Geometrisk fördelning

Anta att vi har ett Bernoulli experiment

$P(\text{success}) = p \quad , \quad P(\text{Failure}) = 1-p$

Vi kommer nu upprepat att utföra detta Bernoulli experiment.

Vi kan ställa oss följande fråga: Hur sannolikt är det att vår *första* success sker efter n st experiment?

Låt X ange antal försök/experiment som krävs för att nå success för förstå gången

X kan då värden $1, 2, 3, \ldots$

$P(X=1), P(X=2), P(X=3), \ldots, P(X=n)$

Ex. ett myntkast med sannolikhet för success p

$P(X=1): \overset{p}{S} \rightarrow p$

$P(X=2): \overset{1-p}{F} \; \overset{p}{S} \rightarrow (1-p)p$

$P(X=3): \overset{1-p}{F} \; \overset{1-p}{F} \; \overset{p}{S} \rightarrow (1-p)^2 p$

$\vdots$

$P(X=n): \underset{1}{\overset{1-p}{F}} \; \underset{2}{\overset{1-p}{F}} \; \underset{3}{\overset{1-p}{F}} \ldots \underset{n-1}{\overset{1-p}{F}} \; \underset{n}{\overset{p}{S}} \rightarrow (1-p)^{n-1} p$

$$\boxed{\begin{gathered} X \sim G(p) \\ P(X=x) = (1-p)^{x-1} p \end{gathered}}$$

$E(X) = \frac{1}{p}$

$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

$S(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$

Anta nu att vi har ett underliggande Bernoulli experiment som utgörs av ett *rättvist* myntkast, dvs sannolikheten för success (som vi ex. kan definiera som att mynten hamnar på Krona) **p = 1/2**

Hur sannolikt är det att vi får vårt första success (Krona) efter ett visst antal försök?

$p = 1/2, \quad X \sim G(p = 1/2), \quad P(X=x) = (1-p)^{x-1} p$

$\rightarrow P(X=x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \frac{1}{2}$

$P(X=1) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

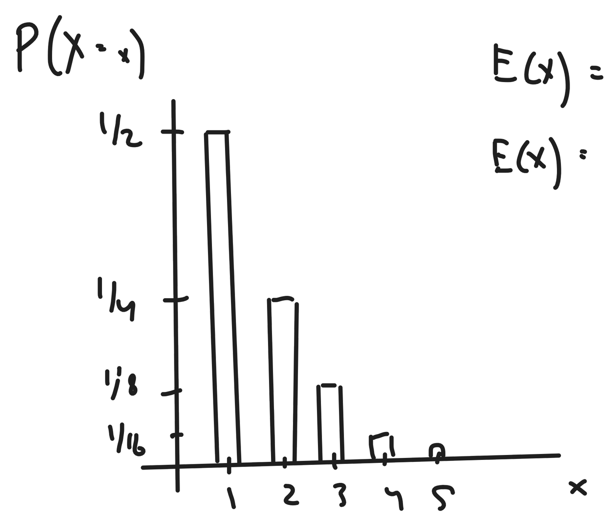
$P(X=2) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$P(X=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

$\vdots$

$P(X=100) = \left(\frac{1}{2}\right)^{99} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{100}}$



$E(X) = \frac{1}{p}$

$E(X) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \underline{\underline{2}}$

$\sum_i P(X = x_i) = 1 \qquad \sum_i \frac{1}{2^i} = 1$

$F(3) = P(X \leq 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}$

$= \frac{7}{8}$

Exempel 3-8

Kajsa har just tagit sin civilekonomexamen, och tänker börja söka jobb. Hon söker jobb ett och ett, och hon har sannolikheten 0,1 att få jobb vid varje enskild ansökan.

- Hur många jobb kan hon förväntas behöva söka innan hon får ett?
- Hur sannolikt är det att hon får jobb på fjärde försöket?
- Hur många jobb måste hon vara beredd på att söka för att vara minst 50 % säker på att få jobb?

$X \sim G(0,1) \quad , \quad p = 0,1$

$P(X=x) = (1-p)^{x-1} p$

$E(X) = \frac{1}{p}$

$V(X) = \frac{1-p}{p^2} \quad , \quad S(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$

a) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,1} = \underline{\underline{10}}$

b)

$P(X=1) = (1-p)^0 p = p = 0,1 \quad \sim 10\%$

$P(X=2) = (1-p)^1 p = (1-0,1)^1 \, 0,1 = 0,09 \sim 9\%$

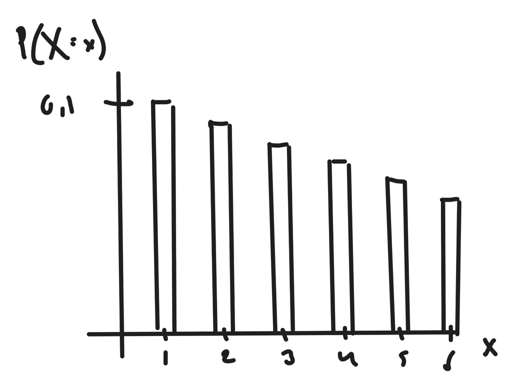
$P(X=3) = (1-p)^2 p = (1-0,1)^2 \, 0,1 = 0,081 \sim 8,1\%$

$P(X=4) = (1-p)^3 p = (1-0,1)^3 \, 0,1 = 0,0729 \sim 7,3\%$

$P(X=5) = (1-p)^4 p = (1-0,1)^4 \, 0,1 = 0,065 \sim 6,5\%$

$P(X=6) = (1-p)^5 p = (1-0,1)^5 \, 0,1 = 0,059 \sim 5,9\%$

$P(X=7) = (1-p)^6 p = (1-0,1)^6 \, 0,1 = 0,053 \sim 5,3\%$



b) Svar: $\sim 7,3\%$

$$\boxed{\sum_x (1-p)^{x-1} p = 1}$$

c)

$F(3) = P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \approx 0,27$

$F(?) = P(X \leq ?) = \quad \geq 0,5$

$F(7) = P(X \leq 7) = P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=7) = 0,52 \sim 52\%$

Svar: minst 7 jobb måste sökas

$\sum_{i=1}^{7} P(X=i) = 0,52 \geq 0,5$