

### Sannolikhetslära

$$\text{Sannolikhet} \cdot \frac{\text{antal förekommande utfall}}{\text{antal möjliga utfall}} = P$$

Christian kastar tärning

$$\text{Utfallssumman } S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Antag nu att Christian vill veta sannolikheten för utfallet 5 och 6 tillsammans

Då är önskvärda utfallen A = {5, 6}

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\} \\ P(\bar{A}) = \frac{|\bar{A}|}{|S|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \left( P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \right)$$

$$|A| + |\bar{A}| = |S|$$

$$\underline{P(A) + P(\bar{A}) = \frac{|A|}{|S|} + \frac{|\bar{A}|}{|S|} = \frac{|A| + |\bar{A}|}{|S|} = \frac{|S|}{|S|} = 1}$$

$$\rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$\underline{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

### Eugenia kastar tärning

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{1, 2, 4\}, D = \{4, 5, 6\}, E = \{3, 5, 6\}$$

$$P(C \text{ och } D) = P(C \cap D)$$

$$C \cap D = \{4\}$$

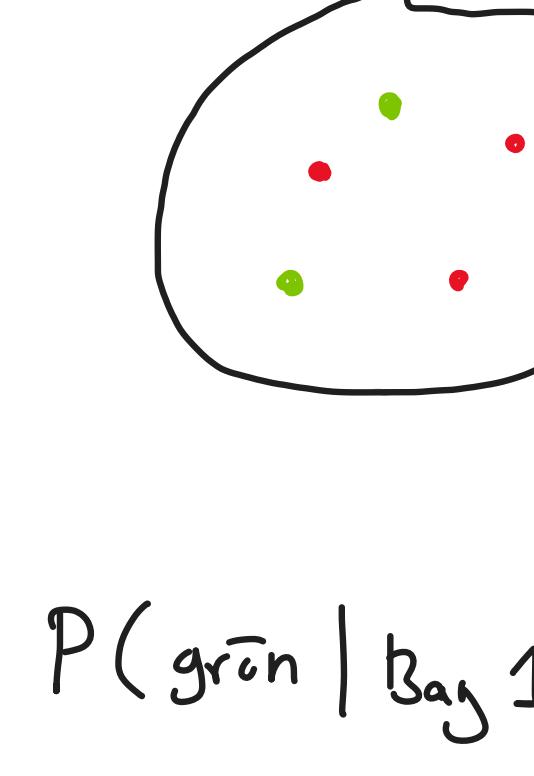
$$P(C \cap D) = \frac{|\{4\}|}{|S|} = \frac{1}{6}$$

$$P(C \cap E) = [C \cap E = \{3\}] = \frac{|\{3\}|}{|S|} = \frac{0}{6} = 0$$

$$P(D \cup E) = [D \cup E = \{3, 4, 5, 6\}] = \frac{|\{3, 4, 5, 6\}|}{|S|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

D eller E, eller båda händer

Tini singlar 3 mynt efter varandra, vad är utfallsrummet?



$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

$$|S| = 8$$

$$A = \{HHH, HTH, THH\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{3}{8}$$

Sannolikheten för A komplement är således händelsen där vi får allt annat förutom exakt 2st H totalt

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Julian väljer att sätta tävlingarna och vinn baksats

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 2, 4\}, B = \{4, 5\}$$

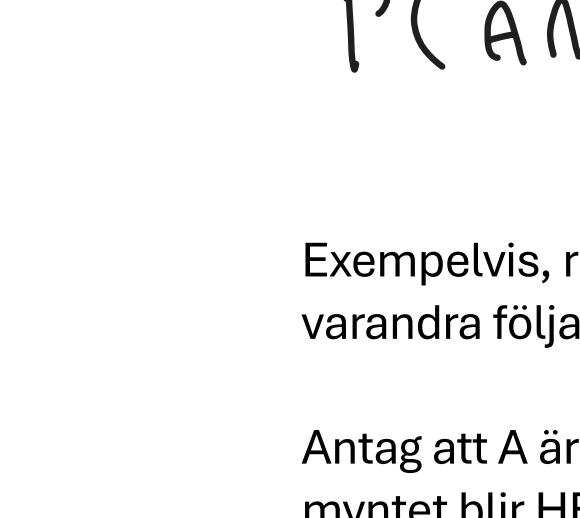
$$P(A \cup B) = [A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}] = \frac{|\{1, 2, 4, 5\}|}{|S|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) + P(B) \quad P(A) = \frac{|\{1, 2, 4\}|}{|S|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{|\{4, 5\}|}{|S|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{Bayes sats}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Betingade (beroende) sannolikheter / conditional probabilities



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

"Sannolikheten för A givet B, dvs om B har skett"

$$P(\text{grön} | \text{Bag 1}) = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

"Sannolikheten att du får en grön kula, om du plöcker från säck nummer 1"

$$P(\text{grön} | \text{Bag 2}) = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

"Sannolikheten att du får en grön kula, om du plöcker från säck nummer 2"

Antag nu att Karen deltar i ett spel på Gröna Lund. Framför honom har han två påsar, den ena (Bag 1) är guldfärgad och den andra (Bag 2) är silverfärgad.

Han får börja med att välja en påse. Antag att Karen tycker om silver mer än guld och väljer Bag 2 med sannolikheten 2/3, och således Bag 1 med 1/3.

$$P(\text{grön}) = \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}}_{= \frac{6}{15}} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}_{= \frac{2}{9}} = \frac{6}{15} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$$

Om händelsen A är beroende av B så kan man räkna ut den totala sannolikheten för A på följande vis

$$\boxed{P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

För två beroende händelser gäller följande, dvs om A är beroende av B eller tvärtom

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$P(B \cap A) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) \Leftrightarrow P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

$$\rightarrow \boxed{P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}} \quad \text{Bayes sats}$$

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}} \quad \text{Bayes sats}$$

**Exempel 2.4**

Antag att en viss lögndetektor i reklamen påslats vara väldigt tillförlitlig, eftersom den ger falskt med sannolikheten 90% om en person lyder. Men 70% av de personer som berörs med hjälpe till lögndetektor faktiskt lyger. För att sannolikheten att att en person faktiskt lyger om lyder är 0,90.

Dessutom i vissa länder används lögndetektorer som stöd för juridisk prövning. Funder på om du skulle vilja bli förlöjd med hjälpe till lögndetektor.

A = varu händelsen att en förhörde person lyjer

$\bar{A}$  = ej- inte lyjer

B = är att lögndetektor ger utslag, dvs påstått att den förhörda personen lyjer

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(\bar{B})P(\bar{A})} = \frac{0,9 \cdot 0,02}{0,9 \cdot 0,02 + 0,05 \cdot 0,98} \approx 0,27$$

För oberoende händelser A och B

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Exempelvis, resultatet av två på varandra följande oberoende myntkast

Antag att A är händelsen då första myntet blir HEAD, och B händelsen att andra myntet blir TAIL

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$A = \{HH, HT\}$$

$$B = \{HT, TT\}$$

$$A \cap B = \{HT\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|S|} = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{|A|}{|S|} \cdot \frac{|B|}{|S|} = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$