Poissonfördelningen

Motivering

Ibland när vi pratar om en process vars sannolikheter beskrivs av Binomialfördelningen, kan vi få problem

Anta att $X \sim B(n = 10.000,\ p = 0.0002)$

$E(X) = np = 10.000 \cdot 0.0002 = 2$

$P(X = x) = \binom{10.000}{x}(0.0002)^x(0.9998)^{10.000-x}$

$P(X=0),\ P(X=1),\ P(X=2),\ \dots,\ P(X=10.000)$

Problem!

$$P(X=9990) = \binom{10000}{9990}(0.0002)^{9990}(0.9998)^{10} = \frac{10000!}{10!\ 9990!}(0.0002)^{9990}(0.9998)^{10}$$

1) Fakulteter kan bli ohanterbara

2) $(0.0002)^{9990}$ kan inte Python hantera, utan sätter det felaktigt som 0

→ Under vissa förutsättningar kan vi kringå detta problem genom att approximera Binomialförd. med Poissonförd.

Specifikt om

$$\boxed{n > 10,\quad p < 0.1,\quad 0.01 < E(X) < 50}$$

Om alla ovan tre stämmer, är Poissonförd. en bra approx. av Binomialförd.

ex. forts

✓ $\begin{cases} X \sim B(10000,\ 0.0002) \\ E(X) = np = 10.000 \cdot 0.0002 = \underline{2} = \underline{\mu} \end{cases}$ $n = 10.000$, $p = 0.0002$

$$\boxed{\begin{aligned} &X \sim P(\mu) \\ &P(X=x) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{x!} \end{aligned}}$$

e är den naturliga logaritmen

$e \sim 2.718\dots$

$$P(X=50) = \binom{10000}{50}(0.0002)^{50} \cdot (0.9998)^{9950} \approx \frac{e^{-2} \cdot 2^{50}}{50!}$$

Exempel 3-6

En viss typ av motor till en maskin går sönder var 1 000:e gång den startas. Per månad startas motorn 200 gånger.

a) • Hur många gånger går motorn i medeltal sönder per år?
b) • Hur sannolikt är det att den går sönder exakt 3 gånger ett visst år?
c) • Hur sannolikt är det att den går sönder högst 1 gång ett visst år?

$n = 12 \cdot 200 = 2400$
$p = \frac{1}{1000} = 0.001$

Låt X vara antal gånger motorn pajar per år

$X \sim B(2400,\ 0.001)$, $P(X=x) = \binom{2400}{x}(0.001)^x(0.999)^{2400-X}$

Svar a)

✓ $n > 10$
✓ $p < 0.1$
✓ $0.01 < E(X) < 50$

$E(X) = n \cdot p = 2400 \cdot 0.001 = 2.4 = \mu$

$X \sim P(\mu = 2.4)$, $P(X=x) = \frac{e^{-2.4}(2.4)^x}{x!}$

b) $P(X=3) = \frac{e^{-2.4} \cdot (2.4)^3}{3!} \approx 0.21 \sim 21\%$

c) $F(1) = P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) =$

$$= \frac{e^{-2.4} \cdot (2.4)^0}{0!} + \frac{e^{-2.4}(2.4)^1}{1!} \approx 0.31 \sim 31\%$$

d) Vad är sannolikheten att motorn pajar fler än 1 gång per år?

$$P(X>1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - 0.31 = 0.69 \sim 69\%$$

Givet

$X \sim P(\mu)$

$E(X) = np = \mu$

$p < 0.01$

$V(X) = np(1-p) = np - np^2 = np = \mu$

$S(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\mu}$