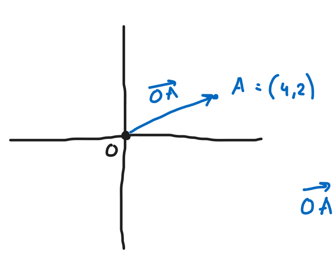
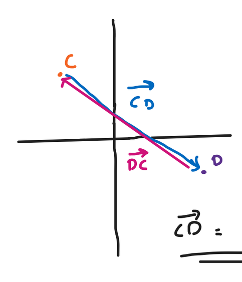
Ortsvektorer

Ibland vill man vara extra tydlig och, förutom riktning samt magnitude, även ange position för en vektor

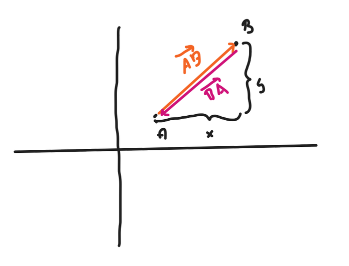
$O = (0,0)$



$\vec{OA} = (4,2)$



$\underline{\vec{CD} = -\vec{DC}}$



$A = (1,3)$

$B = (4,5)$

$\vec{AB} = B - A = (4-1, 5-3) = (3,2)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ l.e

Viktig insikt →

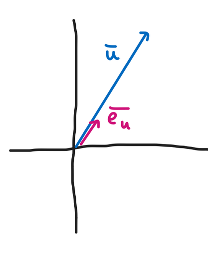
Genom att ta koordinaterna för en punkt B minus en annan punkt A får ni en vektor som pekar från A till B!

$\vec{BA} = A - B = (1-4, 3-5) = (-3,-2)$

$|\vec{BA}| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ l.e

Normalisering

Att normalisera en vektor innebär att man skapar en ny vektor som har samma riktning som din ursprungliga, men som istället har längden 1



$\bar{u} = (3,4)$

$|\bar{u}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

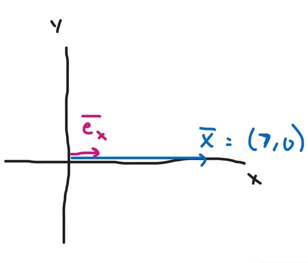
$\bar{e}_u = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{(3,4)}{5} = \frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$|\bar{e}_u| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$

Formeln för att normalisera en vektor **v** ges således av

$$\boxed{\bar{e}_v = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}}$$

Denna formel resulterar i en enhetsvektor, som pekar i samma riktning som din vektor **v** men har magnituden 1



$\bar{e}_x = \frac{1}{7}\bar{x} = \frac{1}{7}(7,0) = (1,0)$

Några särskilt viktiga enhetsvektorer (i planet och i rummet) att känna till är följande

$\mathbb{R}^2$

$\bar{e}_x = (1,0)$

$\bar{e}_y = (0,1)$

$\mathbb{R}^3$

$\bar{e}_x = (1,0,0)$

$\bar{e}_y = (0,1,0)$

$\bar{e}_z = (0,0,1)$

Uppgift

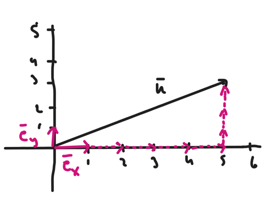
$$\boxed{\bar{e}_v = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}}$$

Beräkna $\bar{e}_v$ om $\bar{v} = (10,0,6)$

$|\bar{v}| = \sqrt{10^2+0^2+6^2} = \sqrt{136} = \sqrt{4 \cdot 34} = \sqrt{4}\sqrt{34} = 2\sqrt{34}$

$\bar{e}_v = \frac{1}{\sqrt{136}}(10,0,6) = \underline{\left(\frac{10}{\sqrt{136}}, 0, \frac{6}{\sqrt{136}}\right)}$

Linjära kombinationer



$\bar{u} = (5,3)$

$\bar{e}_x = (1,0)$

$\bar{e}_y = (0,1)$

$\bar{u} = a\bar{e}_x + b\bar{e}_y$?

Dvs, går det att för några tal a & b, uttrycka **u** med hjälp av våra enhetsvektorer?

$\bar{u} = (5,3) \stackrel{?}{=} a\bar{e}_x + b\bar{e}_y =$

$= a(1,0) + b(0,1) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$

$\to (5,3) = (a,b) \longrightarrow a = 5, \; b = 3$

Dvs, för att likhet ska råda så måste respektive komponent vara lika

$\bar{u} = 5\bar{e}_x + 3\bar{e}_y$

Ett till exempel

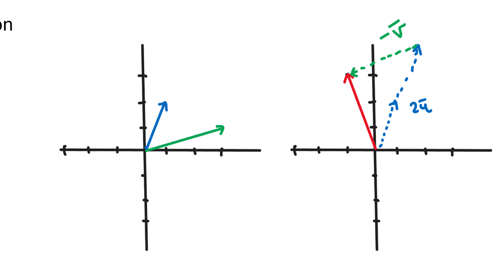
$\bar{u} = (1,2)$

$\bar{v} = (3,1)$

$\bar{w} = (-1,3)$

Är **w** en linjär kombination av **u** och **v**?

$\bar{w} \stackrel{?}{=} a\bar{u} + b\bar{v}$



$\bar{w} \stackrel{?}{=} a\bar{u} + b\bar{v}$

$(-1,3) = a(1,2) + b(3,1)$

$(-1,3) = (a,2a) + (3b,b) = (a+3b, 2a+b)$

$(-1,3) = (a+3b, 2a+b)$

$\to$
$a + 3b = -1$
$2a + b = 3$

Nice, ett ekvationssystem! Denna kan vi försöka lösa.

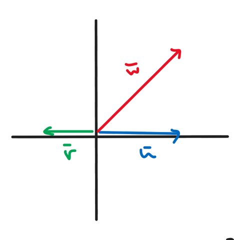
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{array}\right]_{-\frac{1}{5}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$\to a = 2, \; b = -1 \to \bar{w} = 2\bar{u} - \bar{v}$

$(-1,3) = 2(1,2) - (3,1) = (2,4) - (3,1) = (-1,3)$

Svar: Ja. **w** är en lin. kombination av **u** och **v**

$\bar{w} = 2\bar{u} - \bar{v}$



$\bar{u} = (3,0)$

$\bar{v} = (-2,0)$

$\bar{w} = (3,4)$

$\bar{w} \stackrel{?}{=} a\bar{u} + b\bar{v}$

$\bar{w} \stackrel{?}{=} a\bar{u} + b\bar{v}$

$(3,4) \stackrel{?}{=} (3a,0) + (-2b,0) = (3a-2b, 0)$

$\to$
$3a - 2b = 3$
$0 = 4$

Contradiction!

Svar: Nej. **w** kan inte skrivas som en lin. komb. av **u** och **v**.

OM man kan skriva en vektor **w** som en linjär kombination av vektorer **u** och **v**, dvs

w = a**u** + b**v**

då säger vi att

1. **w** är en linjär kombination av **u** och **v**
2. Vektorerna **w, u** och **v** är *linjärt beroende*

Med *linjärt beroende* menar man att det går att uttrycka en av vektorerna med hjälp av de andra.

Rummet $\mathbb{R}^3$

Samma principer som i $\mathbb{R}^2$ ovan

$\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{v}$

Är **s** en linj. komb. av **t, u** och **v**?

$\bar{s} \stackrel{?}{=} a\bar{t} + b\bar{u} + c\bar{v}$

exempel

$\bar{e}_x = (1,0,0)$

$\bar{e}_y = (0,1,0)$

$\bar{e}_z = (0,0,1)$

$\bar{s} = (22,50,7)$

$\bar{s} \stackrel{?}{=} a\bar{e}_x + b\bar{e}_y + c\bar{e}_z$

$(22,50,7) = (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c) = (a,b,c)$

$\to a = 22, \; b = 50, \; c = 7$

Svar: Ja. **s** går att uttrycka som en linj komb av de övriga vektorerna.

Samtliga vektorer är således också linjärt beroende.

$\bar{a} = (2,-1)$

$\bar{b} = (-3,4)$

$\bar{c} = (7,-6)$

Är vektorerna **a**, **b** och **c** linjärt beroende?

$\bar{c} \stackrel{?}{=} x\bar{a} + y\bar{b}$

$(7,-6) = (2x,-x) + (-3y,4y) = (2x-3y, -x+4y)$

$2x - 3y = 7$

$-x + 4y = -6$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 7 \\ -1 & 4 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & -5 \\ -1 & 4 & -6 \end{array}\right]_{\frac{1}{5}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{array}\right]_{\cdot -1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$\to x = 2, \; y = -1$

Bekräfta!

$x = 2$

$y = -1$

$\to \bar{c} = 2\bar{a} - \bar{b}$

$(7,-6) = (4,-2) - (-3,4) = (7,-6)$

V.S.B

Villket skulle bevisas

Svar: Ja! Vektorerna **a**, **b** och **c** är linjärt beroende!

Bekräftat och klart.