Zamana Bağlı Yağış Verileri Kullanılarak Bir Rezervuar Su Seviyesinin Nümerik Analizi

Ad-soyad: Aleyna Ölmez

Öğrenci No: 24120205079

Github link: https://github.com/aleynaolmez/numerik-analiz-proje

1. GİRİŞ

1.1 Problemin Tanıtımı

Su kaynaklarının etkin ve sürdürülebilir şekilde yönetilmesi, günümüzde şehir planlaması ve çevre mühendisliği açısından kritik bir öneme sahiptir. Özellikle şehirlerde kullanılan rezervuar ve baraj sistemlerinin su seviyelerinin zamanla nasıl değiştiğinin öngörülmesi, olası kuraklık veya taşkın risklerinin önceden tespit edilebilmesi açısından büyük önem taşımaktadır.
Bir rezervuardaki su seviyesi; yağış miktarı, buharlaşma, evsel ve endüstriyel tüketim gibi birçok faktöre bağlı olarak zamanla değişmektedir. Bu değişim genellikle diferansiyel denklemler ile modellenmekte olup, gerçek hayata ait verilerin karmaşıklığı nedeniyle analitik çözüm elde etmek çoğu zaman mümkün olmamaktadır. Bu tür durumlarda sayısal (nümerik) yöntemler, problemin yaklaşık çözümünü elde etmek için etkili bir araç sunmaktadır.

Bu çalışmada, gerçek günlük yağış verileri kullanılarak bir rezervuarın su seviyesinin zamana bağlı değişimi modellenmiş ve elde edilen diferansiyel denklem nümerik yöntemler yardımıyla çözülmüştür. Amaç, farklı nümerik yöntemlerin çözüm doğruluğunu ve davranışlarını karşılaştırarak hangi yöntemin bu problem için daha uygun olduğunu incelemektir.

1.2 Literatürde Problemin Çözümü

Rezervuar ve baraj sistemlerinin modellenmesi literatürde sıklıkla karşılaşılan bir problemdir. Çeşitli çalışmalarda su seviyesi değişimi; yağış, akış ve tüketim terimlerini içeren diferansiyel denklemler aracılığıyla ifade edilmiştir. Bu tür modellerde, yağış verileri çoğu zaman zamana bağlı bir girdi fonksiyonu olarak ele alınmakta ve gerçek ölçüm verilerinden faydalanılmaktadır.[1], [2]

Literatürde, bu tip diferansiyel denklemlerin çözümünde analitik yöntemlerin yetersiz kaldığı durumlarda Euler yöntemi, Geliştirilmiş Euler (Heun) yöntemi ve Runge–Kutta yöntemleri gibi sayısal yaklaşımların kullanıldığı görülmektedir. Özellikle adım boyunun küçültülmesiyle elde edilen sonuçların doğruluğunun arttığı ve farklı yöntemlerin hata davranışlarının karşılaştırıldığı birçok çalışma mevcuttur.
Bu çalışmalar, nümerik yöntemlerin yalnızca çözüm üretmekle kalmayıp aynı zamanda sistemin kararlılığı ve hata davranışı hakkında da önemli bilgiler sunduğunu göstermektedir.

1.3 Seçilen Yöntemin Neden Uygun Olduğu

Bu çalışmada, rezervuar su seviyesinin modellenmesi için zamana bağlı yağış girdisini içeren bir birinci dereceden diferansiyel denklem kullanılmıştır. Yağış verisinin gerçek ölçümlere dayanması ve zamana göre düzensiz bir yapı sergilemesi nedeniyle analitik çözüm elde etmek pratik değildir.
Bu nedenle diferansiyel denklem, ileri Euler yöntemi ve Geliştirilmiş Euler (Heun) yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Euler yöntemi, basitliği ve düşük hesaplama maliyeti nedeniyle temel bir referans yöntemi olarak ele alınmıştır. Heun yöntemi ise Euler yöntemine kıyasla daha yüksek doğruluk sağlaması nedeniyle karşılaştırma amacıyla kullanılmıştır.
Ayrıca, gerçek rezervuar su seviyesi ölçümleri bulunmadığından, çok küçük adım boyu ile elde edilen Heun çözümü referans çözüm olarak kabul edilmiş ve diğer yöntemlerin hata analizi bu referansa göre gerçekleştirilmiştir. Bu yaklaşım, yöntemlerin doğruluk ve yakınsaklık özelliklerini değerlendirmek için literatürde yaygın olarak kullanılan bir tekniktir.

2. YÖNTEM

Bu çalışmada, rezervuar su seviyesinin zamana bağlı değişimini incelemek amacıyla matematiksel modelleme ve sayısal çözüm yöntemlerikullanılm ıştır. Modelleme aşamasında diferansiyel denklem kurulmuş, ardından bu denklem farklı nümerik yöntemler ile çözülerek elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Ayrıca gerçek yağış verileri kullanılarak giriş fonksiyonu sayısal olarak modellenmiştir.

2.1 Matematiksel Model ve Diferansiyel Denklem

Bir rezervuardaki su seviyesinin zamana bağlı değişimi, rezervuara giren ve rezervuardan çıkan su miktarları arasındaki fark ile ifade edilebilir. Bu çalışmada su seviyesi h(t) ile gösterilmiştir.
Rezervuara giren su miktarı, zamana bağlı yağış fonksiyonu R(t) ile temsil edilmiştir. Rezervuardan çıkan su miktarının ise su seviyesine bağlı olduğu varsayılmıştır. Bu doğrultuda çıkış terimi, su seviyesinin katsayılı bir fonksiyonu olarak modellenmiştir.
Bu varsayımlar altında sistem aşağıdaki birinci dereceden diferansiyel denklem ile ifade edilmiştir:

$$\frac{dh}{dt} = R(t) - (k\,h(t) + c)$$

Burada,

- h(t): Rezervuar su seviyesi,
- R(t): Zamana bağlı yağış fonksiyonu,
- k: Su seviyesine bağlı çıkış katsayısı,
- c: Sabit taban tüketim katsayısıdır.

Bu diferansiyel denklem, gerçek yağış verilerinin zamana bağlı ve düzensiz bir yapıya sahip olması nedeniyle analitik olarak çözülmesi zor bir problem oluşturmaktadır. Bu sebeple sayısal çözüm yöntemlerine başvurulmuştur.[1]

2.2 En Küçük Kareler Yöntemi ile Ortam Sıcaklığı Modeli

Gerçek yağış verileri, günlük ölçümlerden oluşan bir zaman serisi şeklindedir. Bu verilerin diferansiyel denklem içerisinde kullanılabilmesi için sürekli bir fonksiyon ile yaklaşık olarak ifade edilmesi gerekmektedir.

Bu çalışmada yağış fonksiyonu, yıllık periyodik davranış sergilediği varsayımıyla aşağıdaki biçimde modellenmiştir:

$$R(t) \approx a \sin(\omega t) + b$$

Burada,

- a: Yağış genliği,
- b: Ortalama yağış seviyesi,
- $\omega = \frac{2\pi}{365}$ Yıllık periyodu temsil eden açısal frekanstır.

Model parametreleri a ve b, gerçek yağış verileri kullanılarak **En Küçük Kareler (Least Squares)** yöntemi ile hesaplanmıştır. Bu yöntem, model çıktısı ile gerçek veriler arasındaki hata kareleri toplamını minimize ederek en uygun parametreleri belirlemektedir.

Bu yaklaşım sayesinde, yağış verisinin uzun dönemli ve ortalama davranışı temsil eden sürekli bir fonksiyon elde edilmiştir.

2.3 İleri Euler Yöntemi

İleri Euler yöntemi, diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan en temel sayısal yöntemlerden biridir. Bu yöntemde çözüm, belirli bir adım boyu Δt kullanılarak ileri yönde yaklaşık olarak hesaplanır.

İleri Euler yöntemi genel olarak aşağıdaki formülle ifade edilir:

$$h_{n+1} = h_n + \Delta t \cdot f(t_n, h_n)$$

Bu çalışmada Euler yöntemi, basitliği ve düşük hesaplama maliyeti nedeniyle referans bir yöntem olarak kullanılmıştır. Ancak yöntemin doğruluğu adım boyuna oldukça duyarlıdır ve büyük adım boylarında hata artışı gözlemlenebilmektedir.[1], [2]

2.4 Geliştirilmiş Euler (Heun) Yöntemi

Geliştirilmiş Euler yöntemi, Euler yönteminin doğruluğunu artırmak amacıyla geliştirilmiş ikinci dereceden bir sayısal yöntemdir. Bu yöntemde, bir adımda iki farklı eğim hesaplanarak ortalama eğim kullanılır.

Heun yöntemi aşağıdaki adımlarla uygulanır:

1.İlk eğim hesaplanır: $k_1 = f(t_n, h_n)$

2:Geçici bir değer tahmin edilir: $h^* = h_n + \Delta t \cdot k_1$

3.İkinci eğim hesaplanır: $k_2 = f(t_n + \Delta t, h^*)$

4:Nihai değer bulunur: $h_{n+1} = h_n + \frac{\Delta t}{2}(k_1 + k_2)$

Bu yöntem, Euler yöntemine kıyasla daha yüksek doğruluk sağlamakta ve özellikle orta büyüklükteki adım boylarında daha kararlı sonuçlar üretmektedir.[1], [2]

2.5 Parametreler ve Hata Analizi

Sayısal çözümler sırasında kullanılan parametreler sabit tutulmuş ve farklı adım boyları için yöntemlerin davranışı incelenmiştir. Gerçek rezervuar su seviyesi verisi bulunmadığından, çok küçük adım boyu kullanılarak elde edilen Heun çözümü referans çözüm olarak kabul edilmiştir.
Euler ve Heun yöntemleri ile elde edilen çözümler, bu referans çözüme göre Karekök Ortalama Hata (RMSE) metriği kullanılarak karşılaştırılmıştır. Bu sayede yöntemlerin doğruluk düzeyleri nicel olarak değerlendirilmiştir.

2.6 Karmaşıklık Analizi

Her iki yöntem de her zaman adımı için sabit sayıda işlem gerçekleştirdiğinden, zaman karmaşıklıkları adım sayısı nnn ile doğru orantılıdır. Buna göre:

- Euler yöntemi: O(n)
- Heun yöntemi: O(n)

Heun yöntemi, Euler yöntemine kıyasla her adımda daha fazla işlem gerektirmesine rağmen, doğruluk avantajı sayesinde tercih edilebilir bir yöntem olarak öne çıkmaktadır.

2.7 Kullanılan Teknolojiler

Bu çalışmada sayısal hesaplamalar ve grafik üretimleri **Python** programlama dili kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Uygulama ortamı olarak **Google Colaboratory** tercih edilmiştir. Veri işleme ve hesaplamalar için NumPy ve Pandas kütüphanelerinden, grafiklerin oluşturulması için ise Matplotlib kütüphanesinden faydalanılmıştır.

3. Uygulama

Bu bölümde, önceki kısımlarda tanımlanan matematiksel model ve sayısal yöntemler kullanılarak gerçekleştirilen uygulama adımları ayrıntılı olarak sunulmaktadır. Gerçek yağış verileri kullanılarak oluşturulan model, sayısal yöntemlerle çözülmüş ve elde edilen sonuçlar grafiksel ve sayısal olarak analiz edilmiştir.

3.1 Kullanılan Veri Seti

Bu çalışmada kullanılan yağış verileri, günlük ölçümlerden oluşan gerçek bir meteorolojik veri setinden elde edilmiştir. Veri seti,farklı lokasyonlara ait uzun dönemli yağış ölçümlerini içermektedir. Modelin daha anlamlı ve yorumlanabilir olması amacıyla tekbir lokasyo n seçilmiş ve analiz bu lokasyon üzerinden gerçekleştirilmiştir.
Çalışmada **Auckland** lokasyonuna ait, **1960–1969** yılları arasındaki **10 yıllık günlük yağış verisi** kullanılmıştır. Bu zaman aralığı,mevsimsel davranışın gözlemlenebilmesi ve sayısal yöntemlerin karşılaştırılabilmesi açısından yeterli uzunlukta bir veri seti sunmaktadır.
Veri setinde eksik veya hatalı gözlemler temizlenmiş, tarih bilgileri zaman ekseni olarak düzenlenmiş ve yağış verileri sayısal analiz için uygun hale getirilmiştir.

3.2 Yağış Verisinin Sayısal Olarak Modellenmesi

Ham yağış verileri günlük ölçümlerden oluştuğu için oldukça düzensiz ve ani değişimler içermektedir. Bu tür bir veri yapısının doğrudan diferansiyel denklem içerisinde kullanılması, sayısal çözüm sürecinde kararsızlıklara yol açabilmektedir.
Bu nedenle yağış verisi, yıllık periyodik davranış gösterdiği varsayımı altında sinüzoidal bir fonksiyon ile yaklaşık olarak modellenmiştir. En Küçük Kareler yöntemi kullanılarak elde edilen bu model, yağış verisinin ortalama ve mevsimsel davranışını temsil etmektedir.
Gerçek yağış verisi ile elde edilen model çıktısı grafiksel olarak karşılaştırılmış ve modelin ani pikleri birebir yakalamasa da uzun dönemli davranışı başarılı bir şekilde temsil ettiği gözlemlenmiştir. Bu yaklaşım, diferansiyel denklem çözümü için yeterli ve fiziksel olarak anlamlı bir giriş fonksiyonu sağlamaktadır.

3.3 Diferansiyel Denklemin Sayısal Çözümü

Modelleme aşamasında elde edilen yağış fonksiyonu $R(t)$, rezervuar su seviyesini tanımlayan diferansiyel denklemde giriş fonksiyonu olarak kullanılmıştır. Başlangıç koşulu olarak rezervuarın başlangıç su seviyesi belirlenmiş ve çözüm süreci bu koşul altında başlatılmıştır.
Diferansiyel denklem, ileri Euler yöntemi ve Geliştirilmiş Euler (Heun) yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Hesaplamalarda zaman adımı olarak $\Delta t=1$ gün seçilmiştir. Bu adım boyu, hem hesaplama maliyeti hem de çözüm doğruluğu açısından uygun bir denge sağlamaktadır.

3.4 Adım Adım Sayısal Çözüm Süreci

Sayısal çözüm sürecinde her iki yöntem için aşağıdaki adımlar izlenmiştir:

1.Başlangıç su seviyesi tanımlanmıştır.
2.Yağış fonksiyonu kullanılarak her zaman adımında diferansiyel denklemin sağ tarafı hesaplanmıştır.
3.Euler yöntemi ile bir sonraki zaman adımındaki su seviyesi tahmin edilmiştir.
4.Heun yönteminde, ilk tahmin üzerinden ikinci bir eğim hesaplanarak ortalama eğim kullanılmıştır.
5.Bu işlemler tüm zaman aralığı boyunca tekrarlanmıştır.
Elde edilen sonuçlar zamana bağlı olarak grafiksel biçimde gösterilmiş ve yöntemlerin davranışları karşılaştırılmıştır.

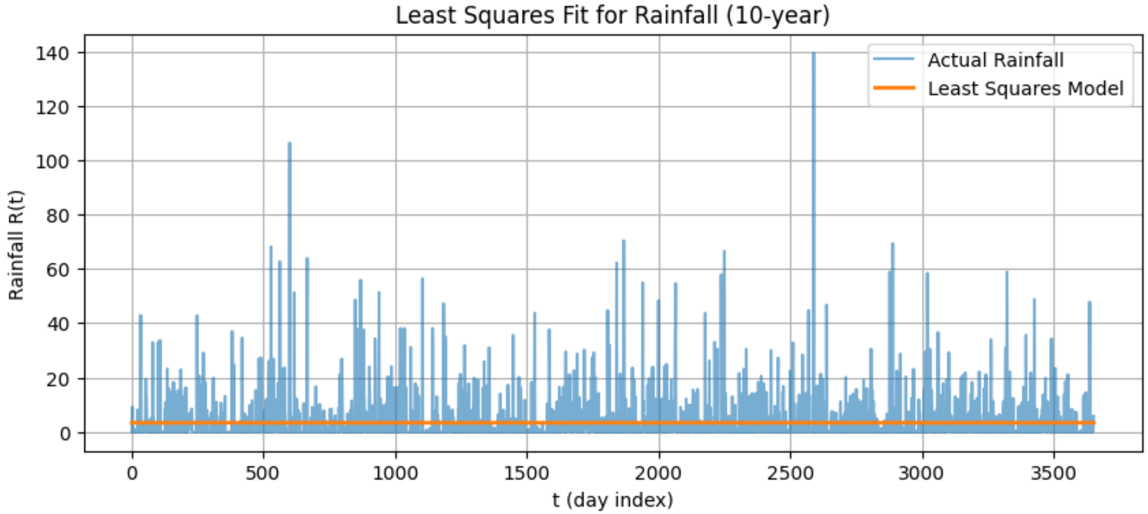
3.5 Hata Analizi ve Karşılaştırmalar

Gerçek rezervuar su seviyesi ölçümleri bulunmadığından, çok küçük adım boyu ($\Delta t=0.01$) kullanılarak Heun yöntemi ile elde edilen çözüm referans çözüm olarak kabul edilmiştir. Euler ve Heun yöntemleri ile elde edilen çözümler, bu referans çözüme göre karşılaştırılmıştır.
Hata ölçütü olarak Karekök Ortalama Hata (RMSE) kullanılmıştır. Farklı adım boyları için yapılan analizlerde, adım boyu küçüldükçe her iki yöntemin de referans çözüme yaklaştığı gözlemlenmiştir. Euler yöntemi, daha büyük adım boylarında Heun yöntemine kıyasla daha yüksek hata üretmiştir.

3.6 Grafiksel Analiz

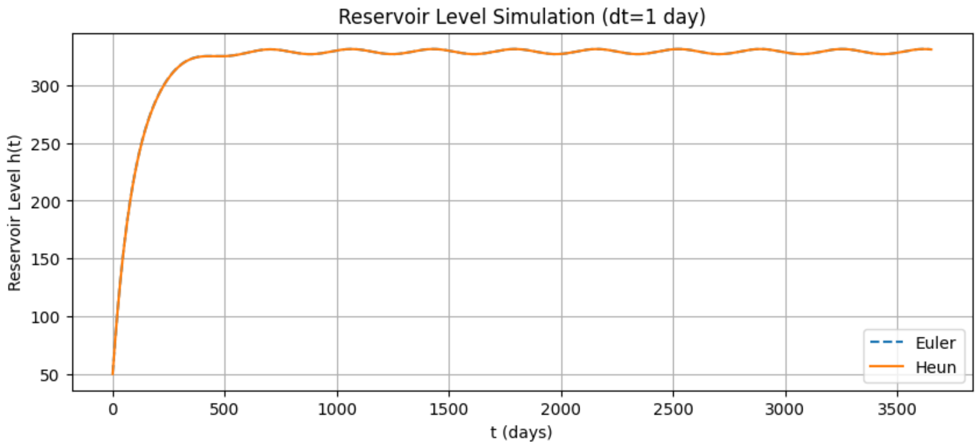
Grafiksel analizler, kullanılan sayısal yöntemlerin sistem üzerindeki etkisini görsel olarak değerlendirmek açısından önemli bilgiler sunmaktadır. Bu çalışmada elde edilen grafikler; yağış verisinin modellenmesi, diferansiyel denklemin sayısal çözümü ve kullanılan nümerik yöntemlerin karşılaştırılması amacıyla incelenmiştir. Grafikler aracılığıyla, modelin gerçek veriye uyumu, Euler ve Heun yöntemlerinin çözüm davranışları ve yöntemler arasındaki farkın zamana bağlı değişimi değerlendirilmiştir. Bu analizler, seçilen adım boyunda sistemin kararlılığını ve yöntemlerin doğruluk düzeylerini yorumlamaya olanak sağlamaktadır.[1], [3]

Grafik 3.1



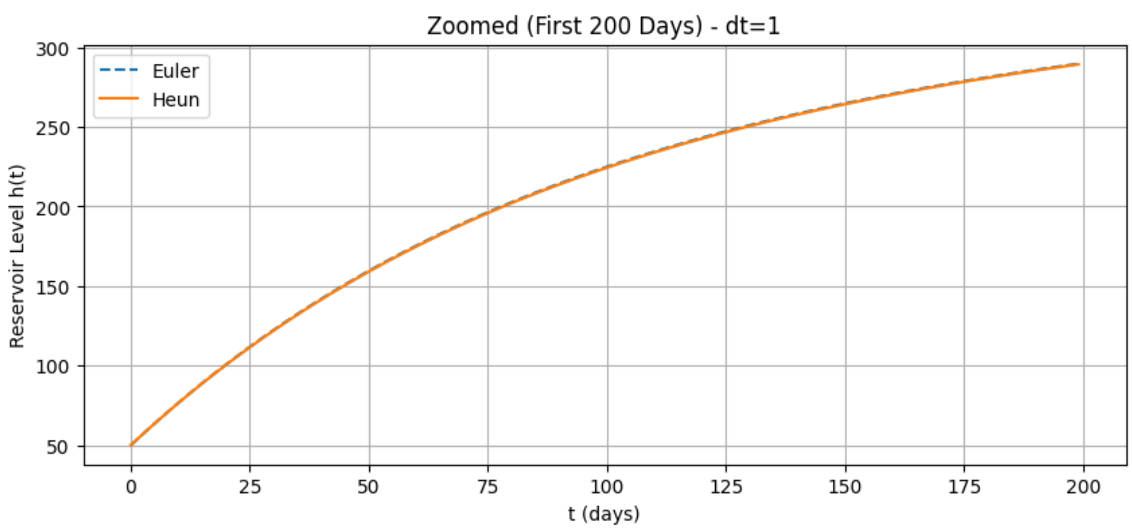
Bu grafikte, Auckland bölgesine ait gerçek günlük yağış verileri ile en küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilen sinüzoidal yağış modeli birlikte gösterilmiştir. Gerçek verilerde günlük ölçümlerin doğası gereği ani ve düzensiz değişimler gözlemlenirken, modelin bu ani pikleri birebir temsil etmediği görülmektedir. Buna karşın, modelin uzun dönemli ve mevsimsel eğilimi başarılı bir şekilde yakaladığı söylenebilir. Bu durum, elde edilen yağış modelinin diferansiyel denklem çözümünde giriş fonksiyonu olarak kullanılmasının uygun olduğunu göstermektedir.

Grafik 3.2



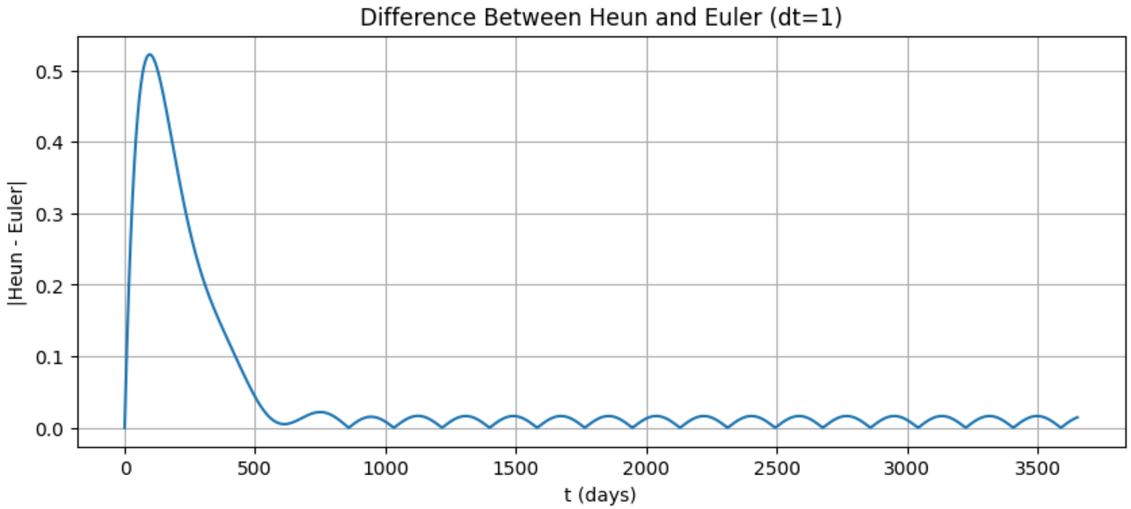
Bu grafikte, rezervuar su seviyesinin zamana bağlı değişimi Euler ve Heun yöntemleri kullanılarak hesaplanmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Δt=1 gün adım boyu için her iki yöntemin de neredeyse çakışan çözümler ürettiği görülmektedir. Bu durum, seçilen adım boyunda sistemin sayısal olarak kararlı olduğunu ve Euler yönteminin bu problem için yeterli doğruluk sağladığını göstermektedir.

Grafik 3.3



Bu grafikte, Euler ve Heun yöntemleri arasındaki farkın daha net gözlemlenebilmesi amacıyla ilk 200 günlük zaman aralığı büyütülerek gösterilmiştir. Her ne kadar fark oldukça küçük olsa da, Heun yönteminin Euler yöntemine kıyasla daha düzgün ve kararlı bir çözüm sunduğu görülmektedir. Bu sonuç, özellikle daha uzun zaman aralıklarında Heun yönteminin daha güvenilir bir yaklaşım olduğunu desteklemektedir.

Grafik 3.4



Bu grafikte, Euler ve Heun yöntemleri ile elde edilen çözümler arasındaki mutlak farkın zamana bağlı değişimi gösterilmektedir. Başlangıçta farkın artış gösterdiği, ancak zamanla sınırlı kaldığı ve büyümediği gözlemlenmiştir. Bu durum, her iki yöntemin de uzun vadede kararlı çözümler ürettiğini göstermektedir. Ayrıca, farkın sınırlı kalması Heun yönteminin daha yüksek doğruluk sunduğunu, ancak Euler yönteminin de uygun adım boylarında kullanılabilir olduğunu ortaya koymaktadır.

4. DENEYSEL SONUÇLAR

Bu bölümde, önceki bölümlerde sunulan grafiksel analizler temel alınarak elde edilen bulgular özetlenmiş ve kullanılan sayısal yöntemlerin performansları değerlendirilmiştir. Gerçek yağış verilerine dayalı olarak oluşturulan modelin davranışı ile Euler ve Heun yöntemlerinin doğruluk ve kararlılık özellikleri karşılaştırılmıştır.[4]

4.1 Yağış Modelinin Sistem Üzerindeki Etkisi

Grafiksel analizlerde (Şekil 3.1), en küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilen yağış modelinin gerçek yağış verisinin uzun dönemli ve mevsimsel davranışını başarılı bir şekilde temsil ettiği görülmüştür. Model, günlük ani değişimleri birebir yakalamamakla birlikte, rezervuar su seviyesinin genel eğilimini incelemek açısından yeterli bir giriş fonksiyonu sunmaktadır.
Bu sonuç, yağış modelinin diferansiyel denklem içerisinde kullanılmasının fiziksel olarak anlamlı olduğunu ve sistem davranışını bozmadığını göstermektedir.

4.2 Euler ve Heun Yöntemlerinin Kararlılığı

Euler ve Heun yöntemleri ile elde edilen rezervuar su seviyesi çözümleri incelendiğinde (Şekil 3.2), $\Delta t=1$ gün adım boyu için her iki yöntemin de neredeyse çakışan sonuçlar ürettiği gözlemlenmiştir. Bu durum, seçilen adım boyunda sistemin sayısal olarak kararlı olduğunu göstermektedir.
İlk 200 günlük zaman aralığına odaklanan büyütülmüş grafiklerde (Şekil 3.3), Euler ve Heun yöntemleri arasındaki farkın küçük olmakla birlikte mevcut olduğu görülmüştür. Heun yöntemi, Euler yöntemine kıyasla daha düzgün ve pürüzsüz bir çözüm sunmuş, bu da daha yüksek doğruluk sağladığını ortaya koymuştur.

4.3 Doğruluk ve Yöntem Karşılaştırması

Euler ve Heun yöntemleri arasındaki mutlak farkın zamana bağlı değişimi incelendiğinde (Şekil 3.4), farkın başlangıçta artış gösterdiği ancak zamanla sınırlı kaldığı ve büyümediği tespit edilmiştir. Bu durum, her iki yöntemin de uzun vadede kararlı çözümler ürettiğini göstermektedir.
Bununla birlikte, farkın sınırlı kalması ve Heun yönteminin Euler yöntemine göre daha düşük hata üretmesi, Heun yönteminin doğruluk açısından daha avantajlı olduğunu ortaya koymaktadır. Euler yöntemi ise uygun adım boyları seçildiğinde kabul edilebilir doğruluk sağlamakta ve düşük hesaplama maliyeti nedeniyle pratik bir alternatif olarak değerlendirilebilmektedir.

4.4 Genel Değerlendirme

Elde edilen deneysel sonuçlar, rezervuar su seviyesi probleminin sayısal olarak başarılı bir şekilde çözülebildiğini göstermektedir. Kullanılan yağış modeli, sistemin genel davranışını temsil etmekte yeterli olmuş; Euler ve Heun yöntemleri ise kararlı çözümler üretmiştir.
Sonuç olarak, bu problem için Euler yöntemi basit ve hızlı bir yaklaşım sunarken, Heun yöntemi daha yüksek doğruluk gerektiren durumlar için daha güvenilir bir alternatif olarak öne çıkmaktadır.

5. TARTIŞMA

Bu bölümde, çalışmadan elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş; kullanılan modelin varsayımları, nümerik yöntemlerin performansları ve çalışmanın sınırlılıkları tartışılmıştır.

5.1 Model Varsayımlarının Değerlendirilmesi

Bu çalışmada kullanılan yağış verisi, gerçek ölçümlere dayanmasına rağmen diferansiyel denklem içerisinde en küçük kareler yöntemi ile elde edilen sinüzoidal bir fonksiyon ile temsil edilmiştir. Bu yaklaşım, yağışın uzun dönemli ve mevsimsel davranışını başarılı bir şekilde modellemektedir. Ancak günlük ani ve ekstrem yağış olaylarının bu model tarafından tam olarak yansıtılamadığı görülmektedir.
Benzer şekilde, rezervuardan çıkan su miktarı su seviyesine bağlı doğrusal bir terim ve sabit bir tüketim katsayısı ile modellenmiştir. Gerçek sistemlerde bu çıkışlar; mevsimsel tüketim değişimleri, buharlaşma ve kontrol mekanizmaları gibi daha karmaşık faktörlere bağlıdır. Bu nedenle kullanılan model, sistemi basitleştirilmiş bir çerçevede temsil etmektedir.

5.2 Hata Analizi ve Yöntem Karşılaştırması

Sayısal çözümler sonucunda elde edilen grafikler incelendiğinde, Euler ve Heun yöntemleri arasındaki farkın zamana bağlı olarak değiştiği görülmüştür. Özellikle başlangıç aşamasında farkın artış gösterdiği, ancak zamanla sınırlı kaldığı ve büyümediği tespit edilmiştir. Bu durum, her iki yöntemin de uzun vadede kararlı çözümler üretebildiğini göstermektedir.
Heun yöntemi, Euler yöntemine kıyasla daha küçük hata üretmiş ve sayısal çözüm boyunca daha tutarlı bir davranış sergilemiştir. Bu sonuç, Heun yönteminin doğruluk açısından daha avantajlı olduğunu ortaya koymaktadır. Buna karşın Euler yöntemi, uygun adım boyları seçildiğinde kabul edilebilir doğruluk sağlamakta ve hesaplama maliyeti açısından pratik bir alternatif sunmaktadır.

5.3 Yöntemlerin Güçlü ve Zayıf Yönleri

İleri Euler yöntemi, algoritmik sadeliği ve düşük hesaplama maliyeti nedeniyle hızlı prototipleme ve kaba tahminler için avantajlıdır. Ancak doğruluk gereksiniminin yüksek olduğu durumlarda, küçük zaman adımlarının seçilmesi zorunlu hale gelmekte ve bu durum yöntemin dezavantajı olarak ortaya çıkmaktadır.
Heun yöntemi ise ek hesaplama adımı gerektirmesine rağmen, daha yüksek doğruluk ve kararlılık sunmaktadır. Özellikle zaman adımının büyütülmesi durumunda, Euler yöntemine kıyasla daha güvenilir sonuçlar üretmektedir. Bu nedenle doğruluk ve stabilitenin ön planda olduğu problemlerde Heun yöntemi daha uygun bir tercih olarak değerlendirilebilir.[1], [2], [3]

5.4 Sınırlılıklar ve Alternatif Yaklaşımlar

Çalışmanın temel sınırlılığı, rezervuar su seviyesine ait gerçek ölçüm verisinin bulunmamasıdır. Bu nedenle hata analizi, mutlak fiziksel doğruluk değerlendirmesi yerine yöntemlerin birbirlerine göre sayısal performanslarının karşılaştırılması şeklinde yorumlanmalıdır.
Alternatif olarak, daha yüksek mertebeden Runge–Kutta yöntemleri kullanılarak sayısal çözüm doğruluğu artırılabilir. Ayrıca yağış ve çıkış terimlerinin doğrusal olmayan fonksiyonlarla modellenmesi, gerçek sistem davranışının daha iyi temsil edilmesini sağlayabilir. Gelecek çalışmalarda gerçek rezervuar su seviyesi verilerinin kullanılması durumunda, model–veri uyumu daha kapsamlı bir şekilde değerlendirilebilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER
6.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, gerçek günlük yağış verileri kullanılarak bir rezervuarın su seviyesinin zamana bağlı değişimi matematiksel olarak modellenmiş ve elde edilen diferansiyel denklem sayısal yöntemler yardımıyla çözülmüştür. Yağış verisi, en küçük kareler yöntemi kullanılarak sürekli bir fonksiyon haline getirilmiş ve sistemin giriş fonksiyonu olarak kullanılmıştır.
Rezervuar su seviyesi denklemi, ileri Euler ve Geliştirilmiş Euler (Heun) yöntemleri kullanılarak çözülmüş; elde edilen çözümler grafiksel ve sayısal olarak karşılaştırılmıştır. Yapılan analizler, uygun adım boyları seçildiğinde her iki yöntemin de kararlı çözümler üretebildiğini göstermiştir. Bununla birlikte, Heun yönteminin Euler yöntemine kıyasla daha yüksek doğruluk sunduğu ve uzun vadede daha güvenilir sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

6.2 Çalışmanın Katkıları

Bu çalışma kapsamında:

- Zamana bağlı yağış verileri içeren bir rezervuar modeli başarıyla oluşturulmuştur.
- Gerçek veri kullanılarak nümerik çözüm sürecine fiziksel anlam kazandırılmıştır.
- Euler ve Heun yöntemleri karşılaştırılarak sayısal yöntemlerin doğruluk ve kararlılık özellikleri analiz edilmiştir.
- Adım boyu seçiminin nümerik çözüm doğruluğu üzerindeki etkisi açık bir şekilde ortaya konmuştur.

Bu yönleriyle çalışma, nümerik analiz dersinde ele alınan yöntemlerin gerçek hayata ait bir mühendislik problemi üzerinde uygulanmasını ve karşılaştırılmasını sağlamaktadır.

6.3 Öneriler ve Gelecek Çalışmalar

Gelecek çalışmalarda aşağıdaki geliştirmeler yapılabilir:

- Daha yüksek mertebeden nümerik yöntemler (örneğin Runge–Kutta yöntemleri) kullanılarak çözüm doğruluğu artırılabilir.
- Yağış ve çıkış terimleri doğrusal olmayan fonksiyonlarla modellenerek sistemin fiziksel gerçekçiliği geliştirilebilir.
- Gerçek rezervuar su seviyesi ölçümleri kullanılarak model–veri uyumu doğrudan değerlendirilebilir.
- Daha uzun zaman aralıkları ve farklı veri setleri ile modelin genellenebilirliği incelenebilir.

Bu tür geliştirmeler, hem modelin doğruluğunu hem de nümerik çözüm kalitesini artıracaktır.

KAYNAKÇA

[1] S. C. Chapra and R. P. Canale, Numerical Methods for Engineers, 7th ed.
New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2015.

[2] R. L. Burden and J. D. Faires, Numerical Analysis, 9th ed.
Boston, MA, USA: Brooks/Cole, 2011.

[3] F. P. Incropera, D. P. DeWitt, T. L. Bergman, and A. S. Lavine,
Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 6th ed.
Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2007.

[4] J. Stoer and R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, 3rd ed.
New York, NY, USA: Springer, 2002.

[5] Kaggle, "Daily Delhi Climate Dataset," 2020. [Online].
Available: https://www.kaggle.com/datasets/sumanthvrao/daily-climate-time-series