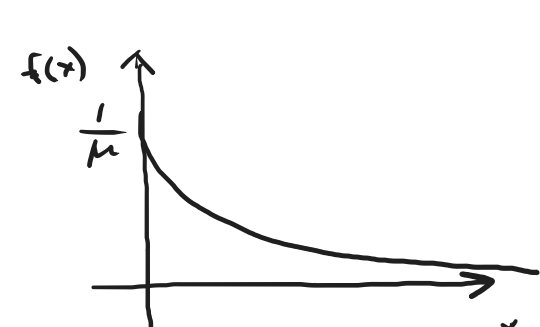


Exponentialfördelningen

Probability density function

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$$

$$f(0) = \frac{1}{\mu} \cdot e^0 = \frac{1}{\mu}$$



$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \mu^2$$

$$S(X) = \sqrt{V(X)} = \mu$$

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{\mu}} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{e^0} + e^0 = 0 + 1 = 1$$

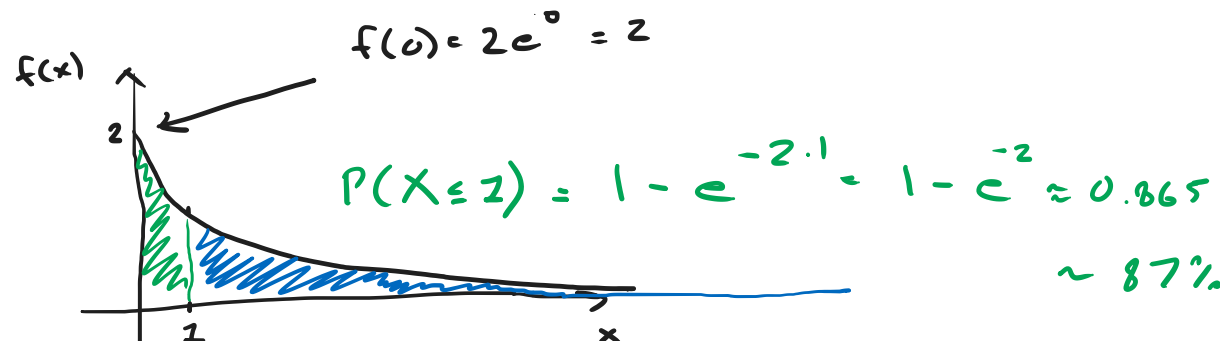
VS

Annan att vi har en butik där det kommer in i medeltal 2 kunder per timme

$$\mu = \frac{1}{(\text{medeltal per tidsenhet})} = \frac{1}{2}$$

Vi kan nu beräkna sannolikheten att nästa kund dyker upp inom x antal timmar

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{\frac{1}{2}}} = 2e^{-2x}$$



$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$$

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-2x}$$

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - (1 - e^{-2x}) = e^{-2x}$$

$$P(X > 1) = e^{-2} \approx 0.135 \approx 13.5\%$$

Vi är nu i Alis klassrum. Vi vet att smittiden mellan varje fråga är 4 min

Låt X vara tiden det tar för nästa fråga att dyka upp

$$\mu = 4$$

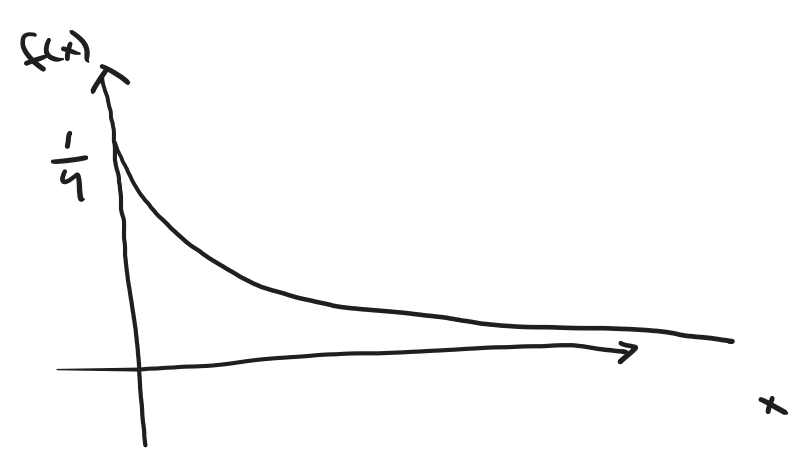
$$f(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}}$$

$$X \sim \text{Exp}(\mu) = \text{Exp}(4)$$

$$E(X) = 4$$

$$V(X) = 16$$

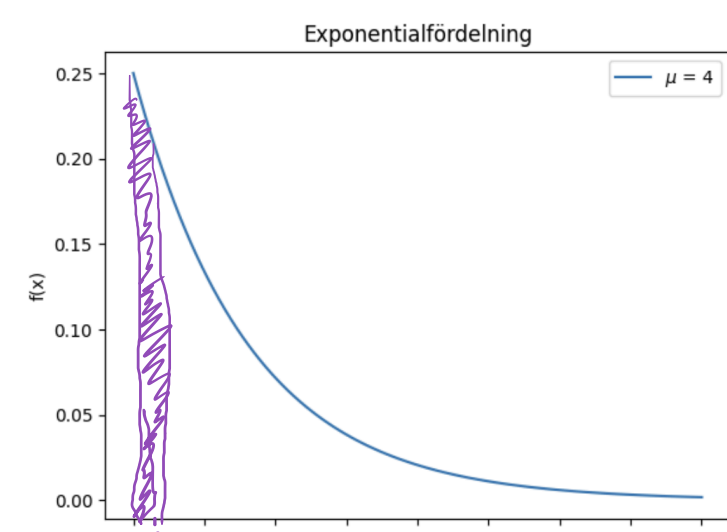
$$S(X) = 4$$



beräkna: $P(X \leq 1)$, $P(X \leq 3)$, $P(2 \leq X \leq 5)$?

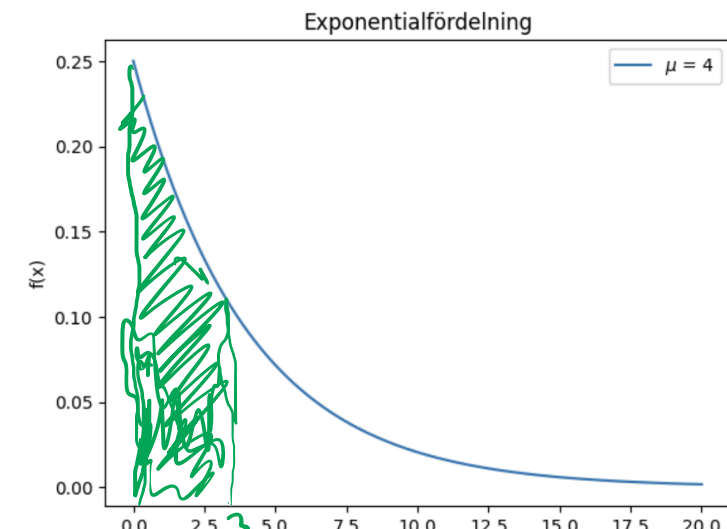
$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}} \rightarrow P(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{4}}$$

$$P(X \leq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.22$$



0.5276
0.53

$$P(X \leq 3) = 1 - e^{-\frac{3}{4}} \approx 0.53$$

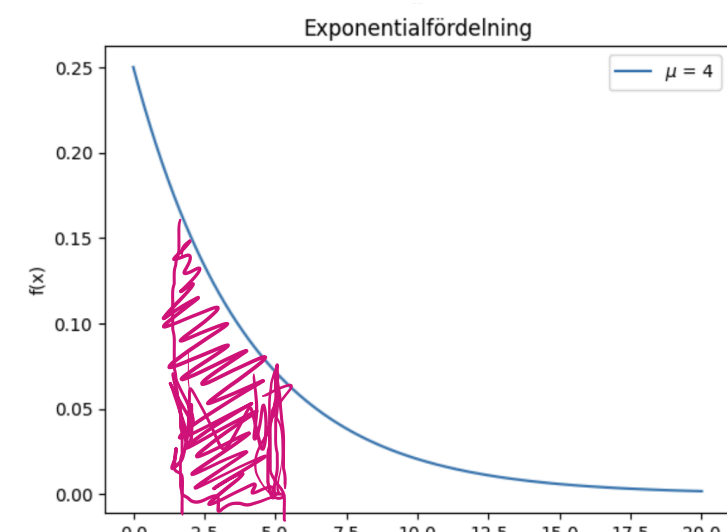


$$P(2 \leq X \leq 5) =$$

$$= P(X \leq 5) - P(X \leq 2)$$

$$= 1 - e^{-\frac{5}{4}} - (1 - e^{-\frac{2}{4}}) \approx$$

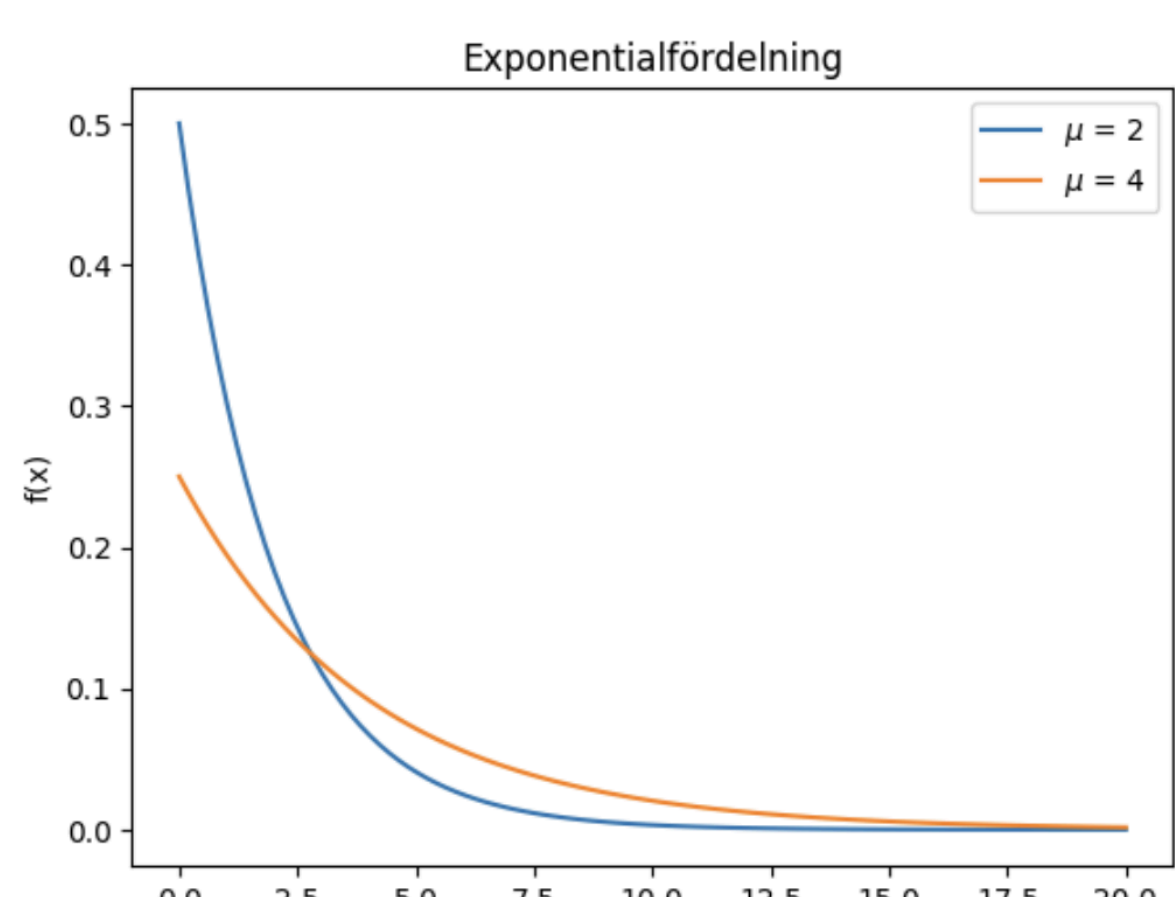
$$\approx 0.71 - 0.39 = 0.32$$



Låt oss nu jämföra utseendet på exponentialfördelningen för olika värden av μ

$$\mu_1 = 2$$

$$\mu_2 = 4$$



Om X är exponentialfördelad med parametern μ

$$\rightarrow X \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$$

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \mu^2$$

$$S(X) = \sqrt{V(X)} = \mu$$

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$$

Exempel 4-2

En viss maskin påstås ha en så hög driftsäkerhet att den endast måste repareras i genomsnitt 0,5 gånger per år. Anta att detta är sant.

- Hur sannolikt är det att tiden mellan två på varandra följande reparationer är längre än 1,5 år?
- Hur sannolikt är det att denna tid är kortare än 5 år?

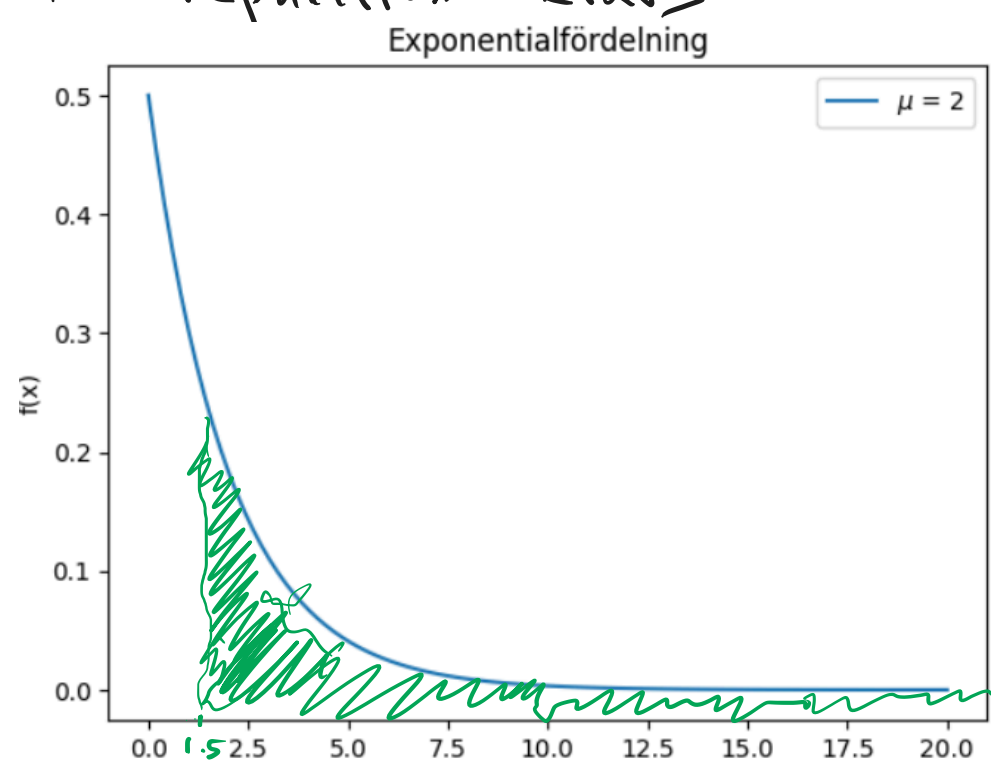
$$\mu = \frac{1}{0.5} = 2 \rightarrow \text{tidsnitt på 2 år mellan varje reparation}$$

Låt X vara antal år tills nästa reparation krävs

$$X \sim \text{Exp}(2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$



$$a) P(X > 1.5) = 1 - P(X \leq 1.5)$$

$$= 1 - (1 - e^{-\frac{1.5}{2}}) \approx 0.47$$

$$b) P(X < 5) = [P(X \leq 5)] =$$

$$= 1 - e^{-\frac{5}{2}} \approx 0.92$$

