Poissonfördelningen

Motivering

Anta att $X \sim B(10000, 0.0002)$, $n = 10000$
$p = 0.0002$

$E(X) = np = 10000 \cdot 0.0002 = 2$

$P(X=x) = \binom{10000}{x} (0.0002)^x (0.9998)^{10000-x}$

$P(X=0), P(X=1), \dots, P(X=10000)$

Problem:

$P(X=9990) = \binom{10000}{9990} (0.0002)^{9990} (0.9998)^{10} = \frac{10000!}{9990! \, 10!} (0.0002)^{9990} \cdot (0.9998)^{10}$

1. Fakulteter kan bli ohanterbara
2. $(0.0002)^{9990}$ kan inte Python hantera, det sätts som 0

Under vissa förutsättningar kan vi approximera binomial förd. med Poissonfördelningen

Specifikt om $n > 10$, $p < 0.1$, $0.01 < E(X) < 50$

så kan vi approximera binomialförd med Poisson.

ex. forts.

$X \sim B(10000, 0.0002)$, $n = 10000$, $p = 0.0002$

$\mu = E(X) = np = 2$ $\qquad 0.01 < E(X) < 50$

$X \sim P(\mu)$

$P(X=x) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{x!}$, e är naturliga konstanten
$e \approx 2.71$

obs, vi vet att $\mu = 2$

$P(X=50) = \binom{10000}{50} (0.0002)^{50} (0.9998)^{9950} \approx \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^{50}}{50!}$

Uppgift

Exempel 3-6

En viss typ av motor till en maskin går sönder var 1 000:e gång den startas. Per månad startas motorn 200 gånger.

a) • Hur många gånger går motorn i medeltal sönder per år?
b) • Hur sannolikt är det att den går sönder exakt 3 gånger ett visst år?
c) • Hur sannolikt är det att den går sönder högst 1 gång ett visst år?

$n = 200 \cdot 12 = 2400$

$p = \frac{1}{1000} = 0,001$

Låt X vara antal ggr motorn pajar per år

$X \sim B(2400, 0.001)$, $E(X) = np = \underline{\underline{2,4}}$ svar a)

$\mu = np = 2.4$

$n > 10$ ✓

$p < 0,1$ ✓

$0.01 < E(X) < 50$ ✓

$X \sim P(2.4)$

$P(X=x) = \frac{e^{-2.4} \cdot (2.4)^x}{x!}$

b) $P(X=3) = \frac{e^{-2.4} \cdot (2.4)^3}{3!} \approx 0.21$

c) $P(X \leq 1) = F(1) = 0.31$

$F(1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{e^{-2.4} \cdot (2.4)^0}{0!} + \frac{e^{-2.4} \cdot (2.4)^1}{1!} \approx 0.31$

d) $P(X > 1) = 1 - F(1) \approx 1 - 0.31 = 0.69$