Poissonfördelning

Motivering

Ibland, när vi pratar om något som egentligen är binomialfördelat så kan vi få problem. Anta ex att

Anta att $X \sim B(10000,\ 0.0002)$, $n = 10\,000$, $p = 0.0002$

$E(X) = np = 10\,000 \cdot 0.0002 = 2$

$P(X=x) = \binom{10\,000}{x} (0.0002)^x (0.9998)^{10000-x}$

$P(X=0), P(X=1), \ldots, P(X=10\,000)$

Problem!

$P(X=9990) = \binom{10\,000}{9990} (0.0002)^{9990} (0.9998)^{10} = \frac{10000!}{9990!\ 10!} (0.0002)^{9990} (0.9998)^{10}$

1. Fakulteter kan bli ohanterbara
2. $(0.0002)^{9990}$ kan inte Python hantera, utan sätter det felaktigt som 0

→ Under vissa förutsättningar kan vi approximera Binomialförd. med Poissonförd.

Specifikt om

$n > 10$, $p < 0.1$, $0.01 < E(X) < 50$

så kan vi approximera Binomialförd med Poissonförd.

ex. forts.

✓ $\left\{ X \sim B(10000,\ 0.0002) \right.$ $n = 10\,000$, $p = 0.0002$

$E(X) = np = 10\,000 \cdot 0.0002 = 2 = \mu$

$$\boxed{\begin{array}{l} X \sim P(\mu) \\ P(X=x) = \dfrac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{x!} \end{array}}$$

, e är den naturliga logaritmen

$e \sim 2.718\ldots$

$P(X=50) = \binom{10000}{50} (0.0002)^{50} (0.9998)^{9950} \approx \frac{e^{-2} \cdot 2^{50}}{50!}$

Exempel 3-6

En viss typ av motor till en maskin går sönder var 1 000:e gång den startas. Per månad startas motorn 200 gånger.

a) • Hur många gånger går motorn i medeltal sönder per år?

b) • Hur sannolikt är det att den går sönder exakt 3 gånger ett visst år?

c) • Hur sannolikt är det att den går sönder högst 1 gång ett visst år?

$n = 12 \cdot 200 = 2400$

$p = \frac{1}{1000} = 0.001$

Låt X vara antalet gånger motorn pajar per år

$X \sim B(2400,\ 0.001)$, $P(X=x) = \binom{2400}{x} (0.001)^x (0.999)^{2400-x}$

✓ $n > 10$

✓ $p < 0.1$

✓ $0.01 < E(X) < 50$

$E(X) = np = 2400 \cdot 0.001 = \underline{\underline{2.4}} = \mu$ a)

$X \sim P(2.4)$, $P(X=x) = \frac{e^{-2.4} \cdot 2.4^x}{x!}$

b) $P(X=3) = \frac{e^{-2.4} \cdot 2.4^3}{3!} \approx \underline{\underline{0.21}}$

$\boxed{0! = 1}$

c) $F(1) = P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) =$

$= \frac{e^{-2.4} \cdot 2.4^0}{0!} + \frac{e^{-2.4} \cdot 2.4^1}{1!} \approx 0.31$

d) Vad är sannolikheten att motorn pajar fler än 1 gång per år?

$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - 0.31 = 0.69$

Givet

$X \sim P(\mu)$

$p < 0.01$

$E(X) = np = \mu$

$V(X) = np(1-p) = np - np^2 = np = \mu$

$p^2 \to 0$

$S(X) = \sqrt{\mu}$