Geometrisk fördelning

Anta att vi har ett Bernoulli experiment

$P(\text{success}) = p$, $P(\text{failure}) = 1-p$

VI vill nu upprepat utföra detta bernoulli experiment, och frågor nu oss följande:

Hur sannolikt är det att få success efter ett visst antal försök?

Låt X ange antal försök/experiment som krävs för att få success en gång

X kan anta värden 1, 2, 3, 4, 5...

$P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$, ... , $P(X=n)$

ex

myntkast med sannolikhet för success p

$P(X=1) = \overset{p}{S} \rightarrow p$ $\quad P(X=1) = p(1-p)^{1-1} = p(1-p)^0 = p$

$P(X=2) = \overset{1-p}{F}\ \overset{p}{S} \rightarrow (1-p)p$

$P(X=3) = \overset{1-p}{F}\ \overset{1-p}{F}\ \overset{p}{S} \rightarrow (1-p)^2 p$

⋮

$P(X=n) = \underbrace{\overset{1-p}{F}\ \overset{1-p}{F}\ \overset{1-p}{F} \dots \overset{1-p}{F}\ \overset{p}{S}}_{n \text{ st}} \rightarrow (1-p)^{n-1} p$

$$\boxed{\begin{array}{l} X \sim G(p) \\ P(X=x) = p(1-p)^{x-1} \end{array}}$$

$E(X) = \frac{1}{p}$

$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

$S(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$

Anta nu att vårt Bernoulli experiment utgörs av ett rättvist myntkast.

Hur sannolikt är det att vi får vår första success (Head) efter ett visst antal försök?

$p = 1/2$, $P(X=x) = p(1-p)^{x-1}$

$P(X=1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{2}$

$P(X=2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

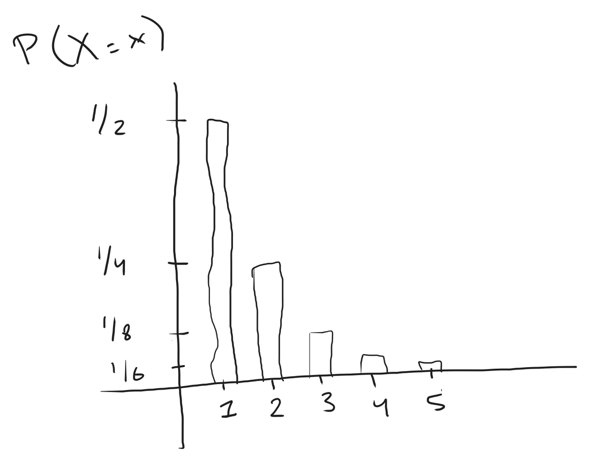
$P(X=3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$P(X=4) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

⋮

$P(X=100) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{99} = \frac{1}{2^{100}}$

$\sum_{i=1}^{\infty} P(X=i) = 1$



$p = 1/2$

$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$F(3) = P(X \leq 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

Exempel 3-8

Kajsa har just tagit sin civilekonomexamen, och tänker börja söka jobb. Hon söker jobb ett och ett, och hon har sannolikheten 0,1 att få jobb vid varje enskild ansökan.

a) • Hur många jobb kan hon förväntas behöva söka innan hon får ett?

b) • Hur sannolikt är det att hon får jobb på fjärde försöket?

c) • Hur många jobb måste hon vara beredd på att söka för att vara minst 50 % säker på att få jobb?

$P(X=x) = p(1-p)^{x-1}$

$X \sim G(0,1)$

a) $E(X) = \frac{1}{p} = [p = 0,1] = \frac{1}{0,1} = \underline{\underline{10}}$

b)

$P(X=1) = p(1-p)^0 = p = 0,1$

$P(X=2) = p(1-p)^1 = 0.1(0.9) = 0.09$

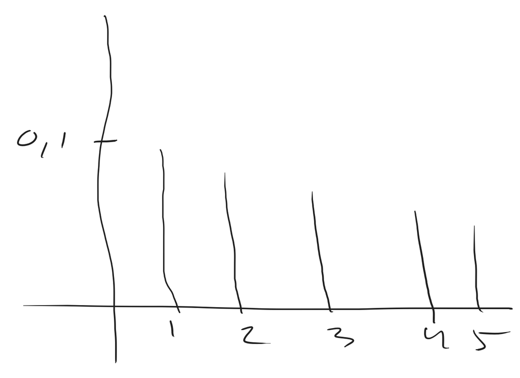
$P(X=3) = p(1-p)^2 = 0,1(0,9)^2 = 0,081$

$P(X=4) = p(1-p)^3 = 0.1(0.9)^3 = \underline{\underline{0,0729}}$ $\quad$ b) svar ~ 7.3%

$P(X=5) = p(1-p)^4 = 0.1(0.9)^4 = 0.065$

$P(X=6) = p(1-p)^5 = 0,1(0.9)^5 = 0.059$

$P(X=7) = p(1-p)^6 = 0.1(0.9)^6 = 0.053$



c)

$F(3) = P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0.27$

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.27 = 0,73$

$\rightarrow F(7) = 0.52$

För en diskret sannolikhetfördelad X måste följande gälla

$$\boxed{\sum_i P(X=i) = 1}$$