Bernoulli experiment

Detta är ett experiment där vår slumpvariabel endast kan anta två möjliga värden

ex

Kasta mynt

Låt X här anta värdet 1 om utfall Head och 0 om utfall Tail

utfall	X
Head	1
Tail	0

$P(X=1) = 1/2$

$P(X=0) = 1/2$

Vi brukar kalla utfallen i ett Bernoulli experiment för **Success** respektive **Failure**.

ex

Ali ska försöka komma i tid till lektionen på morgonen

Låt X anta 1 om Ali i tid, och 0 annars

utfall	X
kommer i tid	1
kommer sent	0

$P(X=1) = p \quad (0 \le p \le 1)$

$P(X=0) = 1-p$

Binomialfördelningen

Biniomialfördelningen uppstår när man utför en följd av oberoende Bernoulli experiment.

ex

Vi utför nu ett experiment med 10 st på varandra följande myntkast

1. Varje myntkast är ett eget Bernoulli experiment
2. Varje myntkast är oberoende av övriga

} Detta måste vara uppfyllt för binomialfördelning

Låt nu X räkna totalt antal Head i vårt experiment om 10 m

Vår uppgift är nu att beräkna P(X=0), P(X=1), P(X=2)... P(X=10)

anta att $P(H) = p$, $P(T) = 1-p$

T H T H T H T T T T (1-p, p, 1-p, p, 1-p, p, 1-p, 1-p, 1-p, 1-p)

$\rightarrow (1-p)^7 p^3$, om $p = 1/2 \rightarrow (1-\frac{1}{2})^7 (\frac{1}{2})^3 = (\frac{1}{2})^7 (\frac{1}{2})^3 = (\frac{1}{2})^{10} \approx 0,00097$

T T T T T H H H H H (1-p, 1-p, 1-p, 1-p, 1-p, p, p, p, p, p)

$\rightarrow (1-p)^5 p^5$, om $p = 1/2 \rightarrow (1-\frac{1}{2})^5 (\frac{1}{2})^5 = (\frac{1}{2})^5 (\frac{1}{2})^5 = (\frac{1}{2})^{10} \approx 0,00097$

Med grunden ovan, låt oss nu försöka beräkna ex P(X=3)

H_1 T_1 H_2 T_2 T_3 H_3 T_4 T_5 T_6 T_7

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 = 10!

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = \underline{120}$

Så nu har vi räknat ut antal sätt vi kan få exakt 3 Heads i vår experiment om 10 myntkast.

Vi har också tidigare räknat ut sannolikheten för en individuell sekvens

$P(X=3) = \binom{10}{3} p^3 (1-p)^7$

$[P(X=x) = \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x}]$

$P(X=1) = \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9$

$P(X=2) = \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8$

$P(X=4) = \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6$

$\vdots$

$P(X=10) = \binom{10}{10} p^{10} (1-p)^0$

anta att $p = 1/2$

$P(X=0) = \binom{10}{0}(\frac{1}{2})^0(1-\frac{1}{2})^{10} \approx 0,00097$

$P(X=1) = \binom{10}{1}(\frac{1}{2})^1(1-\frac{1}{2})^9 \approx 0,0097 \sim 1\%$

$P(X=2) = \binom{10}{2}(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{2})^8 \approx 0,043 \sim 4,3\%$

$P(X=3) =$

$P(X=4) =$

$\vdots$

$P(X=10) =$

Ok, så vad är samtliga sannolikheter dvs P(X=0), P(X=1)... P(X=10)

Lösning: Vi har att $P(X=x) = \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x}$, $\binom{10}{x} = \frac{10!}{x!(10-x)!}$

Vi har också i detta fall att $p = \frac{1}{2}$

$P(X=0) = \frac{10!}{0!10!}(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^{10} \approx 0,00097$

$P(X=1) = \frac{10!}{1!9!}(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^9 \approx 0,0097$

$P(X=2) = \frac{10!}{2!8!}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^8 \approx 0,043$

$P(X=3) = \frac{10!}{3!7!}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^7 \approx 0,11$

$P(X=4) = \frac{10!}{4!6!}(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^6 \approx 0,2$

$P(X=5) = \frac{10!}{5!5!}(\frac{1}{2})^5(\frac{1}{2})^5 \approx 0,25$

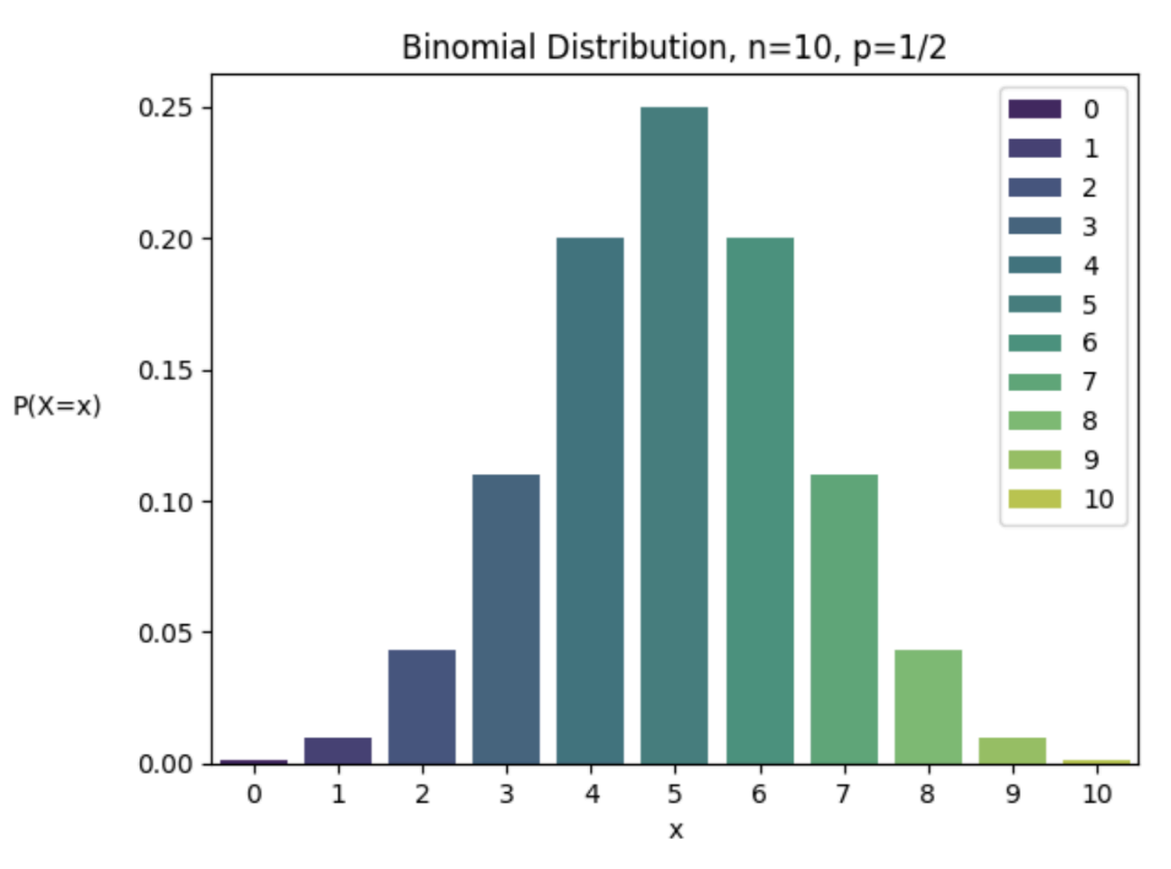
$P(X=10) = \frac{10!}{10!0!}(\frac{1}{2})^{10}(\frac{1}{2})^0 \approx 0,00097$

$P(X=9) = \frac{10!}{9!1!}(\frac{1}{2})^9(\frac{1}{2})^1 \approx 0,0097$

$P(X=8) = \frac{10!}{8!2!}(\frac{1}{2})^8(\frac{1}{2})^2 \approx 0,043$

$P(X=7) = \frac{10!}{7!3!}(\frac{1}{2})^7(\frac{1}{2})^3 \approx 0,11$

$P(X=6) = \frac{10!}{6!4!}(\frac{1}{2})^6(\frac{1}{2})^4 \approx 0,2$



$X \sim B(10, \frac{1}{2})$

$P(X=x) = \binom{10}{x}(\frac{1}{2})^x(\frac{1}{2})^{1-x}$

$F(x) = P(X \le x)$

$F(3) = P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$

$\approx 0,053 \sim 5,3\%$

Mer generellt kan vi givetvis ha hur många på varandra följande bernoulli experiment som helst (vi kallar den siffran n), och sannolikheten för success i varje (p) kan också variera

$X \sim B(n, p)$

$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) =$

$= 1 - 0,053 = 0,947 \sim 94,7\%$

Ok, låt oss göra en serie av tärningskast.

Låt nu vår slumpvariabel X anta 1 om tärningen hamnar på 6, och 0 annars

utfall	X
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	1

$P(X=1) = 1/6$

$P(X=0) = 5/6$

I detta fall är nu vår "success" endast när vi slår en 6a.

Vi har nu p = 1/6

Vi ska nu kasta 10 tärningar, och låt nu X räkna antal 6or i detta övergripande experiment

Vår uppgift är att beräkna P(X=0), P(X=1), ... P(X=10)

F F S F F S F F S S (1-p, 1-p, p, 1-p, 1-p, p, 1-p, 1-p, p, p)

$\binom{10}{4}$ $\qquad p^4(1-p)^6$

$P(X=x) = \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x}$, $p = 1/6$

$P(X=0) = \binom{10}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^{10} \approx 0,16$

$P(X=1) = \binom{10}{1}(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^9 \approx 0.32$

$P(X=2) = \binom{10}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^8 \approx 0.29$

$P(X=3) = \binom{10}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^7 \approx 0.15$

$P(X=4) = \binom{10}{4}(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})^6 \approx 0.05$

$P(X=5) = \binom{10}{5}(\frac{1}{6})^5(\frac{5}{6})^5 \approx 0.01$

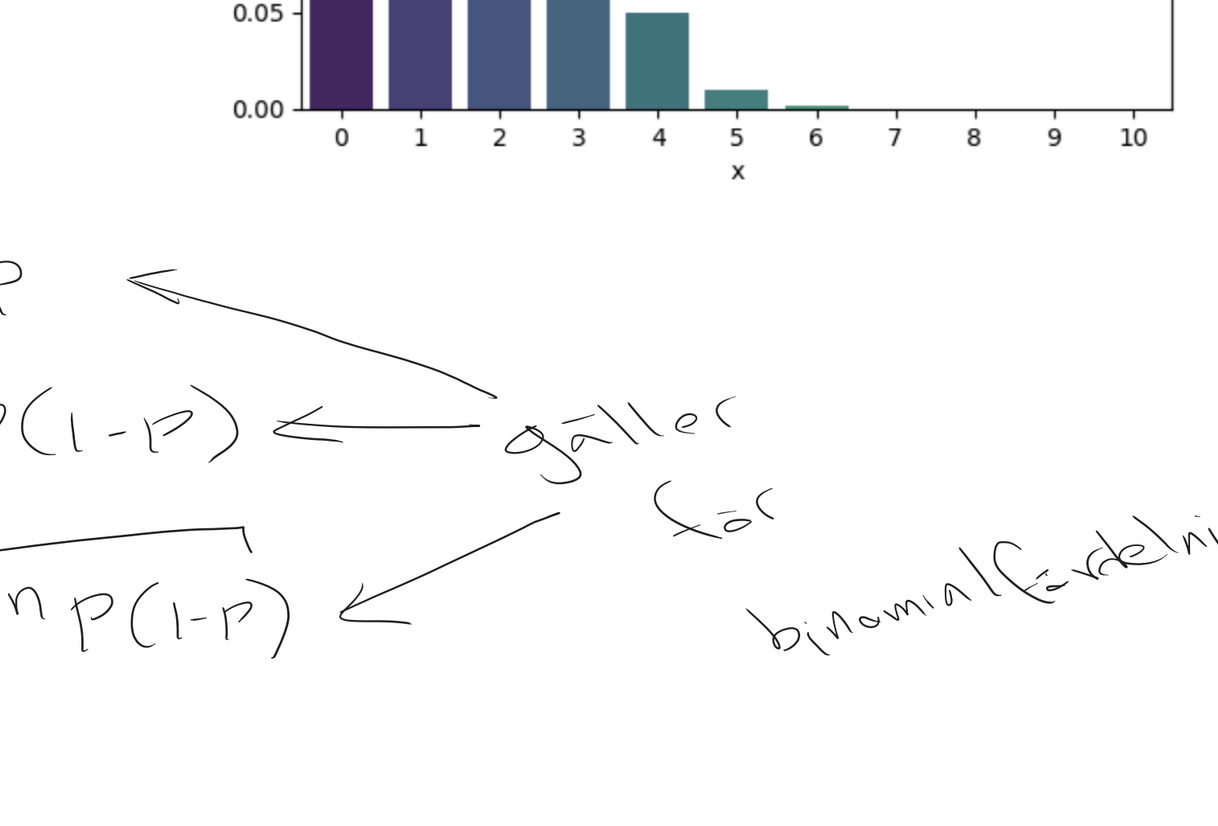
$P(X=6) = \binom{10}{6}(\frac{1}{6})^6(\frac{5}{6})^4 \approx 0.002$

$P(X=7) = \binom{10}{7}(\frac{1}{6})^7(\frac{5}{6})^3 \approx 0.0002$

$P(X=8) = \binom{10}{8}(\frac{1}{6})^8(\frac{5}{6})^2 \approx 0.00001$

$P(X=9) = \binom{10}{9}(\frac{1}{6})^9(\frac{5}{6})^1 \approx 0.000001$

$P(X=10) = \binom{10}{10}(\frac{1}{6})^{10}(\frac{5}{6})^0 \approx 0.00000001$



$X \sim B(10, 1/6)$

$E(X) = \sum_i x_i P(X=x_i)$

$V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 P(X=x_i)$

$S(X) = \sqrt{V(X)}$

$E(X) = np$

$V(X) = np(1-p)$

$S(X) = \sqrt{np(1-p)}$

← gäller för binomialfördelning