物理中的數學

2021 年

作者：李宥頡、王琳嘉
組織：拓普科學組

目錄

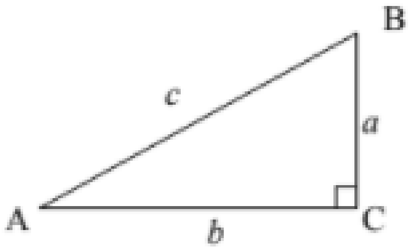
第 1 章 三角函數

1.1 意義

三角函數描述角度與邊長比值的函數關係，由相似形可以知道，固定角度的三角形，其邊長之間的比例也為固定。故我們只要知道三角形的一邊和一角，即可表示其他邊。換句話說，三角函數就是由角度（自變數）得到邊長比例（應變數）。

1.2 銳角三角函數

定義一個直角三角形，並使角度為 θ，規定直角三角形的三邊分別為

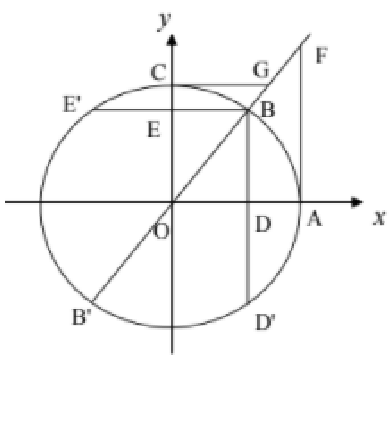


1. 斜邊 c（最長邊）
2. 對邊 b（正對 θ）
3. 鄰邊 a（和 θ 相鄰）

一般來說有六個三角函數

1. 正弦 $\sin\theta = \frac{a}{c}$
2. 餘弦 $\cos\theta = \frac{b}{c}$
3. 正切 $\tan\theta = \frac{a}{b}$
4. 正割 $\sec\theta = \frac{c}{b}$
5. 餘割 $\csc\theta = \frac{c}{a}$
6. 餘切 $\cot\theta = \frac{b}{a}$

1.3 命名的由來



1.4 特殊角

物理常見的特殊角度有 30、37、45、53、60, 從直角三角形的邊長比值可求出它們的三角函數。

$\angle A$	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\csc A$
$30°$						
$45°$						
$60°$						

1.5 基本關係

1. 倒數關係
   - $\sin\theta\csc\theta = 1$
   - $\cos\theta\sec\theta = 1$
   - $\tan\theta\cot\theta = 1$
2. 平方關係
   - $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
   - $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
   - $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
3. 商數關係
   - $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$
   - $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$
4. 互餘關係
   - $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$
   - $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$, $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$
   - $\sec(90° - \theta) = \csc\theta$, $\csc(90° - \theta) = \sec\theta$

1.6 補充

1.7 應用

由於物理上經常將向量（有大小有方向的量）依照兩個正交的方向分解，因此配合三角函數，就可以輕鬆表示分量。且由於運動獨立性，互相正交的運動不會互相干擾，方便計算。

1. 斜面

2. 斜拋

3. 三力平衡

第 2 章 微積分

2.1 斜率

斜率是用來表示一直線的傾斜程度,亦即橫坐標向正方向每前進一格,縱坐標上升或下降多少格。物理上,橫軸常為時間,則斜率表示物理量的時變率。

$$slope = m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.1}$$

若函數圖形並非直線,而是曲線,則斜率需區分為割線斜率與切線斜率。

1. 割線斜率 = 平均時變率 = 一段時間內某物理量的變化率 = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

2. 切線斜率 = 瞬間時變率 = 某個時刻上某物理量的變化率 = $\frac{dy}{dx}$ = 微分

2.2 函數下的面積

函數圖形下的面積代表累積量,物理上橫軸常為時間,則函數下的面積代表物理量隨時間的累積量。若函數為直線,則面積大多可以利用基礎幾何求出,不過若函數為曲線,則面積須以積分求出。

2.3 多項式微積分

多項式 (polynoimal) 代表函數的每一項都可以表示為 cx^n,在中學範疇比較常用,故在此介紹。

1. 指數向前乘係數
2. 次方降一次
3. 常數微分為零

由微積分基本定理,可知微分積分互為逆運算,由上面規則即可反推出積分規則。

練習:

2.4 補充