

Diskreta fördelningar

En diskret mängd är en mängd vars element har ett tydligt avstånd från varandra

Ex på diskreta mängder

1. antal barn i en familj

$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

2. Färger på bilar

$\{\text{blå, lila, gul}, \dots\}$

Detta verkta förut på diskret!

Motsatsen, dvs kontinuerliga mängder, kan tänkas som en mängd där det finns oändligt många element mellan varje två valda element

kontinuerliga mängder

1. Vikt på en person

2. Yttre temperatur

Def Random variable / slumpvariabel

En slumpvariabel X anger utfallet av ett experiment, mappat till en siffra - så att vi kan utföra matematiska beräkningar med den

exempel

Experiment: kasta tre mynt efter varandra, anteckna resultatet

Låt X benämna antal H vi får i vårt experiment

Slumpvariabler mappar alltså vårt utfallsrum till siffror!

Utfall	X
HHH	3
HHT	2
HTH	2
HTT	1
TTH	1
THT	1
TTT	0
TTH	1
THT	1
TTT	0

$P(X=3) = \frac{1}{8}$

$P(X=2) = \frac{3}{8}$

$P(X=1) = \frac{3}{8}$

$P(X=0) = \frac{1}{8}$

$\sum_i P(X=x_i) = 1$

$\sum_i P(X=x_i) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$

$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

$P(X \leq 2) = \frac{7}{8}$

$P(X \leq \text{HTT})$

Ibland är X definierad trivialt, dvs att mappningen från utfallsrummet till siffror är trivial

Experiment: ett tärningskast

Låt X vara antal prickar på tärningen

Utfall	X
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

$P(X=1) = 1/6$

$P(X=2) = 1/6$

$P(X=3) = 1/6$

$P(X=4) = 1/6$

$P(X=5) = 1/6$

$P(X=6) = 1/6$

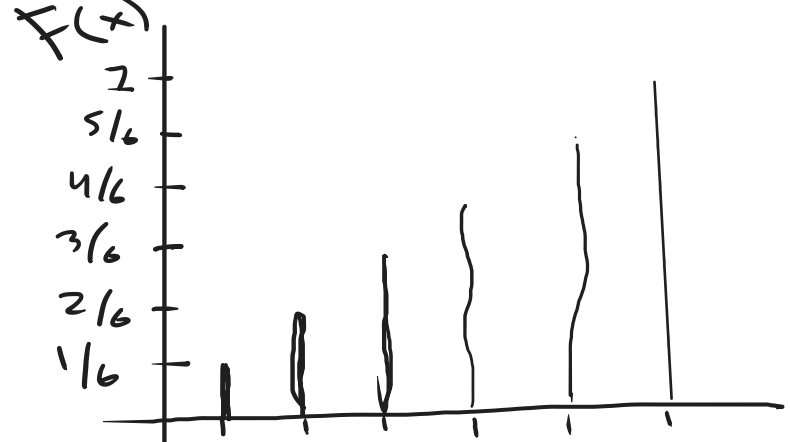
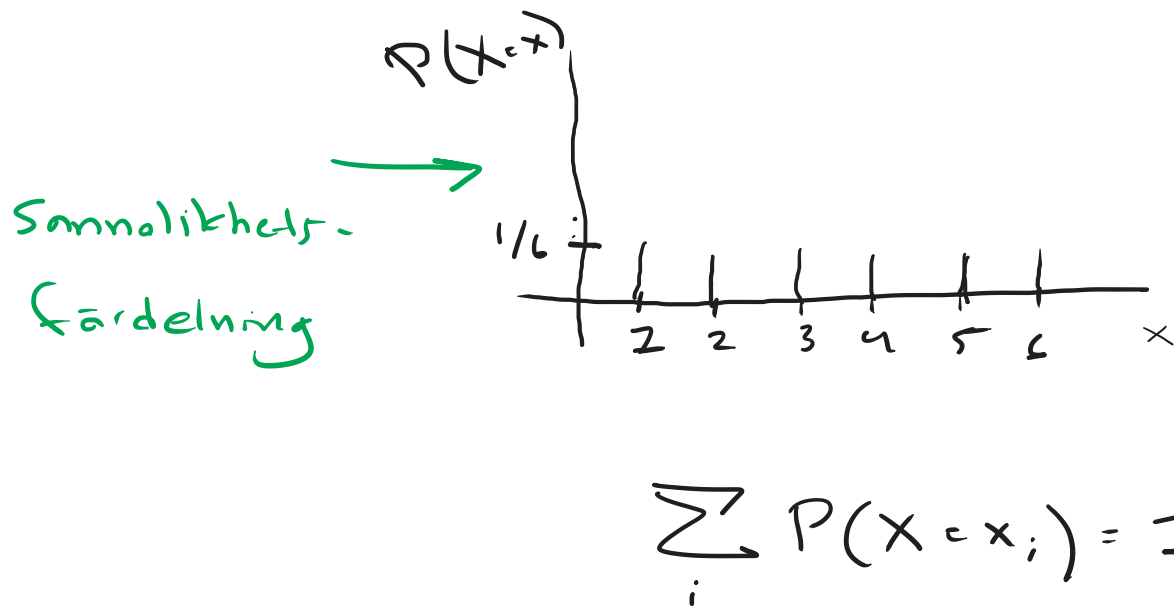
Kumulativa fördelningsfunktionen F

$F(x) = P(X \leq x)$

ex i ett tärningskast

$F(4) = P(X \leq 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$F(4) = P(X \leq 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$



$F(1) = P(X \leq 1) = 1/6$

$F(2) = P(X \leq 2) = 2/6$

$F(3) = P(X \leq 3) = 3/6$

$F(4) = P(X \leq 4) = 4/6$

$F(5) = P(X \leq 5) = 5/6$

$F(6) = P(X \leq 6) = 1$

Uppgift

Ni har en biased tärning och kastar den.

Låt X benämna antal prickar i det experimentet.

Ni har då följande riggade sannolikheter

$P(X=1) = 0,25$

$P(X=2) = 0,25$

$P(X=3) = P(X=4) = P(X=5) = P(X=6) = 0,125$

a) Rita upp sannolikhetsfördelningen

b) Rita upp den kumulativa fördelningsfunktionen



Expectation value / väntevärde

Vi definierar väntevärdet för en slumpvariabel X enligt följande

$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X=x_i)$

ett tärningskast

x	P(X=x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$E(X) = (1 \cdot \frac{1}{6}) + (2 \cdot \frac{1}{6}) + (3 \cdot \frac{1}{6}) + (4 \cdot \frac{1}{6}) + (5 \cdot \frac{1}{6}) + (6 \cdot \frac{1}{6}) =$

$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} =$

$= \underline{\underline{3,5}}$

x	P(X=x)
1	1/4
2	1/4
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$E(X) = (1 \cdot \frac{1}{4}) + (2 \cdot \frac{1}{4}) + (3 \cdot \frac{1}{6}) + (4 \cdot \frac{1}{6}) + (5 \cdot \frac{1}{6}) + (6 \cdot \frac{1}{6}) =$

$= \underline{\underline{3}}$

Variansen för en diskret slumpvariabel X definieras enligt följande

$V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 \cdot P(X=x_i)$

x	P(X=x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$E(X) = 3,5$

$V(X) = \sum_i (x_i - 3,5)^2 \cdot P(X=x_i) =$

$= (1-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} =$

$= \frac{1}{6} [(-2,5)^2 + (-1,5)^2 + (-0,5)^2 + (0,5)^2 + (1,5)^2 + (2,5)^2] =$

$= \frac{1}{6} (6,25 + 2,25 + 0,25 + 0,25 + 2,25 + 6,25) = \frac{17,5}{6} \approx \underline{\underline{2,9}}$

Standardavvikelsen för en diskret slumpvariabel X är

$S(X) = \sqrt{V(X)}$

$S(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,9} \approx 1,7$

Uppgift

Beräkna S(X) för följande sannolikhetsfördelning

x	P(X=x)
1	1/4
2	1/4
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Hint: Ni vet sedan tidigare att E(X)=3

$V(X) = \sum_i (x_i - 3)^2 \cdot P(X=x_i) = (1-3)^2 \cdot \frac{1}{4} + (2-3)^2 \cdot \frac{1}{4} + (3-3)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4-3)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5-3)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6-3)^2 \cdot \frac{1}{6} =$

$= \dots = 3$

$S(X) = \sqrt{V(X)} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$