

Poissonfördelning

Motivering

Ibland, när vi pratar om något som egentligen är binomialfördelat så kan vi få problem. Anta ex att

$$\text{Anta att } X \sim B(10000, 0.0002), \quad n = 10000, \quad p = 0.0002$$

$$E(X) = np = 10000 \cdot 0.0002 = 2$$

$$P(X=x) = \binom{10000}{x} (0.0002)^x (0.9998)^{10000-x}$$

$$P(X=0), P(X=1), \dots, P(X=10000)$$

Problem!

$$P(X=9990) = \binom{10000}{9990} (0.0002)^{9990} (0.9998)^{10} = \frac{10000!}{9990! 10!} (0.0002)^{9990} (0.9998)^{10}$$

1. Faktorieller kan bli ohanterbara

2. $(0.0002)^{9990}$ kan nie Python hantera, utan sätter det felaktigt som 0

→ Under vissa förutsättningar kan vi approximerar Binomialförd. med Poissonförd.

Specifikt om

$$n > 10, \quad p < 0.1, \quad 0.01 < E(X) < 50$$

så kan vi approximerar Binomialförd med Poissonförd.

ex. följt

$$\checkmark \begin{cases} X \sim B(10000, 0.0002) & n = 10000 \\ & p = 0.0002 \end{cases}$$

$$E(X) = np = 10000 \cdot 0.0002 = 2 = \mu$$

$$\boxed{X \sim P(\mu)}$$

$$P(X=x) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{x!}$$

e är den naturliga logaritmen
 $e \approx 2.718 \dots$

$$P(X=50) = \binom{10000}{50} (0.0002)^{50} (0.9998)^{9950} \approx \frac{e^{-2} \cdot 2^{50}}{50!}$$

Exempel 3-6

En viss typ av motor till en maskin går sönder var 1 000:e gång den startas. Per månad startas motorn 200 gånger.

- Hur många gånger går motorn i medeltal sönder per år?
- Hur sannolikt är det att den går sönder exakt 3 gånger ett visst år?
- Hur sannolikt är det att den går sönder högst 1 gång ett visst år?

$$n = 12 \cdot 200 = 2400$$

$$p = \frac{1}{1000} = 0.001$$

Låt X vara antalet gånger motorn pajar per år

$$X \sim B(2400, 0.001), \quad P(X=x) = \binom{2400}{x} (0.001)^x (0.999)^{2400-x}$$

$$\checkmark n > 10$$

$$\checkmark p < 0.1$$

$$\checkmark 0.01 < E(X) < 50$$

$$E(X) = np = 2400 \cdot 0.001 = \underline{\underline{2.4}} = \mu \quad \swarrow a)$$

$$X \sim P(2.4), \quad P(X=x) = \frac{e^{-2.4} \cdot 2.4^x}{x!}$$

$$b) \quad P(X=3) = \frac{e^{-2.4} \cdot 2.4^3}{3!} \approx \underline{\underline{0.21}}$$

$$\boxed{0! = 1}$$

$$c) \quad F(1) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) =$$

$$= \frac{e^{-2.4} \cdot 2.4^0}{0!} + \frac{e^{-2.4} \cdot 2.4^1}{1!} \approx 0.31$$

d)

Vad är sannolikheten att motorn pajar fler än 1 gång per år?

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.31 = 0.69$$