



物理學科能力競賽

2021 年

作者：李宥頡

組織：National Taiwan University

第 1 章 物理學科能力競賽

1.1

例題 1.1

一長度為 L 的均勻繩子置於水平的桌面上，今將此繩拉直並慢慢拉出桌子邊緣，使得有一部分的繩子懸吊在桌子邊緣(如下圖一所示)。若繩與桌面之摩擦係數為 μ ，

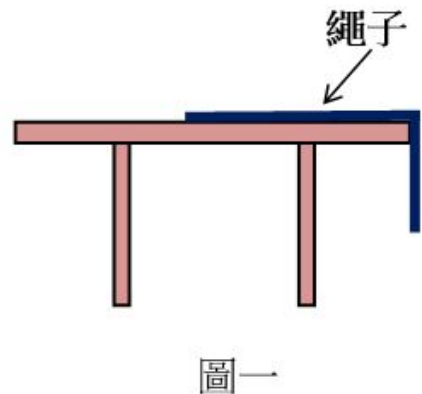
- (1) 請問此系統達靜態平衡時，懸吊在桌邊之部分繩子，其最大長度為多少？
- (2) 承(1)，將懸吊在桌邊繩子的末端施一向下的極微小拉力，使得整條繩子向下滑，請問當整條繩子離開桌面時，其速度是多少？

[1]

解

$$(1) x_{max} = \mu L / (\mu + 1)$$

$$(2) v = \sqrt{\frac{gL}{\mu + 1}}$$



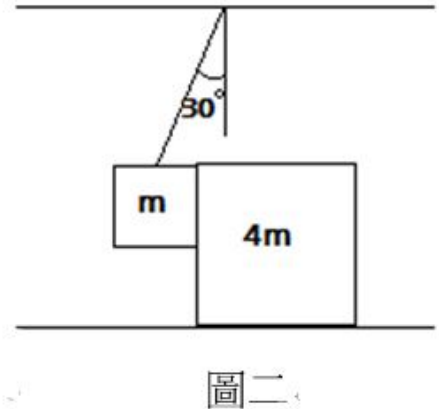
例題 1.2

一質量為 $4m$ 之大木塊置於一無摩擦力的水平桌面上，另一質量為 m 之小木塊用一不可伸縮的細繩懸吊且緊靠在大木塊的側面上 (如下圖二所示)，其細繩與鉛垂線之夾角為 30° 。起初先用手托住小木塊以免其推動大木塊，然後將手放開，使二木塊開始運動。求手放開之時刻，大小二木塊的加速度 a_l 及 a_s 分別為何？(用重力加速度 g 表示答案)

[2]



解 $a_l = \sqrt{3}g/16$, $a_s = g/8$



例題 1.3

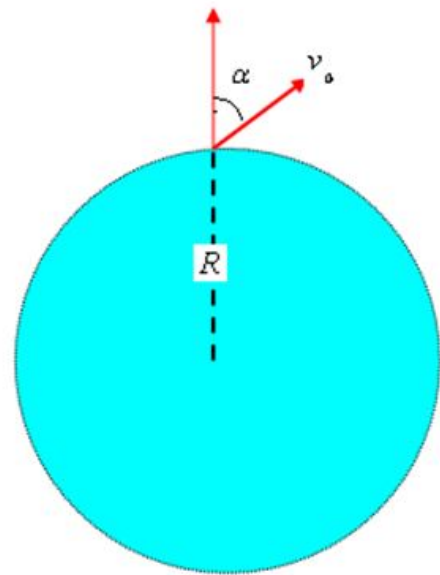
設地球為均勻球體 (質量 M 、半徑 R)，某質點 (質量 $m \ll M$) 自地球表面以初速 v_0 、與上空鉛垂線夾角 α 射出 (如下圖三所示)。(假設地球靜止，不計其他外力、本題只須考慮重力。 g 為地表重力加速度，可令 $g = \frac{GM}{R^2}$)

- (1) 若 $v_0 = \sqrt{gR}$ 、 $\alpha = 0^\circ$ 質點離地表之最高距離 $h = ?$
- (2) 若 $v_0 = \sqrt{1.2gR}$ 、 $\alpha = 90^\circ$ 質點離地表之最高距離 $h = ?$
- (3) 若 $v_0 = \sqrt{gR}$ 、 $0 < \alpha < 90^\circ$ 質點離地表之最高距離 $h = ?$

[3]



解



圖三

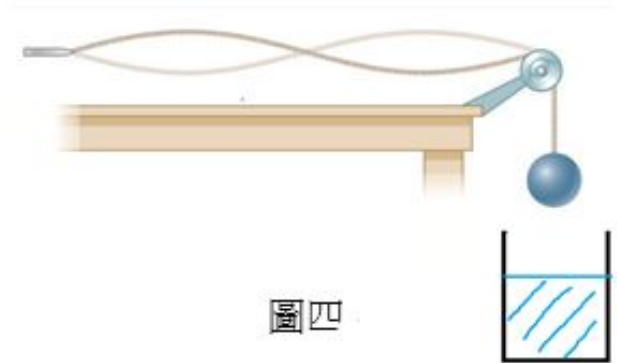
例題 1.4

- (1) 如下圖四所示，一條水平弦線的一端與振動中的簧片連接，另一端繞過定滑輪，懸吊著密度為 d_1 質量為 m 的實心銅球，此時弦線以其第二諧頻振動。將銅球下方盛裝液體為 d_2 的容器舉高，使銅球完全浸在液體中，在此組態下，若弦線以其第三諧頻振動，求銅球半徑為何？
- (2) 今將此銅球從以上裝置卸下，改以一一長度為 L ，不可延展的金屬絲懸吊，並將此金屬絲的頂端固定住。當敲擊金屬絲時，發現金屬絲會發出一基頻為 f 的聲音。若將此銅球三分之二的體積浸入密度為 d_2 的液體中，敲擊金屬絲時所發出的基頻的大小會為何？

[4]

解

- (1) $(\frac{5m}{12\pi d_2})^{1/3}$
 (2) $f\sqrt{1 - \frac{2d_2}{3d_1}}$



例題 1.5

如下圖五所示，為由厚度 L_a 的白松木與厚度 $S(S = 2L_a)$ 的磚塊所做成的隔熱牆橫切面。在白松木與磚塊之間夾著相同厚度 (R) 但不同熱傳導率 (k_1, k_2) 的兩層未知材質。白松木的熱傳導率為 k_a ，而磚塊的熱傳導率為 $k_s(k_s = 5k_a)$ 。牆的表面積為 A 。試問：

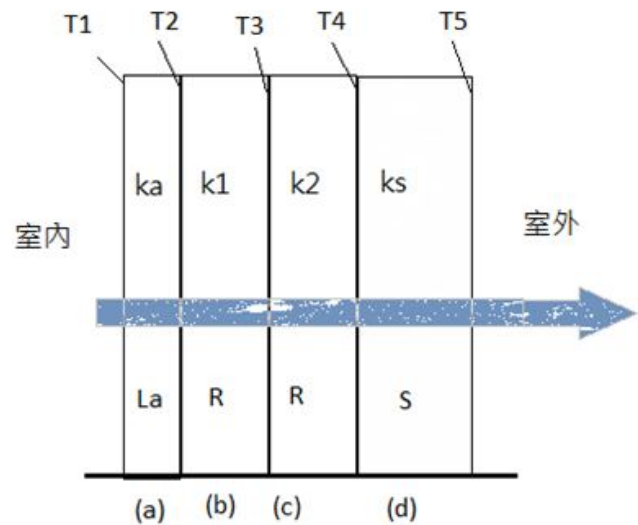
- (1) 在物理學中穩態的情況下，當通過牆的熱傳導達到穩態的情況下， $T_1 = 25^\circ\text{C}$ ， $T_2 = 20^\circ\text{C}$ 及 $T_5 = -10^\circ\text{C}$ 時， T_4 的溫度為何？
- (2) 在物理學中穩態的情況下，如果將兩個不同熱傳導率 (k_1, k_2) 的夾層，放置位置互換， T_3 的溫度會不會改變？導出 T_3 的大小與 k_1, k_2, T_2 及 T_4 的關係 (在物理學中穩態中 T_2 及 T_4 為已知)。
- (3) 現在設計一個保溫屋，在寒冷天氣下，讓室內保持室溫。從 (1)(2) 題目敘述及熱傳導的角度，在下圖的結構中，如果兩個不同熱傳導率夾層的厚度保持不變 (R 固定)，何種條件設計可以達成此目的？並說明你設計的物理解釋 (限 50 字內)

註：熱傳導速率 $P_{con} = \frac{Q}{t} = kA \frac{T_H - T_L}{L}$ ， Q ：所轉移的热量

[5]

解

- (1) -8°C
- (2) $T_3 = \frac{k_1 T_2 + k_2 T_4}{k_1 + k_2}$
- (3) 可以利用較小的 k_1 及 k_2 隔熱材質來完成。由於從屋內到屋外熱量的傳遞，經過熱傳導率低的介質的熱量傳遞的速率較慢。兩個介質交換位置並不會影響，主要是介質厚度。



圖五

例題 1.6

- (1) 二個相同之薄平凸透鏡互相對組，凸面朝內且鏡心互相接觸，空隙部分灌入折射率 1.65 之液體。平凸透鏡之折射率為 1.55，曲率半徑為 20 公分。求當一物體置於此組合元件之左方無限遠處，則成像位置為何？
- (2) 一個發散薄透鏡及一平凹面鏡具有相同之焦距 10 公分，一物體置於發散薄透鏡左方 15 公分處，且平凹面鏡置於發散薄透鏡右方 30 公分處。求此物體之成像相對於發散薄透鏡之位置？

[6]

**解**

- (1) 於此組合元件之左方 100 公分處。
- (2) 透鏡右方 6.18 公分。

例題 1.7

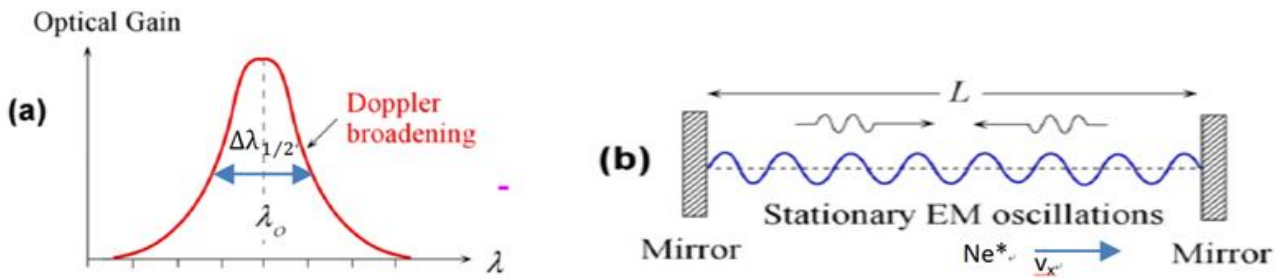
考慮一個 He-Ne 氣體雷射光學共振腔，其光學共振腔長度為 40cm，雷射光於共振腔中形成駐波，然後由一端出口離開共振腔。由於 Ne 氣體原子在受激發的情況下會一邊運動一邊發射出中心波長 (λ_0) 為 632.8nm 的雷射光，因此在計算共振腔所發出的雷射光波長時，就必須同時考慮 Ne 原子運動所造成之多普勒效應，與光學共振腔所能提供的駐波膜態的影響。假設 Ne 氣體原子以均方根速度 (v_x) 為 406m/s 沿 x 軸行進，對於所發射之雷射光在頻譜上的貢獻為拓寬其頻譜 (Doppler broadened) 使其頻譜半高寬擴增為 $\Delta f_{1/2} = \Delta f_{rms} (= 2f_0 v_x / c)$ ，其中 f_0 為中心頻，c 為光速)。求：

- (1) 中心頻率 f_0 為多少？
- (2) 頻譜半高寬 Δf_{rms} 為多少？
- (3) 波長半高寬 $\Delta \lambda_{1/2}$ 為多少？(提示： $\Delta \lambda_{1/2} / \Delta f_{rms}$ 等於 $d\lambda/df$ 為 λ 對 f 的微分)
- (4) 不同的共振膜態間，其膜態波長差距 $\Delta \lambda_m$ 多少？
- (5) 那麼這樣一個雷射共振腔大約可以有幾種雷射膜態？其波長分別為多少？

[7]

解

- (1) $4.74 \times 10^{14}/s$
- (2) 1.28GHz
- (3) 1.65pm
- (4) 0.501pm
- (5) 3 種 ($1.65/0.501 = 3$)，分別是 632.3nm, 632.8nm, 633.3nm



圖六

例題 1.8

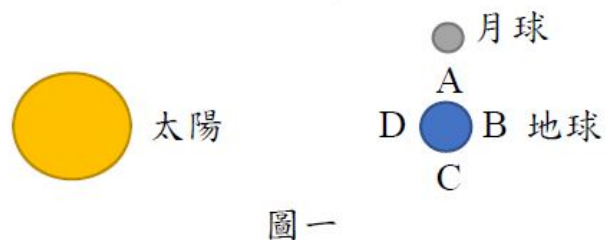
某日太陽、月球及地球的相對位置如圖一，已知太陽的質量為 1.98×10^{30} 公斤，月球的質量為 7.34×10^{22} 公斤，太陽距離地球 $R_s = 1.496 \times 10^{11}$ 公尺，月球距離地球為 $R_m = 3.84 \times 10^8$ 公尺，地球半徑為 $R_E = 6.37 \times 10^6$ 公尺。

- (1) 計算月球對地球的引力及太陽對地球的引力比值的絕對值。
- (2) 計算月球對地表 A 處與 D 處的引力差值及太陽對地表 A 處與 D 處的引力差值之比值的絕對值
(提示：因 $R_s \gg R_E$ 且 $R_m \gg R_E$ ，取差值可取至 R_E/R_m 的一次項即可，並利用此數學近似： $(1+x)^n \approx 1+nx$ 當 $x \approx 0$)。
- (3) 由 (1) 及 (2) 的計算結果來評論月球或太陽對潮汐現象的影響何者較大？
- (4) 將地球描繪成如上圖之圓形，於此圓外描繪地球上的海水（潮汐）高度分佈（請記得標上點 A,B,C,D 於圓上）。
- (5) 某觀測者於傍晚 6 點時位於點 C 的海岸邊，試問傍晚 6 點到 7 點時該觀測者所見的月亮形狀（畫圖並標明亮、暗區）及潮汐現象（漲潮或退潮）？

[1]

解

- (1) 0.00563 (or $1/177.73$)
- (2) 2.19 (or 2.21)
- (3) 由 (2) 知月球對潮汐現象的影響較大，因為潮汐現象和各處的重力差有關，和重力的絕對大小無關。
- (4)
- (5)



圖一

例題 1.9

一均勻木棒斜放於一內含某種液體的容器 (如圖二所示), $3/5$ 的棒長沉於一面底下, 棒子另一端固定於一可自由轉動的軸上。

- (1) 找出液體和棒子的密度比值。
- (2) 用手稍微增大棒子和器壁的夾角再放開, 棒子開始會於原平衡位置附近震盪, 若以同設備但改變液體密度為原液體密度的兩倍, 忽略液體流動及黏滯力的效應, 新的震盪週期 (A) 較原震盪週期大 (B) 較原震盪週期小 (C) 和原震盪週期相同。選 A 或 B 或 C, 請簡單解釋你的理由。
- (3) 用手稍微增大棒子和器壁的夾角再放開, 棒子開始會於原平衡位置附近震盪, 若以同設備同液體但將此實驗移至月球表面上進行, 忽略液體流動及黏滯力的效應, 新的震盪週期 (A) 較原震盪週期大 (B) 較原震盪週期小 (C) 和原震盪週期相同。選 A 或 B 或 C, 請簡單解釋你的理由。

[2]

解

- (1) $\frac{25}{21}$
- (2) (A); 題 (2) 及下題 (3) 是簡諧振盪的應用, 可以單擺 (擺線長 L) 於重力加速度 g 的重力場週期: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 來想, 本題中等效重力場的方向是沿著棒子的 (平衡位置) 方向, 當液體密度增加時棒子及器壁的夾角增加, 故等效重力 g 減少, 因此週期增加。
- (3) (A); 月球的重力加速度是地球的 $1/6$, 故週期增大



圖二

例題 1.10

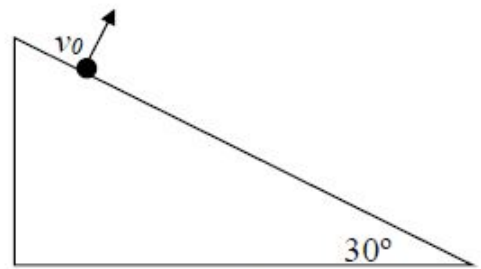
如圖三，在仰角 30° 的斜面上斜向拋射一質點，質量為 2kg ，初速 $v_0 = 7.5\text{m/s}$ 垂直斜面。若斜面夠長，質點落於斜面上（重力加速度 $g = 10\text{m/s}^2$ ）。

- (1) 質點落於斜面上的位移大小為何？
- (2) 質點飛行過程中任意區間，重力做功之最大量值為何？
- (3) 質點飛行過程中，俯角為 37° 時飛行軌跡之曲率半徑為何？

[3]

解

- (1) 7.5 m
- (2) 117.188 J
- (3) 2.747 m



圖三

例題 1.11

質量 M 半徑為 R 之實心球以初角速度 ω 繞水平軸轉動（轉動慣量為 $\frac{2}{5}MR^2$ ），如果它垂直掉落於地面且沒有彈跳，經 t 秒後做純滾動。

- (1) 求地面與球面之間的動摩擦係數。（以重力場強度 g 、 R 、 ω 及 t 表示）
- (2) 球落地到做純滾動之角位移為何？（以 ω 及 t 表示）
- (3) 球落地經過 $2t$ 秒，過程中摩擦力作功為何？（以 M 、 R 及 ω 表示）

[4]

**解**

- (1) $\mu = \frac{2R\omega}{7gt}$
- (2) $\theta = \frac{9}{14}\omega t$
- (3) $W = -\frac{MR^2\omega^2}{7}$

例題 1.12

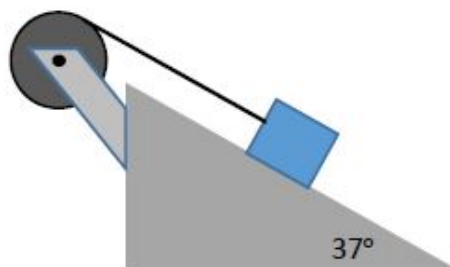
如圖所示，一個 3kg 的木塊靜止於仰角 37° 的斜面上，木塊與斜面之間的摩擦係數 $\mu = 0.4$ 。其中一端以質量可忽略不計的細線捲繞在質量與半徑分別為 1kg 與 10cm 的實心轉輪上，轉軸阻力可忽略。(重力加速度 $g = 10\text{m/s}^2$ ，轉輪之轉動慣量 $I(= MR^2/2)$ 需自行計算出量值。)

- (1) 木塊釋放後，轉輪的角加速度為多少弧度/秒²?
- (2) 木塊自釋放經 2 秒，重力做功為多少焦耳?

[1]

**解**

- (1) 24rad/s^2
- (2) 86.4 J



例題 1.13

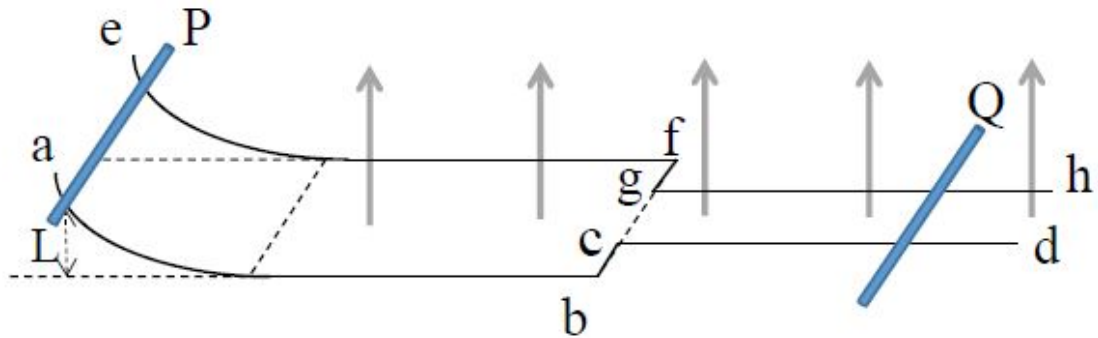
如圖所示，光滑平行導軌 $abcd$ 與 $efgh$ ，軌道的水平部分處於鉛直向上的均勻磁場中， ab 段軌道寬度為 cd 軌道寬度的 2 倍 ($\overline{ab} = \overline{bf} = 2\overline{cg} = 2\overline{dh}$)，軌道足夠長。將質量均為 m 的金屬棒 P 和 Q 分別置於軌道的 ab 段和 cd 段，將 P 從距離水平面軌道高度為 L 的地方由靜止釋放，使其自由下滑。當金屬棒 P 進入軌道的水平部分 (磁場區域)，一開始會產生感應電流在兩金屬棒與軌道形成的迴路中。

- (1) 當金屬棒 P 滑至水平 ab 段，且到達等速。此時金屬棒 P 和金屬棒 Q 的速度大小比值為何？
- (2) 承 (1)，金屬棒 P 速度大小為何？
- (3) 當金屬棒 P 滑入 cd 段經 2 秒再次到達等速，此 2 秒內金屬棒 Q 所受之平均磁力大小為何？

[2]

解

- (1) $\frac{v_P}{v_Q} = \frac{1}{2}$
- (2) $v_P = \frac{\sqrt{2gL}}{5}$, $v_Q = \frac{2\sqrt{2gL}}{5}$
- (3) $\frac{m\sqrt{2gL}}{10t}$



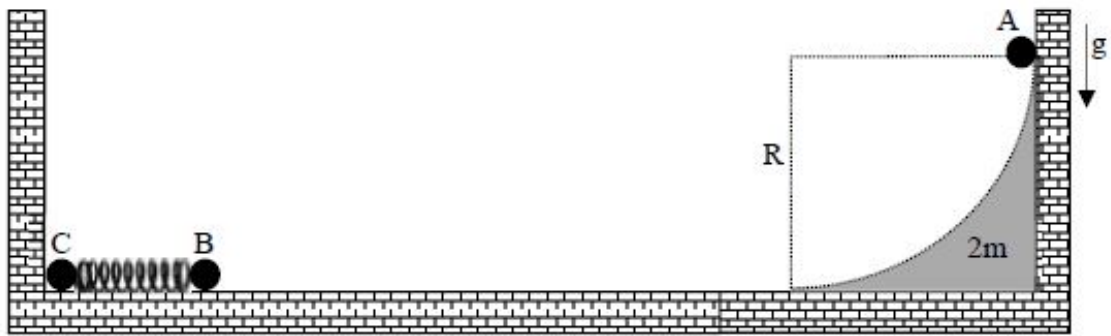
例題 1.14

- (1) 下圖右側為一個半徑為 R ，質量為 $2m$ 的四分之一圓弧狀光滑木塊 (如灰色區域所示)，緊靠在光滑的地面與牆上，將一質量為 m 的 A 質點從木塊頂端靜止釋放。求當木塊受牆面之最大正向力時，質點與圓心之連線與鉛直線的夾角為何？
- (2) 下圖左側為一個彈簧系統，由力常數為 k 的一條彈簧 (質量不計) 和兩個質量同為 m 的 B 質點與 C 質點所組成，C 質點輕靠牆壁。滑下木塊的 A 質點自右方撞向此彈簧系統，若碰撞後 A 質點與 B 質點就一直連在一起，且因牆壁之作用力，最後彈簧及三質點會一起向右運動，試求在 C 質點離開牆壁後的水平運動期間，彈簧長度的最大變化量為何？(以 m, g, k, R 表示之)
- (3) 若在上述的碰撞前，B 質點與 C 質點的質量分別改為 $2m$ 與 $3m$ ，A 質點質量不變，當經過與上述相同的過程後，請問此次彈簧長度的最大變化量是前一小題情況的幾倍？

[3]

解

- (1) 45°
 (2) $x = \sqrt{\frac{mgR}{3k}}$
 (3) $x = \sqrt{\frac{mv^2}{6k}}$ ，為前一小題情況的 1 倍



例題 1.15

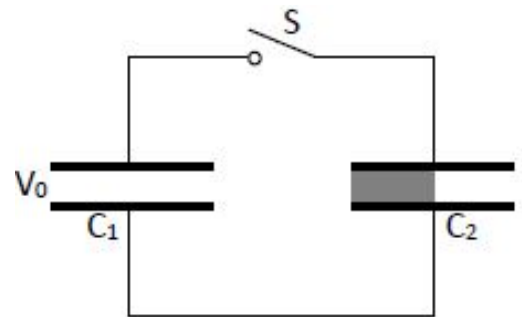
使平行板電容器 C_1 充電至電位差為 V_0 ，便將充電之電池移走，並將此電容器與一未充電的平行板電容器 C_2 相連 (電容器 C_2 為將介電常數 $\kappa = 3$ 的物質填入與 C_1 相同的平行電容器極板間之左半部分)，如圖所示，試問：

- (1) 當開關 S 連接後，電容器 C_1 的電位差為何？
- (2) C_2 極板上的電荷量為 C_1 電荷量的幾倍？
- (3) 開關 S 連接後，系統所儲存的能量是開關連接前的幾倍？

[4]

**解**

- (1) $V = \frac{1}{3}V_0$
- (2) C_2 的電荷量為 C_1 的 2 倍
- (3) 開關 S 連接後，系統所儲存的能量是開關連接前的 $\frac{1}{3}$



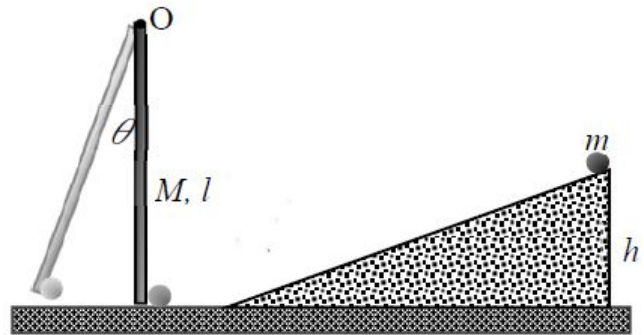
例題 1.16

如下圖，質量為 m 的質點從高度為 h 的光滑斜面下滑至光滑地面，與一垂直地面的均勻細棒碰撞並黏附其上，細棒一端懸掛在支點 O 上，另一端接近地面但並未接觸，其長度為 l ，質量為 M ，若細棒繞支點 O 旋轉的最大角度為 60° ，且 $M = m$ ，請問 h 是 l 的幾倍？（均勻細棒繞著支點 O 旋轉的轉動慣量為 $\frac{1}{3}Ml^2$ ）

[1]



解 h 是 l 的 1 倍



例題 1.17

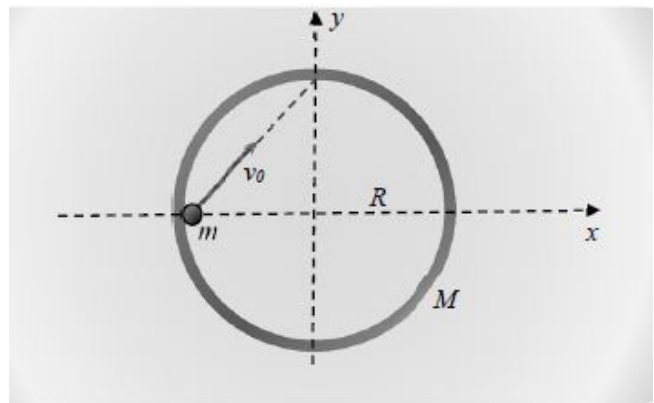
如下圖所示，在光滑平面上有一質量為 m 的質點以初速 v_0 且方向與 x 軸夾角 45° 射向一半徑為 R 且質量為 M 的靜止光滑圓環，若質點與圓環發生完全彈性碰撞，且碰撞時間極短忽略不計，試求：

- (1) 質點從開始出發到第三次與圓環碰撞，所經過的時間為何？
- (2) 承上題，當發生第三次碰撞時，若此時圓環中心與最初始中心位置的距離為半徑的 $\sqrt{5}$ 倍，請問 M 是 m 的幾倍？
- (3) 若在一開始時將 M 變為原來的 6 倍， m 變為原來的 3 倍， R 與 v_0 皆變為原來的 2 倍，請問在這種情況下，第一次與第二次碰撞所間隔的時間將變為原來的幾倍？

[2]

解

- (1) $\frac{3\sqrt{2}R}{v_0}$
- (2) M 是 m 的 1 倍
- (3) 第一次與第二次碰撞所間隔的時間與 M 及 m 無關，若 R 與 v_0 皆變為原來的 2 倍，則時間間隔將為原來的 1 倍。



例題 1.18

甲乙兩人玩追逐遊戲，先在地上畫一半徑為 R 的大圓，甲以 v 的等速率沿著圓周跑，乙從圓心 o 出發以 $u(u < v)$ 的等速率追著甲跑。經過一段時間後，乙宣稱他與甲的距離變成固定值不再改變。請問乙所說的可能嗎？如果可能，請算出此距離；如果不可能，請說明理由。

[3]



解 距離是 $R\sqrt{1 - (\frac{u}{v})^2}$

例題 1.19

三顆金屬球甲、乙、丙，其質量分別為 m 、 $3m$ 、 m ，所帶電荷均為 q 。三顆球以兩條長度為 d 之輕的絕緣線連接，並放置在水平無摩擦及絕緣的桌面上。原本三顆球都靜止並形成一直線，如下圖所示，接著一個短暫的水平推力作用於乙球，使其擁有一垂直於絕緣線方向的初速度 v 。請問在後來的運動中，甲丙兩球最小距離是多少？(庫倫常數為 K)

[4]



解 $D = \frac{10dKq^2}{6dmv^2 + 5Kq^2} = \frac{2d}{1 + 6dmv^2/5Kq^2}$

