Intro till matriser

Matriser är väldigt viktiga objekt inom algebra och har tillämpningsområden inom inom i princip all modern beräkning - framförallt då inom ekonomi, ingenjörskap och datavetenskap (AI)

Vad är en matris?

En matris är ett rektangulärt objekt om *m* rader och *n* stycken kolumner där varje element utgörs av en siffra

ex

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}}_{n=2} \Big\} m=2 \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Big\} m, \quad n \text{ kolumner}$$

$a_{11} = 2 \quad a_{21} = 5$

$a_{12} = 3 \quad a_{22} = 7$

Matrisoperationer

Vi säger att två matriser har samma dimension om de har lika många kolumner och lika många rader.

För matriser med samma dimension gäller följande

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\dim(A) = 2 \times 3 \qquad \dim(B) = 2 \times 3$

$\dim(A) = \dim(B)$

kräver att bägge matriser har samma dimension

Additon av matriser av samma storlek definieras som elementvis addition

$$A+B = \begin{pmatrix} (3+1) & (1+0) & (2+1) \\ (5-1) & (4+0) & (3-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Subtraktion definieras även det som elementvis subtraktion

$$A-B = \begin{pmatrix} (3-1) & (1-0) & (2-1) \\ (5-(-1)) & (4-0) & (3-(-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Funkar oavsett dimension

Skalär multiplikation definieras även det som elementvis multiplikation

$k = 3$

$$kA = 3A = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot3 & 3\cdot1 & 3\cdot2 \\ 3\cdot5 & 3\cdot4 & 3\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 15 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Några speciella matriser av dimension 2x2 och 3x3

Zero matrix

$$O_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Identity matrix

$$I_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Square matrix

Alla matriser som har lika många rader som kolumner kallas för square matrices

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \; & \; \end{pmatrix}}_{n} \Big\} m$$

om $n = m$

$\rightarrow$ square matrix

---

matrismultiplikation

$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \dim(A) = 2 \times 3$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \dim(B) = 3 \times 3$

$$\underset{\substack{2\times3 \\ m\times n}}{AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\substack{3\times3 \\ s\times t}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (3\cdot2+3\cdot1+1\cdot4) & (3\cdot0+3\cdot0+1\cdot3) & (3\cdot1+3\cdot2+1\cdot2) \\ (1\cdot2+2\cdot1+1\cdot4) & (1\cdot0+2\cdot0+1\cdot3) & (1\cdot1+2\cdot2+1\cdot2) \end{pmatrix} = \underset{\substack{2\times3 \\ m\times t}}{\begin{pmatrix} 13 & 3 & 11 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}}$$

$\underline{\underline{n = s}}$

Storlek av resulterande matris

om $\dim(A) = m \times n$

$\dim(B) = s \times t$

Första kravet på att **AB** ens ska vara möjligt är att antalet kolumner (n) i matris **A** är lika många som antalet rader (s) i matris **B.**

Annars kan vi inte elementvis multiplicera!

$$\underset{(m\times n)(s\times t)}{AB} = \underset{(m\times t)}{C}$$

$n = s$

bekräfta detta när ni gör uppgifter!

Matrismultiplikation med vektor

En vektor kan ses som en rad- eller kolumnmatris!

$$\bar{a} = (2, 1) \longrightarrow \underset{2\times1}{\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \qquad \left(\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\underset{3\times2}{B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} \qquad \underset{(3\times2)(2\times1)}{B\bar{a}} = \underset{3\times2}{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} \underset{2\times1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4\cdot2+3\cdot1 \\ 2\cdot2+1\cdot1 \\ 5\cdot2+3\cdot1 \end{pmatrix} = \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}}$$