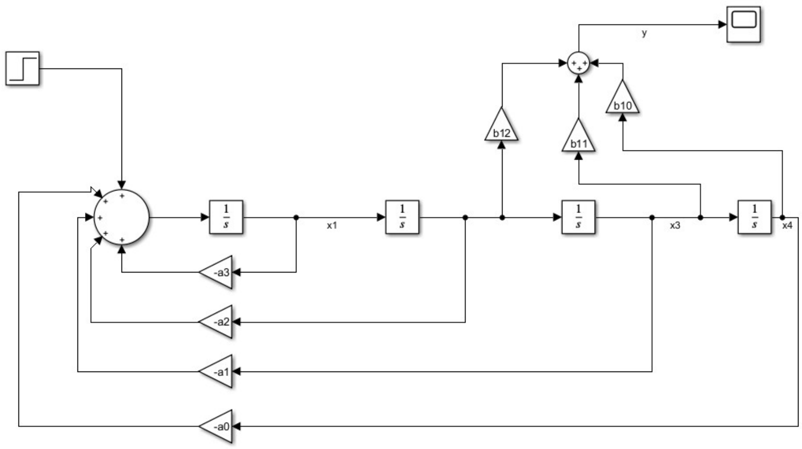

Fig. 3: Implementarea FCC în Simulink

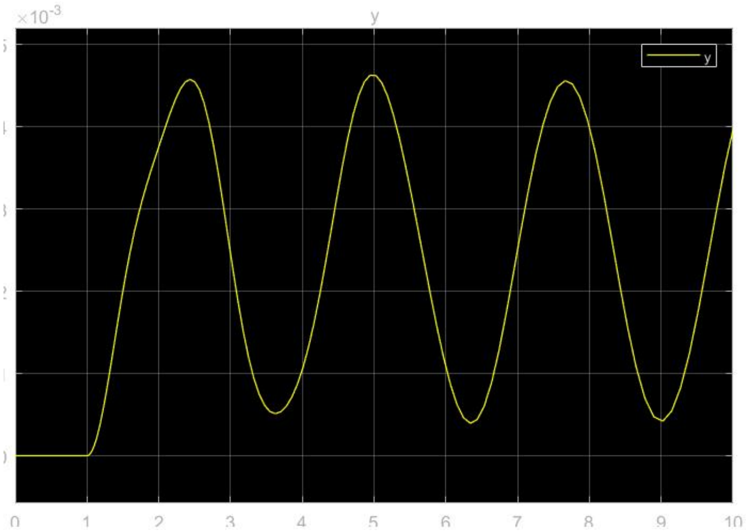

Fig. 4: Simulare FCC

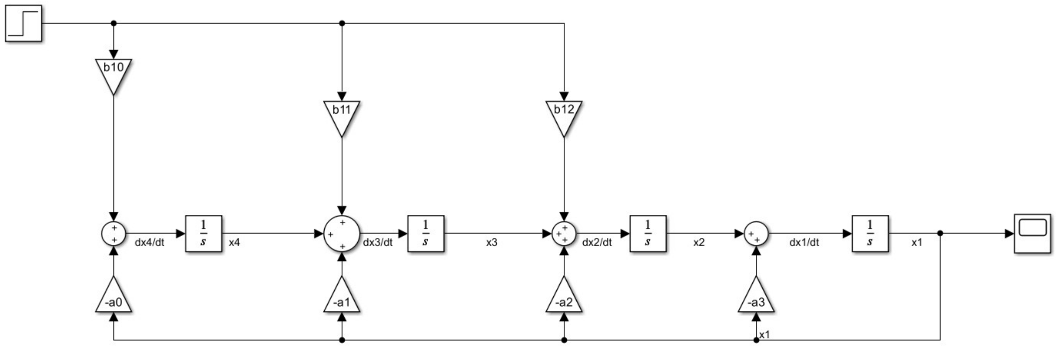

Fig. 5: Implementarea FCO în Simulink

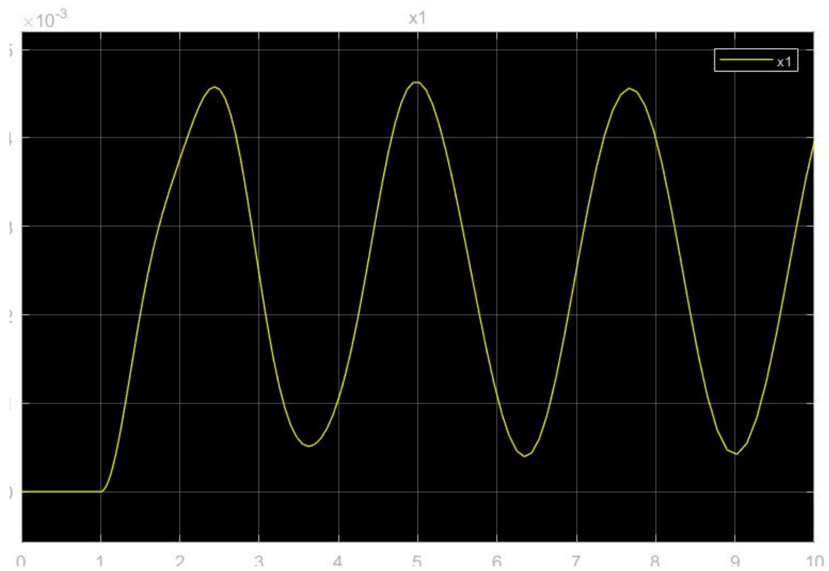

Fig. 6: Simulare FCO

5. Determinarea funcției de transfer în formă minimală

- $H_1(s)$

  Parametrii Markov sunt: $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0.025$, $\gamma_3 = -0.0125$, $\gamma_4 = -0.48875$, $\gamma_5 = 0.789875$, $\gamma_6 = 13.42411$, $\gamma_7 = -37.4032$

  Matricea Hankel este:

$$\mathcal{H}_{4,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0.025 & -0.0125 & -0.48875 \\ 0.025 & -0.0125 & -0.48875 & 0.789875 \\ -0.0125 & -0.48875 & 0.789875 & 13.42411 \\ -0.48875 & 0.789875 & 13.42411 & -37.4032 \end{bmatrix}$$

  Determinantul matricii Hankel este $\det(\mathcal{H}_{4,4}) = 0.0128$, deci rangul matricii este 4. Astfel, funcția de transfer $H_1(s)$ este în formă minimală.

- $H_2(s)$

  Parametrii Markov sunt: $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0.01$, $\gamma_4 = 0.291$, $\gamma_5 = -0.6419$, $\gamma_6 = -10.53029$, $\gamma_7 = 30.61446$

  Matricea Hankel este:

$$\mathcal{H}_{4,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.01 & 0.291 \\ 0 & 0.01 & 0.291 & -0.6419 \\ 0.01 & 0.291 & -0.6419 & -10.53029 \\ 0.291 & -0.6419 & -10.53029 & 30.61446 \end{bmatrix}$$

  Determinantul matricii Hankel este $\det(\mathcal{H}_{4,4}) = 0.0082$, deci rangul matricii este 4. Astfel, funcția de transfer $H_2(s)$ este în formă minimală.

6. Stabilitatea internă și externă

Pentru a determina stabilitatea sistemului, folosim tabelul Routh-Hurwitz pentru polinomul caracteristic $P_c(\lambda) = \lambda^4 + 0.9\lambda^3 + 38\lambda^2 + 5\lambda + 180$.

λ^4	1	38	180
λ^3	0.9	5	0
λ^2	32.44	180	0
λ	0.00685	0	0
λ^0	180	0	0

$$b_1 = -\frac{1}{0.9}\begin{vmatrix} 1 & 38 \\ 0.9 & 5 \end{vmatrix} = 32.44$$

$$b_2 = -\frac{1}{0.9}\begin{vmatrix} 1 & 180 \\ 0.9 & 0 \end{vmatrix} = 180$$

$$c_1 = -\frac{1}{32.444}\begin{vmatrix} 0.9 & 5 \\ 32.444 & 180 \end{vmatrix} = 0.00685$$

$$d_1 = -\frac{1}{0.00685}\begin{vmatrix} 32.444 & 180 \\ 0.00685 & 0 \end{vmatrix} = 180$$

Observăm că pe prima coloană din tabel nu apar schimbări de semn, deci nu există valori proprii în semiplanul drept, sistemul fiind astfel intern asimptotic stabil. Din stabilitatea internă rezultă și stabilitatea externă.

7. Stabilitatea folosind metoda II a lui Lyapunov

Considerăm matricea Q egală cu matricea unitate - pozitiv definită. Se rezolvă ecuația matriceală $A^T P + PA + Q = 0$.

Obținem

$$P = \begin{bmatrix} 4434.24 & 5326.85 & 14.2166 & 23.6527 \\ 5326.85 & 6446.54 & -21.2166 & -17.6527 \\ 14.2166 & -21.2166 & 799.02 & 961.983 \\ 23.6527 & -17.6527 & 961.983 & 1159.59 \end{bmatrix}$$

cu valorile proprii 0.5728, 18.597, 1958.79, 10861.44 - pozitive. Constatăm că matricea P este pozitiv definită, deci sistemul este intern asimptotic stabil.

Cod MATLAB

```
sys=ss(A,B,C,D);
Q=eye(4);
P=lyap(A',Q);
eig(P)
t=0:0.01:20;
[y,t,x]=lsim(sys,ones(1,length(t)),t);
v=zeros(1,length(t));
for i=1:length(t)
    v(i)=x(i,:)*P*x(i,:)';
end
plot(t,v),grid,title("Lyapunov energy"),xlabel("t"),ylabel("V")
```

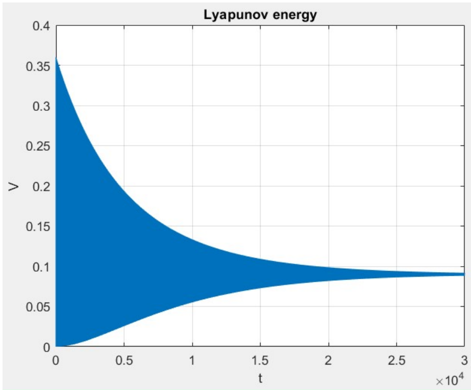

Fig. 7: Energia Lyapunov în condiții inițiale nule:

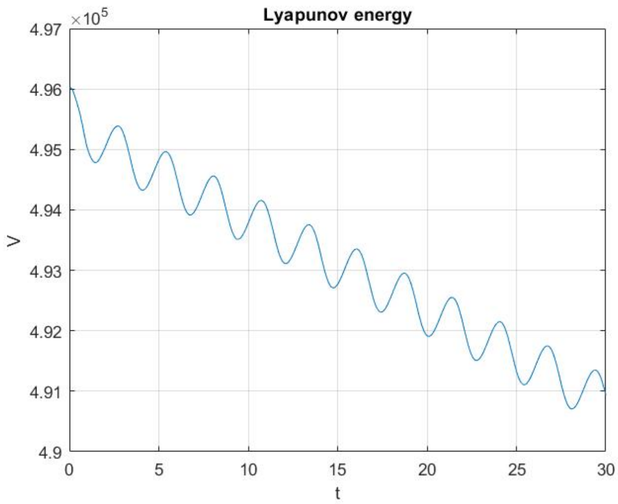

Fig. 8: Energia Lyapunov în condițiile inițiale [2,7,3,1]

8. Răspunsul la impuls, treaptă și rampă

Considerăm funcția de tranfer $H_1(s)$

Funcția pondere

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H_1(s)U(s)\right\}\Big|_{U(s)=1} = \mathcal{L}^{-1}\left\{H_1(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180}\right\}$$

$$H_1(s) = \frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180} = \frac{As+B}{s^2+0.0003052s+5.546402} + \frac{Cs+D}{s^2+0.89968s+32.4533}$$

$$0.025s^2+0.01s+0.45 = As^3+0.89968As^2+32.4533As+Bs^2+0.89968Bs+32.4533B+Cs^3+$$
$$0.0003052Cs^2+5.546402Cs+Ds^2+0.0003052Ds+5.546402D$$

$$\begin{cases} A=-C \\ 0.89968A+B+0.0003052C+D=0.025 \\ 32.4533A+0.89968B+5.546402C+0.0003052D=0.01 \\ 32.4533B+5.546402D=0.45 \end{cases}$$

$$A=-0.000015, \quad B=0.011567, \quad C=0.000015, \quad D=0.01345$$

$$H_1(s) = \frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180} = \frac{-0.000015s+0.011567}{s^2+0.0003052s+5.546402} + \frac{0.000015s+0.01345}{s^2+0.89968s+32.4533}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{H_1(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-0.000015(s+0.00015)+0.011567}{(s+0.00015)^2+5.546402}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.000015(s+0.44984)+0.01344}{(s+0.44984)^2+32.2509}\right\}$$

$$h_1(t) = -0.000015\ cos(2.35508t)\ e^{-0.00015t} + \frac{0.011567}{2.35508}\ sin(2.35508t)\ e^{-0.00015t} +$$
$$0.000015\ cos(5.6789t)\ e^{-0.44984t} + \frac{0.01344}{5.6789}\ sin(5.6789t)\ e^{-0.44984t}$$

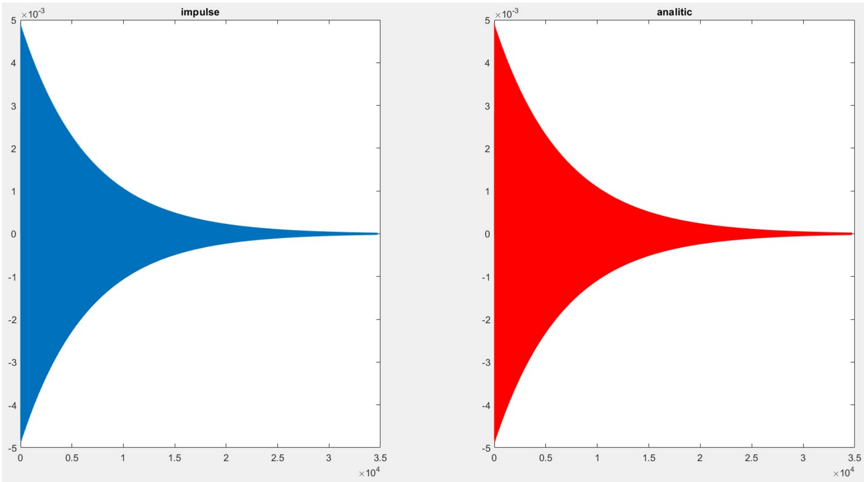

Fig. 9: Simularea raspunsului la impuls

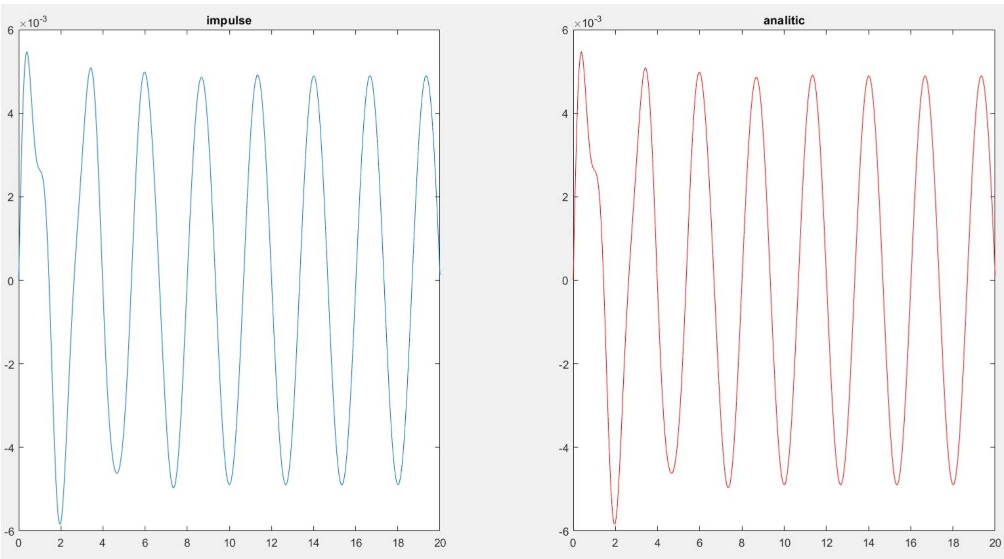

Fig. 10: Simularea raspunsului la impuls (20 secunde)

Răspunsul indicial

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H_1(s)U(s)\right\}\Big|_{U(s)=\frac{1}{s}} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}H_1(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s(s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180)}\right\}$$

$$Y_1(s) = \frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s(s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180)} = \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+0.0003052s+5.546402}+\frac{Ds+E}{s^2+0.89968s+32.4533}$$

$$0.025s^2+0.01s+0.45 = As^4+0.9As^3+38As^2+5As+180A+Bs^4+0.89968Bs^3+32.4533Bs^2+Cs^3+$$

$$0.89968Cs^2+32.4533Cs+Ds^4+0.0003052Ds^3+5.546402Ds^2+Es^3+0.0003052Es^2+5.546402Es$$

$$\begin{cases} A = 0.0025 \\ A+B+D = 0 \\ 0.9A+0.89968B+C+0.0003052D+E = 0 \\ 38A+32.4533B+0.89968C+5.546402D+0.0003052E = 0.025 \\ 5A+32.4533C+5.546402E = 0.01 \end{cases}$$

$A = 0.0025,\quad B = -0.0020859,\quad C = -0.000016,\quad D = -0.000414,\quad E = -0.000357$

$$Y_1(s) = \frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s(s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180)} = \frac{0.0025}{s}-\frac{0.0020859s+0.000016}{s^2+0.0003052s+5.546402}-\frac{0.000414s+0.000357}{s^2+0.89968s+32.4533}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y_1(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.0025}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.0020859(s+0.00015)+0.000015}{(s+0.00015)^2+5.546402}\right\} -$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.000414(s+0.44984)+0.00017}{(s+0.44984)^2+32.2509}\right\}$$

$$y_1(t) = 0.0025-0.0020859\ cos(2.35508t)\ e^{-0.00015t}-\frac{0.000015}{2.35508}\ sin(2.35508t)\ e^{-0.00015t}-$$

$$0.000414\ cos(5.6789t)\ e^{-0.44984t} - \frac{0.00017}{5.6789}\ sin(5.6789t)\ e^{-0.44984t}$$

Componenta staționară este 0.0025, iar componenta tranzitorie este expresia cu exponențiale, care va tinde la zero.

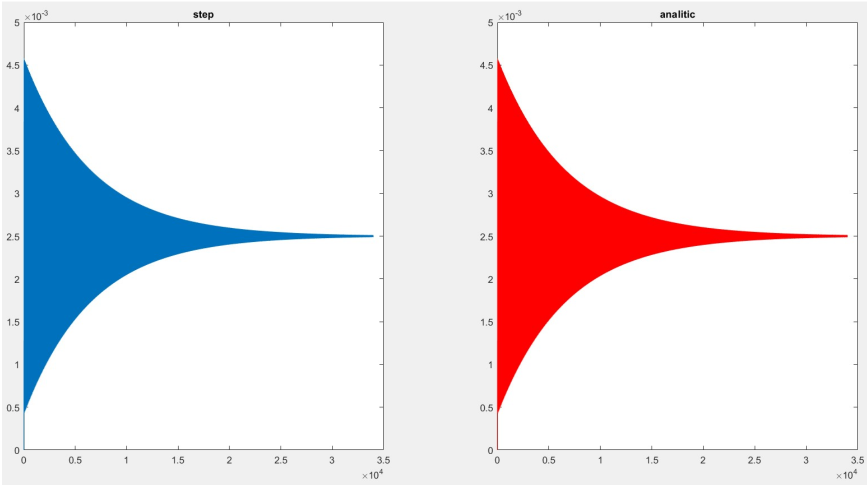

Fig. 11: Simularea raspunsului indicial

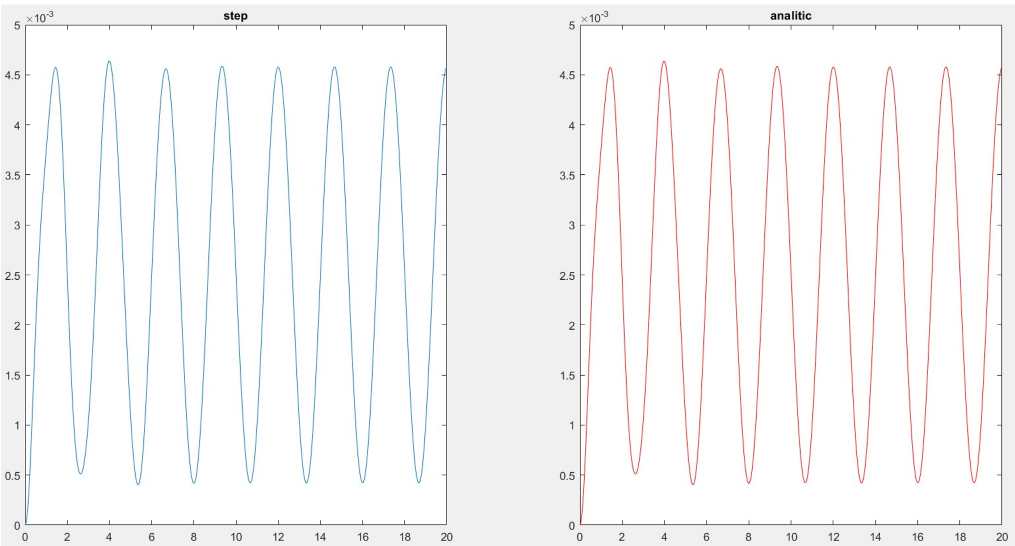

Fig. 12: Simularea raspunsului indicial (20 secunde)

Răspunsul la rampă

$$y_{1v}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{H_1(s)U(s)\right\}\Big|_{U(s)=\frac{1}{s^2}}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}H_1(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s^2(s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180)}\right\}$$

$$Y_{1v}(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+0.0003052s+5.546402}+\frac{Es+F}{s^2+0.89968s+32.4533}$$

$$0.025s^2+0.01s+0.45=As^5+0.9As^4+38As^3+5As^2+180As+Bs^4+0.9Bs^3+38Bs^2+5Bs+180B+$$
$$Cs^5+0.89968Cs^4+32.4533Cs^3+Ds^4+0.89968Ds^3+32.4533s^2D+Es^5+0.0003052Es^4+5.546402Es^3+$$
$$Fs^4+0.0003052Fs^3+5.546402Fs^2$$

$$\begin{cases}180B=0.45\\180A+5B=0.01\\5A+38B+32.4533D+5.546402F=0.025\\38A+0.9B+32.4533C+0.89968D+5.546402E+0.0003052F=0\\0.9A+B+0.89968C+D+0.0003052E+F=0\\A+C+E=0\end{cases}$$

$A=-0.0000138,\quad B=0.0025,\quad C=0.000002873,\quad D=-0.002085,\quad E=0.000011015,\quad F=-0.0004044$

$$Y_{1v}(s)=\frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s^2(s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180)}=-\frac{0.0000138}{s}+\frac{0.0025}{s^2}+$$
$$\frac{0.0000028s-0.0020857}{s^2+0.0003052s+5.546402}+\frac{0.000011s-0.000404}{s^2+0.89968s+32.4533}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y_{1v}(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{0.0000138}{s}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.0025}{s^2}\right\}+$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.0000028(s+0.00015)-0.0020857)}{(s+0.00015)^2+5.546402}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.000011(s+0.44984)-0.000408}{(s+0.44984)^2+32.2509}\right\}$$

$$y_{1v}(t)=-0.0000138+0.0025t+0.0000028\ cos(2.35508t)\ e^{-0.00015t}-\frac{0.0020857}{2.35508}\ sin(2.35508t)\ e^{-0.00015t}+$$
$$0.000011\ cos(5.6789t)\ e^{-0.44984t}-\frac{0.000408}{5.6789}\ sin(5.6789t)\ e^{-0.44984t}$$

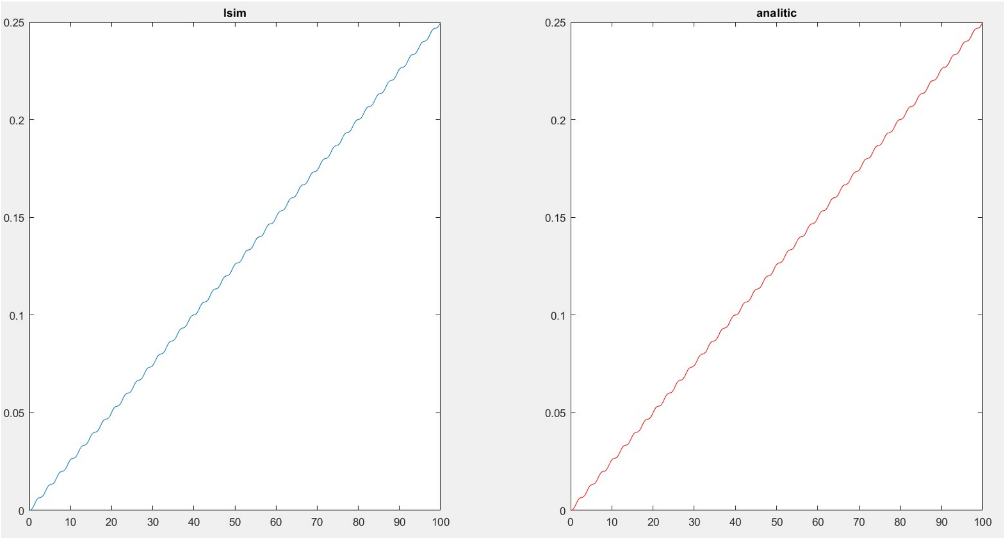

Fig. 13: Simularea raspunsului la rampa

9. Performanțele sistemului

$H_1(s) = \frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{(s^2+0.89968s+32.4533)(s^2+0.0003052s+5.546402)}$

- **Factorul de proporționalitate:** $K = H_1(0) = \frac{0.45}{1800} = 0.0025$
- **Pulsația naturală:**

  $\mathring{\omega}_n = \sqrt{0.45} = 0.67$

  $\hat{\omega}_{n_1} = \sqrt{32.4533} = 5.696$

  $\hat{\omega}_{n_2} = \sqrt{5.546402} = 2.355$

- **Factorul de amortizare:**

  $\mathring{\zeta} = \frac{0.01}{2 \cdot 0.67} = 0.0074$

  $\hat{\zeta}_1 = \frac{0.89968}{2 \cdot 5.696} = 0.079$

  $\hat{\zeta}_2 = \frac{0.000305}{2 \cdot 2.355} = 6.47e - 5$

- **Pulsația oscilațiilor:** $w_{osc} = 2.3568\ rad/s \quad (T_{osc} = 2.66\ s - grafic)$

  $\omega_{osc} \approx \hat{\omega}_{n_2}\sqrt{1-\hat{\zeta}_2^2} \approx 2.355 \cdot 1 = 2.355$ (pentru polii dominanți)

- **Timpul de răspuns:** $t_r = 24400$ secunde (grafic), $t_r \approx \frac{4}{(6.47e-5) \cdot 2.355} = 2.62e + 04$ (pentru polii dominanți)

- **Suprareglajul:** $\sigma = 83.1\%$ (grafic)
  $\sigma \approx e^{-\frac{\pi \cdot 6.47e-5}{\sqrt{1-(6.47e-5)^2}}} \approx 99.98\%$ (pentru poli dominanți)
  Observăm o diferență semnificativă din cauza perechii de zerouri complex conjugate și a perechii de poli complex conjugați.
- **Eroarea staționară la poziție:** $\epsilon_{ssp} = 1 - k = 0.0075$
- **Eroarea staționară la viteză:** $\epsilon_{ssv} = +\infty \quad (\epsilon_{ssp} \neq 0)$

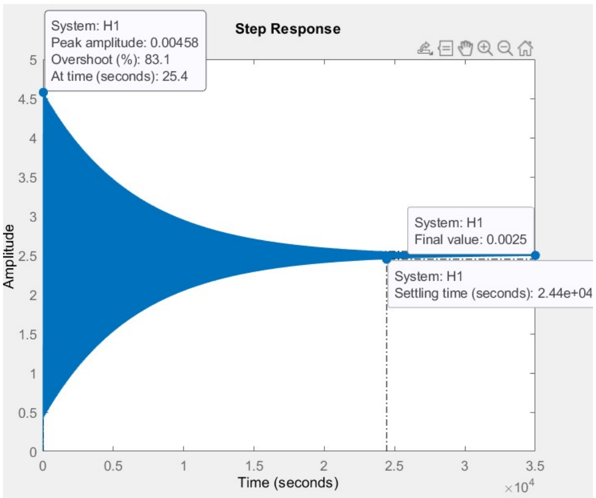

Fig. 14: Performanțe

10. Structura unui sistem de reglare cu regulator proporțional

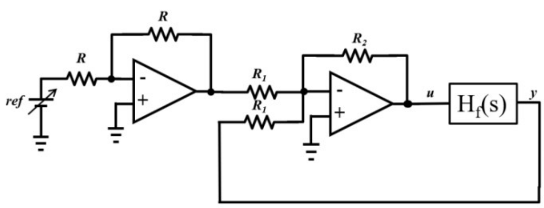

Fig. 15:

Observăm în Fig. 15 că avem două amplificatoare operaționale, primul în montaj inversor cu reacție negativă, cu funcția de transfer $-\frac{R}{R} = -1$, iar al doilea este un sumator. Realizăm schema bloc a circuitului.

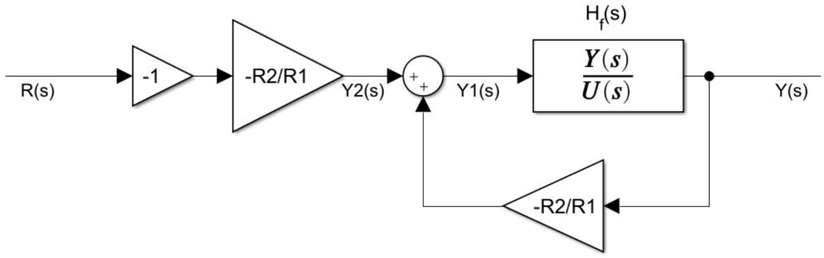

Fig. 16: Schema bloc

$$Y(s) = H_f(s) \cdot Y_1(s) = H_f(s) \cdot \left[Y_2(s) + \left(-\frac{R_2}{R_1} \right) \cdot Y(s) \right]$$

$$Y(s) = H_f(s) \cdot \left[\frac{R_2}{R_1} \cdot R(s) - \frac{R_2}{R_1} \cdot Y(s) \right]$$

$$Y(s) \cdot \left[1 + \frac{R_2}{R_1} \cdot H_f(s) \right] = H_f(s) \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot R(s)$$

$$H_o(s) = \frac{H_f(s) \cdot \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_1} \cdot H_f(s)} = \frac{\frac{\frac{R_2}{R_1}(0.025s^2+0.01s+0.45)}{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180}}{\frac{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180+\frac{R_2}{R_1}(0.025s^2+0.01s+0.45)}{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180}}$$

$$H_o(s) = \frac{\frac{R_2}{R_1} \cdot (0.025s^2 + 0.01s + 0.45)}{s^4 + 0.9s^3 + s^2(38 + 0.025\frac{R_2}{R_1}) + s(5 + 0.01\frac{R_2}{R_1}) + 180 + 0.45\frac{R_2}{R_1}}$$

Observăm că avem m=2, n=4, deci numărul asimptotelor va fi $m - n = 2$.

Centrul de greutate este $\sigma_a = \frac{-0.89968-0.0003+0.4}{2} = -0.25$.

Unghiurile de plecare ale asimptotelor sunt: $\Phi_{a_{1,2}} \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$

Unghiurile de plecare din poli

$$\phi_1 = [\angle(-0.44984 + 5.67899j - (-0.2 + 4.2379j)) + \angle(-0.44984 + 5.67899j - (-0.2 - 4.2379j))] -$$
$$[\angle(-0.44984 + 5.67899j - (-0.44984 - 5.67899j)) + \angle(-0.44984 + 5.67899j -$$
$$(-0.00015 + 2.35508j)) + \angle(-0.44984 + 5.67899j - (-0.00015 - 2.35508j)] -$$
$$(2l + 1)\pi$$

$\phi_1 = [\angle(-0.24984 + 1.44109j) + \angle(-0.24984 + 9.91689j)] - [\angle(11.135j) +$
$\angle(-0.4496 + 3.324j) + \angle(-0.4496 + 8.034j)] - (2l + 1)\pi$

$\phi_1 = (1.7425+1.5960)-(1.5708+1.7052+1.6267)-(2l+1)\pi = -1.5642+\pi$
$(l := -1) \implies \phi_1 = 1.5774$ rad (90.378°)
Din simetrie va rezulta că $\phi_2 = -90.378^\circ \Leftrightarrow 269.622^\circ$.

$\phi_3 = [\angle(-0.00015 + 2.35508j - (-0.2 + 4.2379j)) + \angle(-0.00015 + 2.35508j - (-0.2 - 4.2379j))] -$
$[\angle(-0.00015 + 2.35508j - (-0.44984 + 5.67899j)) + \angle(-0.00015 + 2.35508j -$
$((-0.44984 - 5.67899j))) + \angle(-0.00015 + 2.35508j - (-0.00015 - 2.35508j)] -$
$(2l + 1)\pi$

$\phi_3 = [\angle(0.19985 - 1.882j) + \angle(0.19985 + 6.593j)] - [\angle(0.44969 - 3.324j) +$
$\angle(0.4496 + 8.034j) + \angle(4.7j)] - (2l + 1)\pi$

$\phi_3 = (-1.465+1.5405)-(-1.4363+1.5149+1.5708)-(2l+1)\pi = -1.5739+\pi$
$(l := -1) \implies \phi_3 = 1.5677$ rad (89.82°)
Din simetrie va rezulta că $\phi_4 = -89.82^\circ \Leftrightarrow 270.18^\circ$.

Unghiuri de sosire în zerouri

$\phi_1 = -[\angle(-0.2 + 4.2379j + 0.2 + 4.2379j)] + [\angle(-0.2 + 4.2379j + 0.44984 +$
$5.67899j)+\angle(-0.2+4.2379j+0.44984-5.67899j)+\angle(-0.2+4.2379j+0.00015$
$+ 2.35508j) + \angle(-0.2 + 4.2379j + 0.00015 - 2.35508j)]$

$\phi_1 = -\frac{\pi}{2} + \angle(0.24984 + 9.9169j) + \angle(0.24984 - 1.441j) + \angle(-0.19985$
$+ 6.593j) + \angle(-0.19985 + 1.8828j) = 1.8533$ rad $\Leftrightarrow \phi_1 = 106.18^\circ$.
Din simetrie va rezulta că $\phi_2 = -106.18^\circ \Leftrightarrow 253.82^\circ$.

Stabilitate: Sistemul $H_o(s)$ este stabil, $\forall\ k > 0$

Regimuri și moduri:

Regimul este oscilant amortizat, polii $\hat{s}_{1,2,3,4} \in \mathbb{C}^- \implies$ modul $e^{-0.00015t} \sin(2.35508t)$ $\forall k > 0$, iar $\hat{s}_{1,2}$ este perechea de poli dominanți.

Senzitivitatea: Senzitivitatea sistemului este relativ mică, deoarece nu se schimbă stabilitatea, și nici regimul de oscilație.

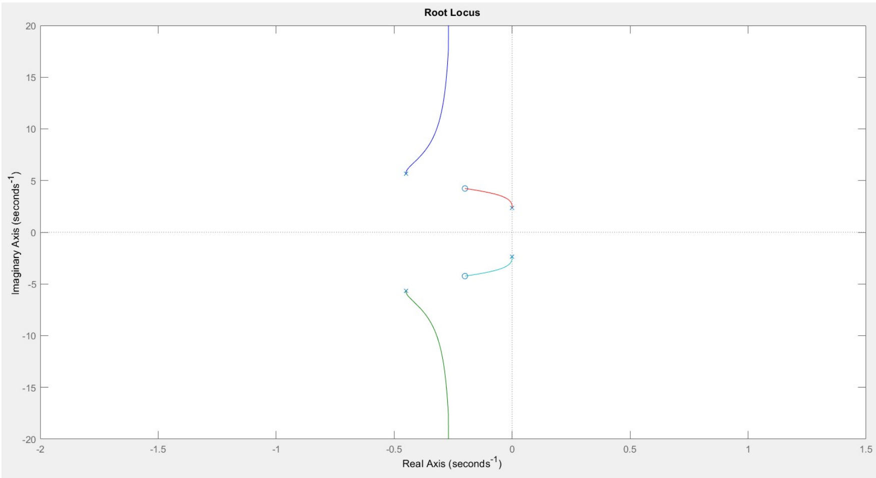

Fig. 17: Locul rădăcinilor

Suprareglaj minim:

Folosim rlocus din MATLAB pentru a determina suprareglajul minim și determinăm astfel condiția $k \to \infty$, care nu este realizabilă în practică, deoarece k reprezintă un raport de rezistențe.

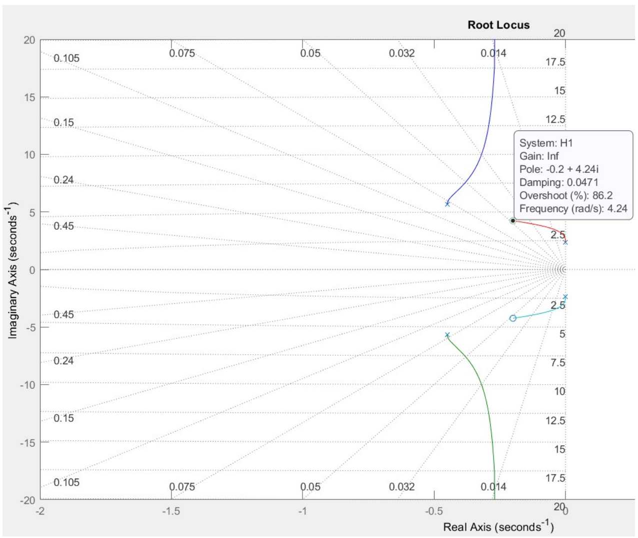

Fig. 18:

În urma unor simulări concludente, constatăm că suprareglajul este influențat semnificativ de către perechea de zerouri complex conjugate și că se poate ajunge la un suprareglaj de 50.2 % pentru k ≈ 516.

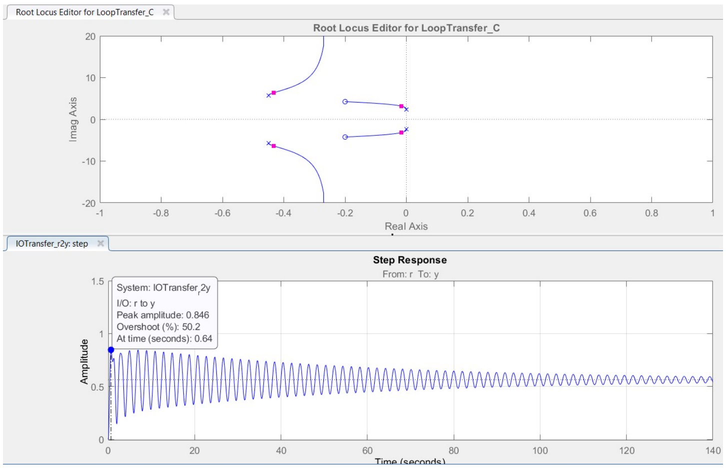

Fig. 19: Suprareglaj minim

Cel mai mic timp de răspuns posibil:

$$t_{r1} \approx \frac{4}{\Re\{\hat{s}_{1,2}\}} \qquad t_{r2} \approx \frac{4}{\Re\{\hat{s}_{3,4}\}}$$

$t_r = t_{r1} + t_{r2}$ - minim

Pentru k≈ 4023 găsim din grafic un timp de răspuns de 13.4 secunde.

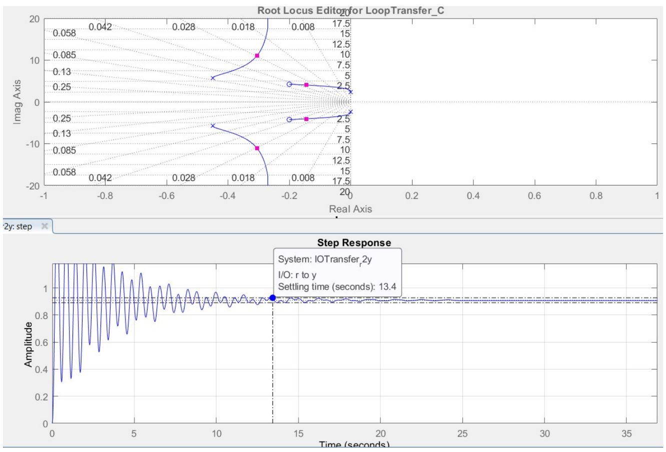

Fig. 20: Timp de răspuns minim

11. Regulator de tip proporțional integrator (PI)

Observăm că primul amplificator operațional are funcția de tranfer egală cu $-\frac{R}{R} = -1$. Vom determina funcția de tranfer pentru cel de al doilea amplificator operațional.

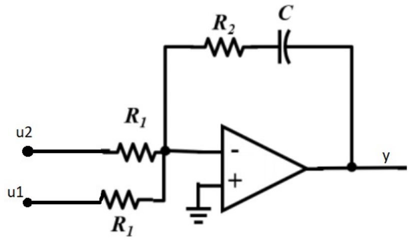

Fig. 21: Amplificator operațional 2

Din legile lui Kirchhoff rezultă ecuațiile:

$$u_{R2} + u_c + y = 0$$

$$i_c = C\frac{du_c}{dt} = i_{R2}$$

$$\frac{u_2}{R_1} + \frac{u_1}{R_1} = i_c$$

Rescriind ecuațiile, obținem:

$$y = -u_{R2} - u_c = -(i_c \cdot R_2) - \frac{1}{C}\int i_c dt$$

$$y = -\left(\frac{u_1 + u_2}{R_1} \cdot R_2\right) - \frac{1}{R_1 C}\int (u_1 + u_2) dt \quad \Big| \mathcal{L}$$

$$Y(s) = -\frac{R_2}{R_1}(U_1(s) + U_2(s)) - \frac{1}{R_1 C s}(U_1(s) + U_2(s))$$

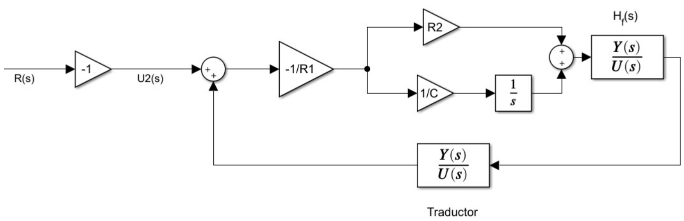

Fig. 22:

$$Y(s) = -\frac{R_2}{R_1}(U_1(s) - R(s)) - \frac{1}{R_1 C s}(U_1(s) - R(s))$$

$$Y(s) = \frac{R_2}{R_1}(R(s) - U_1(s)) + \frac{1}{R_1 C s}(R(s) - U_1(s))$$

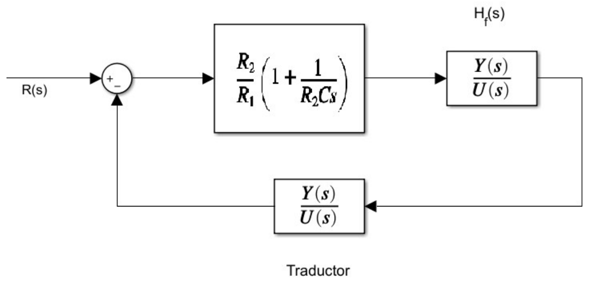

Fig. 23:

$$H_d = \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{R_2 C s}\right) \cdot \frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180}$$

$$H_{reactie} = \frac{1}{Ts+1} \text{ (traductor)}$$

$$H_o = \frac{\frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{R_2 C s}\right)\frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180}}{1 + \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{R_2 C s}\right)\frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180}\frac{1}{Ts+1}}$$

$$H_o = \frac{\frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180}}{1 + \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180}\frac{1}{Ts+1}}$$

$$H_o = \frac{\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 T_i s}\right)\frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180}}{1 + \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 T_i s}\right)\frac{0.025s^2+0.01s+0.45}{s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180}\frac{1}{Ts+1}}$$

$$H_o = \frac{(R_2 T_i s + R_2)(0.025s^2+0.01s+0.45)}{(R_1 T_i s)(s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180)}\cdot$$

$$\frac{(R_1 T_i s)(s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180)(Ts+1)}{(R_1 T_i s)(s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180)(Ts+1) + (R_2 T_i s + R_2)(0.025s^2+0.01s+0.45)}$$

$$H_o = \frac{(R_2 T_i s + R_2)(0.025s^2+0.01s+0.45)(Ts+1)}{(R_1 T_i s)(s^4+0.9s^3+38s^2+5s+180)(Ts+1) + (R_2 T_i s + R_2)(0.025s^2+0.01s+0.45)}$$

$$H_o = \frac{\cdots}{T_i[R1(Ts^6 + 0.9Ts^5 + 38Ts^4 + 5Ts^3 + 180Ts^2 + s^5 + 0.9s^4 + 38s^3 + 5s^2 + 180s) + R_2(0.025s^3 + 0.01s^2 + 0.45s)] + R_2(0.025s^2 + 0.01s + 0.45)}$$

$$H_o = \frac{\dots}{1 + T_i \frac{R_1Ts^6+s^5(0.9TR_1+R_1)+s^4(38TR_1+0.9R_1)+s^3(5TR_1+38R_1+0.025R_2)+s^2(180TR_1+5R_1+0.01R_2)+s(180R_1+0.45R_2)}{R_2(0.025s^2+0.01s+0.45)}}$$

$$H_o = \frac{\dots}{1 + \frac{1}{T_i} \frac{R_2(0.025s^2+0.01s+0.45)}{R_1Ts^6+s^5(0.9TR_1+R_1)+s^4(38TR_1+0.9R_1)+s^3(5TR_1+38R_1+0.025R_2)+s^2(180TR_1+5R_1+0.01R_2)+s(180R_1+0.45R_2)}}$$

Alegem $R_1 = 3k\Omega, R_2 = 2k\Omega$ și constanta de timp a traductorului T = 0.5 secunde

Poli:

$$\hat{s}_0 = 0$$
$$\hat{s}_1 = -0.4496 + 5.6791j$$
$$\hat{s}_2 = -0.4496 - 5.6791j$$
$$\hat{s}_3 = 0.0007 + 2.3558j$$
$$\hat{s}_4 = 0.0007 - 2.3558j$$
$$\hat{s}_5 = -2.0021$$

Zerouri:

$$\mathring{s}_0 = -0.2 + 4.2379j$$
$$\mathring{s}_0 = -0.2 - 4.2379j$$

Avem m=2,n=6, iar numărul asimptotelor este m-n=4

Centrul de greutate este $\sigma_a = -0.625$

Unghiurile de plecare ale asimptotelor sunt: $\Phi_{a_{1,2,3,4}} \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$

Unghiurile de plecare din poli

$\phi_0 = \angle(0.2 - 4.2379j) + \angle(0.2 + 4.2379j) - [\angle(0.4496 - 5.6791j) + \angle(0.4496 + 5.6791j) + \angle(-0.0007 - 2.3558j) + \angle(-0.0007 + 2.3558j) + \angle(2.0021)] = -1.5236 + 1.5236 - (-1.4918 + 1.4918 + 1.5711 - 1.5711 + 0) = 0$

$\phi_1 = \angle(-0.4496 + 5.6791j + 0.2 - 4.2379j) + \angle - 0.4496 + 5.6791j + (0.2 + 4.2379j) - [\angle(-0.4496 + 5.6791j) + \angle(2 * 5.6791j) + \angle(-0.4496 + 5.6791j - 0.0007 - 2.3558j) + \angle(-0.4496 + 5.6791j - 0.0007 + 2.3558j) + \angle(-0.4496 + 5.6791j + 2.0021)] = -4.5(282°)$
ϕ_2 se poate deduce prin simetrie
Analog pentru $\phi_{3,4}$

$\phi_5 = \angle(-2.0021+0.2-4.2379j)+\angle(-2.0021+0.2+4.2379j)-[\angle(-2.0021+0.4496-5.6791j)+\angle(-2.0021+0.4496+5.6791j)+\angle(-2.0021-0.0007-2.3558j)+\angle(-2.0021-0.0007+2.3558j)+\angle(-2.0021)] = -\angle(-2.0021) = \pi$

Unghiurile de sosire în zerouri

$\phi_0 = -[\angle(-0.2+4.2379j+0.2+4.2379j)] + [\angle(-0.2+4.2379j)+\angle(-0.2+4.2379j+0.4496-5.6791j)+\angle(-0.2+4.2379j+0.4496+5.6791j)+\angle(-0.2+4.2379j-0.0007+2.3558j)+\angle(-0.2+4.2379j-0.0007-2.3558j)+\angle(-0.2+4.2379j+2.0021)] = 4.64(266°)$

ϕ_1 se deduce din simetrie

Pentru determinarea punctului de desprindere se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{T_i}H_{des}(s) = 0 \\ \frac{dH_{des}(s)}{ds} = 0 \end{cases}$$

Din grafic găsim punctul de desprindere pentru $\frac{1}{T_i} \approx 351 \Leftrightarrow T_i = 0.0028$

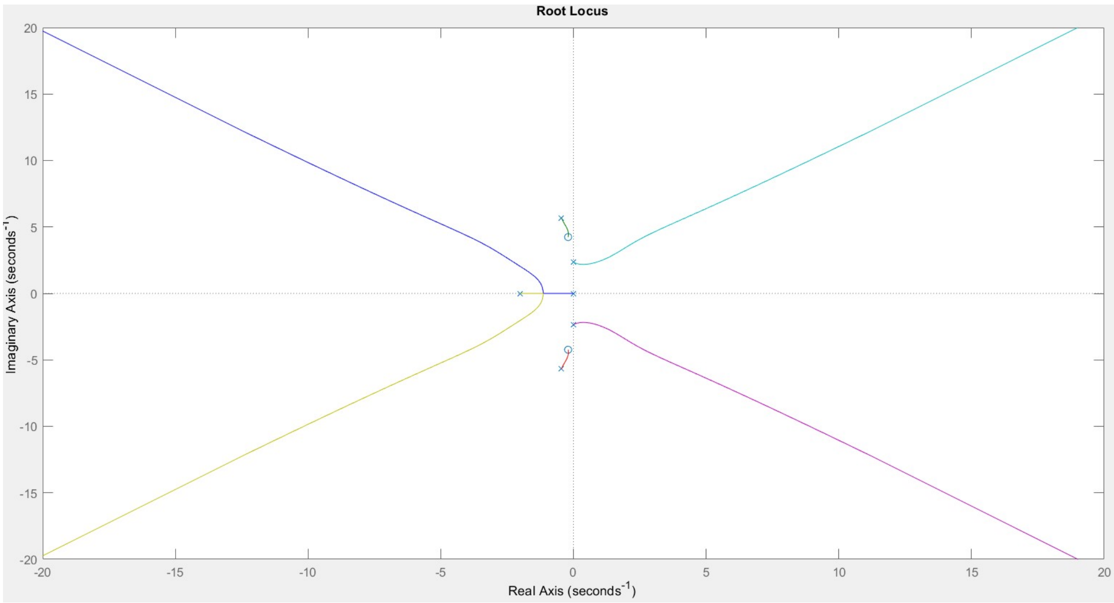

Fig. 24: Locul rădăcinilor

Sistemul în buclă închisă este intern asimptotic instabil, $\forall\, T_i \in (0, \infty)$.

Regimul este oscilant neamortizat, iar modul este $e^{0.0007t}\sin 2.3558t$.