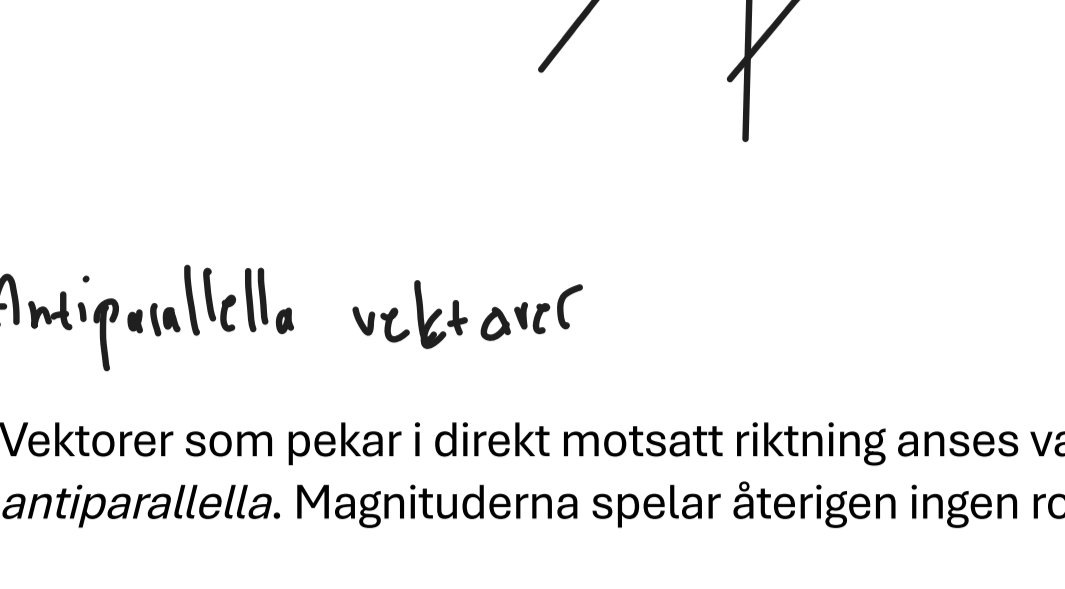


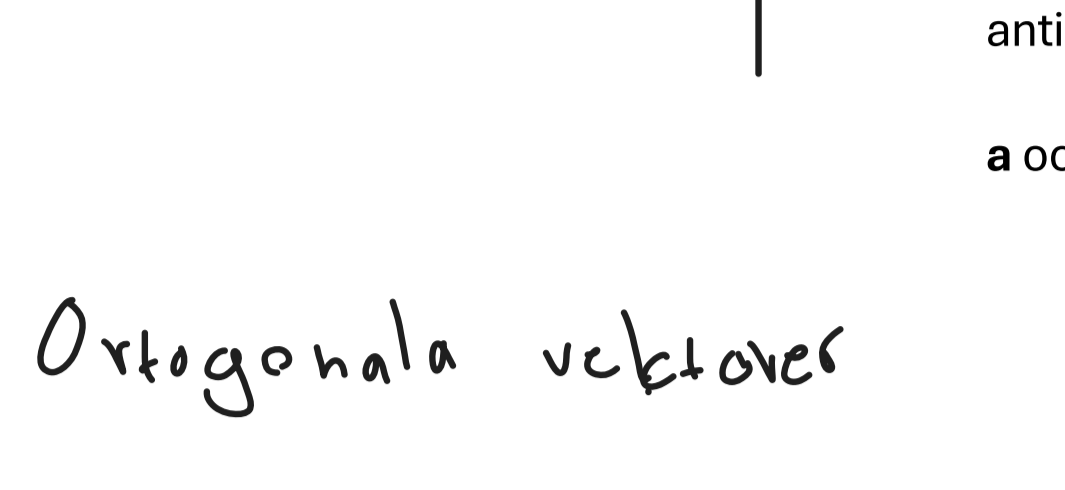
Parallella vektorer

Alla vektorer, oavsett riktning, som pekar i gemensam riktning kallas för *parallella*.



Antiparallella vektorer

Vektorer som pekar i direkt motsatt riktning anses vara *antiparallella*. Magnituderna spelar återigen ingen roll.

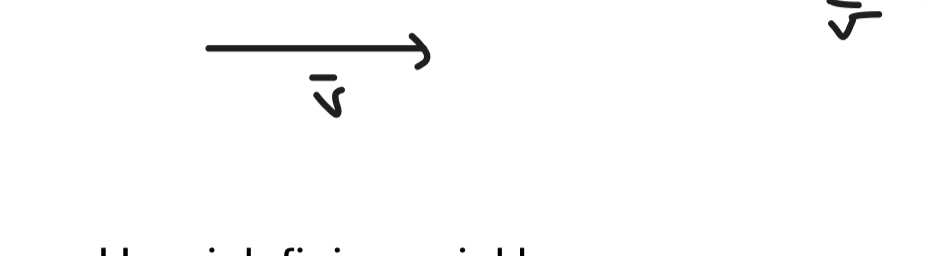


Både **a** och **b** är var för sig antiparallella med **c**.

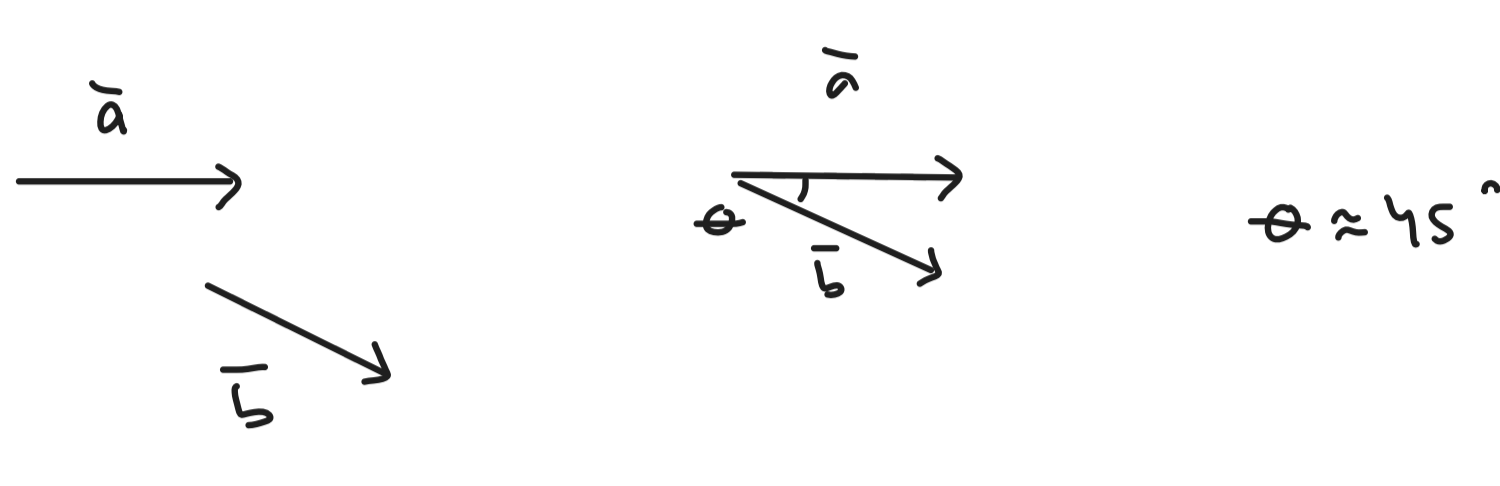
a och **b** är parallella.

Orthogonala vektorer

Vektorer för vilken den relativa vinkeln är 90 grader, anses vara *ortogonal*.

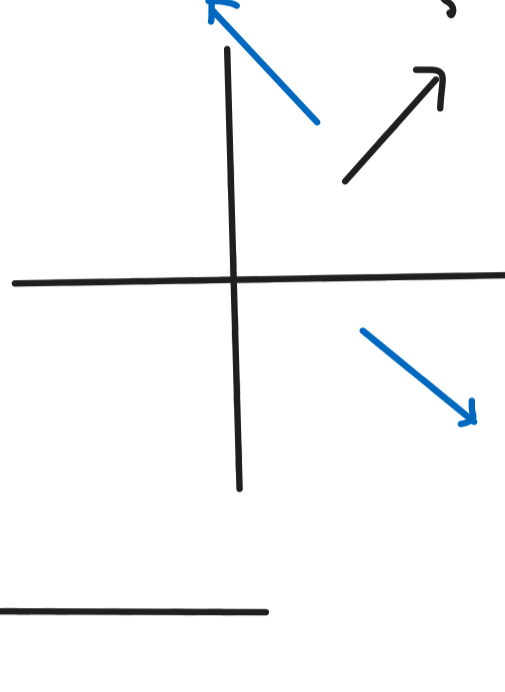


Hur vi definierar vinklar mellan vektorer



Snabb uppgift

Rita en ortogonal vektor till **s**

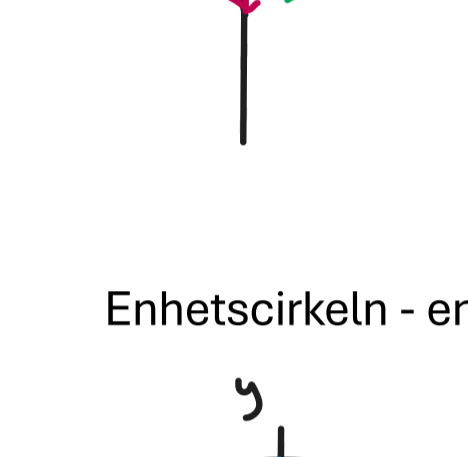


Skalarprodukt

Vi har tidigare lärt oss vektor addition och skalär*multiplication* - nu ska istället titta på skalär*produkt*

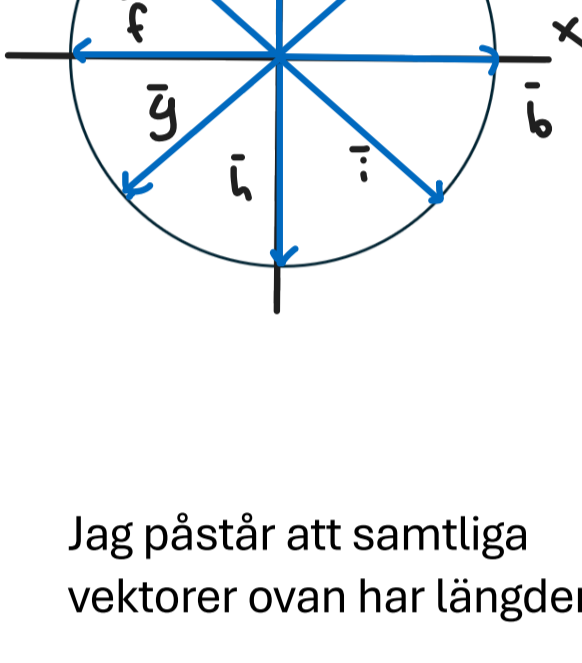
I kort så kommer vi nu lära oss ett sätt att multiplicera vektorer med varandra.

Skalarprodukten kan man använda som ett mått för "likheten" mellan vektorer.



Bland vektorer av samma storlek, anses de vektorer som har minst skillnad i riktning att vara "mer lika" - dvs de vektorer vars vinkelskillnad är minst.

Enhetscirkeln - en cirkel med radie 1



$$\begin{aligned}\bar{b} &= (1, 0), \bar{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \bar{d} &= (0, 1), \bar{e} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \bar{f} &= (-1, 0), \bar{g} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \bar{h} &= (0, -1), \bar{i} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Jag påstår att samtliga vektorer ovan har längden 1.

$$|\bar{g}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{VSB}$$

Skalarprodukt - komponentvis

$$\mathbb{R}^2 \quad \bar{a} = (a_1, a_2), \quad \bar{b} = (b_1, b_2)$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Exempel

$$\bar{a} = (1, 2), \quad \bar{b} = (3, 4)$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$$

$$\mathbb{R}^3$$

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

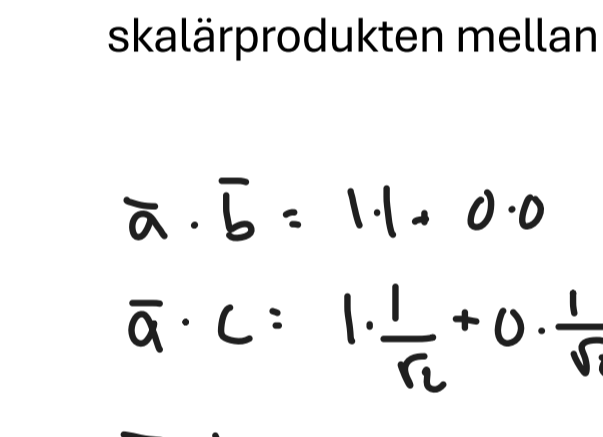
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\mathbb{R}^n$$

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Som sagt, bland vektorer av samma magnitud kan skalärprodukten vara ett mått på "likhet" mellan vektorer, specifikt mellan deras vinklar



$$\begin{aligned}\bar{b} &= (1, 0), \bar{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \bar{d} &= (0, 1), \bar{e} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \bar{f} &= (-1, 0), \bar{g} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \bar{h} &= (0, -1), \bar{i} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Låt oss nu definiera en vektor $\bar{a} = (1, 0)$ och beräkna skalärprodukten mellan den och alla vektorer ovan

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$$

$$\bar{a} \cdot \bar{d} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Detta resultat är mycket viktigt, alla ortogonal vektorer har skalärprodukten 0

$$\bar{a} \cdot \bar{e} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,7$$

$$\bar{a} \cdot \bar{f} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -1$$

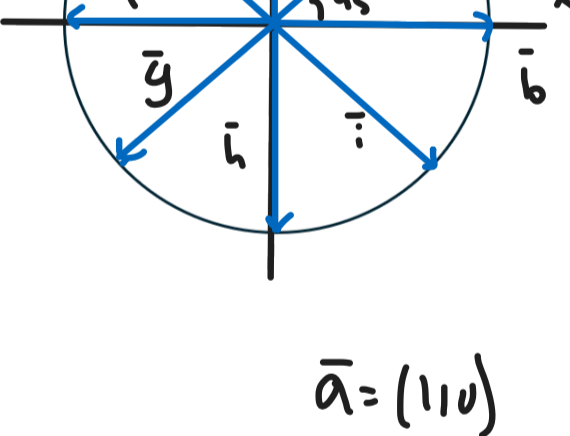
$$\bar{a} \cdot \bar{g} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,7$$

$$\bar{a} \cdot \bar{h} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0$$

$$\bar{a} \cdot \bar{i} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$$

Skalarprodukt - geometrisk

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\nu)$$



$$\begin{aligned}\bar{b} &= (1, 0), \bar{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \bar{d} &= (0, 1), \bar{e} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \bar{f} &= (-1, 0), \bar{g} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \bar{h} &= (0, -1), \bar{i} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

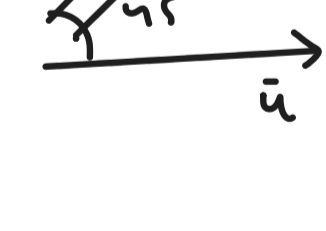
$$\bar{a} = (1, 0)$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\nu) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(0) = 1$$

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = |\bar{a}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos(\nu) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(45) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{d} = |\bar{a}| \cdot |\bar{d}| \cdot \cos(\nu) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(90) = 0$$

$$\bar{a} \cdot \bar{e} = |\bar{a}| \cdot |\bar{e}| \cdot \cos(\nu) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(135) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\begin{aligned}|\bar{b}| &= 1 \\ |\bar{c}| &= 2 \\ |\bar{d}| &= 2\end{aligned}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\nu) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(0) = 1$$

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = |\bar{a}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos(\nu) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(45) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{d} = |\bar{a}| \cdot |\bar{d}| \cdot \cos(\nu) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(90) = 2 \cdot 0 = 0$$

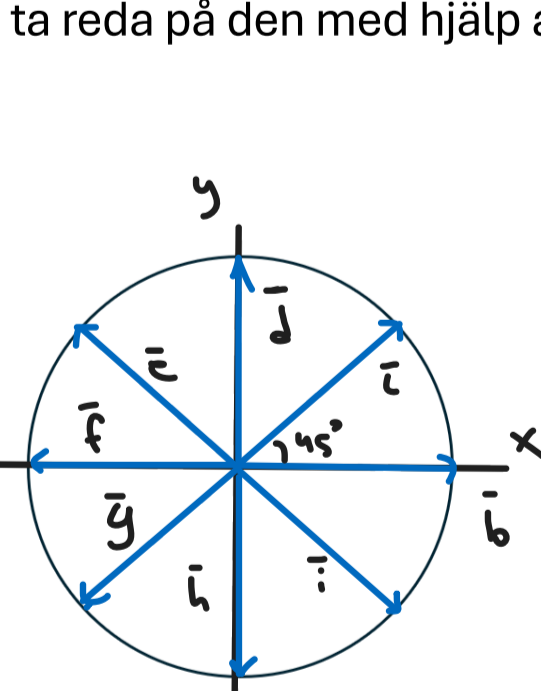
$$\bar{a} \cdot \bar{e} = |\bar{a}| \cdot |\bar{e}| \cdot \cos(\nu) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(135) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{f} = |\bar{a}| \cdot |\bar{f}| \cdot \cos(\nu) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(180) = -1$$

$$\bar{a} \cdot \bar{g} = |\bar{a}| \cdot |\bar{g}| \cdot \cos(\nu) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(225) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{h} = |\bar{a}| \cdot |\bar{h}| \cdot \cos(\nu) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(270) = 0$$

$$\bar{a} \cdot \bar{i} = |\bar{a}| \cdot |\bar{i}| \cdot \cos(\nu) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(315) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$



Anta att vi vill veta vinkeln mellan $\bar{a} = (1, 0)$ och \bar{c}

Hur gör vi det, om vi antar att ex. inte enbart bara kan läsa av den från grafen?

Vi har två sätt att beräkna skalärprodukten på, och bägge är ekvivalenta dvs producerar exakt samma resultat.

1. Komponentvis

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = a_1 c_1 + a_2 c_2$$

2. Geometrisk

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = |\bar{a}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos(\nu)$$

Båda dessa är likamed varandra

$$\Rightarrow a_1 c_1 + a_2 c_2 = |\bar{a}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos(\nu)$$

$$\Rightarrow \cos(\nu) = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2}{|\bar{a}| \cdot |\bar{c}|}$$

$$\Rightarrow \nu = \arccos\left(\frac{a_1 c_1 + a_2 c_2}{|\bar{a}| \cdot |\bar{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{c}|}\right)$$

$$\bar{a} = (1, 0), \bar{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow \nu = \arccos\left(\frac{1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 \cdot 1}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$$

Formel (funkar i alla dimensioner)

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}\right)$$

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha \text{ vinkeln mellan } \bar{u} \text{ och } \bar{v}$$