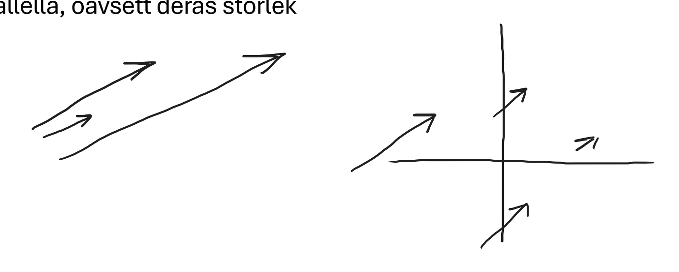
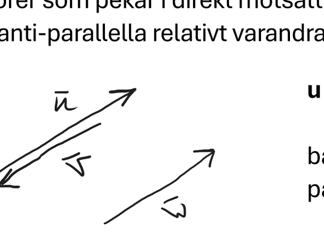
Parallella vektorer

Alla vektorer som pekar i samma riktning sägs vara parallella, oavsett deras storlek



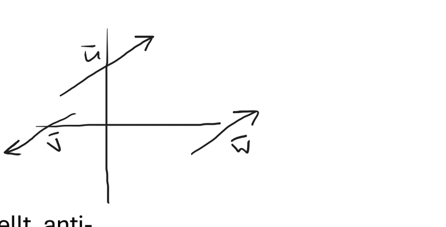
Antiparallella vektorer

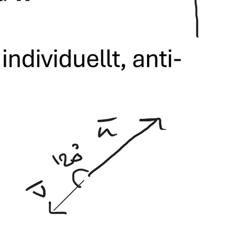
Vektorer som pekar i direkt motsatt riktning, anses vara anti-parallella relativt varandra



u är parallell med **w**

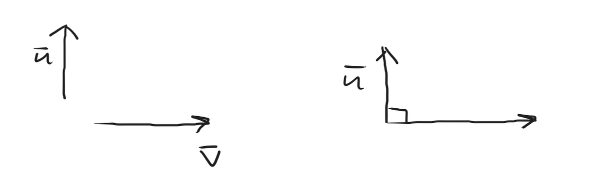
både **u** och **w** är, individuellt, anti-parallella med **v**



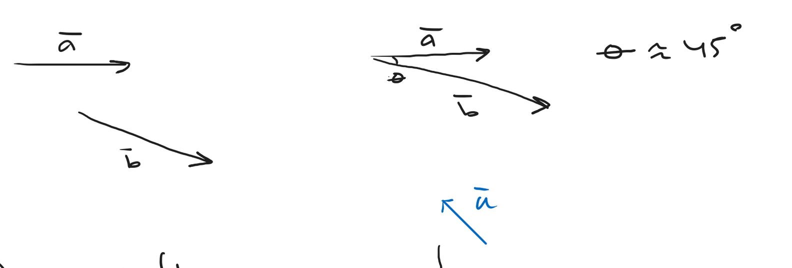


Ortogonala vektorer

Vektorer för vilka den relativa vinkeln är 90 grader, anses vara ortogonala



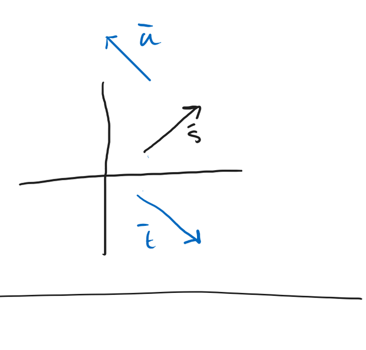
ex på vinkel identifiering



$\theta \approx 45°$

snabb uppgift

Rita en ortogal vektor till vektorn **s**

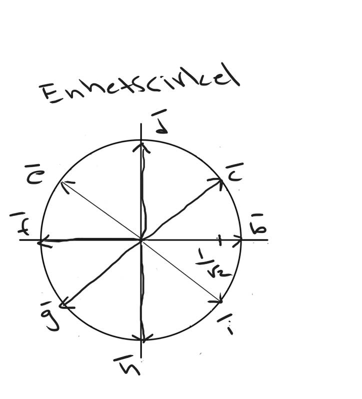


Skalärprodukt

Skalärprodukt kan man använda som ett mått för "likeheten" mellan vektorer

Bland vektorer av samma storlek, anses de vektorer som har mindre skillnad i riktning att vara mer "lika"

Enhetscirkel



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$$

$$\bar{b} = (1,0),\ \bar{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$d = (0,1),\ \bar{e} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f = (-1,0),\ \bar{g} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\bar{h} = (0,-1),\ \bar{i} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Jag påstår att samtliga av dessa vektorer har längden 1.

$$|\bar{e}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{(-1)^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{1^2}{\sqrt{2}^2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

Skalärprodukt - komponetvis

$\mathbb{R}^2$

$$\bar{a} = (a_1, a_2),\ \bar{b} = (b_1, b_2)$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

exempel

$$\bar{a} = (1,2),\ \bar{b} = (3,4)$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$$

$\mathbb{R}^3$

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

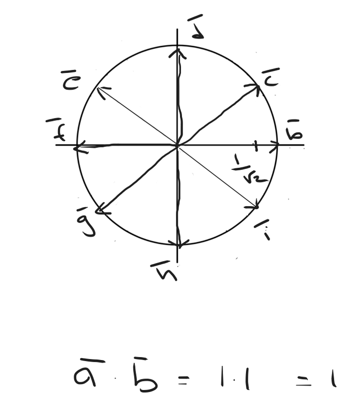
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$\mathbb{R}^n$

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

Som sagt kan skalärprodukt, för vektorer med samma storlek, anses utgöra ett mått av "likhet". Specifict med respekt till deras relativa vinklar



$$\bar{b} = (1,0),\ \bar{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$d = (0,1),\ \bar{e} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f = (-1,0),\ \bar{g} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\bar{h} = (0,-1),\ \bar{i} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Låt oss nu jämföra vektor **a** = (1,0) med ovan vektorer

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$$

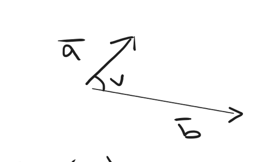
$$\bar{a} \cdot \bar{d} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \longleftarrow$$

Detta resultat är mycket viktigt - alla ortoganala vektorer har skalärprodukten 0

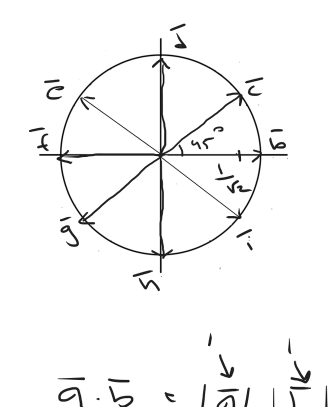
$$\bar{a} \cdot \bar{e} = 1 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,7$$

$$\bar{a} \cdot \bar{f} = 1 \cdot (-1) = -1$$

Skalärprodukt - geometrisk



$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos(v)$$



$$\bar{b} = (1,0),\ \bar{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$d = (0,1),\ \bar{e} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f = (-1,0),\ \bar{g} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\bar{h} = (0,-1),\ \bar{i} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\bar{a} = (1,0)$$

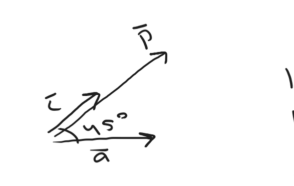
Angle (degrees)	0	30	45	60	90	120	135	150	180
cosine	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \underset{1}{|\bar{a}|}\ \underset{1}{|\bar{b}|} \cos(v) = \cos(0) = 1$$

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = \underset{1}{|\bar{a}|}\ \underset{1}{|\bar{c}|} \cos(v) = \cos(45) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{a} \cdot d = \underset{1}{|\bar{a}|}\ \underset{1}{|\bar{d}|} \cos(v) = \cos(90) = 0$$

$$\bar{a} = \bar{f} = |\bar{a}||\bar{f}| \cos(v) = \cos(180) = -1$$



$$|\bar{p}| = 2$$
$$|\bar{c}| = 1$$
$$|\bar{a}| = 1$$

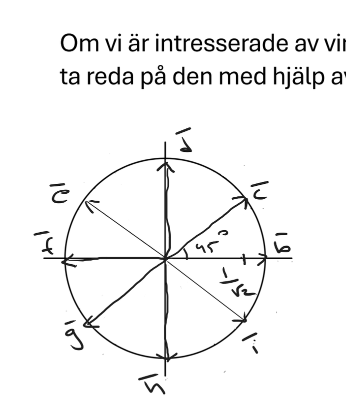
$$|\bar{a}| \cdot |\bar{c}| = 1 \cdot 1 \cdot \cos(45) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$$

$$|\bar{a}| \cdot |\bar{p}| = 1 \cdot 2 \cos(45) = \frac{2}{\sqrt{2}} \approx 1,4$$

Ska du använda skalärprodukt som ett mått på riktningslikhet är det således viktigt att vekorerna du jämför med har samma längd. Ovan har inte **c** eller **p** samma längd med varandra, och orsakar därför missvisande svar

---

Om vi är intresserade av vinkeln mellan två vektorer kan vi ta reda på den med hjälp av skalärprodukt på följande vis



Anta att vi vill veta vinkeln mellan **a** = (1,0) och **c**

Hur gör vi det, om vi antar att vi inte kan läsa av det direkt från grafen?

Vi har två sätt att beräkna (samma) skalärprodukt på

1. komponetvis

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = a_1 c_1 + a_2 \cdot c_2$$

2. geometrisk

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = |\bar{a}||\bar{c}| \cos v$$

Båda desa är lika med varandra

$$\Rightarrow a_1 c_1 + a_2 \cdot c_2 = |\bar{a}||\bar{c}| \cos(v)$$

$$\Rightarrow \cos(v) = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2}{|\bar{a}|\ |\bar{c}|}$$

$$\Rightarrow v = \arccos\left(\frac{a_1 c_1 + a_2 c_2}{|\bar{a}|\ |c|}\right)$$

$a = (1,0)$
$c = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$v = \arccos\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 \cdot 1}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45° \checkmark$$

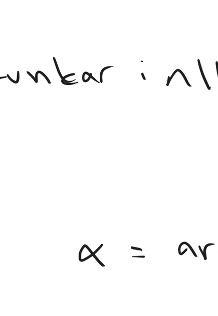
$\bar{a} = (1,0)$
$\bar{e} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$v = \arccos\left(\frac{\frac{-1}{\sqrt{2}}}{1 \cdot 1}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 135° \checkmark$$

Formel (funkar i alla dimensioner)

anta att
$\bar{u} \in \mathbb{R}^n$
$\bar{v} \in \mathbb{R}^n$
α vinkeln mellan dem

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}\right)$$



$\bar{v} = (3,-2)$
$\bar{w} = (4,5)$

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$$