振動與波

2021 年

作者：李宥頡

組織：National Taiwan University

序

物理學家習慣按照物質運動的型態, 把古典物理分成力學, 熱學, 電學, 光學等子學科。然而某些形式的運動是橫跨所有這些學科的, 其中最典型的就是振動與波。在力學方面有力學波，在電磁學有電磁震盪和電磁波，甚至到了近代物理中更是延伸出物質波的概念，接續發展的量子力學也是以薛丁格波方程（Schrödinger Equation）為中心的波動力學。以上種種都表明，振動與波在物理的重要性，可惜的是在目前中學物理的課程安排下，由於缺乏相關的數學基礎，並不能延伸更多概念，故此講義將會循序漸進，透過基本微分方程的介紹切入到各種振盪。本書內容主要參考以下幾本書籍，並會以此處的縮寫為主。

- 赵凯华, et al. 新概念物理教程——力学 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2004. (新概念力學)
- 程稼夫. " 中学奥林匹克竞赛力学篇." 第二版. （程力）
- 舒幼生. " 物理类: 力学." (2005). （舒力）
- Halliday, David, Robert Resnick, and Jearl Walker. Fundamentals of physics. John Wiley & Sons, 2013. (Halliday)
- Kittel, Charles. Mechanics Berkeley Physics Course Vol 1. Tata Macgrawhill Publishing Company, 1965.
- Crawford, Frank S. Berkeley physics course: Waves. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1968.

目錄

第 1 章 基本知識

1.1 物理學中的微分

運動學（Kinetics）涉及質點與物體的運動，我們主要關注物體的位置、速度、加速度等物理量隨時間的變化。在描述一個物理系統時，需要有對應的座標系，最常見的為笛卡爾座標（Cartesian Coordinate），也就是以相互正交的座標軸 x,y,z 形成座標系。所謂運動方程（Equation of motion）即為給定任意時間 t，可知對應的位置 (x,y,z)，以下內容先以一維的直線運動為例，我們將探討運動學中的微分。

1.2 微分方程

1.3 泰勒展開 Taylor Expansion

1.4 位能曲線

位能曲線是討論物體在保守力場中運動的重要工具，我們知道，位能是位置的函數，即

$$U = U(\vec{r}) \tag{1.1}$$

在一維情況下為

$$U = U(x) \tag{1.2}$$

因此若我們做 $U - x$ 圖，此圖能給我們許多重要的訊息，以下將一一介紹。

1. 根據位能的定義，負的保守力作功為位能變化量，即 $W_{con} = -\Delta U$，若取無窮小位移 dx，則應有以下關係
$$F_{con} dx = -dU \tag{1.3}$$
或是也可以解釋成保守力的定義為，負的位能對位置微分
$$F_{con} = -\frac{dU}{dx} \tag{1.4}$$
故在 $U - x$ 圖中，曲線的負斜率為保守力，斜率的絕對值越大，代表所受保守力的量值越大。
2. 在 $U - x$ 圖中做水平線，代表總能量為 E，由於在此書大部分情況並沒有其他能量的出現，因此 E 也可以認為是力學能（動能加位能）。代表 E 的水平線減去對應位置 x 下的位能 U，即為動能 E_k。動能的公式 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 代表物體運動的劇烈程度，由公式可知，動能不可能為負值。因此若水平線 E 低於位能曲線之處，代表具有該能量 E 的物體不可能到達此位置，此概念就是力學中十分重要的位能井（Potential Well）。
3. 位能曲線的局部最低點，也就是微積分所說的極小值（local minimum），在微積分裡極值可能發生在一次微分為零的地方，也就是 $\frac{dU}{dx} = 0$，所以此處所受的保守力亦為零，相當於合力為零，根據牛頓定律，應處在靜止或等速直線的平衡狀態。對微積分比較有感覺的同學應該此時會有疑問，一次微分為零的位置也有可能對應到位能最大值，那該怎麼處理？我們知道對於物體的平衡，可以分成三種，穩定平衡（Stable Equilibrium），不穩定平衡（Unstable Equilibrium），以及隨遇平衡（Neutral Equilibrium），其判別法在中學課本中為，若給一個偏離其平衡位置不遠的位移，觀察物體是否能回到平衡位置。若能回到原平衡位置，即為穩定平衡，若不能，為不穩定平衡，最特殊的為隨遇平衡，物體會在其他位置建立新的平衡。以位能的角度其實就是在平衡的條件下（$\frac{dU}{dx} = 0$），討論二次微分 $\frac{d^2U}{dx^2}$ 的值，若 $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$，此處為位能極小值，代表附近的位能都比此處高，簡單畫附近的切線，可知偏離平衡位置的力會使物體傾向回到平衡位置。若 $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$，此處為位能極大值，代表附近的位能都比此處低，簡單畫附近的切線，可知偏離平衡位置的力會使物體離開原有的平衡位置。若 $\frac{d^2U}{dx^2} = 0$ 或是不存在，即為隨遇平衡。由於在振動裡面我們需要探討的運動多為穩定平衡下的振盪，代表我們著重在可以回到原平衡位置的運動。

4. 振動主要發生在位能極小值附近。結合上述的第二第三點，我們可以發現在給定一水平線 E 時，位能極小值同時代表動能極大值，當物體向逐漸遠離位能極小值時，會受到一反向的保守力（由切線可知），使物體動能減少，位能增加，此過程持續到所有能量轉化成位能，動能此時為零，相當於運動的折返點，便會折回位能極小處，以此方式來回振動。

1.5 例題

例題 1.1

水面上浮沉的木塊是在作簡諧振動嗎？如果是，其周期為多少？

[2] ♣

解 是簡諧振動，其周期為 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho g}}$。

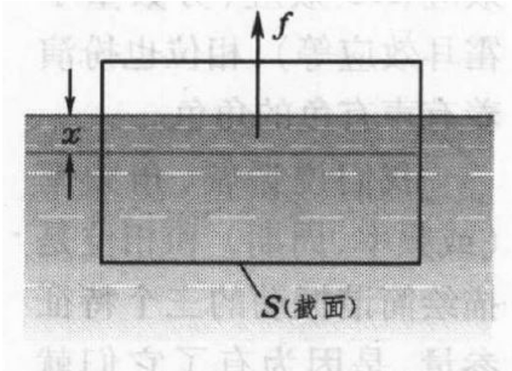

图 6－4 例题 2—— 沉浮的木块

例題 1.2

如圖 6-5 所示，勁度係數為 k質量為 M 的彈簧振子靜止地放置在光滑的水平面上，一質量為 m 的子彈以水平速度 v_1 射入 M 中，與之一起運動。選 mM 開始共同運動的時刻為 $t = 0$，求固有角頻率 振幅和初相位。

[3] ♣

解 固有角頻率 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$，振幅 $A = \sqrt{\frac{m^2}{k(M+m)}}v_1$，初相位 $\varphi_0 = \pi/2$。

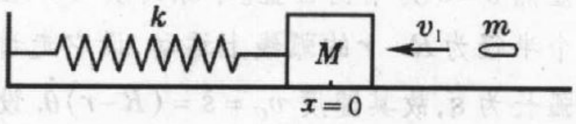

图 6－5 例题 3—— 子弹射入弹簧振子

例題 1.3

如圖 6-6 所示，在一勁度係數為 k 的彈簧下面掛一個質量為 M 的水桶，以振幅 A_0 上下振動。水桶底上有一小洞，水慢慢從中向外滲出。當水桶從上向下經過平衡點時，一滴質量為 m 的水大到表面張力不能支撐的地步而滴落下來。求此後水桶的運動情況。

[4] ♣

解 水滴滴落後水桶仍作簡諧振動，不過它的角頻率由 $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ 變為 $\omega = \sqrt{k/(M-m)}$，新平衡位置在原來之上距離為 mg/k 的地方。

取 x 軸向上，設水滴滴落後水桶的震動為 $x = Acos(\omega t + \varphi_0)$，取水滴滴落的時刻為 $t = 0$，則在此時 $x = Acos\varphi_0 = -mg/k$，$\dot{x} = -\omega Asin\varphi_0 = -\omega_0 A_0$。

由此得 $A = \sqrt{(\frac{mg}{k})^2 + (\frac{\omega_0}{\omega}A_0)^2} = \sqrt{(\frac{mg}{k})^2 + \frac{M-m}{M}{A_0}^2}$，$tan\varphi_0 = -\frac{kA_0}{mg}\sqrt{\frac{M-m}{M}}$。

從 $tan\varphi_0 < 0 cos\varphi_0 < 0$ 和 $sin\varphi_0 > 0$ 知 φ_0 應在第二象限。

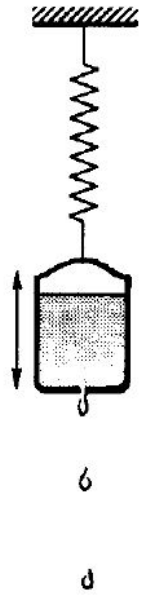

图 6－6 例题 4—— 弹簧与漏桶

例題 1.4

(1) 圖 6-7 為一個線形三原子分子 A_2B 的模型。假定相鄰原子之間的結合力是彈性力，它們正比於原子的間距，求分子可能的縱向運動形式和相應的振動角頻率。

(2) CO_2 分子的兩個振動縱模的頻率分別是 $3.998x10^{13}$Hz 和 $7.042x10^{13}$Hz，試求 CO 鍵的彈性勁度係數 k。原子質量單位 $u = 1.660x10^{-27}$kg，碳的原子量 =12，氧的原子量 =16。

[5]

解

(1) $\omega_1{}^2 = \frac{k}{m_A}$，$\omega_2{}^2 = \frac{k(2m_A+m_B)}{m_A m_B}$，$\omega_3{}^2 = 0$。

ω_1 代表的振動模式為：中央原子不動，兩側原子相對運動。

ω_2 代表的振動模式為：兩側原子相對靜止，它們整體與中央原子作相對運動。

ω_1 和 ω_2 便是這種 A_2B 線形分子兩個可能的縱向振動模式的固有頻率。而零頻 ω_3 代表整個分子剛性平動，並非內部的振動模式。

(2) $k_1 = 1617N/m$，$k_2 = 1418N/m$。如果模型是對的，則算出的兩個 k 應該相等。現在的結果表明，這個化學鍵的經典彈簧模型大體上還能說明一些問題，但不夠精確。

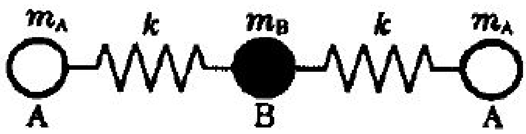

图 6－7 例题 5—— 三原子分子 A_2B 的振动

1.6 振動

第 2 章 諧振子 Harmonic Oscillator

2.1 彈簧振子