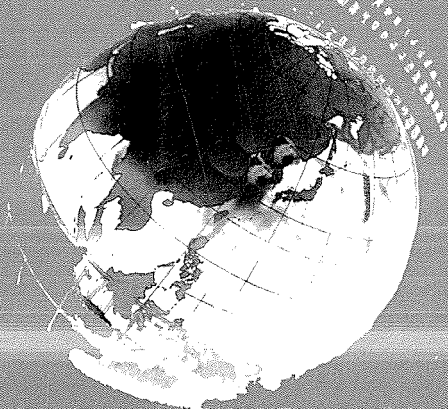


总主编 张大同



物理竞赛教程

(第三版)

高三年级

张大同
编著



 华东师范大学出版社

总 主 编 张大同
本 册 编 著 张大同

物理竞赛教程

高三年级
(第三版)

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

物理竞赛教程(第三版). 高三年级/张大同主编. —上海:
华东师范大学出版社, 2008. 5
ISBN 978 - 7 - 5617 - 2808 - 6

I. 物... II. 张... III. 物理课—高中—教学参考资料
IV. G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 075585 号

物理竞赛教程(第三版)

· 高三年级 ·

总 主 编 张大同
本册编著 张大同
组稿编辑 徐 金
文字编辑 段劲松
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
电话总机 021 - 62450163 转各部门 行政传真 021 - 62572105
客服电话 021 - 62865537(兼传真)
门市(邮购)电话 021 - 62869887
门市地址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 址 www.ecnupress.com.cn

印 刷 者 上海崇明裕安印刷厂
开 本 890 × 1240 32 开
印 张 8
字 数 236 千字
版 次 2008 年 5 月第三版
印 次 2008 年 5 月第九次
书 号 ISBN 978 - 7 - 5617 - 2808 - 6/G · 1376
定 价 13.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社客服中心调换或电话 021 - 62865537 联系)

主 编 的 话

物理学是一门基础学科. 这里的基础应该有两重含义: 一方面, 物理知识是学习其他许多现代科学技术的基础; 另一方面, 学生在学习物理过程中得到训练和提高了思维能力、动手能力和创造能力, 也是学习其他应用科学和专业技术所不可缺少的. 要想在物理竞赛中取得优异成绩, 不但要掌握大量的物理知识, 还必须有很强的解决问题能力和很好的心理素质. 因此, 培养物理尖子学生的工作, 实质上是一种典型的素质教育, 对提高学生的创新能力也是十分有益的.

自 1984 年至今, 中国物理学会已经举办了 22 届全国中学生物理竞赛, 参加者累计超过 200 万人. 这一活动对全国中学生学习物理, 特别是那些对物理学科有浓厚兴趣的学生, 起了很好的推动作用.

我从 1980 年开始从事培养物理尖子学生的工作, 经过 20 余年的探索, 摸索出了一套培养优秀学生的行之有效的方法, 积累了丰富的第一手资料. 与此同时, 全国各地也涌现出许多在物理竞赛辅导方面卓有成效的教师. 这次我邀请了其中在全国最具影响力的几位, 集中大家的智慧, 共同编写了这一套最新的物理竞赛辅导书, 相信会对我们的同行和广大爱好学习物理的中学生有较大的帮助.

本套丛书共有 5 册, 从八年级到高三每学年一册. 八年级分册由北大附中的张继达老师主编, 九年级分册由华东师大二附中的陈椽老师主编, 高一分册由长沙一中的彭大斌老师编写, 高二分册由华东师大二附中的范小辉老师编写, 高三分册由本人编写. 根据现行的全国物理竞赛规程, 同学们在使用这套书时, 应该有适当的超前, 例如高中阶段应该在高二年级就读完高三分册, 这样才能参加当年的物理竞赛.

教育在不断地发展,物理竞赛也在不断地前进,任何一套书都会或多或少地存在着遗憾和不足.热切地期望广大读者对新版提出宝贵意见和建议,以供本书重印时改进.

张大同

目 录

第一讲 磁场.....	1
第二讲 电磁感应	46
第三讲 光的传播	94
第四讲 光的本性和原子物理.....	146
第五讲 狭义相对论.....	177
物理竞赛模拟试题	
模拟试题一.....	211
模拟试题二.....	212
模拟试题三.....	214
习题参考答案与提示.....	235

第一讲 磁 场

知识要点和基本方法

一、磁场

磁场是一种存在于磁铁或通电导线周围的物质,其基本特征是对放入其中的磁体、通电导线或运动电荷有力的作用。

(一) 磁感强度

将一个长 L , 通有电流 I 的电流元放在磁场中某一点, 电流元受到的作用力为 F . 当电流元在某一方位时, 这个力最大, 这个最大的力 F_m 和 IL 的比值, 叫做该点的磁感强度. 将一个能自由转动的小磁针放在该点, 小磁针静止时 N 极所指的方向, 被规定为该点磁感强度的方向。

为了形象直观地描述磁场, 引进了与电场线相似的磁感线。

长直通电导线周围的磁感线如图 1-1 所示. 如果导线中通过的电流强度为 I , 在理论上和实验中都可证明, 在真空中离导线距离为 r 处的磁感强度

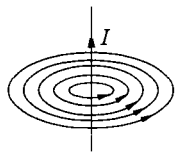


图 1-1

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

式中 μ_0 称为真空中的磁导率, 大小为 $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$.

长直通电螺线管的磁感线如图 1-2 所示. 螺线管内部(如 A 处), 是一匀强磁场, 外部靠近螺线管处(如 B 处)的磁感强度为零. A 处磁感强度的大小

$$B_A = \mu_0 nI.$$

式中 n 为单位长度螺线管的匝数, I 为通过螺线管的电流强度. 从图 1-1 和图 1-2 中都可以看出, 磁感线是一簇闭合曲线, 而静电场的电场线是一簇不闭合的曲线(或者是从正电荷到负电荷, 或者是从正电荷到无穷远处, 从无穷远处到负电荷). 这是一个十分重要的区别, 凡是场线为闭合曲线的场都不可能都是保守场.

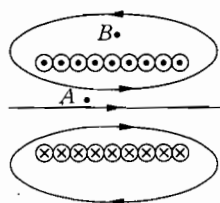


图 1-2

磁感强度是一个矢量, 如果两个电流都对某处的磁场有贡献, 就要用矢量合成的方法. 如果有 a 、 b 两根长直通电导线垂直于纸面相距 r 放置, 电流的大小 $I_a = I$, $I_b = 2I$ (图 1-3), 那么哪些位置的磁感强度为零呢?

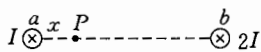


图 1-3

在 a 、 b 连线以外的位置上, 两根导线上电流所产生的磁感强度 B_a 和 B_b 的方向都不在一直线上, 不可能相互抵消; 在 a 、 b 连线上, a 左边或 b 右边的位置上, B_a 和 B_b 的方向是相同的, 也不可能相互抵消; 因此只有在 a 、 b 中间的连线上, B_a 和 B_b 才有可能相互抵消. 设离 a 距离为 x 的 P 处合磁感强度为零(图 1-3)

$$\sum B = B_a + B_b (\text{矢量式}) = k' \frac{I}{x} - k' \frac{2I}{r-x} = 0,$$

$$k' \frac{I}{x} = k' \frac{2I}{r-x},$$

可解得

$$x = \frac{r}{3}.$$

(二) 磁通量

如果某一磁场的磁感强度为 B , 有一垂直磁感强度的方向的小面积 S_{\perp} , 则将

$$\Phi = BS_{\perp}$$

称为穿过面积元 S_{\perp} 的磁通量. 如果是一任意方向的面积元 S , 则当面积元的法线和磁感线的夹角为 α 时, 通过此面积元的磁通量为

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

当 $\alpha < 90^\circ$ 时, Φ 为正; $\alpha > 90^\circ$ 时, Φ 为负; $\alpha = 90^\circ$ 时, Φ 为零. 有了面积元法线的概念, 即可以理解当一个线框翻转 180° 时, 磁通量的变化量是

$$\Delta\Phi = 2BS \cos \alpha$$

(α 是原来线框法线与磁感线间的夹角) 而不是零.

二、洛伦兹力

磁场对运动电荷的作用力叫洛伦兹力.

(一) 洛伦兹力和质谱仪

当一个带电粒子 q 以速度 v 在磁感强度为 B 的磁场中运动时, 受到的洛伦兹力大小为

$$F_{\text{洛}} = qvB \sin \theta.$$

式中的 θ 为 v 与 B 的夹角. 当 q 沿着 B 运动时 $F_{\text{洛}}$ 为零, 带电粒子将做匀速运动; 当 $\theta = 90^\circ$ 时, 带电粒子将做匀速圆周运动, 其半径和周期分别为

$$\begin{cases} R = mv_0 / qB, \\ T = 2\pi m / qB. \end{cases}$$

当 $0 < \theta < 90^\circ$ 时, 带电粒子将做等距螺旋线运动, 螺旋半径、周期和螺距分别为

$$\begin{cases} R = mv \sin \theta / qB, \\ T = 2\pi m / qB, \\ h = 2\pi mv \cos \theta / qB. \end{cases}$$

测定带电粒子的荷质比 q/m 在近代物理学中具有重要的意义, 它是研究物质结构的基础. 利用速度选择器和带电粒子在磁场中的运动规律来测定它的荷质比的仪器叫质谱仪.

有一种质谱仪的结构如图 1-4 所示. 带电粒子经过 S_1 和 S_2 之间的电场加速后, 进入 P_1 、 P_2 之间的狭缝. P_1 、 P_2 之间存在着互相正交的磁场 B_1 和电场 E , 只有在这一区域内不改变运动方向的粒子才能顺利通过 S_0 上的狭缝, 根据

$$qvB_1 = qE$$

可知,只有速度为

$$v = E/B_1$$

的粒子才能通过. 这一装置叫速度选择器.

S_0 以外的空间只存在磁场 B_2 , 不存在电场.

带电粒子在洛伦兹力的作用下将做半径为 R 的匀速圆周运动

$$qvB_2 = mv^2/R,$$

$$qB_2 = mE/B_1R,$$

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{RB_1B_2}.$$

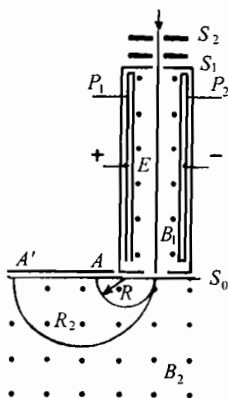


图 1-4

式中 E 、 B_1 、 B_2 是人为加上去的, R 可以测量, 这样便可以求出荷质比 q/m .

(二) 霍耳效应

将一载流导体放在磁场中时, 由于洛伦兹力的作用, 会在与磁场和电流二者垂直的方向上出现横向电势差, 这一现象称为霍耳效应. 这电势差称为霍耳电势差.

如果电流 I 在金属导体中流动, 方向和磁感强度 B 的方向垂直(图 1-5), 导体的高和厚分别为 b 和 h , 设导体单位体积内的自由电子数为 n , 电子电量为 e ,

定向运动的平均速度为 v , 那么导体中的电流

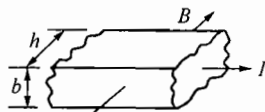


图 1-5

$$I = nevhb. \quad (1)$$

由于洛伦兹力的作用, 自由电子向上表面聚集, 下表面带正电荷, 上、下表面间就形成了电压 U . 这个电压在导体中产生的电场对电子的作用力(向下)

$$F_E = Ee = eU/b. \quad (2)$$

当 F_E 和洛伦兹力互相抵消时, 电子达到平衡状态. 即

$$F_{\text{洛}} = evB = F_E. \quad (3)$$

由①、②、③式可解得

$$U = \frac{IB}{nhe}.$$

由此可见 U 与 I 、 B 成正比, 与 n 、 h 、 e 成反比, 而与 b 无关.

如果导体中的载流子是带正电荷的粒子, 那么霍耳电势差的正、负将相反. 因此利用霍耳效应可以判断导体中载流子的性质. 通过计算还可以测定导体中载流子的体密度 n .

如图 1-6 所示的磁流体发电机, 是霍耳效应的一种实际的应用. 已知横截面积为矩形的管道长为 l , 宽为 a , 高为 b , 上下两个侧面是绝缘体, 前后两个侧面是电阻可忽略的导体, 分别与负载电阻 R_L 的一端相连. 整个装置放在垂直于上、下两个侧面的匀强磁场 B 中. 含有正、负带电粒子的电离气体持续

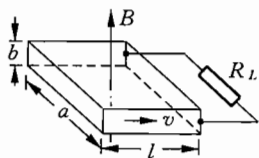


图 1-6

匀速地流经管道. 假如横截面上各点流速相同, 已知电离气体所受的摩擦力与流速成正比, 且无论有无磁场存在时, 都维持管两端电离气体的压强差为 p , 如果无磁场存在时电离气体的流速为 v_0 , 那么有磁场存在时此磁流体发电机的电动势 \mathcal{E} 的大小是多少? 已知电离气体的平均电阻率为 ρ .

这个问题有两种思考方法, 既可以从力的平衡角度来考虑, 也可以从能量守恒的角度来考虑.

设有磁场存在时电离气体(相当于长度为 a 的导体)的流速为 v , 其产生的横向感生电动势为

$$\mathcal{E} = vaB.$$

当电离气体匀速流动时, 管两端的压力差给气体一个向前的力, 而感应电流(当外电路接通时存在)受到的安培力和摩擦力给气体一个向后的力, 这两部分力应该相互平衡. 由欧姆定律可知

$$I = \mathcal{E}/R = \mathcal{E}/(\rho a/lb + R_L),$$

管内气体所受安培力

$$F = IBa = Ba\mathcal{E}/(\rho a/lb + R_L).$$

当管周围无磁场时,用 f 表示摩擦力,应有

$$pab = f.$$

当管周围有磁场时,用 f' 表示摩擦力,应有 $pab = F + f'$,

因为流速与摩擦力成正比,所以

$$v_0/v = f/f' = pab/(pab - F).$$

由以上诸式可解得

$$\mathcal{E} = pab / \left(\frac{Ba}{R_L + \rho a/lb} + \frac{pb}{v_0 B} \right).$$

如果从能量守恒的角度来考虑:

无磁场时,外界压力的功率=克服摩擦力的功率:

$$pabv_0 = kv_0 \cdot v_0 (k \text{ 为比例系数}). \quad ①$$

有磁场时,外界压力的功率=克服摩擦力的功率+消耗在磁流体本身及负载电阻上的功率:

$$pabv = kv \cdot v + \frac{\mathcal{E}^2}{\rho a/lb + R_L}. \quad ②$$

当气体稳定时,应有

$$\begin{aligned} qvB &= q \frac{\mathcal{E}}{a}, \\ v &= \frac{\mathcal{E}}{Ba}; \end{aligned} \quad ③$$

①、③代入②可得

$$\frac{pb\mathcal{E}}{B} = \frac{pb\mathcal{E}^2}{v_0 a B^2} + \frac{\mathcal{E}^2}{R_L + \rho a/lb},$$

同样可得

$$\mathcal{E} = pab / \left(\frac{aB}{R_L + \rho a/lb} + \frac{pb}{v_0 B} \right).$$

(三) 磁聚焦

如图 1-7 所示, 一电子束经过 a 、 b 板上的恒定电场加速后进入 c 、 d 板之间的电场. 因为 c 、 d 板上加的是交变电压, 所以飞出 cd 电场后的电子具有相同的水平速度和不同的竖直速度. 这样一束电子通过 f 板中心的小孔进入长直螺线管形成的水平方向的匀强磁场后作半径 R 不同而周期 T 相同的螺旋线运动, 运动轨迹都和螺线管的中心轴线相切. 因为所有电子的水平速度 v_x 相同, 所以它的螺旋线的螺距也是相同的. 在离 f 板距离 $s = n v_x T$ (n 为整数) 的位置上, 散开的电子束又会聚于一点, 可以在电子射线管的荧光屏上观察到一个细小的亮点, 这就是磁聚焦. 如果测出了 ab 之间的加速电压 U , 螺线管中的磁感应强度 B , 以及聚焦点离 f 板的距离 s , 同样可以测出电子的荷质比

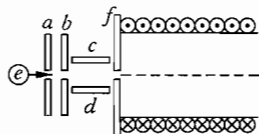


图 1-7

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 n^2}{B^2 s^2} \cdot U.$$

如图 1-8(a) 所示, 半径为 R 的圆筒形真空管中有两个隔板 A 和 A' , 其中心有小孔, 相距 L . 区域 I 中有水平方向的电场, 区域 II 中有水平方向的匀强磁场, 区域 III 中无电场、磁场. 由阴极 K 发出的电子由电场加速后穿过小孔 A 成发散电子束进入区域 II, 设所有电子穿过小孔 A 时的水平分速度都为 v . 调节区域 II 中的磁感应强度使之为使电子束穿过 A' 小孔的最小值 B , 从这时开始计时且保持此值不变, 但使 B 的方向做周期为 T 的周期性变化 (图 1-8(b) 所示). 设真空管中碰到管壁的电子均不弹回.

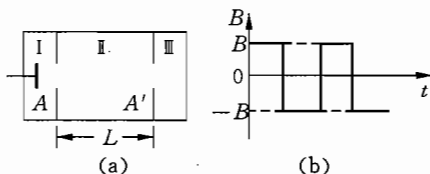


图 1-8

1) 求有电子束穿过 A' 时 T 的最小值 T_0 ;
2) 设 $T = 2T_0$, 哪些时间内有电子束穿过 A' ?

3) 进入区域Ⅲ的电子中,运动方向与管轴间的最大夹角为多少?

这是一个典型的磁聚焦问题. 题中所谓将区域Ⅱ中的磁场调节到能使电子束穿过 A' 的最小值, 就是使电子在磁场中经过一个螺距后到达 A' , 即

$$T' = L/v.$$

如果这些电子在区域Ⅱ中运动的时间不到 T' , 它们将不能穿过 A' , 因此要使电子穿过 A' 的最小周期

$$T_0 = 2T' = 2L/v.$$

如果 $T = 2T_0$, 那么每一次改变磁场方向后前 $\frac{T_0}{2}$ 穿过 A 的电子将能穿过 A' , 即在图 1-9 中时间轴上波纹线部分所表示的时间内, 有电子穿过 A' .

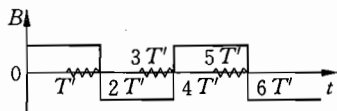


图 1-9

设斜入射到区域Ⅱ中的电子在垂直于管轴方向上的速度为

v_{\perp} , 则电子做圆周运动的半径 r 和周期 T 分别为

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB},$$

$$T' = \frac{2\pi m}{eB}.$$

只有 $2r < R$ 的那些电子才能不与管壁碰撞而到达 A' , 即

$$\frac{mv_{\perp}}{eB} < \frac{R}{2}, v_{\perp} < \frac{eBR}{2m}.$$

利用 $T' = \frac{2\pi m}{eB} = \frac{L}{v}$, 可消去 B 得到

$$v < \frac{\pi R}{L}.$$

因此穿过 A' 后的电子运动方向与管轴间的最大夹角为

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\pi R}{L}.$$

三、安培力

如果在磁场中有一根通电导线,因为导线中的电流是由自由电子的定向运动形成的,电子受到洛伦兹力作用而向侧向漂移时,与晶格上的正离子碰撞,把力传给了导线,所以通电导线在磁场中会受到磁场的作用,这就是安培力.

设在单位体积导体内有 n 个自由电子,导线长 L ,截面积为 S ,通过导线的电流强度为 I ,周围有垂直于导线的磁场 B ,那么安培力

$$F = nSLe \cdot vB.$$

因为

$$I = nev,$$

所以

$$F = IBL.$$

如果导线与 B 成 θ 角,则安培力

$$F = IBL \cdot \sin \theta.$$

(一) 安培的定义

如图 1-10 所示,两相距为 a 的平行长直导线分别载有电流 I_1 和 I_2 .

载流导线 1 在导线 2 处所产生的磁感应强度为

$$B_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}, \text{方向如图示.}$$

导线 2 上长为 ΔL_2 的线段所受的安培力为

$$\begin{aligned} \Delta F_2 &= I_2 \Delta L_2 B_{21} \sin \frac{\pi}{2} \\ &= I_2 \Delta L_2 B_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \Delta L_2. \end{aligned}$$

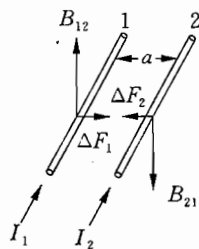


图 1-10

其方向在导线 1、2 所决定的平面内且垂直指向导线 1,导线 2 单位长度上所受的力

$$\frac{\Delta F_2}{\Delta L_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}.$$

同理可证,导线 1 上单位长度导线所受力也为 $\frac{\Delta F_1}{\Delta L_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$, 方向垂直指向 2, 两条导线间是吸引力. 也可证明, 若两导线内电流方向相反, 则为排斥力.

国际单位制中, 电流强度的单位安培规定为基本单位. 安培的定义规定为: 放在真空中的两条无限长直平行导线, 通有相等的稳恒电流, 当两导线相距 1 米, 每一导线每米长度上受力为 2×10^{-7} 牛顿时, 各导线上的电流的电流强度为 1 安培.

(二) 安培力矩

如图 1-11 所示, 设在磁感应强度为 B 的均匀磁场中, 有一刚性长方形平面载流线圈, 边长分别为 L_1 和 L_2 , 电流强度为 I , 线圈平面的法线 n 与 B 之间的夹角为 θ , 则各边受力情况如下:

$$|f_{ab}| = BIL_2, \text{ 方向指向读者;}$$

$$|f_{cd}| = BIL_2, \text{ 方向背向读者;}$$

$$|f_{bc}| = BIL_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = BIL_1 \cos \theta, \text{ 方向竖直向下;}$$

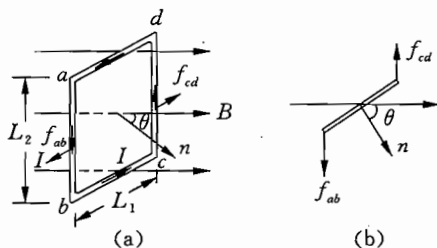


图 1-11

$$|f_{da}| = BIL_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = BIL_1 \cos \theta, \text{ 方向竖直向上.}$$

f_{bc} 和 f_{da} 大小相等, 方向相反且在一条直线上, 互相抵消.

f_{ab} 和 f_{cd} 大小相等, 方向相反, 但力作用线不在同一直线上, 形成一力偶, 力臂从图 1-11(b) 中可看出为 $L_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = L_1 \sin \theta$,

故作用在线圈上的力矩为: $M = f_{ab}L_1 \sin \theta = BIL_2L_1 \sin \theta$. 而 L_1L_2 为线圈面积 S , 故

$$M = BIS \sin \theta.$$

我们称面积很小的载流线圈为磁偶极子, 用磁偶极矩 P_m 来描绘它. 其磁偶极矩的大小为平面线圈的面积与所载电流的电流强度之乘积, 即 $P_m = IS$, 其方向满足右手螺旋法则, 即伸出右手, 四指绕电流流动方向旋转, 大拇指所指方向即为磁偶极矩的方向, 即图 1-11 中 n 的方向, 那 θ 角即为磁偶极矩 P_m 与磁感应强度 B 的正方向的夹角. 这样, 线圈所受力矩可表为

$$M = P_m B \sin \theta.$$

我们从矩形线圈推出的公式对置于均匀磁场中的任意形状的平面线圈都适用.

例题精讲

例 1 如图 1-12 所示, 一质量均匀分布的细圆环, 其半径为 R , 质量为 m , 令此环均匀带正电, 总电量为 Q , 现将此环平放在绝缘的光滑水平桌面上, 并处于磁感应强度为 B 的匀强磁场中, 磁场方向竖直向下, 当此环绕通过其中心的竖直轴以匀角速度 ω 沿图示方向旋转时, 环中张力增加多少?

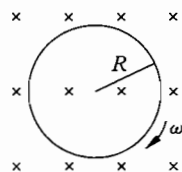


图 1-12

分析 环静止时圆环上电场强度不为零, 环中电荷已受电场力, 因而环内必定已有张力. 本题现要求的是由于环旋转而形成的附加张力, 故可不考虑其原有张力, 要正确求解, 关键是要弄清附加张力产生的原因.

解 当环旋转时, 电荷随环一起运动形成电流, 故每小段圆环均受到磁场对它的作用力, 方向沿半径向外, 它和小段圆环两侧所受附加张力的合力提供小段圆环做圆周运动的向心力, 如图 1-13 所示, 设小

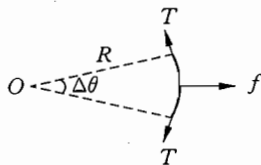


图 1-13

段圆环质量为 Δm , 其所对的圆心角为 $\Delta \theta$, 所受安培力为 f , 附加张

力记为 T , 由圆周运动条件得:

$$2T \sin \frac{\Delta\theta}{2} - f = \Delta m \omega^2 R.$$

当 $\Delta\theta$ 很小时, $\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$, 又

$$\Delta m = \frac{m}{2\pi R} \cdot R \Delta\theta = \frac{\Delta\theta}{2\pi} m,$$

$$f = BI \Delta l = B \cdot \frac{\omega Q}{2\pi} \cdot R \Delta\theta,$$

代入上式后解得

$$T = \frac{R\omega}{2\pi} (QB + m\omega).$$

例 2 如图 1-14 所示为一固定不动的绝缘的圆筒形容器的横截面, 其半径为 R , 圆筒的轴线在 O 处. 圆筒内有匀强磁场, 磁场方向与圆筒的轴线平行, 磁感应强度为 B . 筒壁的 H 处开有小孔, 整个装置处在真空中. 现有一质量为 m 、电荷为 q 的带电粒子 P 以某一初速度沿筒的半径方向从小孔射入圆筒, 经与筒壁碰撞后又从小孔射出圆筒. 设: 筒壁是光滑的, P 与筒壁碰撞是弹性的, P 与筒壁碰撞时其电荷是不变的. 若要使 P 与筒壁碰撞的次数最少, 问:

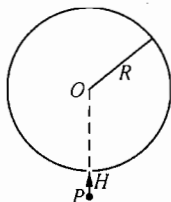


图 1-14

(1) P 的速率应为多少?

(2) P 从进入圆筒到射出圆筒经历的时间为多长?

解 (1) 如图 1-15 所示, 设筒内磁场的方向垂直纸面指向纸外, 带电粒子 P 带正电, 其速率为 v . P 从小孔射入圆筒中因受到磁场的作用力而偏离入射方向, 若与筒壁只发生一次碰撞, 是不可能从小孔射出圆筒的. 但与筒壁碰撞两次, 它就有可能从小孔射出. 在此情形中, P 在筒内的路径由三段等长、等半径的圆弧 \widehat{HM} 、 \widehat{MN}

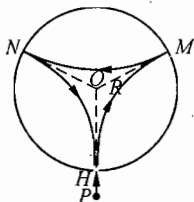


图 1-15

和 \widehat{NH} 组成. 现考察其中一段圆弧 \widehat{MN} , 如图 1-16 所示. 由于 P 沿筒的半径方向入射, OM 和 ON 均与轨道相切, 两者的夹角

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi$$

设圆弧的圆半径为 r , 则有

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

圆弧对轨道圆心 O' 所张的圆心角

$$\beta = \frac{\pi}{3}$$

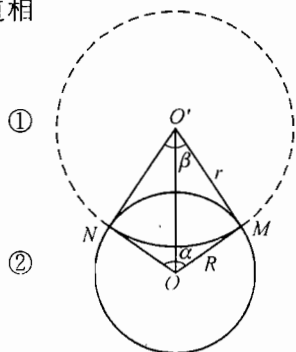


图 1-16

由几何关系得

$$r = R \cot \frac{\beta}{2} \quad ④$$

解②、③、④式得

$$v = \frac{\sqrt{3}qBR}{m} \quad ⑤$$

(2) P 由小孔射入到第一次与筒壁碰撞所通过的路程为

$$s = \beta r \quad ⑥$$

经历时间为

$$t_1 = \frac{s}{v} \quad ⑦$$

P 从射入小孔到射出小孔经历的时间为

$$t = 3t_1 \quad ⑧$$

由以上有关各式得

$$t = \frac{\pi m}{qB} \quad ⑨$$

例 3 磁悬浮列车是一种高速运载工具, 它具有两个重要系统. 一是悬浮系统, 利用磁力(可由超导电磁铁提供)使车体在导轨

上悬浮起来与轨道脱离接触. 另一是驱动系统, 在沿轨道安装的三相绕组(线圈)中, 通上三相交流电, 产生随时间、空间做周期性变化的磁场, 磁场与固连在车体下端的感应金属板相互作用, 使车体获得牵引力.

为了有助于了解磁悬浮列车的牵引力的来由, 我们求解下面的问题.

设有一与轨道平面垂直的磁场, 磁感应强度 B 随时间 t 和空间位置 x 的变化规律为

$$B(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx),$$

式中 B_0 、 ω 、 k 均为已知常量, 坐标轴 x 与轨道平行. 在任一时刻 t , 轨道平面上磁场沿 x 方向的分布是不均匀的, 如图 1-17 所示. 图中 Oxy 平面代表轨道平面, “ \times ”表示磁场的方向垂直 Oxy 平面指向纸里, “ \cdot ”表示磁场的方向垂直 Oxy 平面指向纸外. 规定指向纸外时 B 取正值. “ \times ”和“ \cdot ”的疏密程度表示沿着 x 轴 B 的大小分布. 一与轨道平面平行的具有一定质量的矩形金属框 $MNPQ$ 处在该磁场中, 已知与轨道垂直的金属框边 MN 的长度为 l , 与轨道平行的金属框边 MQ 的长度为 d , 金属框的电阻为 R , 不计金属框的电感.

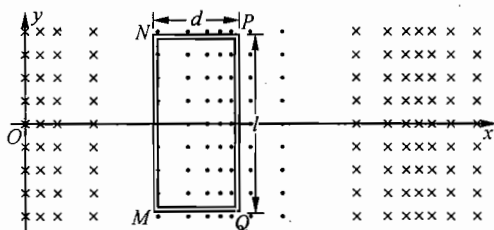


图 1-17

试利用此简化模型计算列车运行达到稳定、以已知的恒定速度 v 行驶时, 牵引力在磁场随时间变化的一个周期内的平均值(磁场随时间变化的周期非常小, 在该时间内列车移动的距离非常小, 可忽略不计). 并讨论此平均牵引力与金属框几何尺寸的关系.

解 我们注意磁感应强度的变化规律

$$B(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx),$$

和简谐波的方程相似,说明 B 的峰不断地向右移动. 根据楞次定律的推广形式——感应电流引起的运动,也总是要阻碍原磁场磁通量的变化,就可以理解金属框为何要向右移动了.

设这个磁场“波”以速度 v_0 匀速向右移动,那么应该有

$$B_0 \cos(\omega t - kx) = B_0 \cos[\omega(t + \Delta t) - k(x + v_0 \Delta t)],$$

可得

$$v_0 = \omega/k. \quad (1)$$

金属框移动的速度 v 不可能完全跟上 v_0 , 如果 $v = v_0$, 那么金属框内磁通量就没有变化, 框内就没有感应电流, 也就没有安培力来克服金属框受到的阻力了.

设在时刻 t , 金属框 MN 边位于坐标 x 处, PQ 边位于坐标 $x+d$ 处. 此时通过金属框的磁通量为 Φ ; 经过一很短的时间间隔 Δt , 整个磁场分布区域向 x 方向移动了一段距离 $v_0 \Delta t$, 金属框向 x 方向移动了一段距离 $v \Delta t$, 其结果是: MN 边左侧穿过面积为 $(v_0 - v)l \Delta t$ 的磁通量 $B(x, t)(v_0 - v)l \Delta t$ 移进了金属框, PQ 边左侧穿过面积为 $(v_0 - v)l \Delta t$ 的磁通量 $B(x+d, t)(v_0 - v)l \Delta t$ 移出了金属框, 故在 $t + \Delta t$ 时刻, 通过金属框的磁通量为

$$\Phi' = \Phi + B(x, t)(v_0 - v)l \Delta t - B(x+d, t)(v_0 - v)l \Delta t,$$

在 Δt 时间间隔内, 通过金属框的磁通量变化量为

$$\Delta \Phi = \Phi' - \Phi = [B(x, t) - B(x+d, t)]l(v_0 - v)\Delta t. \quad (2)$$

由法拉第电磁感应定律得 t 时刻框内的感应电动势大小

$$E(t) = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \quad (3)$$

金属框内的感应电流

$$i(t) = \frac{E}{R}, \quad (4)$$

磁场作用于金属框的安培力的合力

$$f(t) = i(t)B(x, t)l - i(t)B(x + d, t)l.$$

由②、③、④式及题给定的磁场分布规律,得

$$f(t) = \frac{B_0^2 l^2 (v_0 - v)}{R} \cdot \{ \cos(\omega t - kx) - \cos[(\omega t - kx) - kd] \}^2. \quad (5)$$

利用三角公式,得

$$f(t) = \frac{4B_0^2 l^2 (v_0 - v)}{R} \cdot \left[\sin\left(\frac{kd}{2}\right) \sin\left(\frac{2(\omega t - kx) - kd}{2}\right) \right]^2. \quad (6)$$

⑥式表明,金属框受到的安培力方向始终沿 x 轴正方向,大小却随时间变化.将周期 T 分割成很多非常小的时间间隔 Δt ,在 t 到 $t + \Delta t$ 时间间隔内的安培力为 $f(t)$,将所有时间间隔内的 $f(t)\Delta t$ 累加的总和再除以周期 T 即为 $f(t)$ 在一个周期 T 时间内的平均值,由下式表示

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \sum f(t) \Delta t.$$

由三角函数变换知

$$\begin{aligned} & 4\sin^2\left(\frac{kd}{2}\right)\sin^2\left(\frac{2(\omega t - kx) - kd}{2}\right) \\ &= 4\left[\sin^2\left(\frac{kd}{2}\right)\right]\left\{\frac{1 + \cos[2(\omega t - kx) - kd]}{2}\right\}; \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{T} \sum \cos[2(\omega t - kx) - kd] \Delta t = 0,$$

以及①式便求得当列车以速度 v 做匀速行驶时的平均牵引力

$$\bar{f}_v = \frac{2B_0^2 l^2 \left(\frac{\omega}{k} - v\right)}{R} \sin^2\left(\frac{kd}{2}\right), \quad (7)$$

即平均牵引力与金属框长度 l 的平方成正比,亦与金属框的宽度 d 有关. (*)

当 $kd = 2n\pi$, 即

$$d = \frac{2n\pi}{k}, n = 0, 1, 2, \dots \text{时},$$

$$\overline{f_v} = 0; \quad (8)$$

当 $kd = (2n+1)\pi$, 即

$$d = \frac{(2n+1)\pi}{k}, n = 0, 1, 2, \dots \text{时},$$

$$\overline{f_v} = \frac{2B_0^2 l^2 \left(\frac{\omega}{k} - v \right)}{R}. \quad (9)$$

这时, $\overline{f_v}$ 达到最大. 当 d 取其他值时, $\overline{f_v}$ 为介于零与最大值之间的其他值. (**)

实际上列车行驶中总会受到阻力, 当平均牵引力 $\overline{f_v}$ 与阻力平衡时, 列车达到稳定速度 v . 若阻力为零, 列车在牵引力作用下, 不断加速, 当列车速度 v 与磁场区域移动的速度 v_0 相同, 即 ($v = v_0$) 时, 金属框内磁通量不变, 框内无感应电动势和感应电流, 因而金属框任何时刻都不受力, 平均牵引力 $\overline{f_v} = 0$. 列车以稳定速度 v_0 向前行驶. (***)

这是一道半开放式的题目, 对平均牵引力与金属框几何尺寸的关系的讨论, 并没有明确说明要讨论到怎样的地步. 如果只讨论到 (*) 处, 是否算完整? 同学们应该养成一个习惯, 尽量进行深入的讨论. 能讨论到 (**) 处比只讨论到 (*) 处好, 当然能讨论到 (***) 处更好.

例 4 如图 1-18 所示, K 为一带电粒子发生器, 从中可以不断地射出各种不同速率的带电粒子, 它们都带正电, 电量为 q , 质量为 m , 速度的方向都沿图中的虚线. D_1 、 D_2 为两块挡板, 可定时开启和关闭. C_1 、 C_2 为两扇“门”, C_1 紧靠 D_1 , 两门之间的距离为 l , 两个门上都加上交变电压 $u = U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, T 为交变电压的周期. 已知只有当门上电压值为零附近的无限短的时间内, 粒子才能通过该门. G 为能量增减器, 它紧靠挡板 D_2 , 到门 C_2 的距离为 $l/2$. 当带电粒子在

t 时刻通过 G 时, 粒子可获得一定的能量 $\Delta E_t = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$,

但速度的方向不变, 式中 $E_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times m \frac{l^2}{T^2}$. 通过 G 的粒子从 O 点进入 G 右侧的匀强磁场区域, 磁场的磁感应强度大小为 B , 方向垂直纸面向里 (整个装置都放在真空中). 在磁场区建立以 O 作为原点的如图所示的直角坐标系 Oxy , MN 为磁场区域的边界, 它平行于 x 轴. 现在 $t = 0$ 时刻, 同时打开 D_1 与 D_2 , 让粒子进入 C_1 , 在 $t = 3T/4$ 时刻, 关闭挡板 D_1 , 使粒子无法进入 C_1 ; 在 $t = 10T/4$ 时刻, 再关闭挡板 D_2 , 使粒子无法进入 G . 已知从 O 进入磁场中速度最大的粒子经过坐标为 $(3 \text{ cm}, 3 \text{ cm})$ 的 Q 点. 问: 假如要使从 O 进入磁场中速度最小的粒子能经过 Q 点, 则应将磁场边界 MN 在 Oxy 平面内平移到什么位置.

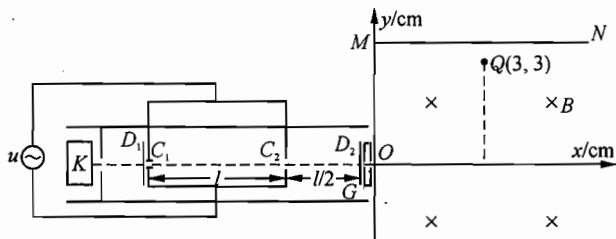


图 1-18

解 (1) 讨论进入磁场区域的粒子的速度

在 $t = 0$ 时刻打开 D_1 , 由 $u = U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ 可知, 此时 C_1 的电压 $u = 0$, 各种不同速率的粒子都能通过 C_1 . 如果通过 C_1 的粒子到达 C_2 的时刻为 $t = T/2$ 或 $T/2$ 的整数倍, 则此时 C_2 的电压恰好为零, 这些粒子又能通过 C_2 , 故通过 C_1 的粒子若能通过 C_2 , 其速度 v_n 应满足条件

$$\frac{l}{v_n} = n \frac{T}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

由此可得在 $t = 0$ 时刻通过 C_1 后又能通过 C_2 的这些粒子的速度为

$$v_n = \frac{2l}{nT}, n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

速度为 v_n 的粒子由 C_1 到 C_2 经历时间

$$\Delta t_{n1} = \frac{1}{2}nT, \quad (3)$$

由 C_2 到 G 经历的时间

$$\Delta t_{n2} = \frac{l}{2v_n} = \frac{1}{4}nT; \quad (4)$$

由此可得粒子到 G 的时刻

$$t_n = \Delta t_{n1} + \Delta t_{n2} = \frac{3}{4}nT. \quad (5)$$

因为当 $t = 10T/4$ 时, D_2 关闭, 故只有当

$$t_n \leq \frac{10}{4}T. \quad (6)$$

粒子才能通过 G 并进入磁场区域, 根据⑤、⑥式, 注意到 n 为整数, 可知 n 的最大值为

$$n_{\max} = 3. \quad (7)$$

这些粒子进入磁场时的能量为

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 + E_0 \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(\frac{3n}{4}T \right) + \frac{\pi}{4} \right],$$

$$n = 1, 2, 3. \quad (8)$$

这些粒子的能量分别为

$$E_1 = \frac{7}{4} \frac{ml^2}{T^2}, E_2 = \frac{1}{4} \frac{ml^2}{T^2}, E_3 = \frac{17}{36} \frac{ml^2}{T^2}. \quad (9)$$

在 $t = T/2$ 时刻 C_1 的电压 $u = 0$, 各种不同速率的粒子又能通过 C_1 . 对速率 v'_n 满足条件

$$\frac{l}{v'_n} = \frac{n}{2}T, n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

的粒子又能通过 C_2 . 这些粒子的速率为

$$v'_n = \frac{2l}{nT}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

由 C_1 到 C_2 经历的时间和由 C_2 到 G 经历的时间分别为

$$\Delta t'_{n1} = \frac{n}{2}T, \quad \Delta t'_{n2} = \frac{n}{4}T. \quad (12)$$

到达 G 的时刻

$$t'_n = \frac{T}{2} + \Delta t'_{n1} + \Delta t'_{n2} = \frac{3n+2}{4}T. \quad (13)$$

因为在 $t = 10T/4$ 时 D_2 关闭, 故有

$$t'_n \leq \frac{10}{4}T, \quad (14)$$

由⑬和⑭式, 注意到 n 为整数, 得

$$n_{\max} = 2. \quad (15)$$

这些粒子进入磁场时具有的能量为

$$E'_n = \frac{1}{2}mv'^2_2 + E_0 \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T} \frac{3n+2}{4} \right) T + \frac{\pi}{4} \right] \\ n = 1, 2. \quad (16)$$

进入磁场的粒子的能量分别为

$$E'_1 = \frac{9}{4} \frac{ml^2}{T^2}, \quad E'_2 = \frac{3}{4} \frac{ml^2}{T^2}. \quad (17)$$

由于在 $t=3T/4$ 时 D_1 已关闭, 以后无粒子再能进入 C_1 . 由⑨、⑰式可知, 进入磁场的粒子的能量的最大值为 E'_1 , 对应的速度 v'_1 最大, 由

$E'_1 = \frac{1}{2}Mv'^2_1$, 得

$$v'_1 = \sqrt{\frac{9}{2}} \frac{l}{T}, \quad (18)$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1. \quad (20)$$

过 Q 点作此圆的切线, 设切点 P 的坐标为 (x_P, y_P) , 若此粒子在 P 点以速度 v_2 进入无磁场区域, 则它将沿直线 PQ 到达 Q 点. P 点一定在磁场区域的边界上.

现在求 P 点的坐标. 因 O_2P 垂直于 PQ , 由 P 点作 $O_1'Q$ 的垂线交于 H 点, 由 O_2 点作 PH 的垂线交于 F 点. $\triangle O_2PF$ 与 $\triangle PQH$ 相似, 因而有

$$\frac{\overline{O_2F}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{HQ}}, \quad (21)$$

即

$$\frac{x_P}{(1-y_P)} = \frac{(3-y_P)}{(3-x_P)}, \quad (22)$$

得
$$x_P^2 + y_P^2 - 4y_P = 3x_P - 3.$$

经配方得

$$x_P^2 + (y_P - 1)^2 - 2y_P - 1 = 3x_P - 3.$$

因 P 点坐标 (x_P, y_P) 是满足 (20) 式, 故得

$$-2y_P = 3x_P - 3,$$

$$y_P = \frac{3}{2}(1-x_P). \quad (23)$$

代入 (20) 式, 可求得 P 点的 y 坐标为

$$y_P = 0.354 \text{ cm}. \quad (24)$$

因此, 只要将磁场的区域边界 MN 平行下移到过 P 点, 即图中的 $M'N'$, 速度 v_2 的粒子在 P 点穿出磁场, 它将沿轨迹圆的切线方向到达 Q 点.

例 5 一根边长为 a 、 b 、 c ($a \gg b \gg c$) 的矩形截面长棒 (图 1-20), 由半导体锑化铟制成. 棒中有平行于 a 边的电流 I 通过, 该棒放在平行于 c 的外磁场 B 中, 电流 I 所产生的磁场忽略不计. 该电流的载流子为电子. 在只有电场存在时, 电子在半导体中的平均速度

$v = \mu E$, 其中 μ 为迁移率.

(1) 确定在棒中产生上述电流的总电场的大小和方向;

(2) 计算夹 b 边的两表面上相对两点之间的电势差;

(3) 如果电流和磁场都是交变的, 且分别为 $I = I_0 \sin \omega t$, $B = B_0 \sin(\omega t + \varphi)$, 求(2)中电势差的直流分量的表达式.

已知数据: 电子迁移率 $\mu = 7.8 \text{ m}^2 / (\text{V} \cdot \text{s})$, 电子密度 $n = 2.5 \times 10^{22} / \text{m}^3$, $I = 1.0 \text{ A}$, $B = 0.1 \text{ T}$, $b = 1.0 \text{ cm}$, $c = 1.0 \text{ mm}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

解 这是一个有关霍尔效应的题目.

(1) 因为 $I = bcnev$,

$$v = \frac{I}{necb} = 25 \text{ m/s},$$

所以, 电场沿 a 方向的分量

$$E_{//} = v/\mu = 3.2 \text{ V/m},$$

沿 b 方向的分量

$$E_{\perp} = vB = 2.5 \text{ V/m},$$

所以总电场大小为

$$E = \sqrt{E_{//}^2 + E_{\perp}^2} = 4.06 \text{ V/m}.$$

电场方向和 a 边成的角

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{E_{\perp}}{E_{//}} = \tan^{-1} \frac{2.5}{3.2} = 38^\circ.$$

(2) 电势差 $U_{\perp} = E_{\perp} \cdot b = 2.5 \times 10^{-2} \text{ V}$.

(3) 加上交变电流和磁场后

$$U_{\perp}' = \frac{IBb}{enbc} = \frac{I_0 B_0}{enc} \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

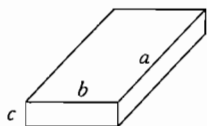


图 1-20

$$= \frac{I_0 B_0}{enc} \left[\frac{1}{2} \cos(2\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \cos \varphi \right],$$

因此 U_m 的直流分量为

$$U_{\perp}' = \frac{I_0 B_0}{2enc} \cos \varphi.$$

例 6 如图 1-21, 被 $U = 1000$ 伏的电势差加速的电子从电子枪 T 中射出来, 沿直线 Ta 方向运动, 要求击中在和 Ta 线成 α 角的 TM 直线上、距离枪口 5 厘米的目标 M , 求以下两种情况下所用的磁感应强度 B .

(1) 磁场垂直于由直线 Ta 和 TM 所决定的平面.

(2) 磁场平行于 TM .

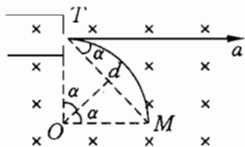


图 1-21

解 (1) 要使电子击中 M , 磁场方向只

能是垂直纸面向里, 电子进入磁场后将在洛伦兹力作用下做匀速圆周运动, M 要在圆周上. 假设圆周的圆心为 O , 因为 Ta 是圆周的切线, 则 $OT \perp Ta$, 设 TM 的距离为 d .

$$d = 2r \sin \alpha. \quad (1)$$

电子进入磁场的速度为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= eU, \\ v &= \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \end{aligned} \quad (2)$$

洛伦兹力提供电子做圆周运动的向心力为:

$$\begin{aligned} evB &= \frac{mv^2}{r}, \\ r &= \frac{mv}{eB}. \end{aligned} \quad (3)$$

联立①、②、③可解得:

$$B = \frac{mv}{er} = \sqrt{\frac{2mU}{e}} \frac{2\sin\alpha}{d}.$$

代入数值即可求出 B .

(2) 当磁场平行于 TM 时, 根据左手定则, 磁场方向应如图 1-22, 将 v 分解为垂直磁场分量 $v_{\perp} = v\sin\alpha$ 及平行于磁场分量 $v_{\parallel} = v\cos\alpha$. v_{\perp} 分量受磁场作用, 电子作匀速圆周运动. v_{\parallel} 平行于 TM 方向, 电子不受力, 将作匀速运动, 其合运动就是沿着 TM 方向的螺旋运动, 其螺距相等. 螺旋运动的周期:

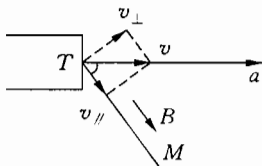


图 1-22

$$T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

TM 方向: $v\cos\alpha \cdot t = d$.

只有当 $KT = t$ (K 为正整数) 时, 才能击中目标.

$$K \frac{2\pi m}{eB} = \frac{d}{v\cos\alpha}, \quad (4)$$

$$\text{又: } \frac{1}{2}mv^2 = eU; \quad (5)$$

联立④、⑤可解得:

$$B = \frac{2K\pi\cos\alpha}{d} \sqrt{\frac{2Um}{e}},$$

代入数值, 可求得 B .

例 7 图 1-23 中 S 为一离子源, 它能机会均等地向各方向持续大量发射正离子. 离子质量皆为 m , 电量皆为 q , 速率皆为 v_0 , 在离子源的右侧有一半半径为 R 的圆屏, OO' 是通过圆屏中心 O 并垂直于屏面的轴线. S 位于轴线上. 空间有一平行于轴线向右的匀强磁场, 磁感强度为 B . 发射的

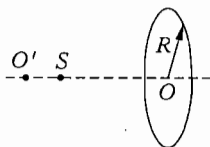


图 1-23

离子中,有的离子不论 SO 的距离如何,总能打到圆屏上,求这类离子占离子总数的比例(不考虑离子之间的碰撞)。

解 从 S 发出的正离子,凡是方向偏左的,都打不到圆屏上,所以只考虑方向偏右的. 设离子发射方向与轴线间的夹角是 θ , 则离子沿轴方向的分速度 $v_{//} = v_0 \cos \theta$, 垂直于轴方向的分速度 $v_{\perp} = v_0 \sin \theta$. 在洛伦兹力作用下,每个离子都做等螺距螺旋运动,运动轨迹都和轴相切. 根据牛顿第二定律,用 r 表示圆周运动的半径,应有

$$qBv_0 \sin \theta = m \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{r},$$

$$r = \frac{mv_0 \sin \theta}{qB}.$$

凡是 $r < \frac{R}{2}$ 的离子,不论 SO 多大,总能打在圆屏上,即

$$\frac{mv_0 \sin \theta}{qB} < \frac{R}{2},$$

$$\sin \theta_m = \frac{RBq}{2mv_0}.$$

由图 1-24 可知,在以 S 为顶点、以 OO' 为轴线、以 $2\theta_m$ 为顶角的圆锥范围内的那些离子,总能击中圆屏. 这些离子的数目与总发射数之比,应当等于图中被圆锥截得的球冠面积 A_1 和整个球面面积 A 之比. 如果球半径为 R , 则

$$A_1 = 2\pi R h = 2\pi R \cdot R(1 - \cos \theta_m),$$

$$A = 4\pi R^2.$$

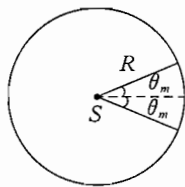


图 1-24

所以,当 $RBq < 2mv_0$ 时,

$$k = \frac{A_1}{A} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta_m) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2 B^2 q^2}{4m^2 v_0^2}} \right).$$

当 $RBq = 2mv_0$ 时,

$$k = \frac{1}{2}.$$

例 8 如图 1-25 所示, A_1 和 A_2 是两块面积很大互相平行又相距很近的带电金属板, 相距距离为 d , 两板间的电势差为 U . 同时, 两板间还有垂直于电场方向的匀强磁场 B . 一束电子以很小的速度进入两板间, 为使电子不碰到带正电的 A_1 板, 磁场的磁感强度 B 至少多大?

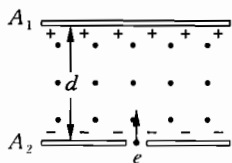


图 1-25

分析 解这道题容易犯的一个错误就是以为电子到达最高点时(速度方向和两板平行), 所受的电场力 eU/d 和洛伦兹力 evB 是互相平衡的. 实际上电子在两板间做的是曲线运动, 它所受的力是不平衡的.

解 1 设电子从 O 点进入电场飞到 P 点时速度刚好与板平行(图 1-26). 取如图所示的坐标系有

$$x_P = d, (v_x)_P = 0. \quad ①$$

因为洛伦兹力不做功, 所以有

$$\frac{1}{2}m(v_y)_P^2 = eU. \quad ②$$

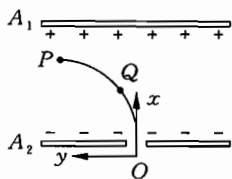


图 1-26

再取运动轨迹上某一点 Q , 当电子飞到 Q 点时, 它在 y 方向受的力 $F_y = e(v_x)_QB$, 这个力提供了电子在 y 方向上的加速度, 因此

$$e(v_x)_QB = m(a_y)_Q. \quad ③$$

因为 Q 点是任取的, 所以它对运动过程中各点都适合, 可以写成

$$\begin{aligned} eB\Delta x_i / \Delta t_i &= m\Delta(v_y)_i / \Delta t_i, \\ eB\Delta x_i &= m\Delta(v_y)_i. \end{aligned} \quad ④$$

我们把电子从 O 点飞到 P 点过程中所有小段的④式都加起来

$$\sum_i (eB\Delta x_i) = \sum_i [m\Delta(v_y)_i],$$

可得

$$eBd = m(v_y)_P. \quad ⑤$$

将①、②式代入⑤式

$$eBd = m\sqrt{2eU/m},$$

$$B = \sqrt{2mU/(ed^2)}.$$

解2 将电子刚进入两极间的静止状态看成是由正 y 方向和负 y 方向的两个速度 v 叠加而成的. 使正 y 方向的 v 所产生的洛伦兹力恰好与电场力平衡, 即 $evB = eU/d$ 或写成

$$v = U/(Bd), \quad (1)$$

这样我们即将电子的运动看成是由负 y 方向的 v 引起的圆周运动和由正 y 方向的 v 引起的匀速直线运动叠加而成的一种运动. 设电子做圆周运动的半径是 R , 应该有

$$evB = mv^2/R,$$

$$R = mv/eB. \quad (2)$$

要求电子不碰到 A_1 板, 即要求

$$R = mv/eB < d/2, \quad (3)$$

将①式代入③式, 得

$$B > \sqrt{2mU/(ed^2)}.$$

不难看出, 解法1对学生的数学要求比较高, 实际上应用了积分的思想. 解法2巧妙地应用了叠加的思想, 起到了事半功倍的作用.

例9 如图1-27, 电源的电动势为 ϵ , 电容器的电容为 C , K 是单刀双掷开关, MN 、 PQ 是两根位于同一水平面内的平行光滑长导轨, 它们的电阻可以忽略不计, 两导轨间距为 L , 导轨处在磁感强度为 B 的匀强磁场中, 磁场方向垂直于两导轨所在

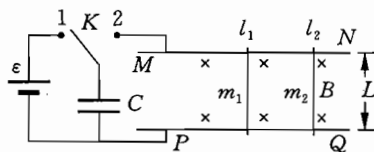


图 1-27

的平面并指向图中纸面向里的方向. l_1 和 l_2 是两根横放在导轨上的导体小棒, 它们在导轨上滑动时与导轨保持垂直并接触良好, 不计摩擦, 两小棒的电阻相同, 质量分别为 m_1 和 m_2 , 且 $m_1 < m_2$. 开始时两根小棒均静止在导轨上, 现将开关 K 先合向 1, 然后合向 2. 求:

(1) 两根小棒最终的速度大小;

(2) 在整个过程中的焦耳热损耗(当回路中有电流时, 该电流所产生的磁场可以忽略不计).

分析 开关 K 由 1 合向 2 之后, 起初电容器通过导轨及两小棒构成的回路放电, 外磁场 B 对通有电流的两小棒施加向右的安培力, 使两小棒从静止开始向右做加速运动, 但加速度是逐渐变小的, 最终状态两棒以相同的速度运动. 注意到两棒匀速切割磁感线产生的感应电动势与电容器两端的电压相等, 即上述过程中电容器电量的减少可求, 因此可以用动量定理处理本题(因安培力产生冲量 $BI_l \Delta t$ 中 $I_l \Delta t$ 与电量有关).

解 (1) 自电容器开始放电至小棒达到最终恒定速度的过程中任一时刻的电流如图 1-28 所示. 此时作用于 l_1 与 l_2 上的安培力分别为

$$f_1 = BLi_1,$$

$$f_2 = BLi_2.$$

在 t 到 $t + \Delta t$ 时间内, 利用动量定理

得

$$f_1 \Delta t = BLi_1 \Delta t = m_1 \Delta v_1,$$

$$f_2 \Delta t = BLi_2 \Delta t = m_2 \Delta v_2.$$

因两棒质量不同, 因此在一段时间内速度可能不同, 但最终速度 v 必然一样. 由于开始时两棒均静止, 则有

$$\sum BLi_1 \Delta t = m_1 v,$$

$$\sum BLi_2 \Delta t = m_2 v.$$

上两式相加得

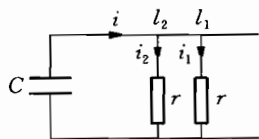


图 1-28

$$BL \sum (i_1 + i_2) \Delta t = (m_1 + m_2)v.$$

而

$$i = i_1 + i_2,$$

即

$$\sum (i_1 + i_2) \Delta t = \sum i \Delta t = Q - q.$$

其中

$$Q = CU,$$

$$q = CBLv,$$

由此解得

$$v = \frac{BLCU}{m_1 + m_2 + B^2 L^2 C}.$$

(2) 电容器开始放电时,所具有的电能为

$$W_0 = \frac{1}{2}CU^2,$$

两棒达到最终速度时电容器的储能为

$$W_1 = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{B^4 L^4 C^3 U^2}{(m_1 + m_2 + B^2 L^2 C)^2},$$

两棒最终动能为

$$W_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{B^2 L^2 C^2 U^2}{(m_1 + m_2 + B^2 L^2 C)^2}.$$

整个过程中的焦耳热损耗为

$$\Delta W = W_0 - (W_1 + W_2) = \frac{(m_1 + m_2)CU^2}{2(m_1 + m_2 + B^2 L^2 C)}.$$

例 10 如图 1-29 所示,坐标系 $Oxyz$ 的 x 轴和 z 轴都位于纸面内, y 轴垂直纸面向里. 两无限大金属极板 P 和 Q 分别位于 $x = -d$ 和 $x = d$ 处. 磁感应强度大小为 B 的匀强磁场的方向平行于 Oxz 坐标平面,与 z 轴的夹角为 α . 在坐标原点 O 处,有一电荷量为 $+q$ 、质量为 m 的带电粒子,以沿 y 轴正方向的初速度 v_0 开始运动. 不计重力作用.

(1) 若两极板间未加电场,欲使该粒子在空间上恰好能到达极板(但与板不接触),则初速度 v_0 应为多大? 所需最短时间 t_0 是多少?

(2) 若在两极板间沿 x 轴正方向加上一场强为 E 的匀强电场,使该粒子能在第(1)问中所求得的时间 t_0 到达极板,则该粒子的初速度 v_0 应为多大? 若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 求粒子到达

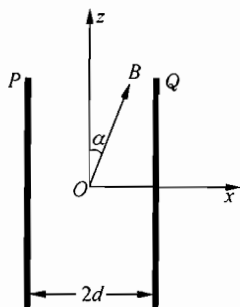


图 1-29

极板时的坐标.

解 本题第(1)小题比较简单,第(2)小题是和例 8 相类似的题目,只是空间关系比较复杂. 须分别考虑三维情况. 近年来这类题出现频繁,除了例 8 和本题之外,习题 38 也是近年的竞赛题.

(1) 平行板间仅有磁场,带电粒子初速度 v_0 的方向垂直于磁场,在洛伦兹力的作用下,粒子将在垂直于磁场方向的平面内做匀速圆周运动,圆周半径

$$R_0 = \frac{mv_0}{qB} \quad (1)$$

轨道平面与 Oxz 坐标平面的交线如图 1-30 中 NN' 所示. 要使粒子刚能到达极板 Q (与板刚未接触),圆心 C 应是 ON' 的中点,有

$$CN' = R_0 = \frac{d}{2\cos\alpha} \quad (2)$$

由①、②式得

$$v_0 = \frac{dqB}{2m\cos\alpha} \quad (3)$$

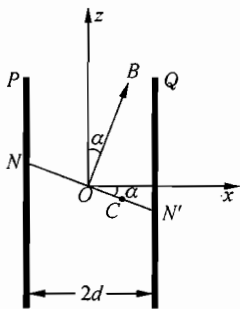


图 1-30

粒子由 O 经过半个圆周到达 N' , 所经历的最短时间为圆周运动的半个周期

$$t_0 = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB} \quad (4)$$

(2) 以 y 轴为旋转轴, 顺时针转动 α 角, 建立新坐标系 $Ox'y'z'$, 如图 1-31 所示. 在新坐标系中电场强度 E 的分量为

$$\begin{aligned} E_{x'} &= E \cos \alpha, & E_{y'} &= 0, \\ E_{z'} &= E \sin \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

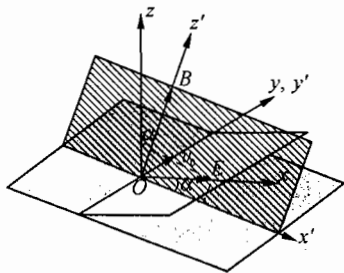


图 1-31

磁感应强度 B 的分量为

$$B_{x'} = 0, \quad B_{y'} = 0, \quad B_{z'} = B \quad (6)$$

带电粒子所受到的电场力的分量为

$$f_{Ex'} = qE_{x'} = qE \cos \alpha, \quad f_{Ey'} = 0, \quad f_{Ez'} = qE_{z'} = qE \sin \alpha \quad (7)$$

当带电粒子速度为 v 时, 带电粒子所受到磁场力的分量为

$$f_{Bx'} = qv_{y'}B, \quad f_{By'} = -qv_{x'}B, \quad f_{Bz'} = 0 \quad (8)$$

(i) 关于带电粒子在 $Ox'y'$ 平面内的分运动

现设想起始时刻带电粒子沿 y' 轴正方向的初速度 v_0 . 用下式表示

$$v_0 = v_0 + v_1 - v_1 = v_2 - v_1,$$

式中

$$v_2 = v_0 + v_1 \quad (9)$$

现把 v_0 看成沿 y' 轴负方向运动的速度 v_1 和沿 y' 轴正方向运动的 v_2 的合成. 这样, 与前者联系的运动使带电粒子受到沿 x' 轴的负方向的磁场力作用, 它与电场力的分量 $f_{Ex'}$ 的方向相反, 当 v_1 取数值

$$v_1 = \frac{E_{x'}}{B} = \frac{E}{B} \cos \alpha \quad (10)$$

时, 与 $-v_1$ 相联系的磁场力与 $f_{Ex'}$ 的合力为零, 其效果是带电粒子沿 y' 轴的负方向以速度 v_1 做匀速运动; 与后者联系的运动使带电粒子仅受到磁场力作用, 此力的方向既垂直于磁场方向 (z' 轴方向), 又垂直于速度 v_2 , 即位于 $Ox'y'$ 平面内, 其大小为

$$f_{x'y'} = qv_2 B \quad (11)$$

粒子在此力作用下在 $Ox'y'$ 平面内做速度为 v_2 的匀速圆周运动, 圆周的半径

$$R = \frac{mv_2}{qB} \quad (12)$$

其圆频率

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (13)$$

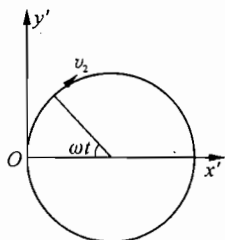


图 1-32

由以上分析可知带电粒子一方面在 $Ox'y'$ 平面内做上述匀速圆周运动, 另一方面圆心沿 y' 轴负方向以速度 $v_1 = \frac{E}{B} \cos \alpha$ 做匀速直线运动。

(ii) 关于粒子沿 z' 轴的分运动

由⑦、⑧两式可知, 粒子在 z' 方向仅受电场力作用, 其加速度

$$a_{z'} = \frac{qE_{z'}}{m} = \frac{qE}{m} \sin \alpha \quad (14)$$

即粒子沿着 z' 轴以加速度 $a_{z'}$ 做匀加速直线运动。

(iii) 关于粒子在 $Ox'y'z'$ 坐标系中的运动方程

在只考虑圆周运动的情况下, 粒子的坐标随时间变化的关系为

$$x' = R(1 - \cos \omega t) \quad (15)$$

$$y' = R \sin \omega t \quad (16)$$

$$z' = 0 \quad (17)$$

考虑了圆心运动及粒子沿 z' 轴的运动并注意到⑨、⑩、⑫式, 在 $Ox'y'z'$ 坐标系中, 粒子的运动方程为

$$x' = \frac{mv_2}{qB} (1 - \cos \omega t) = \left(\frac{mv_0}{qB} + \frac{mE_{x'}}{qB^2} \right) (1 - \cos \omega t) \quad (18)$$

$$y' = R \sin \omega t - v_1 t = \left(\frac{mv_0}{qB} + \frac{mE_{x'}}{qB^2} \right) \sin \omega t - \frac{E_{x'}}{B} t \quad (19)$$

$$z' = \frac{1}{2} \frac{qE_z}{m} t^2 \quad (20)$$

(iv) 粒子在 $Oxyz$ 坐标系中的运动方程利用坐标变换

$$x = x' \cos \alpha + z' \sin \alpha$$

$$y = y'$$

$$z = -x' \sin \alpha + z' \cos \alpha$$

并注意到⑤、⑨、⑩、⑬各式, 可将⑬、⑭、⑯式转换至 $Oxyz$ 坐标系, 得到粒子在 $Oxyz$ 坐标系中的运动方程式为

$$x = \frac{m}{qB} \left(v_0 \cos \alpha + \frac{E \cos^2 \alpha}{B} \right) \left(1 - \cos \frac{q}{m} B t \right) + \frac{1}{2} \frac{qE \sin^2 \alpha}{m} t^2 \quad (21)$$

$$y = \frac{m}{qB} \left(v_0 + \frac{E \cos \alpha}{B} \right) \sin \frac{q}{m} B t - \frac{E \cos \alpha}{B} t \quad (22)$$

$$z = -\frac{m}{qB} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{E \sin 2\alpha}{2B} \right) \left(1 - \cos \frac{q}{m} B t \right) + \frac{qE \sin 2\alpha}{4m} t^2 \quad (23)$$

根据题意, 将 $x = d$ 和 $t = t_0 = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB}$ 代入(21)式, 解得

$$v_0 = \frac{2qB^2 d - mE(4\cos^2 \alpha + \pi^2 \sin^2 \alpha)}{4mB \cos \alpha} \quad (24)$$

将 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $t = t_0 = \frac{\pi m}{qB}$ 和②④式代入②①、②②、②③各式, 可得粒子到达极板 Q 时的坐标为

$$x = d \quad (25)$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}\pi m E}{2qB^2} \quad (26)$$

$$z = -d + \frac{\pi^2 m E}{2qB^2} \quad (27)$$

练习 题

A 组

1. 两个半径相等的电阻均为 $9\ \Omega$ 的均匀光滑圆环, 固定于一个绝缘水平台面上, 两环面分别在两个互相平行的相距为 20 cm 的竖直平面内, 两环面间有方向竖直向下的磁感应强度为 0.87 T 的匀强磁场, 两环的最高点 A 和 C 间接有一内阻为 $0.5\ \Omega$ 的电源, 连接导线的电阻不计. 今有一根质量为 10 g 、电阻为 $1.5\ \Omega$ 的直棒 MN 置于两环内且可顺环滑动, 而棒却恰静止于图 1-33 所示的水平位置, 其两端点与圆环的最低点所夹的弧对应的圆心角均为 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 取重力加速度 $g = 10\text{ m/s}^2$, 求此电源电动势的大小.

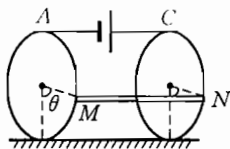


图 1-33

2. 图 1-34 中, M 、 N 为水平放置的两块平行金属板, 相距为 d . 板间有方向垂直于纸面向内的匀强磁场, 磁感应强度为 B . 已知电源的内阻为 r , 变阻器的总阻值为 R . 今有质量为 m 、带电量为 $-q$ 的粒子从左端两板的中央水平飞来射入板间, 不计粒子的重力. 求

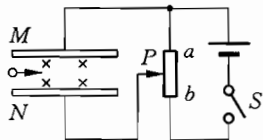


图 1-34

(1) S 断开时, 若带电粒子刚好垂直地打在金属板上, 则其入射速度 $v_0 = ?$

(2) S 闭合时, 变阻器的触头置于 ab 之中点. 粒子仍以速度 v_0 入射而刚好做匀速直线运动, 则电源电动势 $\mathcal{E} = ?$

(3) 若将变阻器的触头 P 移至距 a 端的距离为总长度 ab 的 $\frac{1}{3}$ 处. 闭合 S , 粒子仍以 v_0 自两板中央入射, 而在距金属板 $\frac{1}{4}d$ 处以速度 v 飞出, 则 $v = ?$

3. 如图 1-35 所示, 在地面附近, 坐标系 xOy 在竖直平面内, 空

间有沿水平方向垂直于纸面向里的匀强磁场,磁感强度的大小为 B ,在 $x < 0$ 的空间内还有沿 x 轴负方向的匀强电场,场强大小为 E ,一个带正电的油滴经过图中 x 轴上的 M 点沿着与水平方向成 $\alpha = 30^\circ$ 角的方向斜向下做直线运动,进入 $x > 0$ 的区域,要使油滴进入 $x > 0$ 区域后能在竖直平面内做匀速圆周运动,需要在 $x > 0$ 区域内加一个匀强电场,若带电油滴做圆周运动时通过 x 轴上的 N 点,且 $MO = ON$,求:

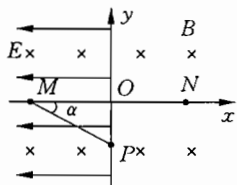


图 1-35

- (1) 油滴的运动速率.
- (2) 在 $x > 0$ 区域内所加电场的大小和方向.
- (3) 油滴从 x 轴上的 M 点开始到达 x 轴上的 N 点所用的时间.

4. 如图 1-36,两个共轴的圆筒形金属电极,外电极接地,其上均匀分布着平行于轴线的四条狭缝 a 、 b 、 c 和 d ,外筒半径为 r_0 ,在圆筒之外的足够大的区域中有平行于轴线方向的匀强磁场,磁感应强度的大小为 B ,在两极板间加上电压,使两圆筒之间的区域内有沿半径向外的电场.一质量为 m 、带电量为 $+q$ 的粒子,从紧靠内筒且正对狭缝 a 的 S 点出发,初速度为零,如果该粒子经过一段时间的运动之后又恰好回到出发点 S ,则两极之间的电压 U 应为多少(不计重力,整个装置在真空中)?

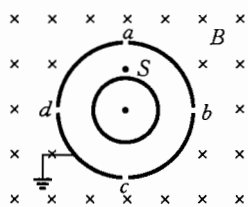


图 1-36

5. 图 1-37 中虚线 MN 是一垂直纸面的平面与纸面的交线,在平面右侧的半空间内存在一磁感应强度为 B 的匀强磁场,方向垂直于纸面向外, O 是 MN 上的一点,从 O 点可以向磁场区域发射电量为 $+q$ 、质量为 m 、速率为 v 的粒子,粒子射入磁场时的速度可以在纸面内的各个方向.已知先后射入的两个粒子恰好在磁场中给定的 P 点相遇, P 到 O 的距离为 l ,不计重力及粒子间的相互作用.

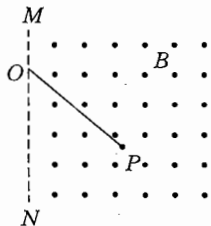


图 1-37

- (1) 求所考察的粒子在磁场中的轨道

半径.

(2) 求这两个粒子从 O 点射入磁场的時間间隔.

6. 有一带负电的液滴在竖直向下的匀强电场和匀强磁场作用下, 在水平面内作直径为 0.2 m 的匀速圆周运动, 已知 $E = 100\text{ V/m}$, $B = 25\text{ T}$, 不计空气阻力和浮力, 若液滴的质量 $m = 10^{-5}\text{ kg}$, 问若去掉电场后, 液滴绕行一周, 动能的增量是多少?

7. 回旋加速器的 D 形盒半径为 $R = 60\text{ cm}$, 两盒间距 1 cm , 用它加速质子时可使每个质子获得 4 MeV 的能量, 加速电压为 $U = 2 \times 10^4\text{ V}$. 求: (1) 该加速器中偏转磁场的磁感强度 B ; (2) 质子在 D 形盒中运动的时间 t ; (3) 整个加速过程中, 质子在电场中运动的总时间 t' .

8. 在水平方向正交的匀强电场和匀强磁场 (图 1-38) 中有一根很长的绝缘直棒, 棒上套有一个小环, 质量 $m = 0.1\text{ g}$, 带正的电量 $q = 4 \times 10^{-4}\text{ C}$. 环可在棒上滑动, 环与棒之间的动摩擦因数 $\mu = 0.2$, 电场强度 $E = 10\text{ N/C}$, 磁感强度 $B = 0.5\text{ T}$. 问:

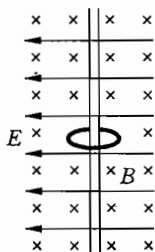


图 1-38

(1) 当小环的加速度为最大时, 其速度是多少?

(2) 小环的最大速度是多少?

9. 如图 1-39 所示, PR 是一块长 L 的绝缘平板, 整个空间有一平行于 PR 的匀强电场 E , 在板的右半部分有一个垂直于纸面向外的匀强磁场 B . 一个质量为 m 、带电量为 q 的物体, 从板的 P 端由静止开始在电场力和摩擦力的作用下向右做匀加速运动, 进入磁场后恰能做匀速运动. 当物体碰到板 R 端挡板后被弹回, 若在碰撞瞬间撤去电场, 物体返回时在磁场中仍做匀速运动, 离开磁场后做匀减速运动停在 C 点, $PC = \frac{L}{4}$, 物体与平板间的动摩擦因数为 μ . 求



图 1-39

(1) 物体与挡板碰撞前后的速度 v_1 和 v_2 ;

(2) 磁感强度 B 的大小;

(3) 电场强度 E 的大小和方向.

10. 一根长为 l 的导线, 载电流为 I , 如果此导线绕成单匝线圈放在磁感强度为 B 的匀强磁场中, 在什么条件下, 这个线圈所受的磁力矩最大? 最大磁矩值是多少?

11. 铜棒质量为 0.1 kg , 静卧于相距 8 cm 的水平轨道上, 两者间的摩擦因数为 0.5 . 现从一轨道输送 5 A 电流至另一轨道, 欲使铜棒滑动, 两轨道间所加的匀强磁场的磁感应强度最小值为多少?

12. 图 1-40 所示, 一个半径为 R 的导电圆环与一个轴向对称的散发磁场处处正交, 环上各点磁感强度 B 的大小相同, 方向均和环面轴线方向成 θ 角, 若导线环上载有一恒定电流 I , 试求磁场作用在圆环上安培力的大小和方向.

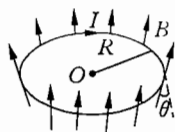


图 1-40

13. 图 1-41 中 $abcd$ 表示的是电流计中的通电线圈, $ab = cd = L_1 = 1 \text{ cm}$, $ad = bc = L_2 = 0.9 \text{ cm}$, 共有 $n = 50$ 匝, 磁感强度 $B = 0.5 \text{ T}$, 均匀辐向分布, 线圈两端接有螺旋弹簧, 每转过 1° 弹簧可产生 $2.5 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{m}$ 的恢复力矩, 若线圈最大偏转角为 90° . 求: (1) 该电流计的满刻度值 I ; (2) 当指针偏转 40° 时, 通入线圈的电流强度.

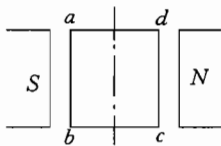


图 1-41

14. 图 1-42 所示, 倾角为 θ 足够粗糙的斜面上放一木制圆柱, 其质量 $m = 0.2 \text{ kg}$, 半径为 r , 长为 $l = 0.1 \text{ m}$, 圆柱上顺着轴线 OO' 绕有 $N = 10$ 匝线圈, 线圈平面与斜面平行, 斜面处于铅直向上的匀强磁场中, 磁感强度为 $B = 0.5 \text{ T}$, 当通入多大电流时, 圆柱才不致往下滚动?

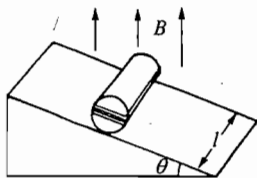


图 1-42

15. 如图 1-43 所示回旋加速器示意图, 在 D 形盒上半面出口处有一正离子源, 试问该离子在下半盒中每相邻两轨道半径之比是多少?

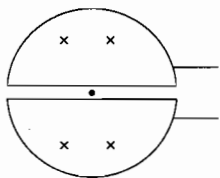


图 1-43

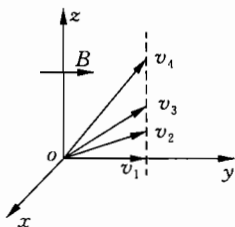
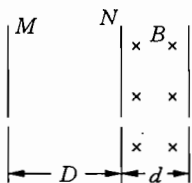


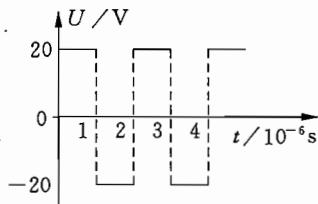
图 1-44

16. 某空间存在着沿 oy 正方向的匀强磁场,磁感强度的大小为 B ,一群同种带电粒子(质量为 m 、电量为 q)同时从坐标原点以不同的初速度 v_1 、 v_2 、 \dots 、 v_n 射出,这些初速之间的关系,如图 1-44 所示,试证明这群粒子将会聚在一起,并求会聚点坐标.

17. 如图 1-45(a)所示, M 、 N 为中心开有小孔的平行板电容器的两极,相距 $D = 1\text{ m}$,其右侧为垂直纸面向里的匀强磁场,磁感强度 $B = 1 \times 10^{-3}\text{ T}$,磁场区域足够长,宽为 $d = 0.01\text{ m}$;在极板 M 、 N 之间加有如图 1-45(b)所示的交变电压(设 N 极电势高于 M 极时电压为正),现有带负电粒子不断从极板 M 中央小孔处射入电容器内(粒子的初速度可看作为零,重力不计),取其荷质比 $q/m = 2 \times 10^4\text{ C/kg}$,试求



(a)



(b)

图 1-45

(1) 在交变电压第一个周期内哪些时刻进入电容器内的粒子能从磁场右侧射出?

(2) 若上述交变电压的周期可变,则周期满足什么条件时,才能保证有带电粒子从右侧射出?

18. 一质量为 m , 带电量为 q 的粒子以速度 v_0 从 O 点沿 y 轴正方向射入磁感强度为 B 的一圆形匀强磁场区域, 磁场方向垂直于纸面, 粒子飞出磁场区域后, 从 b 处穿过 x 轴, 速度方向与 x 轴正向夹角为 30° , 如图 1-46 所示, 不计粒子的重力, 试求

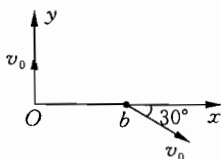


图 1-46

- (1) 圆形磁场区域的最小面积.
- (2) 粒子从 O 点进入磁场区至到达 b 点所经历的时间;
- (3) b 点的坐标.

19. 一顶角为 2θ 的光滑圆锥被竖直放置, 在圆锥内外施加一磁感强度为 B 的匀强磁场, B 的方向与圆锥中心轴平行且向下. 一质量为 m 、带电量为 q 的小球沿圆锥面作匀速圆周运动, 试问它运动的最小半径是多少?

20. 如图 1-47, 在一绝缘光滑台面的上方空间的足够大的区域内, 有互相正交的匀强电场和匀强磁场, 电场强度为 10 N/C , 磁感强度为 5 T . 今有一质量为 1 g 、带电量为 $+4 \times 10^{-4} \text{ C}$ 的可视

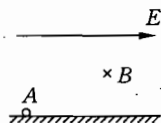


图 1-47

为质点的小球 A 由静止开始在台面上运动, 取 $g = 10 \text{ m/s}^2$, 求 A 在台面上运动速度能达到的最大值.

B 组

21. 如图 1-48 所示, 一个长方体绝缘容器内装满导电溶液, 液体的密度为 ρ , 前后厚为 d , 两侧装有两根开口向上的管子, 上、下装有电极 C (正极) 和 D (负极), 并经开关 S 和电源连接. 将容器置于一匀强磁场中, 磁场方向垂直向里, 问:

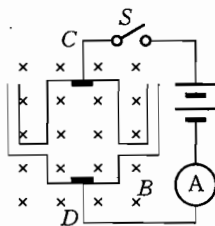


图 1-48

- (1) 开关闭合后, 哪管的液面高一些?
- (2) 若测得回路中的电流为 I , 两管液面的高度差为 h , 则磁感强度 B 的大小是多少?

22. 如图 1-49 所示, 一窄束动能相等的氦离子通过一扇形匀

强磁场,此束射线进出磁场时都与磁场的边界垂直. 求质量数是 $m_1 = 36$ 和 $m_2 = 40$ 的氩同位素束的发散角.

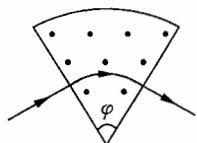


图 1-49

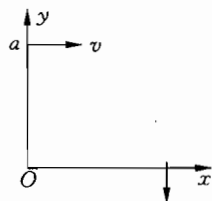


图 1-50

23. 一带电质点, 质量为 m , 电量为 q , 以平行于 Ox 轴的速度 v 从 y 轴上的 a 点射入图 1-50 中的第一象限所示的区域, 为了使该质点能从 x 轴上的 b 点以垂直于 Ox 轴的速度 v 射出, 可以在适当的地方加一个垂直于 xy 平面、磁感强度为 B 的匀强磁场. 若此磁场仅分布在一个圆形区域内, 试求这个圆形区域的最小半径. 重力忽略不计.

24. 在通电螺线环的平均半径 R 处有点源 P (图 1-51). 由 P 点沿磁感线方向注入孔径角 $2\alpha_0$ 很小 ($\alpha_0 \ll 1^\circ$) 的一束电子, 束中的电子都是经电压 U_0 加速后从 P 点发出的. 假设磁感强度 B_1 的大小不变, 各电子间的库仑力可忽略.

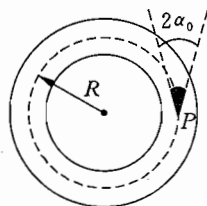


图 1-51

(1) 为了使电子束沿环形运动, 需要另加一个怎样的磁场 B_2 ;

(2) 当电子束沿环形运动时, 为了使电子束每绕一圈有四个聚焦点, B_1 应有多大?

25. 空间有分区均匀的磁场沿着 z 轴. $y = 0$ 处有一个分界面, 在 $y > 0$ 的区域内, 磁感强度为 B_1 ; 在 $y < 0$ 的区域内, 磁感强度为 B_2 . $B_2/B_1 = 4/3$. 在 $t = 0$ 时刻, 处于磁场分界面上的一个静止中性粒子裂变为两个带电粒子 a 和 b , 质量分别为 m_a 和 m_b . 已知粒子 a 开始沿 y 轴方向飞. 试问在什么条件下两个粒子以后又在分界面上相遇? 忽略粒子间的静电作用力.

26. 匀强电场场强 $E = 2 \times 10^4 \text{ V/m}$, 匀强磁场 $B = 3 \times 10^{-2} \text{ T}$,

二者互相平行如图 1-52, 现有 150 eV 的质子与场垂直沿 x 轴正方向射入场内, 有一感光片垂直于初速方向与质子相距 5.1 cm. 求: (1) 质子经过多少时间能打到感光片上? (2) 打在感光片的哪个位置 (质子质量 $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg)?

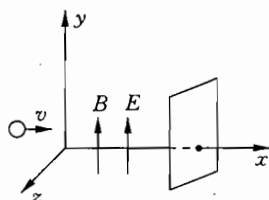


图 1-52

27. 质量为 m 的小球, 可以而且只能沿半径为 r 的圆环形轨道运动, 轨道平面为水平面, 小球带有固定正电荷 q , 设有空间分布均匀但随时间 t 变化的磁场, 磁感强度 $B(t)$, 方向垂直环面向上, 如图 1-53. $t = 0$ 时, $B = 0$, 小球静止于环上; $0 < t < T$ 时, $B(t)$ 随时间 t 均匀增长; $t = T$ 时, $B = B_0$; $t \geq T$ 时磁场稳定不变. 试定量地讨论 $t > 0$ 时, 小球的运动状况以及小球对轨道的作用力 (重力、摩擦力忽略不计).

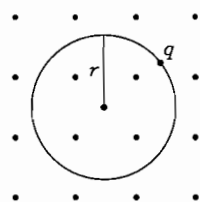


图 1-53

28. 如图 1-54 所示, 单摆的摆长为 L , 摆球带正电 q , 放在匀强磁场中, 摆球摆动的平面跟磁场垂直, 最大摆角为 α , 为使此摆能正常摆动, 磁感应强度 B 的值有何限制?

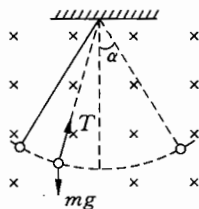


图 1-54

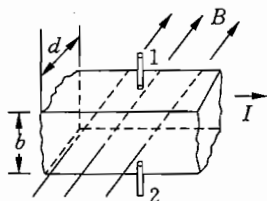


图 1-55

29. 如图 1-55 所示, 一块半导体样品板放在垂直于板平面的水平向里的匀强磁场中. 当有稳恒电流垂直于磁场方面通过样品板时, 在板的上、下两个侧面之间会产生一个恒定的电势差 $U_1 - U_2$.

(1) 如果测得 $U_1 - U_2 > 0$, 则这样品板的载流子是正电荷还是负电荷? 为什么?

(2) 设磁感应强度为 B , 样品板的厚度为 d , 宽为 b , 每个载流子带电量的绝对值为 e . 证明样品板在单位体积内参加导电的载流子数:

$$n = \frac{IB}{ed} \cdot \frac{1}{U_1 - U_2}$$

30. 一个半径为 R 的圆线圈, 共有 N 匝, 放在方向竖直向下的匀强磁场中, 磁感应强度为 B . 线圈可绕通过其水平直径的固定的轴转动, 一个质量为 M 的物体用细线挂在线圈下部, 如图 1-56 所示. 当线圈通以电流 I 后, 最终能在某一位置处于平衡状态, 这个线圈平面与磁场夹角为 θ , 写出 θ 的计算式. 取 $B = 0.50$ 特, $R = 10$ 厘米, $N = 10$ 匝, $m = 500$ 克, $I = 1.0$ 安, 线圈本身重力忽略不计.

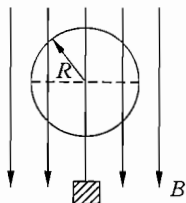


图 1-56

31. 直流输电站通过两条互相平行且它们之间单位长度之电容为 10^{-11} 法拉/米的导线, 将 33 千伏的电压输送到远处, 当两导线之间没有作用力时, 输送的功率是多少?

32. 如图 1-57, 在空间有互相正交的匀强电场和匀强磁场, 电场强度为 E , 磁感应强度为 B , 其方向如图所示. 今有一质量为 m 、带电量为 $+q$ 的离子, 自此场中的一点由静止开始运动, 试求此离子在运动中任意一时刻的位置, 重力忽略不计.

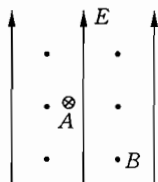


图 1-57

33. 一宇宙人在太空(万有引力可以忽略)玩垒球, 辽阔的太空球场半侧为均匀电场 E , 另半侧为均匀磁场 B , 电场与磁场的分界面为平面, 电场方向与界面垂直, 磁场方向垂直纸面指向里. 宇宙人位于电场一侧距界面为 h 的 P 点, O 点是 P 点至界面垂线的垂足, D 点位于纸面上 O 点的右侧, OD 与磁场 B 的方向垂直, $OD = d$, 如图 1-58 所示. 垒球的质量为 m , 且带有电量 $-q$ ($q > 0$).

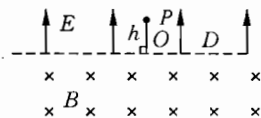


图 1-58

(1) 宇宙人是否可能自 P 点以某个适当的投掷角(与界面所成

的夹角 α_0 及适当的初速度 v_p 投出垒球,使它经过 D 点,然后历经磁场一次自行回至 P 点?试讨论实现这一游戏, d 必须满足的条件并求出相应 α_0 、 v_p 。

(2)若宇宙人从 P 点以初速度 v_0 平行于界面投出垒球,要使垒球击中界面上的某一 D 点,初速度 v_0 的指向和大小应如何?

34. 在 xy 平面上有一片稀疏的电子处在 $-H < y < H$ 的范围内,从 x 负半轴的远处以相同的速率 v 沿着 x 轴方向平行地向 y 轴射来.试设计一个磁场,使得所有电子均通过原点,然后扩展到在 $-2H < y < 2H$ 范围内继续沿着 x 正方向飞行(图1-59虚线内范围)。

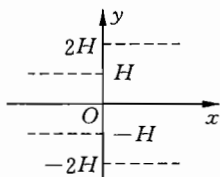


图 1-59

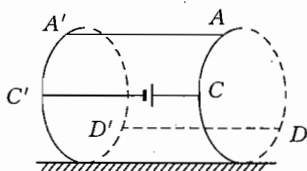


图 1-60

35. 如图1-60,两个相同的均匀圆环用三根硬直导线 AA' 、 CC' 、 DD' 相连接,此三线互相平行且分别与两端面的环面垂直,已知 $\widehat{AC} = \widehat{A'C'} = 60^\circ$, $\widehat{CD} = \widehat{C'D'} = 120^\circ$,每个圆环的全长电阻均为 6Ω , AA' 的电阻为 1Ω , DD' 和 CC' 的电阻均为零. CC' 上还接有一个直流电源,此装置放置在绝缘水平台面上,所在区域还有竖直方向的匀强磁场.求

(1)若通过电源的电流为 1A ,则通过 DD' 中的电流为多大?

(2)若不计此装置各部分的重力,试指出此装置放置(维持 AA' 为水平)时的平衡位置,并说明此平衡属何种平衡.

36. 沿 x 轴方向有一匀强磁场,磁感强度为 0.1T ,一个电子以 $5 \times 10^6\text{m/s}$ 的速度经过原点进入磁场,其速度与磁场的夹角为 60° ,试求电子第16次通过 x 轴(原点除外)时离开原点的距离(电子质量 $m = 9.1 \times 10^{-31}\text{kg}$).

37. (1)图1-61所示是两个相同的导线环 A 与 B .中心都在 z 轴上,两导线环分别位于平面 $z = \pm h$,为了使两环互相排斥,它们通

的电流方向应是相同还是相反. (2) 一个通以电流的导线圆环能在不用任何器械的情况下漂浮在水平的超导平面之上. 假设 A 就是一个均匀圆环, 它的质量为 M , 且它的半径 r 远大于它和超导平面的距离 h , 平面 $z=0$ 就是超导平面. 证明达到平衡时的高度, 即导线环 A 离超导平面的距离 $h_0 = \frac{\mu_0 r I^2}{2Mg}$. (3) 如果漂浮的环在垂直方向上振动, 求振动的周期.

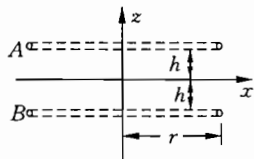


图 1-61

38. 在真空中建立一坐标系, 以水平向右为 x 轴正方向, 竖直向下为 y 轴正方向, z 轴垂直纸面向里. 在 $0 \leq y \leq L$ 的区域内有匀强磁场, $L = 0.80 \text{ m}$, 磁场的磁感强度的方向沿 z 轴的正方向, 其大小 $B = 0.10 \text{ T}$. 今把一荷质比 $q/m = 50 \text{ C/kg}$ 的带正电质点在 $x = 0, y = -0.20 \text{ m}, z = 0$ 处静止释放, 将带电质点过原点的时刻定为 $t = 0$ 时刻, 求带电质点在磁场中任一时刻 t 的位置坐标. 并求它刚离开磁场时的位置和速度. 取重力加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$.

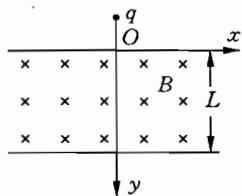


图 1-62

第二讲 电磁感应

知识要点和基本方法

由磁场激发电场或电动势的过程叫电磁感应. 由电磁感应发生的机理不同, 可分为动生电磁感应和感生电磁感应两大类.

一、动生电磁感应

导体在磁场中做切割磁感线运动, 在导体两端产生感生电动势的现象叫动生电磁感应.

动生电磁感应的产生是由于洛伦兹力的作用. 导体 ab 在磁场 B 中做垂直于磁力线的运动, 速度为 v , 导体长度为 L . 由于导体中所有自由电子也都随着导体一起以 v 向右运动, 因此受到洛伦兹力 $F_{\text{洛}} = evB$, 这样就使导体的 b 端积累了负电荷, a 端积累了正电荷, 形成了感生电场(图 2-1). 这种自由电子的定向移动一直要进行到洛伦兹力和感生电场的电场力相互平衡为止, 即

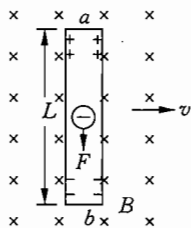


图 2-1

$$evB = \frac{\mathcal{E}_{ab}}{L}e,$$

$$\mathcal{E}_{ab} = BLv.$$

由此可见, 在动生电磁感应过程中, 是洛伦兹力充当了搬运电荷的非静电力.

当 v 与 B 成 α 角时

$$\mathcal{E}_{ab} = BLv \sin \alpha.$$

如果导体与 B 不垂直, 则 L 可取垂直于 B 方向的有效长度.

当一根导体上的各点速度不一样时,一般说来要用积分的方法才能求出整根导体上的动生电动势,但有些特殊情况还是可以用初等数学来解. 比如图 2-2 所示的金属杆 AB 绕 O 轴在磁场中匀速转动,因为杆上各点的线速度是均匀变化的,所以可用平均速度来求电动势. OB 之间的动生电动势

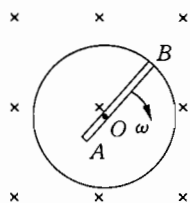


图 2-2

$$\mathcal{E}_{BO} = B\omega \cdot \frac{\overline{BO}}{2} \cdot \overline{BO} = \frac{1}{2}B\omega \overline{BO}^2.$$

OA 之间的动生电动势

$$\mathcal{E}_{AO} = B\omega \cdot \frac{\overline{AO}}{2} \cdot \overline{AO} = \frac{1}{2}B\omega \overline{AO}^2.$$

所以
$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E}_{AO} - \mathcal{E}_{BO} = \frac{1}{2}B\omega (\overline{AO}^2 - \overline{BO}^2).$$

有的问题中杆的运动方向、杆的轴线方向都和 B 不垂直,杆上各点的速度又不同,处理起来就比较复杂一些,请看下题.

如图 2-3 所示的直角坐标系中,有一绝缘圆锥体,半锥角为 θ ,轴线沿 z 轴方向,顶点在原点处. 有一条长为 l 的细金属丝 OP 固定在圆锥体的侧面上,与圆锥体的一条母线重合. 空间存在着沿正 x 方向的匀强磁场 B . 试讨论当圆锥体沿如图所示方向做角速度为 ω 的匀角速转动时, OP 上感生电动势的情况.

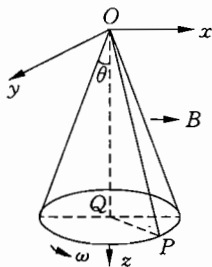


图 2-3

当 P 点的 x 坐标为正时, P 点的电势都高于 O 点的电势;当 P 点的 x 坐标为负时, P 点的电势都低于 O 点的电势;当 P 点的 y 坐标为 0, 即 OP 在 xOz 平面时, OP 上的感生电动势最大. 此时, OP 在垂直于 B 方向上的有效长度为

$$OQ = OP \cos \theta = l \cos \theta,$$

P 点的速度为

$$v_P = \omega QP = \omega l \sin \theta,$$

而 O 点的速度为零, 所以 OP 上各点的平均速度为 $v_P/2$. 因此此时 OP 上的感生电动势大小为

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} l^2 \omega B \sin \theta \cos \theta.$$

当 P 点运动到某一位置(图 2-4), P 点的 x 、 y 坐标都大于零, QP 与 x 轴的夹角为 α 时, OP 在垂直于 B 方向上的有效长度为

$$OS = l \cos \theta / \cos \beta,$$

β 为 OP 在 yOz 平面上的投影 OS 与 z 轴的夹角.

S 点绕 O 点运动的速度为

$$v_s = l \omega \sin \theta \cos \alpha \cos \beta.$$

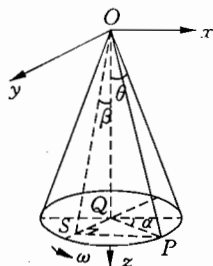


图 2-4

O 点的速度始终为零, 所以 OP 上各点在 y 方向上的平均速度为 $v_s/2$. 因此此时 OP 上的感生电动势的大小为

$$e = \frac{1}{2} l^2 \omega B \sin \theta \cos \alpha \cos \theta.$$

二、感生电磁感应

导体相对磁场静止, 由于磁场的变化而引起导体内感生电动势的现象叫感生电磁感应.

产生感生电磁现象的原因是由于感生涡旋电场的作用, 假如有一个局限在圆柱形范围内的匀强磁场 B , B 的方向平行于圆柱体的轴. 当 B 的大小在增加时, 感生电场的方向如图 2-5 所示. 根据对称性, 在回路上各点处的感生电场方向必然与回路相切, 感生电场的电感线是一些同心圆. 因此, 感生电场的电感线是闭合线, 无头无尾, 像旋涡一样, 所以由磁场变化而激发的电场也叫涡旋电场. 而静电场的

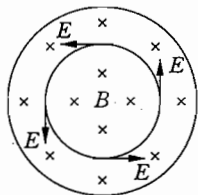


图 2-5

电感线却是起于正电荷而终于负电荷的,是有头有尾的.这是一个很重要的区别.

根据电动势和电场的关系,如果磁场区域半径为 R ,回路的半径为 r ,回路上的电场强度为 E ,则

$$2\pi rE = \Delta\Phi/\Delta t.$$

因为 $\Delta\Phi = \pi r^2 \Delta B$,所以有

$$E = \begin{cases} \frac{r}{2} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}, & r \leq R. \\ \frac{R^2}{2r} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}, & r > R. \end{cases}$$

(一) 磁场中导体的感生电动势

在一个半径为 R 的长直螺线管中通有变化的电流,使管内圆柱形的空间产生变化的磁场,且 $\Delta B/\Delta t > 0$ (图 2-6). 如果在螺线管横截面内,放置一根长为 R 的导体棒 ab ,使得 $oa = ab = ob$,那么 ab 上的感生电动势 \mathcal{E}_{ab} 是多少? 如果将导体棒延伸到螺线管外,并使得 $ab = bc = R$ 呢?

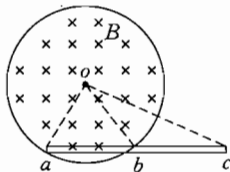


图 2-6

前面已说过:长直通电螺线管内是匀强磁场,而管外磁场为零,所以本题研究的是一个圆柱形匀强磁场.

尽管根据前述 E 的表达式,可知 ab 棒所在各点的电场强度,但要根据这些场强来求出 \mathcal{E}_{ab} 却要用到积分的知识,因此一般中学生无法完成. 我们可取个等边三角形面积 oab , 因为 oa 和 ob 垂直于感生电场的电力线,所以 oa 和 ob 上没有感生电动势. 又根据法拉第电磁感应定律, oab 回路上的感生电动势

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t},$$

这也就是 \mathcal{E}_{ab} 的大小.

如果将 ab 延伸到 c ,则可研究 Δoac , 根据同样的道理可知

$$\mathcal{E}_{ac} = \frac{\Delta\Phi'}{\Delta t} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{12} \right) R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

很明显,上面这个问题可以这样解的前提是磁场局限于圆柱形内. 如果一根导体棒是放在一个宽广的或是其他范围不规则的磁场内,那是得不出上述结果的. 假如将一个导体闭合回路放在磁场中,对磁场就没有那么严格的要求了,这类问题一般说来同学们是熟悉的,但如果是一个比较复杂的电路放在磁场中,处理时就要用一些新的方法.

(二) 磁场中闭合电路的感生电动势

解磁场中一个比较复杂的闭合电路的感生电流的问题,一般除了用到有关电磁感应的知识以外,还要用到解复杂电路的回路电压定律和节点电流定律.

将一个半径为 a 、电阻为 r 的圆形导线,接上一个电阻为 R 的电压表后按图 2-7(a)、(b)两种方式放在磁场中,连接电压表的导线电阻可忽略,(a)、(b)中的圆心角都是 θ . 均匀变化的磁场垂直于圆面,变化率 $\Delta B/\Delta t = k$. 试问(a)、(b)中电压表的读数各为多少?

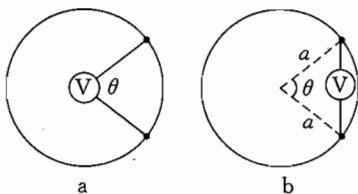


图 2-7

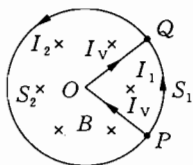


图 2-8

因为电压表的读数与它两端的正负无关,所以可以任意假设磁场 B 的方向和变化率的正负. 现在我们设 B 垂直于纸面向里,且 $\Delta B/\Delta t = k > 0$ (图 2-8). 回路 OPS_1Q 的面积 $S_1 = \frac{\theta}{2\pi}(\pi a^2)$, 回路 OQS_2P 的面积 $S_2 = \frac{2\pi - \theta}{2\pi}(\pi a^2)$. 这两个回路单独存在时的感生电流方向相同,都是逆时针的,感生电动势的大小分别为

$$\mathcal{E}_1 = S_1 \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\theta}{2\pi}(\pi a^2)k,$$

$$I_V = I_2 - I_1,$$

$$\mathcal{E}'_1 = I_1 R_1 - I_V R,$$

$$\mathcal{E}'_2 = I_2 R_2 + I_V R \quad (R \text{ 为伏特表的内阻}).$$

由上述方程可解得

$$I_V = 2\pi^2 a^2 k \sin \theta \left/ \left[\theta(2\pi - \theta) \frac{r}{R} + 4\pi^2 \right] \right. R,$$

由此可知电压表的读数为

$$V = I_V R = 2\pi^2 a^2 k \sin \theta \left/ \left[\theta(2\pi - \theta) \frac{r}{R} + 4\pi^2 \right] \right. .$$

本问题中我们用到的电流方程(如③式)和回路电压方程(如④、⑤式),实际上就是上一讲中提到过的基尔霍夫方程.在解决电磁感应的问题时,用电压回路方程十分方便,因为电磁感应的电动势是分布在整个回路上的.

三、自感和互感

(一) 自感

当流过电路本身的电流发生变化时,在电路中产生阻碍电流变化的感生电动势,这种电磁感应现象叫自感.在自感现象中产生的感生电动势叫自感电动势 \mathcal{E}_L , \mathcal{E}_L 的大小为

$$\mathcal{E}_L = L \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

上式中的 L 叫自感系数.

如图 2-10 所示,光滑的水平面上,有边长 $l = 0.8 \text{ m}$ 的正方形导线框 $abcd$,质量 $m = 100 \text{ g}$,自感系数 $L = 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{s/A}$,电阻忽略不计.当 $t = 0$ 时,线框的 bc 边以初速 $v_0 = 4 \text{ m/s}$ 进入磁感强度为 B 的有界匀强磁场区域,磁场区域宽 $s = 0.2 \text{ m}$, B 的大小为 0.5 T ,方向如图所示.试分析 bc 边的运动.

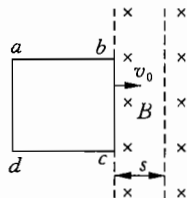


图 2-10

因此线框的电阻忽略不计,所以回路的

总电动势必然为零(否则将产生无穷大的电流),因此 bc 边中的动生感生电动势和整个回路的自感电动势平衡

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = Blv,$$

$$L\Delta I = Blv\Delta t = Bl\Delta x,$$

故

$$LI = Blx,$$

安培力

$$F = BIl = Bl \left(\frac{Blx}{L} \right) = \frac{B^2 l^2}{L} x.$$

由此可见在 bc 边尚未离开磁场时,线框做简谐运动. 振动周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{B^2 l^2}} = \frac{2\pi}{Bl} \sqrt{mL},$$

代入数据

$$T = \pi/20(\text{s}).$$

圆频率

$$\omega = 2\pi/T = 40 \text{ rad/s},$$

振动方程

$$x = A \sin \omega t,$$

$$v = A\omega \cos \omega t.$$

如果

$$v_0 = 4 \text{ m/s}, \text{ 则}$$

$$A = v_0 / \omega = 0.1 \text{ m} < s.$$

所以在半个周期内 bc 边是不会离开磁场的. 经过 $T/2$ 时间后, bc 边回到磁场左边沿, 此时 $v = -v_0$, 然后以此速度向左做匀速运动.

(二) 互感和变压器

因一个电路中电流发生变化,而在邻近的另一个电路中引起感应电动势的现象叫互感现象. 变压器就是利用互感现象来改变交流电压的.

变压器的构造如图 2-11 所示,原、副线圈匝数分别为 n_1 、 n_2 ,常见的理想变压器必须满足以下四个条件:

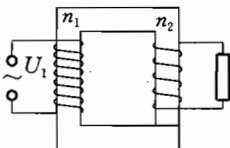


图 2-11

(1)没有漏磁,即通过铁心各处的磁通量都相同;(2)线圈电阻不计;(3)铁心不损耗电能;(4)原、副线圈的感抗都趋于无穷大,这样对理想变压器必有

$$e_1 = n_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, e_2 = n_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

$$U_1 = e_1, U_2 = e_2, \text{ 故}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

因理想变压器不计能量损耗,所以变压器的输入功率等于输出功率,即

$$U_1 I_1 = U_2 I_2,$$

因此

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

但上式只适用于只有一个副线圈的变压器,对有多个线圈的变压器回路应当用

$$U_1 I_1 = U_2 I_2 + U_3 I_3 + \cdots + U_n I_n \text{ 和}$$

$$U_1 / U_2 = n_1 / n_2, U_1 / U_3 = n_1 / n_3, \cdots \text{ 来进行计算.}$$

变压器除了有改变电压、电流的作用外,还有变换负载阻抗的作用,以实现阻抗匹配.

如图 2-12 所示,负载阻抗 R 接在变压器的副线圈上,图中虚线部分可以用一个阻抗 R' 来等效替代,电路如图 2-13 所示.

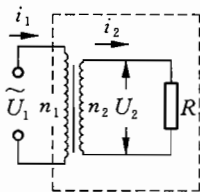


图 2-12

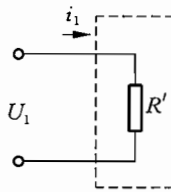


图 2-13

所谓等效,就是输入电路的电压和电流、功率不变.或者说成:直

接接在电源上的阻抗 R' 和接在变压器副线圈的阻抗 R 是等效的.

推算可知, $R' = \frac{U_1}{i_1}$, $R = \frac{U_2}{i_2}$, 由于 $U_1/U_2 = n_1/n_2$, $i_1/i_2 = n_2/n_1$, 代入可得: $R' = (n_1/n_2)^2 R$.

由上式可知, 变压器原、副线圈的匝数比不同, 负载阻抗反映到原边的阻抗 R' 不同. 因而可以选取不同的匝数比, 把负载阻抗变换为所需要的比较合适的数值. 这种做法通常称为阻抗匹配. 收音机中扬声器前的变压器即起着阻抗匹配的作用.

例题精讲

例 1 如图 2-14 所示, 水平放置的金属细圆环半径为 a , 竖直放置的金属细圆柱(其半径比 a 小得多)的端面与金属圆环的上表面在同一平面内, 圆柱的细轴通过圆环的中心 O . 一质量为 m , 电阻为 R 的均匀导体细棒被圆环和细圆柱端面支撑, 棒的一端有一小孔套在细轴 O 上, 另一端 A 可绕轴线沿圆环做圆周运动, 棒与圆环的摩擦因数为 μ . 圆环处于磁感应强度大小为 $B = Kr$ 、方向竖直向上的恒定磁场中, 式中 K 为大于零的常量, r 为场点到轴线的距离. 金属细圆柱与圆环用导线 ed 连接. 不计棒与轴及与细圆柱端面的摩擦, 也不计细圆柱、圆环及导线的电阻和感应电流产生的磁场. 问沿垂直于棒的方向以多大的水平外力作用于棒的 A 端才能使棒以角速度 ω 匀速转动.

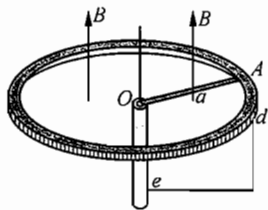


图 2-14

$$\text{注: } (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

解 将整个导体棒分割成 n 个小线元, 小线元端点到轴线的距离分别为 $r_0 (=0)$, r_1 , r_2 , \dots , r_{i-1} , r_i , \dots , r_{n-1} , $r_n (=a)$, 第 i 个线元的长度为 $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$, 当 Δr_i 很小时, 可以认为该线元上各点的速度都为 $v_i = \omega r_i$, 该线元因切割磁感线而产生的电动势为

$$\Delta \epsilon_i = B v_i \Delta r_i = K r_i \omega r_i \Delta r_i = K \omega r_i^2 \Delta r_i \quad (1)$$

整个棒上的电动势为

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n \Delta\epsilon_i = K\omega \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta r_i \quad (2)$$

由 $(r + \Delta r)^3 = r^3 + 3r^2 \Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3$,

略去高阶小量 $(\Delta r)^2$ 及 $(\Delta r)^3$, 可得

$$r^2 \Delta r = \frac{1}{3} [(r + \Delta r)^3 - r^3]$$

代入②式, 得

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{3} K\omega \sum_{i=1}^n (r_i^3 - r_{i-1}^3) \\ &= \frac{1}{3} K\omega [(r_1^3 - r_0^3) + (r_2^3 - r_1^3) + \cdots + (r_n^3 - r_{n-1}^3)] \\ &= \frac{1}{3} K\omega a^3 \end{aligned} \quad (3)$$

由全电路欧姆定律, 导体棒通过的电流为

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{K\omega a^3}{3R} \quad (4)$$

导体棒受到的安培力方向与棒的运动方向相反.

第 i 个线元 Δr_i 受到的安培力为

$$\Delta f_{Ai} = BI \Delta r_i = Kr_i I \Delta r_i \quad (5)$$

作用于该线元的安培力对轴线的力矩

$$\Delta M_i = \Delta f_{Ai} \cdot r_i = KI r_i^2 \Delta r_i$$

作用于棒上各线元的安培力对轴线的总力矩为

$$M = \sum_{i=1}^n \Delta M_i = KI \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta r_i = \frac{1}{3} KI \sum_{i=1}^n (r_i^3 - r_{i-1}^3) = \frac{1}{3} KI a^3$$

即

$$M = \frac{K^2 \omega a^6}{9R} \quad (6)$$

因棒 A 端对导体圆环的正压力为 $\frac{1}{2}mg$, 所以摩擦力为 $\frac{1}{2}\mu mg$, 对轴的摩擦力矩为

$$M_\mu = \frac{1}{2}\mu m g a \quad (7)$$

其方向与安培力矩相同, 均为阻力矩. 为使棒在水平面内做匀角速转动, 要求棒对于 O 轴所受的合力矩为零, 即外力矩与阻力矩相等. 设在 A 点施加垂直于棒的外力为 F, 则有

$$F a = M + M_\mu \quad (8)$$

由⑥、⑦、⑧式得

$$F = \frac{K^2 \omega a^5}{9R} + \frac{1}{2}\mu m g \quad (9)$$

以上解法中的式③和式⑥, 对于掌握了简单积分知识的学生很容易得到. 没有学过积分的学生掌握这种先细分、再求和的思路也是很有用的. 关键是细分以后就可以将变化的量看成不变的量. 例如本题中只要将 r 细分, 即可认为每一小段 Δr 中的磁感强度 B 是不变的.

例 2 图 2-15 中的 da 、 cb 为相距 l 的平行导轨(电阻很小, 可以忽略). a 、 b 间连接一个固定电阻, 阻值为 R . 长直细杆 MN 可以按任意角 θ 架在平行导轨上, 并以匀速 v 滑动(平移), v 的方向和 da 平行. 杆 MN 有电阻, 每米长的电阻值为 R . 整个空间充满匀强磁场, 磁感应强度的大小为 B , 方向垂直纸面($dabc$ 平面)向里.

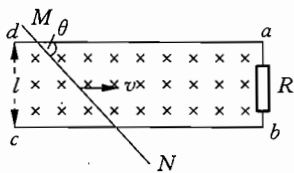


图 2-15

- (1) 求固定电阻 R 上消耗的电功率为最大时角 θ 的值.
- (2) 求杆 MN 上消耗的电功率为最大时角 θ 的值.

解 如图 2-16 所示,棒滑动时切割磁力线而产生感应电动势 ϵ ,其值与 θ 角无关,为:

$$\epsilon = lvB$$

以 r 表示两导轨间那段棒的电阻,
则回路中的电流为:

$$I = \frac{\epsilon}{R+r}.$$

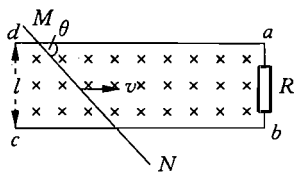


图 2-16

(1) 电阻 R 上消耗的功率为:

$$P_R = I^2 R = \frac{\epsilon^2 R}{(R+r)^2}.$$

由于 ϵ 和 R 均与 θ 无关,所以 r 的值最小时 P_R 达最大值. 当棒与导轨垂直时两轨道间的棒长最短, r 的值最小,所以 P_R 最大时的 θ 值为:

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

(2) 棒上消耗的电功率为:

$$P_{MN} = I^2 r = \frac{\epsilon^2 r}{(R+r)^2},$$

要求 P_{MN} 最大,即要求 $\frac{r}{(R+r)^2}$ 取极大值. 由于

$$\frac{r}{(R+r)^2} = \frac{1}{4R} \left[1 - \left(\frac{r-R}{r+R} \right)^2 \right].$$

显见, $r=R$ 时, $\frac{r}{(R+r)^2}$ 有极大值. 因每米杆长的电阻值为 R , $r=R$ 即要求两导轨间的棒长为 1 米,所以有以下两种情况:

(i) 如果 $l \leq 1$ 米, 则当 θ 满足下式时 $r=R$,

$$1 \times \sin \theta = l,$$

所以

$$\theta = \sin^{-1} l.$$

(ii) 如果 $l > 1$ 米, 则两导轨间那段棒长总是大于 1 米, 即总有 $r > R$. 由于

$$\left(\frac{r-R}{r+R}\right)^2 = \left(1 - \frac{2R}{R+r}\right)^2.$$

在 $r > R$ 的条件下, 上式随 r 的减小而单调减小, r 取最小值 $\theta = \frac{\pi}{2}$

时, $\left(\frac{r-R}{r+R}\right)^2$ 取最小值, $\frac{r}{(R+r)^2}$ 取最大值, 所以 P_{MN} 取最大值时 θ 值为:

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

例 3 一菱形均匀线圈中, 已知 $\angle acd = \alpha$, $\overline{dc} = X_c$, 在均匀恒定磁场 B 中以匀角速度 ω 绕其对角线转动(图 2-17), 转轴与 B 垂直, 当线圈平面转至与 B 平行时, 求:

(1) $u_a - u_c = ?$

(2) 设 b 为 \overline{ac} 中点, $u_b - u_c = ?$

(3) a 、 c 间电势最低点的位置.

解 (1) 由含源电路的欧姆定律有

$$u_a - u_c = -\epsilon_{ac} + IR,$$

式中 R 为线圈 ac 边的电阻, 由对称性可知:

$$\epsilon_{ac} = \frac{1}{4} \epsilon_{\text{总}},$$

$$\text{故有: } u_a - u_c = -\frac{1}{4} \epsilon_{\text{总}} + \frac{\epsilon_{\text{总}}}{4R} \cdot R = 0.$$

$$(2) u_b - u_c = -\epsilon_{bc} + \frac{1}{2} IR.$$

要注意, $\epsilon_{bc} \neq \frac{1}{2} \epsilon_{ac}$, 因为 ab 与 bc 上各点切割磁感线的速度不相同, 但有

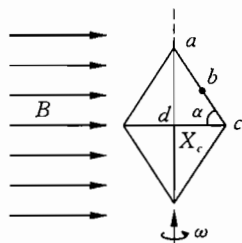


图 2-17

$$\epsilon_{bc} = \epsilon_{ac} - \epsilon_{ab}.$$

在 B 、 v 、 l 三者垂直, 且 l 的速度恒定的情况下, $\epsilon = Bvl$. 在本题中, $B \perp v$, 但 l 与 B 不垂直, 我们可将 l 沿 B 和垂直 B 方向分解. 由于 l 上各点的 v 不是常数, 但由于 $v = \omega x$, 是 x 的线性函数, 因此可求出平均速度 \bar{v} , 为此先求 ϵ_{ab} .

$$\epsilon_{ab} = B \bar{v} \cdot \frac{1}{2} \overline{ac} \cdot \sin \alpha, \text{ 而 } \overline{ac} \cdot \cos \alpha = X_c,$$

$$\text{所以 } \epsilon_{ab} = B \bar{v} \cdot \frac{1}{2} \frac{X_c}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} B \bar{v} X_c \tan \alpha,$$

$$\bar{v} = \omega \cdot x.$$

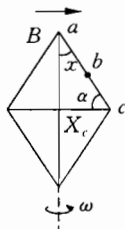


图 2-18

$$x \text{ 为 } ab \text{ 中点到转轴的距离, } \frac{x}{X_c} = \frac{\frac{1}{2} \overline{ab}}{\overline{ac}} = \frac{\frac{1}{4} \overline{ac}}{\overline{ac}} = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } x = \frac{1}{4} X_c,$$

$$\text{故 } \epsilon_{ab} = \frac{1}{8} \omega B X_c^2 \tan \alpha.$$

同理可求得:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ac} &= B \bar{v} \overline{ac} \sin \alpha = B \cdot \omega \cdot \frac{1}{2} X_c \cdot \frac{X_c}{\cos \alpha} \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \omega B X_c^2 \tan \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \epsilon_{bc} = \epsilon_{ac} - \epsilon_{ab} = \frac{1}{2} \omega B X_c^2 \tan \alpha - \frac{1}{8} \omega B X_c^2 \tan \alpha = \frac{3}{8} \omega B X_c^2 \tan \alpha.$$

$$u_b - u_c = -\epsilon_{bc} + l \cdot \frac{1}{2} R = -\frac{3}{8} \omega B X_c^2 \tan \alpha + \frac{\epsilon_{\text{总}}}{4R} \cdot \frac{1}{2} R,$$

$$\epsilon_{\text{总}} = 4\epsilon_{ac} = 2\omega B X_c^2 \tan \alpha,$$

$$\text{所以 } u_b - u_c = -\frac{3}{8} \omega B X_c^2 \tan \alpha + \frac{1}{8} \cdot 2\omega B X_c^2 \tan \alpha$$

$$= -\frac{1}{8}\omega BX_c^2 \tan \alpha.$$

(3) 设 ac 之间电势最低的点离 a 点的距离为 l , 则有:

$$u_a - u_l = -\varepsilon_l + IR_l.$$

式中 ε_l 为 a 点到电势最低的点之间的电势差.

$$\varepsilon_l = B \bar{v} \cdot l \sin \alpha,$$

$$\bar{v} = \omega \cdot \bar{x},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}l \cos \alpha,$$

$$\text{所以 } \varepsilon_l = B\omega \frac{1}{2}l^2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{4}\omega Bl^2 \sin 2\alpha,$$

$$u_l = u_a + \varepsilon_l - IR_l = u_a + \frac{1}{4}\omega Bl^2 \sin 2\alpha - \frac{\varepsilon_{\text{总}}}{4R}R_l$$

$$= u_a + \frac{1}{4}\omega Bl^2 \sin 2\alpha - \frac{2\omega BX_c^2}{4} \tan \alpha \cdot \frac{R_l}{R}.$$

又

$$\frac{R_l}{R} = \frac{l}{\overline{ac}},$$

$$u_l = u_a + \frac{1}{4}\omega Bl^2 \sin 2\alpha - \frac{1}{2}\omega BX_c^2 \tan \alpha \cdot \frac{l}{\overline{ac}}.$$

上式是一个一元二次式, 当

$$l = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{1}{2}\omega BX_c^2 \tan \alpha \cdot \frac{l}{\overline{ac}}}{2 \cdot \frac{1}{4}\omega B \sin 2\alpha} \text{ 时, } u_l \text{ 最小, 又 } X_c \cdot \tan \alpha =$$

$\overline{ac} \cdot \sin \alpha$, 故

$$l = \frac{\frac{1}{2}\omega B \cdot \overline{ac} \sin \alpha \cdot X_c \cdot \frac{1}{\overline{ac}}}{\frac{1}{2}\omega B \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{X_c}{2 \cos \alpha}.$$

因为 $\overline{ac} \cdot \cos \alpha = X_c$,

所以 $l = \frac{1}{2} \overline{ac}$.

即电势最低的点为 ac 之中点, 此时:

$$\begin{aligned} u_l &= u_a + \frac{1}{4} \omega B \left(\frac{1}{2} \overline{ac} \right)^2 \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \omega B X_c^2 \tan \alpha \frac{\frac{1}{2} \overline{ac}}{\overline{ac}} \\ &= u_a + \frac{1}{4} \omega B \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{X_c}{\cos \alpha} \right)^2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{4} \omega B X_c^2 \tan \alpha \\ &= u_a + \frac{1}{8} \omega B X_c^2 \tan \alpha - \frac{1}{4} \omega B X_c^2 \tan \alpha \\ &= u_a - \frac{1}{8} \omega B X_c^2 \tan \alpha. \end{aligned}$$

例 4 一个用绝缘材料制成的扁平薄圆环, 其内、外半径分别为 a_1 、 a_2 , 厚度可以忽略. 两个表面都带有电荷, 电荷面密度 σ 随离开环心距离 r 变化的规律均为 $\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{r^2}$, σ_0 为已知常量. 薄圆环绕通过环心垂直环面的轴以大小不变的角加速度 β 减速转动, $t = 0$ 时刻的角速度为 ω_0 . 将一半径为 a_0 ($a_0 \ll a_1$)、电阻为 R 并与薄圆环共面的导线圆环与薄圆环同心放置. 试求在薄圆环减速运动过程中导线圆环中的张力 F 与时间 t 的关系.

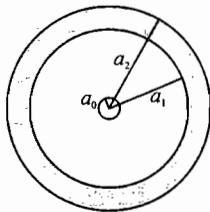


图 2-19

提示: 半径为 r 、通有电流 I 的圆线圈 (环形电流), 在圆心处产生的磁感应强度为 $B = k \frac{I}{r}$ (k 为已知常量).

用半径分别为 $r_1 (> a_1)$, $r_2, \dots, r_i, \dots, r_{n-1} (< a_2)$ 的 $n-1$ 个同心圆把塑料薄圆环分割成 n 个细圆环. 第 i 个细圆环的宽度为 $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$, 其环带面积

$$\Delta S_i = \pi r_i^2 - \pi (r_i - \Delta r_i)^2 = 2\pi r_i \Delta r_i,$$

式中已略去高阶小量 $(\Delta r_i)^2$, 该细圆环带上、下表面所带电荷之和为

$$\Delta q_i = 2\sigma \Delta S_i = \frac{2\sigma_0}{r_i^2} 2\pi r_i \Delta r_i = \frac{4\pi\sigma_0 \Delta r_i}{r_i}.$$

设时刻 t , 细圆环转动的角速度为 ω , 则

$$\omega = \omega_0 - \beta t.$$

单位时间内, 通过它的“横截面”的电荷, 即为电流

$$\Delta I_i = \Delta q_i \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\omega\sigma_0 \Delta r_i}{r_i}.$$

由环形电流产生磁场的规律, 该细圆环的电流在环心产生的磁感应强度为

$$\Delta B_i = k \frac{\Delta I_i}{r_i} = k \frac{2\omega\sigma_0 \Delta r_i}{r_i^2} \quad (1)$$

式中 Δr_i 是一个微小量, 注意到 $r_i r_{i-1} = r_i(r_i - \Delta r_i) \approx r_i^2$, 有

$$\frac{\Delta r_i}{r_i^2} = \frac{r_i - r_{i-1}}{r_i r_{i-1}} = \frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i} \quad (2)$$

将各细圆环产生的磁场叠加, 由①、②式得出环心 O 点处的磁感应强度

$$B = \frac{2k\omega\sigma_0(a_2 - a_1)}{a_1 a_2} \quad (3)$$

由于 $a_0 \ll a_1$, 可以认为在导线圆环所在小区域的磁场是匀强磁场, 可由 O 点的场表示. 磁场对导线环的磁通量

$$\Phi = BS = \frac{2k\omega\sigma_0(a_2 - a_1)}{a_1 a_2} \pi a_0^2 \quad (4)$$

由于 ω 是变化的, 所以上述磁通量是随时间变化的, 产生的感应电动势的大小为

$$E = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \frac{2k\sigma_0(a_2 - a_1)\pi a_0^2}{a_1 a_2} \left| \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = \frac{2k\sigma_0(a_2 - a_1)\pi a_0^2 \beta}{a_1 a_2} \quad (5)$$

由全电路欧姆定律可知,导线环内感应电流的大小为

$$I = \frac{E}{R} = \frac{2k\sigma_0(a_2 - a_1)\pi a_0^2\beta}{a_1 a_2 R} \quad (6)$$

设题图中薄圆环带正电做逆时针旋转,穿过导线圆环的磁场方向垂直纸面向外,由于薄圆环做减角速转动,穿过导线圆环的磁场逐渐减小,根据楞次定律,导线圆环中的感应电流亦为逆时针方向,导线圆环各元段 Δl 所受的安培力都沿环半径向外. 现取对于 y 轴两对称点 U 、 V , 对应的二段电流元 $I\Delta l$ 所受的安培力的大小为

$$\Delta f = BI\Delta l \quad (7)$$

方向如图 2-20 所示,它沿 x 及 y 方向的分量分别为

$$\Delta f_x = BI\Delta l \cdot \cos \theta = BI\Delta y \quad (8)$$

$$\Delta f_y = BI\Delta l \cdot \sin \theta = BI\Delta x \quad (9)$$

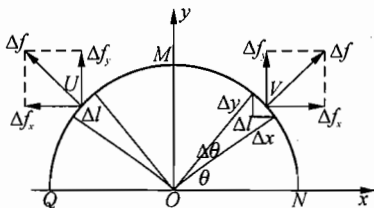


图 2-20

根据对称性,作用于沿半个导线圆环 QMN 上的各电流元的安培力的 x 分量之和相互抵消,即

$$f_x = \sum BI\Delta y = BI \sum \Delta y = 0 \quad (10)$$

(式中 $\Delta y = \Delta l \cos \theta$, 当 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时, Δy 是正的; 当 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时, Δy 是负的, 故 $\sum \Delta y = 0$), 而作用于沿半个导线圆环 QMN 上的各电流元的安培力的 y 分量之和为

$$f_y = \sum BI\Delta x = BI \sum \Delta x = BI2a_0 \quad (11)$$

(式中 $\Delta x = \Delta l \sin \theta$, 由于 θ 在 $0 \sim \pi$ 之间 Δx 都是正的, 故 $\sum \Delta x = 2a_0$). 即半个导线圆环上受的总安培力的大小为 $BI2a_0$, 方向沿 y 正方向. 由于半个圆环处于平衡状态, 所以在导线截面 Q 、 N 处所受

(来自另外半个圆环)的拉力(即张力) F 应满足 $2F = BI2a_0$. 由③、⑥两式得

$$F = BIa_0 = \frac{4k^2\sigma_0^2\pi a_0^3(a_2 - a_1)^2 \cdot \beta}{a_1^2 a_2^2 \cdot R} (\omega_0 - \beta t) \quad (12)$$

由⑫式可见,张力 F 随时间线性减小.

例 5 如图 2-21 所示, OO' 为一固定不动的半径为 a_1 的圆柱形金属轴, 其电阻可忽略. 一个内半径为 a_1 、外半径为 a_2 、厚度为 h ($h \ll a_1$) 的匀质环形导体圆盘套在 OO' 上, 与 OO' 接触良好, 并可绕 OO' 转动. 盘上距盘心 r 处的电阻率与 r 成正比, 即 $\rho = \rho_0 r$, ρ_0 为常量. 整个环形圆盘处在与环面垂直的恒定匀强磁场中, 磁感强度的大小为 B . 图中的电源 S 是一个不论负载如何变化, 均能提供恒定不变的电流 I 的电源(称为恒流源), R_0 是跨接在电源两端的固定电阻的阻值. 电源的一端接在固定金属轴上端面的中心 X 处, 另一端与环形电刷 Y 相连. 环形电刷包围在圆盘的外缘, 当圆盘绕金属轴转动时与盘保持良好接触. 此装置可看作一“圆盘电动机”. 当电源接通后, 若它不带任何负载, 称为空载状态, 空载达到稳定时圆盘的转动角速度用 ω_0 表示; 带有负载(图中未画出)时, 圆盘转动达到稳定时的角速度用 ω 表示, 不计一切摩擦, 问

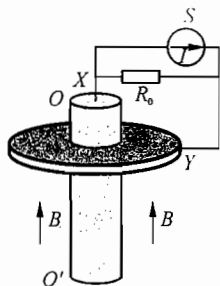


图 2-21

(1) 当电动机输出机械功率 P 最大时, ω 与 ω_0 之比等于多大?
(2) 在(1)的情况下, 圆盘的发热功率为多大?

解 (1) 接通电路后, 恒流源提供恒定的电流 I 的一部分流经 R_0 , 另一部分流经圆盘. 环形电刷、柱形金属轴决定了盘中的电流沿着盘的半径. 盘中因有沿着半径的电流而受磁场力矩作用, 磁力矩使盘克服负载所加的机械力矩而做加速转动. 当圆盘在磁场中转动时, 由于电磁感应, 盘中出现感应电动势(反电动势), 其等效电路如图 2-22 所示. 图中 R 为圆盘的电阻, E 为感应电动势, i 为通过圆盘的总电流. 圆盘所在支路的电路方程为

$$(I-i)R_0 - E = iR,$$

或 $IR_0 - E = i(R_0 + R)$ ①

随着圆盘角速度的增大,感应电动势 E 亦增大,由①式可知通过圆盘的电流 i 将变小.当电流小到某一值时,磁场的磁力矩与负载的机械力矩平衡,转动达到稳定,

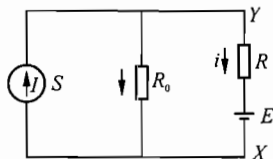


图 2-22

盘做匀角速转动.此时的角速度就是有负载时达到稳定状态的角速度 ω .如果没有机械负载,即处在空载状态,由于负载力矩为零,故达到稳定时磁力矩亦必须等于零.在没有负载力矩作用的条件下,圆盘转动的角速度可达到很大,因而感应电动势亦很大,致使圆盘中的电流为零,磁力矩亦为零.这时,圆盘的角速度便是空载达到稳定时的角速度 ω_0 .

(i) 环形圆盘中感应电动势的计算

圆盘在磁场中转动时,它的每根半径都做切割磁感线的运动.把圆盘看作是由无数根径向辐条组成的,当盘的角速度为 ω 时,圆盘某根“辐条”在 Δt 时间内转过的角度为 $\Delta\theta$,”辐条”扫过的面积为

$$\Delta S = \frac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2)\Delta\theta,$$

磁通量为

$$\Delta\Phi = B\Delta S.$$

由电磁感应定律可知,“辐条”中的感应电动势的大小为

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2}B(a_2^2 - a_1^2) \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}B(a_2^2 - a_1^2)\omega$$

每根辐条相当于一电源,这些电源是并联的,它们的电动势又相等,故圆盘中的电动势的大小仍为

$$E = \frac{1}{2}\omega B(a_2^2 - a_1^2) \quad ②$$

(ii) 环形圆盘电阻的计算

因环形圆盘中的电流沿着盘的半径,故可将圆盘分成很多不同

半径 $r_0 (=a_1)$, $r_1, r_2, \dots, r_j, \dots, r_n (=a_2)$ 的窄圆环, 第 j 个圆环的宽度为 $\Delta r_j = r_j - r_{j-1}$, 其电阻为

$$\Delta R_j = \rho \frac{\Delta r_j}{S} = (\rho_0 r_j) \frac{\Delta r_j}{2\pi r_j h} = \rho_0 \frac{\Delta r_j}{2\pi h}$$

整个圆盘的电阻 R 是由各窄圆环电阻串联而成, 即

$$R = \sum_j \Delta R_j = \frac{\rho_0}{2\pi h} \sum_j \Delta r_j = \frac{\rho_0}{2\pi h} (a_2 - a_1) \quad (3)$$

(iii) 空载达到稳定时的角速度

当电动机空载达到稳定时, 流过圆盘的电流 $i = 0$, 这时圆盘的转动角速度为 ω_0 , 由②式可知盘中的感应电动势

$$E_0 = \frac{1}{2} \omega_0 B (a_2^2 - a_1^2) \quad (4)$$

而恒流源的电流 I 全部流经电阻 R_0 , 由①式得

$$IR_0 = E_0 \quad (5)$$

由④、⑤式得电动机在空载达到稳定时的角速度

$$\omega_0 = \frac{2IR_0}{B(a_2^2 - a_1^2)} \quad (6)$$

(iv) 输出的最大机械功率的计算

当有机机械负载时, 若圆盘的角速度为 ω , 此时流过圆盘的电流为 i , 则由①式和②式可得

$$i = \frac{IR_0}{R + R_0} - \frac{1}{2} \frac{B\omega(a_2^2 - a_1^2)}{R + R_0} \quad (7)$$

第 j 个小圆环所受磁力的功率为

$$\Delta P_j = iB\Delta r_j \cdot v_j = iB\Delta r_j \cdot r_j\omega \quad (8)$$

整个圆环受磁力的功率为

$$P = \sum \Delta P_j = \left(\sum iB\Delta r_j \cdot r_j \right) \omega = \frac{1}{2} iB(a_2^2 - a_1^2) \omega \quad (9)$$

当电动机的转动达到稳定时,电动机输出的机械功率也就是磁场的功率,将⑦式代入⑨式,得

$$P = K_1 \omega - K_2 \omega^2 \quad (10)$$

其中

$$K_1 = \frac{IR_0 B(a_2^2 - a_1^2)}{2(R + R_0)}, K_2 = \frac{B^2(a_2^2 - a_1^2)^2}{4(R + R_0)} \quad (11)$$

⑩式可改写成

$$P = \frac{K_1^2}{4K_2} - K_2 \left(\omega - \frac{K_1}{2K_2} \right)^2 \quad (12)$$

当

$$\omega = \frac{K_1}{2K_2} \quad (13)$$

时,输出的机械功率 P 最大. 由⑪式和⑬式得

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2} \quad (14)$$

(2) 当电动机输出的机械功率最大时,圆盘转动的角速度为 $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, 设这时流经环形圆盘的电流为 i' , 由①式、②式和⑬式得

$$i' = \frac{R_0 I}{2(R + R_0)} \quad (15)$$

圆盘的电阻消耗的热功率

$$P_R = i'^2 R = \frac{1}{4} \frac{R_0^2 R I^2}{(R + R_0)^2} \quad (16)$$

将⑬式代入⑬式得

$$P_R = \frac{\pi h \rho_0 (a_2 - a_1) R_0^2 I^2}{2[\rho_0 (a_2 - a_1) + 2\pi h R_0]^2} \quad (17)$$

例 6 一导线围成半径为 D 的圆环 $adbc$; 在圆环所围的区域内有一半半径为 $\frac{D}{2}$ 的圆柱形磁场区域, 其周界与圆环内切于 c 点. 此区域内

有均匀磁场,磁感强度为 B ,方向垂直纸面向里. 磁场随时间增强,变化率 $\Delta B/\Delta t = k = \text{常量}$. 导线 ab 是圆环的一条直径,与磁场边界相切(图 2-23). 设导线 ab 以及被其所分割成的两个半圆的电阻都是 r . 今用一电流计 G 接在 a 、 b 两点之间,电流计位于纸面内,内阻亦为 r (连接电流计的导线电阻忽略不计). 试问在下列情况下,通过电流计的电流 I_g 为多少?

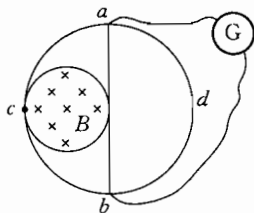


图 2-23

- (1) 半圆环 acb 和 adb 都位于纸面内,并分别位于 ab 的两侧;
- (2) 半圆环 adb 绕直径 ab 转过 90° ,折成与纸面垂直;
- (3) 半圆环 adb 再绕 ab 转 90° ,折成与 acb 重合.

分析 这是一个有限圆柱形磁场的问题. 当有限圆柱形磁场的强度发生变化时,周围将产生涡旋电场,电力线是一个个圆,圆心都在圆柱的中心轴线上.

解 因 a 、 b 两点在涡旋电场的同一圈电力线上,所以可以设导线 acb 上的感生电动势为 \mathcal{E}_1 ,在导线 ab 、 adb 和 aGb 上的感生电动势为 \mathcal{E}_2 ,应该有

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{4} \pi D^2 k.$$

等效电路如图 2-24(a)所示,可简化成图 2-24(b). 总电流 $I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r + \frac{r}{3}} = \frac{3\pi D^2 k}{16r}$. 通过电流计的电流

$$I_g = \frac{I}{3} = \frac{\pi D^2 k}{16r}.$$

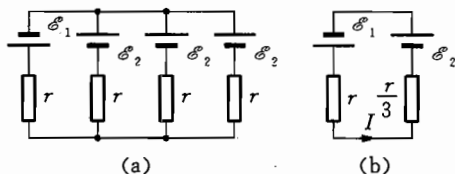


图 2-24

(2)与(1)结果相同.

(3)等效电路图如图 2-25(a)所示,可简化成图 2-25(b)的电路. 总电流

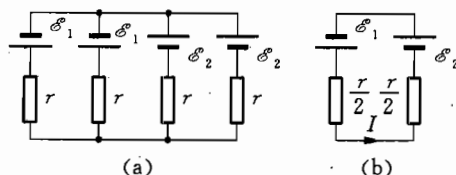


图 2-25

$$I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\frac{r}{2} + \frac{r}{2}} = \frac{\pi D^2 k}{4r},$$

通过电流计的电流

$$I_g = \frac{1}{2} I = \frac{\pi D^2 k}{8r}.$$

例 7 半径为 R 的金属圆环是由两种等长、等粗的不同金属材料组合而成,斜线所示材料的电阻率为另一种材料的 2 倍,此圆环放在图 2-26 所示的均匀磁场中,当圆环所围面积内磁场以 $\frac{\Delta B}{\Delta t} = k$ (恒量) 均匀增加时,求分界面上 A 、 B 两处的电势差.

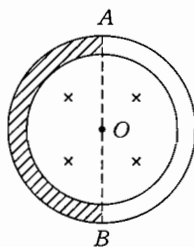


图 2-26

解 根据楞次定律可知,感生电场的电场线沿逆时针方向,因为左右两半圆环弧长相等,所以感应电动势均为 $\frac{\varepsilon}{2}$,等效电路如图 2-27 所示,其中

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot S = \frac{\pi}{2} k R^2,$$

$$R_1 = 2R_2.$$

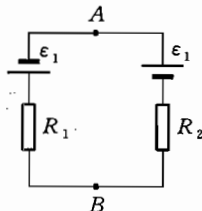


图 2-27

由全电路欧姆定律

$$I = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{R_1 + R_2} = \frac{\pi k R^2}{3 R_2},$$

$$U_{AB} = \epsilon_2 - IR_2 = \frac{\pi}{6} k R^2.$$

例 8 PQQ_nP_n 是由若干正方形导线方格 PQQ_1P_1 , $P_1Q_1Q_2P_2$, $P_2Q_2Q_3P_3$, \dots , $P_{n-1}Q_{n-1}Q_nP_n$ 构成的网络,如图 2-28 所示.

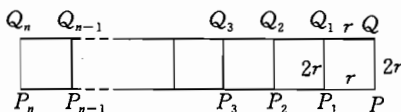


图 2-28

方格每边长度 $l = 10.0 \text{ cm}$. 边 QQ_1 , Q_1Q_2 , Q_2Q_3 , \dots 与边 PP_1 , P_1P_2 , P_2P_3 , \dots 的电阻都等于 r , 边 PQ , P_1Q_1 , P_2Q_2 , \dots 的电阻都等于 $2r$. 已知 PQ 两点间的总电阻为 Cr , C 是一已知数, 在 $x > 0$ 的半空间分布有随时间 t 均匀增加的匀强磁场, 磁场方向垂直于 Oxy 平面并指向纸里, 如图 2-29 所示.

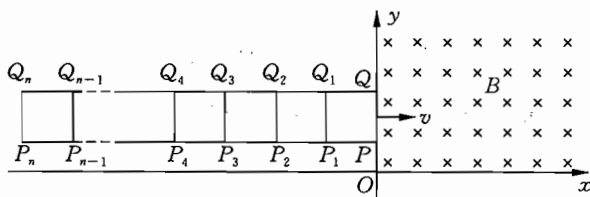


图 2-29

今令导线网络 PQQ_nP_n 以恒定的速度 $v = 5.0 \text{ cm/s}$ 沿 x 方向运动并进入磁场区域, 在运动过程中方格的边 PQ 始终与 y 轴平行. 若取 PQ 与 y 轴重合的时刻为 $t = 0$, 在以后任时刻 t 磁场的磁感强度为 $B = B_0 + bt$, 式中 t 的单位为秒, B_0 为已知恒量, $b = 0.10 B_0$. 求 $t = 2.5 \text{ s}$ 时刻, 通过导线 PQ 的电流 (忽略导线网络的

自感)。

分析 每格的长度是 10 cm, 网络运动速度是 5 cm/s, 所以当 $t = 2.5$ s 时情况如图 2-30 所示。这个时候 PQQ_1P_1 方格的 PQ 和 P_1Q_1 两条边的动生电动势是相互抵消的, 这一格仅有感生电动势。而 $P_1Q_1Q_2P_2$ 方格中既有感生电动势又有动生电动势, 这一点必须注意。

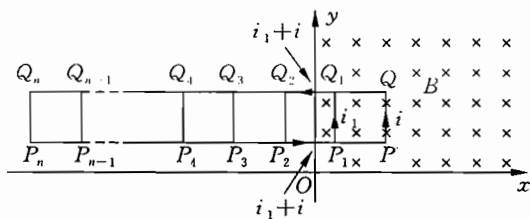


图 2-30

解 (1) P 、 Q 两点间的总电阻 $R_n = Cr$, 设 P_1Q_1 向左看(包括 P_1Q_1)的总电阻为 R_{n-1} , 则可知

$$R_{n-1} = \frac{4r(R_n - r)}{2r - R_n}, \quad (1)$$

同理可求得

$$R_{n-2} = \frac{4r(R_{n-1} - r)}{2r - R_{n-1}}. \quad (2)$$

(2) 设方格 PQQ_1P_1 中的感应电动势为 \mathcal{E}_1 , 有

$$4ir - 2i_1r = \mathcal{E}_1. \quad (3)$$

若方格 $P_1Q_1Q_2P_2$ 中的总感应电动势为 \mathcal{E}_2 , 有

$$2i_1r + (i + i_1)(2r + R_{n-2}) = \mathcal{E}_2, \quad (4)$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = l^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = l^2 b. \quad (5)$$

方格 $P_1Q_1Q_2P_2$ 中的动生电动势

$$\mathcal{E}_2' = Blv = (B_0 + bt)lv.$$

同一方格中的感生电动势

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2'' &= lv(t-T) \frac{\Delta B}{\Delta t} \\ &= lv(t-T)b = lvtb - l^2b. \\ \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_2' + \mathcal{E}_2'' = B_0lv + 2blvt - l^2b.\end{aligned}\quad (6)$$

联列①、②、③、④、⑤、⑥式,可解得

$$i = \frac{56 - 41C}{8} \times 10^{-3} \frac{B_0}{r}.$$

例 9 如图 2-31 所示,在竖直放置的两条平行光滑长导轨的上端,接有一个容量为 C 、击穿电压为 U_B 的电容器,有一匀强磁场与导轨平面垂直,磁感强度为 B . 现在有一根质量为 m 、长为 L 的金属杆 ef 在 $t=0$ 时以初速度 v_0 沿导轨下滑. 问:金属杆 ef 下滑多长时间电容器就被击穿? 假设图中任何部分的电阻和电感均可忽略不计.

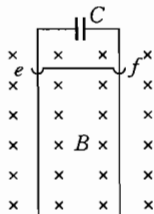


图 2-31

解 先分析金属杆的运动情况. 由于电路中电阻和电感均可忽略不计,所以电容器两端电压 U_C 等于金属杆两端的动生电动势,即

$$U_C = BLv, \quad (1)$$

金属杆的动力学方程为

$$mg - BLI = ma, \quad (2)$$

②式中的 I 为电容器的充电电流,因此

$$\begin{aligned}I &= \Delta Q / \Delta t = C \cdot \Delta U_C / \Delta t \\ &= CBL \Delta v / \Delta t = CBLa,\end{aligned}\quad (3)$$

③式代入②式

$$a = mg / (m + CB^2L^2), \quad (4)$$

④式表明金属杆做匀加速运动,因此 t 时刻的速度

$$v_t = v_0 + at = v_0 + [mgt / (m + CB^2L^2)], \quad (5)$$

当电容器两端电压 $U_C = U_B$ 时, 电容器被击穿, 由①式可知此时的速度

$$v = U_B / BL. \quad (6)$$

⑥式代入⑤式, 可知当

$$t = (U_B / BL - v_0)(m + CB^2L^2) / mg$$

时电容器将被击穿.

例 10 如图 2-32 所示, 有二平行金属导轨, 相距 l , 位于同一水平面内, 处在磁感强度为 B 的匀强磁场中, 磁场方向竖直向下. 质量均为 m 的两金属杆 ab 和 cd 放在导轨上, 与导轨垂直. 初始时刻, 金属杆 ab 和 cd 分别位于 $x = x_0$ 和 $x =$

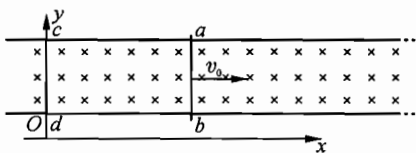


图 2-32

0 处. 假设导轨及金属杆的电阻都为零, 由两金属杆与导轨构成的回路的自感系数为 L . 今对金属杆 ab 施以沿导轨向右的瞬时冲量, 使它获得初速 v_0 . 设导轨足够长, x_0 也足够大, 在运动过程中, 两金属杆之间距离的变化远小于两金属杆的初始间距 x_0 , 因而可以认为在杆运动过程中由两金属杆与导轨构成的回路的自感系数 L 是恒定不变的. 杆与导轨之间摩擦可不计. 求任意时刻两杆的位置 x_{ab} 和 x_{cd} 以及由两杆和导轨构成的回路中的电流 i 三者各自随时间 t 的变化关系.

分析 这一类型的题目近年来出现得比较多. 在一个没有电阻的回路中, 如果出现了感应电动势, 那么一定会与自感电动势相平衡, 否则将产生无穷大的电流, 这是不可能的.

解 设在任意时刻 t , ab 杆和 cd 杆的速度分别为 v_1 和 v_2 , 则因两杆作切割磁感线的运动而产生的动应电动势

$$\varepsilon = Bl(v_1 - v_2) \quad (1)$$

回路中的自感电动势

$$\epsilon_L = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (2)$$

根据欧姆定律,注意到回路没有电阻,有

$$\epsilon + \epsilon_L = 0 \quad (3)$$

金属杆在导轨上运动过程中,两杆构成的系统受到的水平方向的合外力为零,系统的质心做匀速直线运动. 设系统质心的速度为 v_c , 有

$$mv_0 = 2mv_c \quad (4)$$

得

$$v_c = \frac{v_0}{2} \quad (5)$$

v_c 方向与 v_0 相同,沿 x 轴的正方向.

现取一新的参考系 S' , 它与质心固连在一起,并把质心作为坐标原点 O' ,取坐标轴 $O'x'$ 与 x 轴平行. 在 S' 系中,金属杆 ab 的速度为 u , cd 杆的速度为 u' ; 则有

$$v_1 = v_c + u \quad (6)$$

$$v_2 = v_c + u' \quad (7)$$

相对 S' 系,两杆的总动量为零,即有

$$mu + mu' = 0 \quad (8)$$

由①、②、③、⑤、⑥、⑦、⑧各式,得

$$2Blu = L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (9)$$

在 S' 系中,在 t 时刻,金属杆 ab 坐标为 x' , 在 $t + \Delta t$ 时刻,它的坐标为 $x' + \Delta x'$, 则

$$u = \frac{\Delta x'}{\Delta t} \quad (10)$$

代入⑨式得

$$2Bl\Delta x' = L\Delta i \quad (11)$$

若将 x' 视为 i 的函数, 由⑪式知 $\Delta x'/\Delta i$ 为常量, 所以 x' 与 i 的关系可用一直线方程表示

$$x' = \frac{L}{2Bl}i + b \quad (12)$$

式中 b 为常数, 其值待定. 现已知在 $t = 0$ 时刻, 金属杆 ab 在 S' 系中的坐标 $x' = \frac{1}{2}x_0$, 这时 $i = 0$, 故得

$$x' = \frac{L}{2Bl}i + \frac{1}{2}x_0 \quad (13)$$

或
$$i = \frac{2Bl}{L}\left(x' - \frac{1}{2}x_0\right) \quad (14)$$

$\frac{1}{2}x_0$ 表示 $t = 0$ 时刻金属杆 ab 的位置, x' 表示在任意时刻 t , 杆 ab 的位置, 故 $\left(x' - \frac{1}{2}x_0\right)$ 就是杆 ab 在 t 时刻相对初始位置的位移, 用 X 表示

$$X = x' - \frac{1}{2}x_0 \quad (15)$$

当 $X > 0$ 时, ab 杆位于其初始位置的右侧; 当 $X < 0$ 时, ab 杆位于其初始位置的左侧. 代入⑭式, 得

$$i = \frac{2Bl}{L}X \quad (16)$$

这时作用于 ab 杆的安培力

$$F = -iBl = -\frac{2B^2l^2}{L}X \quad (17)$$

ab 杆在初始位置右侧时, 安培力的方向指向左侧; ab 杆在初始位置左侧时, 安培力的方向指向右侧, 可知该安培力具有弹性力的性质. 金属杆 ab 的运动是简谐振动, 振动的周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2B^2 l^2 / L}} \quad (18)$$

在任意时刻 t , ab 杆离开其初始位置的位移

$$X = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad (19)$$

A 为简谐振动的振幅, φ 为初相位, 都是待定的常量. 通过参考圆可求得 ab 杆的振动速度

$$u = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad (20)$$

①⑨、②⑩式分别表示任意时刻 ab 杆离开初始位置的位移和运动速度. 现已知在 $t = 0$ 时刻, ab 杆位于初始位置, 即

$$X = 0,$$

速度

$$u = v_0 - v_c = v_0 - \frac{1}{2}v_0 = \frac{1}{2}v_0,$$

故有

$$0 = A \cos \varphi,$$

$$\frac{v_0}{2} = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right) \sin \varphi.$$

解这两式, 并注意到①⑨式得

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} \quad (21)$$

$$A = \frac{v_0}{4\pi} T = \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \quad (22)$$

由此得 ab 杆的位移

$$X = \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin \frac{2\pi}{T}t \quad (23)$$

由①⑨式可求得 ab 杆在 S' 系中的位置

$$x'_{ab} = \frac{1}{2}x_0 + \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin \frac{2\pi}{T}t \quad (24)$$

因相对质心,任意时刻 ab 杆和 cd 杆都在质心两侧,到质心的距离相等,故在 S' 系中, cd 杆的位置

$$x'_{cd} = -\frac{1}{2}x_0 - \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin \frac{2\pi}{T}t \quad (25)$$

相对地面参考系 S ,质心以 $v_c = \frac{1}{2}v_0$ 的速度向右运动,并注意到⑮式,得 ab 杆在地面参考系中的位置

$$x_{ab} = x_0 + \frac{1}{2}v_0t + \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin \left(Bl \sqrt{\frac{2}{mL}}t \right) \quad (26)$$

cd 杆在 S 系中的位置

$$x_{cd} = \frac{1}{2}v_0t - \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin \left(Bl \sqrt{\frac{2}{mL}}t \right) \quad (27)$$

回路中的电流由⑮式得

$$i = \frac{2Bl}{L} \frac{v_0}{2Bl} \sqrt{\frac{mL}{2}} \sin \frac{2\pi}{T}t = v_0 \sqrt{\frac{m}{2L}} \sin \left(Bl \sqrt{\frac{2}{mL}}t \right) \quad (28)$$

例 11 假想有一水平方向的匀强磁场,磁感强度 B 很大,有一半半径为 R ,厚度为 d ($d \ll R$) 的金属圆盘,在此磁场中竖直下落,盘面始终位于竖直平面内并与磁场方向平行,如图 2-33 所示.若要使圆盘在磁场中下落的加速度比没有磁场时减小千分之一(不计空气阻力),试估算所需磁感强度的数值.假定金属盘的电阻为零,再设金属盘的密度 $\rho = 9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,其介电常数 $\epsilon = 9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$.

分析 金属盘中的自由电子随盘向下运动过程中受洛伦兹力作用聚集到盘的后侧面,随盘的不断加速,盘前、后侧面的带电量不断

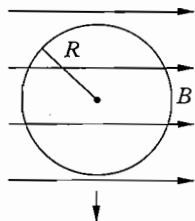


图 2-33

增大,因而盘中有垂直于盘面的电流,这样,盘由于受安培力的阻碍,其加速度小于重力加速度.

解 当盘在磁场中下落速度为 v 时,盘中感应电动势

$$\epsilon = Bvd.$$

因盘的电阻为零,故盘两表面间的电势差即为 ϵ . 将盘看作一个电容器,圆盘表面所带电量

$$Q = CU = (\epsilon\pi R^2/d) \cdot Bdv = \epsilon\pi R^2 Bv.$$

随盘下落速度的增大,盘面上的电量也增大,盘中电流强度

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \epsilon\pi R^2 B \cdot \Delta v / \Delta t = \epsilon\pi R^2 Ba.$$

对盘根据牛顿第二定律有

$$mg - BId = ma,$$

将盘质量 $m = \pi R^2 d\rho$ 也代入即可解得

$$a = g / (1 + \epsilon B^2 / \rho),$$

代入数据后得

$$B = 10^6 \text{ T}.$$

例 12 铜制圆环的两个半径分别为 $r_1 = 1$ 厘米 和 $r_2 = 1$ 毫米 (r_2 为横截面半径), 如图 2 -

34(a)所示. 圆环竖放在地面上, 环底部有固定的光滑栓限制, 使其不能滑动. 圆环周围有竖直向上的匀强磁场, $B = 1.0$ 特斯拉. 如图(b)所示, 圆环偏离竖直方向倒向地面, 已知铜的电导率

$\sigma = 6.25 \times 10^7$ 欧姆 $^{-1}$ ·米 $^{-1}$, 质量密度 $\rho = 8.93 \times 10^3$ 千克 / 米 3 , 试通过数量级的估算, 判断圆环倒下时其重力势能主要是转换成圆环的动能还是转换为焦耳热能.

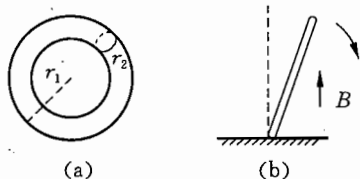


图 2-34

解 设圆环倒地所需时间为 T , 则在这段时间内, 通过圆环的磁通量从零增大到 $B\pi r_1^2$, 故环中感应电动势的平均值约为

$$\bar{\varepsilon} \approx \frac{B\pi r_1^2}{T}.$$

感应电流的平均值约为

$$\bar{I} \approx \frac{\bar{\varepsilon}}{R}.$$

式中 R 是圆环的电阻, $R = \frac{2\pi r_1}{\sigma\pi r_2^2}$.

圆环倒地过程中产生的焦耳热约为

$$W_s \approx \bar{I}^2 RT \approx \frac{B^2 \sigma \pi^2 r_1^3 r_2^2}{2T},$$

圆环倒地过程中其转动惯量近似为

$$J \approx \frac{1}{2}mr_1^2 + mr_1^2 = \frac{3}{2}mr_1^2.$$

式中 m 是圆环的质量, 近似为

$$m \approx \rho(2\pi r_1 \pi r_2^2).$$

圆环倒地过程中转动角速度的平均值约为

$$\bar{\omega} \approx \frac{\pi}{2}/T.$$

故圆环的转动动能约为

$$W_K \approx \frac{1}{2}J\bar{\omega}^2 \approx 3\rho\pi^4 r_1^3 r_2^2 / (8T^2).$$

圆环倒地过程中其重力势能的损失近似为

$$W_P \approx mgr_1 \approx 2\rho g \pi^2 r_1^2 r_2^2.$$

重力势能的损失转换为焦耳热与转动动能之和
即

$$W_P = W_s + W_K,$$

也就是
$$2\rho g \pi^2 r_1^2 r_2^2 \approx \frac{B^2 \sigma \pi^2 r_1^3 r_2^2}{2T} + \frac{3\rho \pi^4 r_1^3 r_2^2}{8T^2},$$

即
$$1 \approx \left(\frac{B^2 \sigma r_1}{4\rho g} \right) \frac{1}{T} + \left(\frac{3\pi^2 r_1}{16g} \right) \left(\frac{1}{T} \right)^2.$$

代入数据
$$\frac{B^2 \sigma r_1}{4\rho g} \approx 1, \quad \frac{3\pi^2 r_1}{16g} \approx 10^{-3},$$

故
$$1 \approx \frac{1}{T} + 10^{-3} \left(\frac{1}{T} \right)^2,$$

得到
$$\frac{1}{T} \approx 1, \text{ 即 } T \approx 1 \text{ s}.$$

因此,
$$W_s : W_K \approx \frac{B^2 \sigma r_1}{4\rho g} \left(\frac{1}{T} \right) : \frac{3\pi^2 r_1}{16g} \left(\frac{1}{T} \right)^2 \approx 1 : 10^{-3}.$$

可见圆环倒地过程中,重力势能主要转换为焦耳热.转动动能所占比例甚小,其原因在于强磁场和高电导率使圆环所受磁力矩与重力矩相近.

练习 题

A 组

1. 如图 2-35 所示,两个金属轮 A_1 、 A_2 ,可绕通过各自中心并与轮面垂直的固定的光滑金属细轴 O_1 和 O_2 转动, O_1 和 O_2 相互平行,水平放置.每个金属轮由四根金属辐条和金属环组成, A_1 轮的辐条长为 a_1 、电阻为 R_1 , A_2 轮的辐条长为 a_2 、电阻为 R_2 ,连接辐条的金属环的宽度与电阻都可以忽略.半径为 a_0 的绝缘圆盘 D 与 A_1 同轴且固连在一起.一轻细绳的一端固定在 D 边缘上的某点,绳在 D 上绕足够匝数后,悬挂一质量为 m 的重物 P .当 P 下落时,通过细绳带动 D 和 A_1 绕 O_1 轴转动.转动过程中, A_1 、 A_2 保持接触,无相对滑动;两轮与各自细轴之间保持良好的电接触;两细轴通过包有绝缘皮的导线与一阻值为 R 的电阻相连.除 R 和 A_1 、 A_2 两轮中辐条的电阻外,所有金属的电阻都不计.整个装置处在磁感应强度为 B 的匀强磁场中,磁场方向与转轴平行.现将 P 释放,试求 P 匀速下落时的速度.

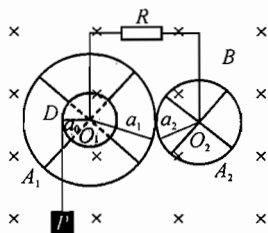


图 2-35

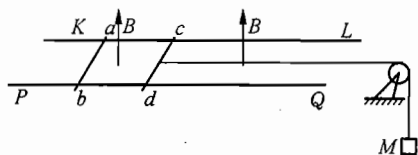


图 2-36

2. 如图 2-36 所示,两条平行的长直金属细导轨 KL 、 PQ 固定于同一水平面内,它们之间的距离为 l ,电阻可忽略不计; ab 和 cd 是两根质量皆为 m 的金属细杆,杆与导轨垂直,且与导轨良好接触,并可沿导轨无摩擦地滑动.两杆的电阻皆为 R .杆 cd 的中点系一轻绳,绳的另一端绕过轻的定滑轮悬挂一质量为 M 的物体,滑轮与转轴之

间的摩擦不计,滑轮与杆 cd 之间的轻绳处于水平伸直状态并与导轨平行.导轨和金属细杆都处于匀强磁场中,磁场方向垂直于导轨所在平面向上,磁感强度的大小为 B .现两杆及悬物都从静止开始运动,当 ab 杆及 cd 杆的速度分别达到 v_1 和 v_2 时,两杆加速度的大小各为多少?

3. 图 2-37 所示,水平放置的两平行金属导轨相距 $l = 0.25 \text{ m}$,电池的电动势 $\epsilon = 6 \text{ V}$, $r = 0$, $R = 5 \Omega$,匀强磁场的磁感强度 B 竖直向下, K 合上后,横放在导轨上的金属棒 ab 在磁场力作用下由静止开始向右运动,金属棒与导轨间的滑动摩擦力 $f = 0.15 \text{ N}$.问: B 为多大时,杆可以获得最大的速度? 此速度为多少?

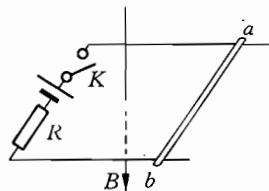


图 2-37

4. 磁感强度为 B 的匀强磁场,充满在半径为 R 的圆柱形区域内,其方向与圆柱的轴线平行,其大小以 $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ 的速率增加,一根长也为 R 的金属杆与磁场方向垂直放入磁场区域内,杆的两端恰在圆周上,求杆两端的电势差.

5. 如图 2-38 所示,转轮 1 和 2 的轮缘都是很薄的良导体,每个转轮都有四根辐条,每条辐条长 l ,电阻为 r .两轮的边缘和轴通过电刷用导线相连.整个装置放在一个磁感强度为 B 的匀强磁场中,磁场方向垂直于纸面向里,轮 2 的边缘与一阻力闸接触.今设法使转轮 1

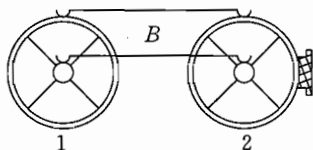


图 2-38

以恒定的角速度 ω_1 旋转,假定电刷的阻力和导线的电阻都可忽略不计,而阻力闸与轮 2 之间的阻力恒为 F ,那么在轮 2 转速达到稳定时,求

- (1) 轮 2 的角速度 ω_2 ;
- (2) 轮 1 以恒角速度 ω_1 旋转时所需的输入功率.

6. 两根互相平行的导电轨道,放在倾角 $\alpha = 30^\circ$ 的斜面上,有一

个磁感强度 $B = 0.80$ 特的匀强磁场垂直于这个斜面,如图 2-39 所示. 电源、可变电阻和金属棒跟两导轨组成闭合电路. 其中电源的电动势 $\epsilon = 12$ 伏,内电阻 $r = 0.10$ 欧,金属棒 ab 长 $L = 25$ 厘米,重 $G = 2.0$ 牛,棒跟导轨间摩擦系数 $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 不计棒和导轨的电阻. 问:(1)可变电阻 R 应调在什么阻值范围,金属棒才能静止在斜面上.(2)当可变电阻 R 调到 1.1 欧时,金属棒作匀速运动的速度是多大?

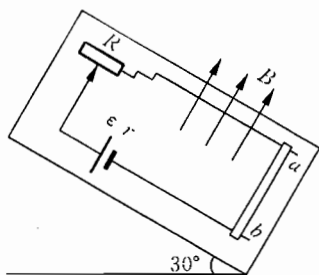


图 2-39

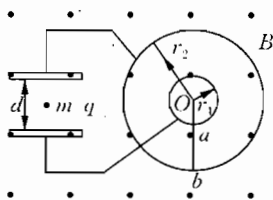


图 2-40

7. 图 2-40 中,两只半径为 r_1 和 r_2 的金属环放在磁感强度为 B 的匀强磁场中,外环和内环分别跟两平行金属板连接,当金属杆 ab 跟环接触,并绕 O 轴匀速转动时,质量为 m 、带电量为 $+q$ 的粒子在平行板间处于静止状态,已知金属板间的距离为 d ,问:

- (1) Oab 的转动方向应该怎样?
- (2) 转动角速度大小应为多少?

8. 如图 2-41 在一个匀强磁场中,固定着粗细相同的同种导线组成的同心圆 a 和 b ,圆环平面跟匀强磁场垂直,圆环 a 的半径是圆环 b 的半径的两倍,匀强磁场的磁感强度随时间均匀变化,规律为 $B = Kt$ (K 为定值). 求:

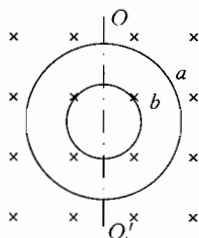


图 2-41

- (1) 两环中感生电流的电功率之比;
- (2) 要使两环中产生感生电流相同,那么 a 应绕 OO' 轴转过多少角度?

9. 有一粗细均匀的 \square 形铜导线框,线框下面的两端分别插在

两个水银槽里,水银槽跟电源 ϵ 连接,如图 2-42 所示. 如果线框重 $G = 0.50$ 牛、长 $L = 20$ 厘米;匀强磁场的磁感强度 $B = 2.0$ 特,方向垂直纸面向里. 在 K 接通的瞬时,该线框立即跳离水银槽,且竖直跳起 $h = 3.2$ 厘米. (g 取 10 米/秒²)问:(1)如果通电时间 $t = 0.010$ 秒,忽略这瞬间线框中的动生电动势,那么在通电瞬间,通过线框截面积的电量是多少?(2)线框从离开水银槽断电起直到达到最高点的过程中,产生感应电动势的平均值是多少?(3)如果回路内外电阻总值 $R = 0.10$ 欧,则导线重新落回到水银槽瞬时,消耗在回路中的电功率多大?

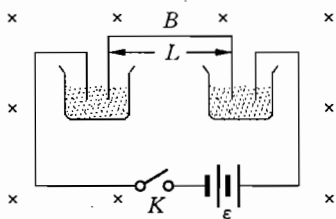


图 2-42

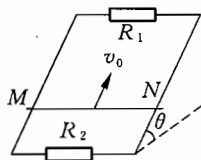


图 2-43

10. 如图 2-43,两足够长的平行倾斜导体导轨,所在平面与水平面夹角为 $\theta = 37^\circ$, 导轨电阻不计,两导轨间相距 $l = 0.3$ m, 两导轨间有方向与导轨所在平面垂直、大小 $B = 1$ T 的匀强磁场,两导轨的上端和下端各自分别通过电阻 R_1 和 R_2 相连, $R_1 = R_2 = 2 \Omega$. 另有一横跨在两导轨间的金属棒 MN , 其质量为 $m = 1$ kg, 电阻为 $r = 2 \Omega$, 它与导轨间的动摩擦因数为 $\mu = 0.5$. 今 MN 以平行于导轨向上的初速度 $v_0 = 10$ m/s 沿导轨向上滑动,直至其达到滑动上升的最高点为止. 此过程中通过 R_1 的电量为 $q_1 = 0.1$ C, 试求此过程中 R_1 上的发热量 Q_1 .

11. 由同种电阻丝制成的两个半径之比为 $2:1$ 的圆环置于同一匀强磁场中,其环面均与磁场方向垂直,现以相同的速度将两环分别沿垂直于磁场方向匀速拉出磁场,如图 2-44 所示. 求此过程中两环中发热量之比是多少?

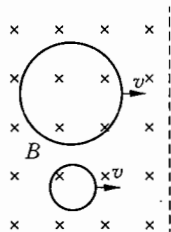


图 2-44

12. 光滑 U 形金属框架宽为 l , 足够长, 其上放一质量为 m 的金属棒 ab , 左端连接有一电容器和电键, 当 K 断开时, 给棒一个初速 v_0 , 然后合上 K , 使棒始终垂直框架并沿框架匀速运动 ($v < v_0$), 如图 2-45 所示, 求电容器电容.

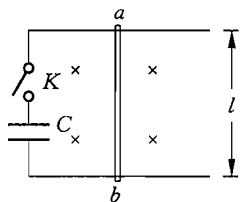


图 2-45

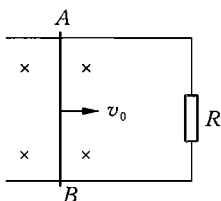


图 2-46

13. 如图 2-46, AB 杆受一冲量作用后以初速 v_0 沿水平面内的导轨运动, 经一段时间后而停止, $v_0 = 4 \text{ m/s}$, AB 的质量 $m = 5 \text{ kg}$, 导轨宽 $L = 0.4 \text{ m}$, 电阻 $R = 2 \Omega$, 其余电阻不计, 磁场 $B = 0.5 \text{ T}$, 棒和导轨间动摩擦因数 $\mu = 0.4$, 测得整个过程中通过导线的电量 $q = 10^{-2} \text{ C}$. 求: (1) 整个过程中产生的电热 Q ; (2) AB 杆的运动时间 t .

14. 两个半径分别为 10 mm 和 50 mm 的细齿轮互相啮合地装配在一起, 如图 2-47 所示, 转轴半径都是 1 mm , 整个装置放在磁感强度 $B = 0.5 \text{ T}$ 的均匀磁场中, B 方向平行于转轴, 两轴通过金属支架互相连通, 当两齿轮分开时, 量得两齿轮边缘之间的电阻为 $10^{-2} \Omega$, 现将一质量为 10^{-2} kg 的物体用轻绳绕在大齿轮轴上, 忽略摩擦损耗, 求悬挂物体在重力作用下匀速下落的速度.

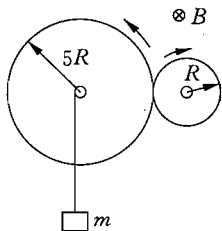


图 2-47

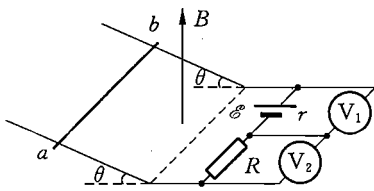


图 2-48

15. 如图 2-48 所示, 倾角 $\theta = 37^\circ$ 的斜面上放置两根平行光滑

金属轨道, 轨道与电池 E 、电阻 R 连接. 在斜面部分有一竖直向上的匀强磁场穿过, 磁感强度为 $B = 0.4 \text{ T}$. 当在平行轨道上放一金属杆 ab 后, 使电路接通, 将有电流通过金属杆. 已知金属杆长度 $l = 1 \text{ m}$, 质量 $= 0.1 \text{ kg}$, 电池电动势 $\mathcal{E} = 8 \text{ V}$, 内阻 $r = 1 \Omega$, 电阻 $R = 7 \Omega$. 轨道与金属杆电阻不计. 问:

(1) 当金属杆在轨道上加速下滑时, 伏特计 V_1 和 V_2 的示数怎样变化?

(2) 当金属杆下滑的加速度为 2 m/s^2 时, 伏特计 V_1 的读数多大? 此时金属杆的速度多大?

16. 空间有两个同心圆柱区域, 内柱中的磁感强度为 B , 两柱间磁感强度为 B' , 方向均垂直于纸面(图 2-49),

如果 B 的变化率为 $\frac{\Delta B}{\Delta t}$, 为了使质量为 m 、电量为 q 的带电粒子能在外柱内贴着内柱表面做轨迹不变的圆周运动, B' 的变化率应为多大?

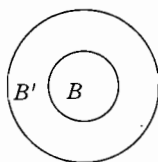


图 2-49

17. 图 2-50 中, 金属棒 ab 可以在水平导轨上无摩擦地左右平移. 回路中电源电动势 $\mathcal{E} = 3.0 \text{ 伏}$, 内电阻 $r = 0.10 \text{ 欧}$, 外电路的总电阻始终为 0.20 欧姆 ; ab 的长 $L = 0.20 \text{ 米}$, 质量 $m = 0.010 \text{ 千克}$. 通过定滑轮连接的重物质量 $m = 0.050 \text{ 千克}$. 磁感应强度 $B = 1.0 \text{ 特}$, 方向竖直向上. 求(1) K 闭合的瞬间, ab 所受安培力以及加速度. (2) ab 开始运动后, 它的速度、加速度及电路电流如何变化? (3) ab 可能达到的最大速度. (4) ab 达到最大速度后, 电源的输出功率及这个装置的机械功率.

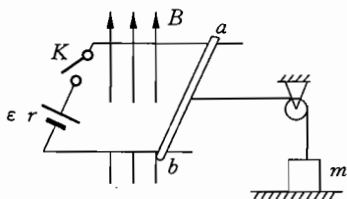


图 2-50

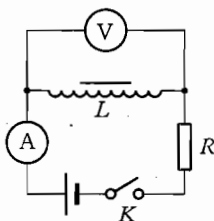


图 2-51

18. 在图 2-51 中, 电源电动势为 12 V , 内阻不计, $R = 1 \Omega$, 电

流表 A 是理想电表,电压表 V 的量程为 20 V,它是由量程为 $0 \sim 50 \mu\text{A}$ 的表头改装而成的,电感的自感系数 L 足够大,不计电源内阻.问:

- (1) 合上 K 时,两表上的示数最大各为多少?
- (2) 断开 K 时,两表上的示数将如何变化?
- (3) 断开 K 时,哪些元件容易损坏? 应如何避免不必要的损失?

19. 某理想变压器,当其输入端接在电动势为 ϵ ,内阻为 r 的交流电源上,输出端接上电阻为 R 的负载时, R 上可获得最大功率.求 (1) 这时输入电流多大? 负载上的最大功率为多少? (2) 负载获得最大功率时,变压器的原副线圈电压各为多少? (3) 变压器的变压比为多少?

20. 图 2-52 中, $\epsilon = 12 \text{ V}$, $r = 1 \Omega$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 9 \Omega$, $R_3 = 15 \Omega$, $L = 2 \text{ H}$, 开关 K 与 A 接通,将 K 由 A 移到 B 的瞬间, L 中能产生的最大自感电动势是多少?

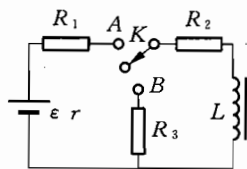


图 2-52

B 组

21. 图 2-53 所示,在垂直于纸面方向的磁感强度为 B 的匀强磁场中,有一个细金属丝环,环上有长度为 l 的很小的缺口,环平面与磁感线相垂直,当环以速度 v 作无滑动的滚动时,半径 OA 与竖直方向的夹角 α 将增大,试求缺口处的感应电动势的变化规律.

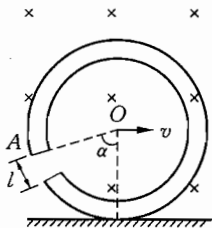


图 2-53

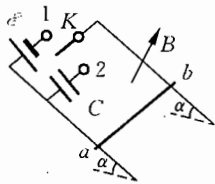


图 2-54

22. 在倾角为 α 的足够长的两条光滑平行金属导轨上,放一根

质量为 m 、电阻不计的金属棒 ab . 整个空间有磁感强度为 B 的匀强磁场, 方向垂直于轨道平面向上(图2-54), 导轨宽度为 L , 电源电动势为 \mathcal{E} , 电源内阻为 R , 导轨电阻不计, 电容器的电容为 C , 问:

(1) K 接 1 时, ab 的稳定速度为多少?

(2) ab 达到稳定速度时 K 投向 2, 稳定后 ab 再下滑距离 s , 这过程中电容器储藏的电能是多少?

23. 一横截面积为矩形的水平金属板, 宽为 d , 两侧由滑动接头 e 和 f 通过细金属杆与小电压表相连, 金属杆 ab 长 $2d$, 位于水平位置, $af = be$, 整个装置处在方向竖直向上、磁感应强度为 B 的匀强磁场中(图 2-55), 不计金属板和金属杆的电阻. 问电压表的读数为多少? a 点比 b 点的电势高多少? b 点电势比 e 点高多少?

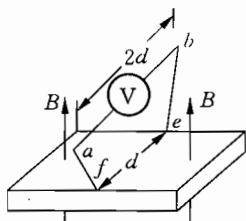


图 2-55

(1) 若金属板以恒定的水平速度 v 向右运动, 但电压表和金属杆保持静止;

(2) 若电压表和金属杆一起以恒定的水平速度 v 向左运动, 但金属板保持静止;

(3) 若整个装置一起以恒定的水平速度 v 向右运动.

24. 一个电阻为 R 的长方形线圈 $abcd$ 沿着磁针所指的南北方向平放在北半球的一个水平桌面上, $ab = l_1$, $bc = l_2$ (图 2-56). 现突然将线圈翻转 180° , 使 ab 与 dc 互换位置, 测得导线中流过的电量为 Q_1 . 然后维持 ad 边不动, 将线圈绕 ad 边转动, 使之突然竖直, 这次测得导线中流过的电量为 Q_2 , 试求该处地磁场的磁感强度的大小.

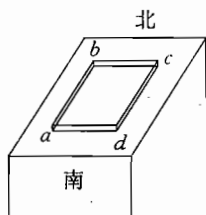


图 2-56

25. 质量为 m 的小球, 带有正电荷 q , 小球只能沿半径为 r 的圆形水平绝缘轨道运动. 圆柱形空间内存在着分布均匀但随时间变化的磁场 $B(t)$, 圆柱形的轴线过轨道圆心并垂直于轨道平面(图 2-57).

$t = 0$ 时, $B = 0$, 小球静止于环上;

$0 < t < T$ 时, $B(t)$ 随 t 均匀增长, $t = T$ 时, $B = B_0$;

$t \geq T$ 时, $B(t)$ 稳定不变.

试定量讨论 $t > 0$ 时, 小球的运动情况及其对轨道的作用力.

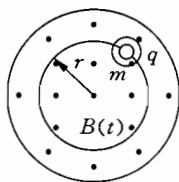


图 2-57

26. 一导线围成半径为 D 的圆环 $adbc$, 在圆环所围的区域内有一半半径为 $\frac{D}{2}$ 的圆柱形磁场区域, 其周界与

圆环内切于 c 点. 此区域内有均匀磁场, 磁感强度为 B , 方向垂直纸面向里. 磁场随时间增强, 变化率 $\Delta B / \Delta t = k = \text{常量}$. 导线 ab 是圆环的一条直径, 与磁场边界相切(图 2-58). 设导线 ab 以及被其所分割成的两个半圆的电阻都是 r . 今用一电

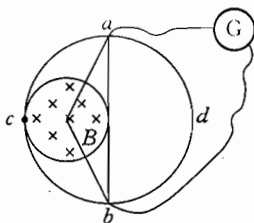


图 2-58

流表 G 接在 a 、 b 两点之间, 电流表位于纸面内, 内阻亦为 r (连接电流表的导线电阻忽略不计). 试问下列情况下, 通过电流表的电流 I_g 为多少?

- (1) 半圆环 acb 和 adb 都位于纸面内, 并分别位于 ab 的两侧;
- (2) 半圆环 adb 绕直径 ab 转过 90° , 折成与纸面垂直;
- (3) 半圆环 adb 再绕 ab 转 90° , 折成与 acb 重合;
- (4) 用两根不计电阻的导线将 a 、 b 和磁场中心连接.

27. 图 2-59 所示, 在无限长的光滑导轨上有一辆载有磁铁的小车, 质量为 m , 磁极的 N 极在下, S 极在上, 磁铁的端面为边长为 a 的正方形 (设磁场全部集中在端面且竖直向下, 磁感强度为常量 B), 两条导轨之间焊接有一系列短金属

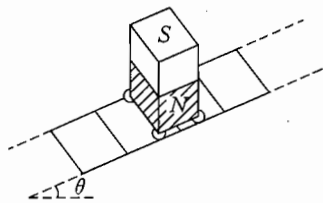


图 2-59

条, 相邻金属条之间的距离等于金属条的长度, 且都等于 a , 每条金属条的电阻和每小段导轨的电阻均为 r , 今要使磁铁沿导轨向下以

速率为 v 作匀速运动, 则导轨的倾角 θ 应为多大?

28. 如图 2-60 所示, 一很长的薄导体平板沿 x 轴放置, 板的宽度为 L , 电阻可忽略不计. $aebcfd$ 是圆弧形均匀导线, 电阻为 $3R$, 圆弧所在平面与 x 轴垂直, 圆弧的两端 a 、 d 与导体板的两个侧面相接触, 并可在其上滑动. 圆弧 $ae = eb = cf = fd =$

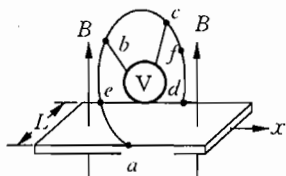


图 2-60

$\frac{1}{8}$ 圆周长, 圆弧 $bc = \frac{1}{4}$ 圆周长. 一个内阻为 $R_s = nR$ 的体积很小的电压表位于圆弧的圆心 O 处, 电压表与 b 、 c 相连. 整个装置处于磁感强度为 B 、方向垂直向上的匀强磁场中. 当导体板不动而圆弧导线与电压表一起以恒定速度 v 沿 x 轴方向做平移运动时

- (1) 求电压表的读数;
- (2) 求 e 点与 f 点的电势差 U_{ef} .

29. 金属杆 ab 、 cd 置于平行轨道 MN 、 PQ 上, 可沿轨道滑动, 两轨道间距 $l = 0.5$ m, 轨道所在空间有匀强磁场, 磁感强度 $B = 0.5$ T, 用力 $F = 0.25$ N 向右水平拉杆 ab , 若 ab 、 cd 与轨道间的滑动摩擦力 $f_1 = 0.15$ N、 $f_2 = 0.1$ N, 两杆的电阻分别为 $R_1 = R_2 = 0.1 \Omega$, 求: 此两杆之间的稳定速度差, 设导轨电阻不计, ab 、 cd 的质量关系为 $2m_1 = 3m_2$; 若 $F = 0.3$ N, 两杆间稳定速度差又是多少 (图 2-61 所示)?

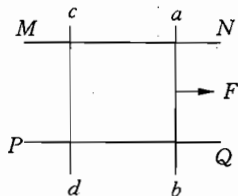


图 2-61

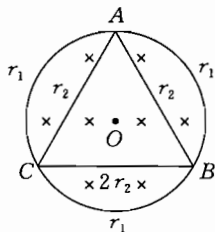


图 2-62

30. 如图 2-62 所示, 有一由匀质细导线弯成的半径为 a 的圆线圈和一内接等边三角形的电阻丝组成的电路 (电路中各段的电阻

值见图),在圆线圈平面内有垂直纸面向里的均匀磁场,磁感应强度 B 随时间 t 均匀减小,其变化率的大小为一已知常数 K ,已知 $2r_1 = 3r_2$. 试求图中 A 、 B 两点的电势差 $U_A - U_B$.

31. 一无限长直圆柱面,由绝缘体构成半径为 R ,单位长度上电荷为 λ ,若其以角速度 ω 绕轴线匀速转动. 求:

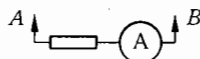
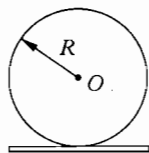


图 2-63

(1) 空间中的磁感强度;
(2) 若其以匀角加速度 α 转动,有一长为 $2R$ 的金属杆与圆柱面缘相切,则杆上的感生电动势为多少?

(3) 今用一内阻为 r 的安培计接在杆两端,问安培计的读数为多少?

32. 一个半径为 r 的非常小的导体圆环与一个半径为 R ($R \gg r$) 的很大导体圆环中心相距为 R ,开始时两环平面彼此平行并分别与中心连线垂直,如图 2-64 所示,保持不变的电流 I 通过固定在大环,小环以角速度 ω 围绕着一直径匀速转动. 小环的电阻是 Ω ,小环的自感可以忽略不计. 求:

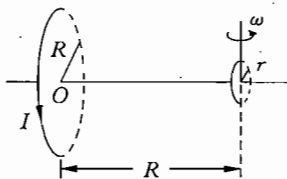


图 2-64

(1) 小环中的电流强度;
(2) 须用多大力矩施于小环,才能保持它匀速转动;
(3) 大环中的感应电动势.

33. 如图 2-65 所示电路中,电源电动势 $\epsilon = 6.0$ 伏(内阻不计),固定电阻 $R_1 = 1.0$ 欧,小灯泡 D 的规格为“6 V, 6 W”, ef 、 mn 为两根很长的平行的金属导轨,相距 $L = 0.20$ 米(电阻不计). 金属棒 ab 的阻值 $R_2 = 2.0$ 欧,广大的匀强磁场垂直纸面向里,磁感强度大小 $B = 3.6$ 特. 试求:(1) K 刚一接通的瞬时,小灯泡 D 的功率为多少?(2) K 接通后 ab 匀速运动时,小灯泡 D 的功率为多少?

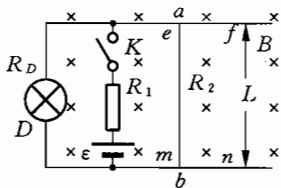


图 2-65

(3) ab 运动的最大速度为多少? (4) ab 受到的最大作用力为多少?

34. 一个变压器初、次级匝数分别为 N_1 和 N_2 (如图 2-66), 内阻分别为 r_1 和 r_2 . 初级线圈与恒压源 U_1 接通, 次级和可变负载 R 接通. 试求恒压源提供的功率 P_1 和 R 上消耗的功率 P_2 之间的关系, 作出当 R 变化时的 $P_1 \sim P_2$ 图.

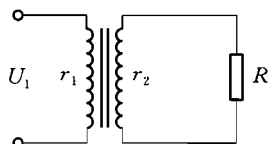


图 2-66

35. 两个分别绕有 N_1 匝和 N_2 匝的圆线圈, 半径分别为 r_1, r_2 , $r_2 \ll r_1$, 设大圈的内电阻为 R , 求:

- (1) 两线圈在同轴共面位置时的互感系数;
- (2) 在小线圈中通以稳恒电流 I , 并使之沿轴线以速度 v 匀速运动, 始终保持二者共轴、两平面平行, 求两线圈中心相距为 x 时, 大线圈中的感生电动势;
- (3) 若把小线圈从共面位置移到很远处时, 大线圈中通过的感生电量.

第三讲 光的传播

知识要点和基本方法

一、光的反射

(一) 组合平面镜

1. 组合平面镜 由两个以上的平面镜组成的光学系统叫做组合平面镜. 射向组合平面镜的光线往往要在平面镜之间发生多次反射, 因而会出现生成复像的现象.

先看一种较简单的现象, 两面互相垂直的平面镜(交于 O 点), 镜间放一点光源 S (图 3-1), S 发出的光线经过两个平面镜反射后形成了 S_1 、 S_2 、 S_3 三个虚像. 用几何的方法不难证明: 这三个虚像都位于以 O 为圆心、 OS 为半径的圆上, 而且 S 和 S_1 、 S 和 S_2 、 S_1 和 S_3 、 S_2 和 S_3 之间都以平面镜(或它们的延长线)保持着对称关系. 用这个方法我们可以容易地确定较复杂的情况中复像的个数和位置.

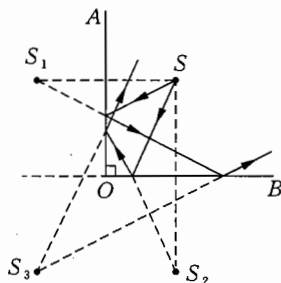


图 3-1

两面平面镜 AO 和 BO 成 60° 角放置(图 3-2), 用上述规律, 很容易确定像的位置: ①以 O 为圆心、 OS 为半径作圆; ②过 S 作 AO 和 BO 的垂线与圆交于 S_1 和 S_2 ; ③过 S_1 和 S_2 作 BO 和 AO 的垂线与圆交于 S_3 和 S_4 ; ④过 S_3 和 S_4 作 AO 和 BO 的垂线与圆交于 S_5 . $S_1 \sim$

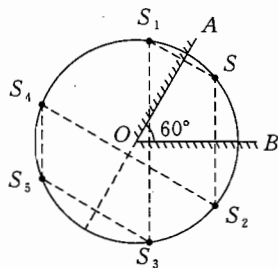


图 3-2

S_5 便是 S 在两面平面镜中的五个像。

2. 球面镜成像

(1) 球面镜的焦距 球面镜的反射仍遵从反射定律,法线是球面的半径.一束近主轴的平行光线,经凹镜反射后将会聚于主轴上一点 F (图 3-3),这 F 点称为凹镜的焦点.一束近主轴的平行光线经凸面镜反射后将发散,反向延长可会聚于主轴上一点 F (图 3-4),这 F 点称为凸镜的虚焦点.焦点 F 到镜面顶点 O 之间的距离叫做球面镜的焦距 f .可以证明,球面镜的焦距 f 等于球面半径 R 的一半,即

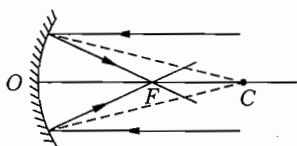


图 3-3

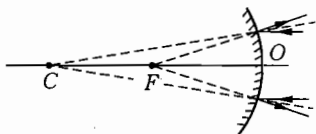


图 3-4

$$f = R/2.$$

(2) 球面镜成像公式 根据反射定律可以推导出球面镜的成像公式.下面以凹镜为例来推导:(如图 3-5 所示)设在凹镜的主轴上有一个物体 S ,由 S 发出的射向凹镜的光线经镜面 A 点反射后与主轴交于 S' 点,半径 CA 为反射的法线, S' 即 S 的像.根据反射定律, $\angle SAC = \angle S'AC$, 则 CA 为三角形 ASS' 角 A 的平分线,根据三角形内角平分线的性质有

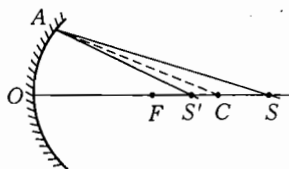


图 3-5

$$\frac{AS}{AS'} = \frac{CS}{CS'}, \quad (1)$$

因为 SA 为近轴光线,所以 $AS' \doteq S'O$, $AS \doteq SO$, ①式可改写为

$$\frac{OS}{OS'} = \frac{CS}{CS'}. \quad (2)$$

②式中 OS 叫物距 u , OS' 叫像距 v , 设凹镜焦距为 f , 则

$$CS = OS - OC = u - 2f,$$

$$CS' = OC - OS' = 2f - v.$$

代入①式
$$\frac{u}{v} = \frac{u - 2f}{2f - v},$$

化简
$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}.$$

这个公式同样适用于凸镜. 使用球面镜的成像公式时要注意: 凹镜焦距 f 取正, 凸镜焦距 f 取负; 实物 u 取正, 虚物 u 取负; 实像 v 为正, 虚像 v 为负.

(3) 球面镜多次成像 球面镜多次成像原则: 只要多次运用球面镜成像公式即可, 但有时前一个球面镜反射的光线尚未成像便又遇上了后一个球面镜, 此时就要引进虚物的概念.

如图 3-6 所示, 半径为 R 的凸镜和凹镜主轴相互重合放置, 两镜顶点 O_1 、 O_2 相距 $2.6R$, 现于主轴上距凹镜顶点 O_1 为 $0.6R$ 处放一点光源 S . 设点光源的像只能直接射到凹镜上, 问 S 经凹镜和凸镜各反射一次后所成的像在何处?

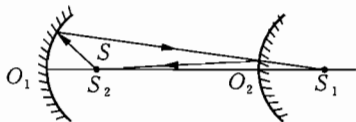


图 3-6

S 在凹镜中成像, $u_1 = 0.6R$, $f_1 = \frac{1}{2}R$,

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1},$$

$$\frac{1}{0.6R} + \frac{1}{v_1} = \frac{2}{R}.$$

可解得
$$v_1 = 3R.$$

根据题意: $O_1O_2 = 2.6R$, 所以凹镜反射的光线尚未成像便已又被凸镜反射, 此时可将凹镜原来要成的像 S_1 作为凸镜的虚物来处理,

$$u_2 = (2.6R - 3R) = -0.4R, f_2 = -\frac{R}{2},$$

$$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2},$$

$$-\frac{1}{0.4R} + \frac{1}{v_2} = -\frac{2}{R},$$

可解得

$$v_2 = 2R.$$

说明凸镜所成的像 S_2 和 S 在同一位置上.

二、光的折射

(一) 折射定律

1. 折射定律 当光线从媒质 2 进入媒质 1 时, 如果入射角是 i , 折射角是 r , 那么 $\sin i / \sin r$ 是一常数, 这个常数叫做媒质 2 对媒质 1 的相对折射率 n_{21} . 如果媒质 1 代之以真空, 则这个常数叫做媒质 2 的绝对折射率 n .

媒质 2 对媒质 1 的相对折射率 n_{21} 等于光在媒质 1 中的速度 v_1 与光在媒质 2 中的速度 v_2 之比

$$n_{21} = v_1 / v_2.$$

某种媒质的绝对折射率 n 等于光在真空中的速度 c 与光在该媒质中的速度 v 之比, 即

$$n = c / v.$$

显然, 相对折射率

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

由于光线的折射, 人们看水中的物体感觉到的深度会比它的真实深度浅. 我们讨论一下下面这个问题.

有一只厚底玻璃缸, 底厚 6 cm, 内盛 4 cm 深的水 (图 3-7). 已知玻璃和水的折射率分别为 1.8 和 1.33. 如果竖直向下看, 看到缸底下表面离水面的距离是多少呢?

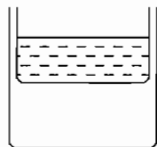


图 3-7

所谓的“竖直向下看”, 可以理解成小角度的折射, 这是一个重要的条件. 在图 3-8 中, 从缸底 A 点发出一根光

线经过 F 、 E 向 J 方向射出, 人眼观察后感觉到 A 点在 D 处, 人看到缸底下表面离水面的距离就是 $CD = CK + KD$. 过 F 作 JD 的平行线 FH , 有 $\triangle KLD \cong \triangle BFH$, $KD = BH$, 所以

$$CD = IL + BH, \quad (1)$$

因为当角 θ 很小时, 有 $\tan \theta = \sin \theta$, 而 α 、 β 、 γ 都很小, 所以在 $\triangle ILE$ 中, 有

$$IL = IE / \tan \alpha = IE / \sin \alpha, \quad (2)$$

在 $\triangle IFE$ 中, 有

$$IF = IE / \tan \beta = IE / \sin \beta, \quad (3)$$

由②③式可得

$$IL = IF \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = IF / n_{\text{水}}, \quad (4)$$

$$\text{在 } \triangle BHF \text{ 中有 } BH = BF / \tan \alpha = BF / \sin \alpha, \quad (5)$$

$$\text{在 } \triangle BAF \text{ 中有 } BA = BF / \tan \gamma = BF / \sin \gamma, \quad (6)$$

由⑤、⑥式可得

$$BH = BA \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = BA / n_{\text{玻璃}}. \quad (7)$$

将⑥⑦式代入①式, 可知

$$\begin{aligned} CD &= IF / n_{\text{水}} + BA / n_{\text{玻璃}} \\ &= (4 / 1.33 + 6 / 1.8) \text{ cm} = 6.34 \text{ cm}. \end{aligned}$$

由于同样的原因, 球形媒质中物体的视深也会发生变化. 如果一个直径为 8 cm 的实心玻璃球, 球内有一个小气泡, 当观察者沿着气泡和球心连线的方向观看时, 气泡似距球面 2 cm, 那么气泡和球面的实际距离是多少呢(玻璃的折射率 $n = 1.5$)?

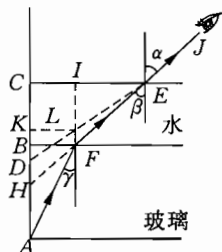


图 3-8

如图 3-9 所示,设气泡位置在 P 点,气泡发出的光线经 D 点折射后射入人眼.因为人是沿着气泡和球心连线的方向观看,所以 α 、 β 、 i 、 r 、 θ 角都很小.入射角 $i = \beta - \theta$, 折射角 $r = \alpha - \theta$, 气泡的视深为 CP' .

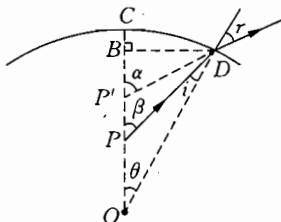


图 3-9

因为

$$\alpha = \sin \alpha = \frac{BD}{P'D} = \frac{BD}{P'C},$$

$$\beta = \sin \beta = \frac{BD}{PD} = \frac{BD}{PC},$$

$$\theta = \sin \theta = \frac{BD}{OD},$$

所以

$$\frac{1}{n} = \frac{BD/PC - BD/OD}{BD/P'C - BD/OD},$$

解得

$$PC = \frac{n \cdot OD \cdot P'C}{OD + P'C(n-1)} = 2.4 \text{ cm}.$$

(二) 全反射

1. 全反射 光从光密媒质 1 射向光疏媒质 2, 当入射角大于临界角 $\alpha = \sin^{-1} n_{21}$ 时, 光线发生全反射.

全反射现象有重要的实用意义, 如现代通讯的重要组成部分——光导纤维, 就是利用光的全反射现象. 图 3-10 是光导纤维的示意图. AB 为其端面, 纤维内芯材料的折射率 $n_1 = 1.3$, 外层材料的折射率 $n_2 = 1.2$, 试问入射角在什么范围内才能确保光在光导纤维内传播?

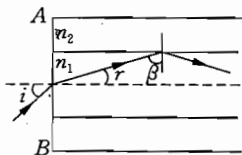


图 3-10

图 3-10 中的 r 表示光第一次折射的折射角, β 表示光第二次的入射角, 只要 β 大于临界角, 光在内外两

种材料的界面上发生全反射,光即可一直保持在纤维内芯里传播.

$$\begin{aligned}\beta &= \sin^{-1} n_{21} \\ &= \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1} = \sin^{-1} \frac{1.2}{1.3} = 67.4^\circ.\end{aligned}$$

$$r = \frac{\pi}{2} - \beta = 90^\circ - 67.4^\circ = 22.6^\circ,$$

$$\sin i / \sin r = 1.3 / 1,$$

只要 $\sin i < 0.50$, $i < 30^\circ$ 即可.

三、两条重要的原理

前面我们认识了光线在反射和折射中的一些规律,那么为什么会有这些规律呢?人们提出了两条重要的原理.如果认可这两条原理,便可以推导出一系列光线传播的规律.

(一) 惠更斯原理

惠更斯原理是研究光的传播规律时十分有用的一个工具.惠更斯原理内容如下:

- (1) 波阵面上每一点都可以看作一个新的波源,各向前发出次波.
- (2) 各个次波的包络面即为下时刻新的波阵面.

用惠更斯原理可以说明光线折射的原因:一束平行光 ab 照射到 1、2 两种媒质的界面 MN 上(图 3-11).

设光在两种媒质中的传播速度分别为 v_1 和 v_2 , 光线 a 在媒质 1 中多走的时间为

$$t_a = \frac{AC}{v_1} = \frac{AB \cdot \sin i}{v_1}.$$

光线 b 在媒质 2 中多走的时间为

$$t_b = \frac{BD}{v_2} = \frac{AB \cdot \sin r}{v_2}.$$

因为 $t_a = t_b$, 所以有

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}.$$

这就是我们熟知的折射定律.

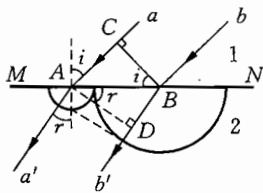


图 3-11

光在均匀媒质中直线传播,在折射率 n 变化的非均匀媒质中,传播方向将发生偏转. 假设有如图 3-12 所示的一块 n 向上线性增加的媒质,一束平行光垂直入射,由于上边 n 大,所以当 b 光线传到 B 处时, a 光线只传播到 A 处,因此整个光束就向 n 大的方向偏转了.

光在不均匀媒质中传播发生偏转的例子在一些自然现象中常会反映出来,如海市蜃楼即是一个典型的例子.

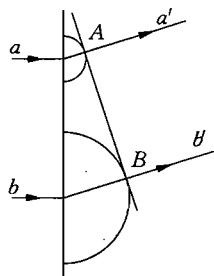


图 3-12

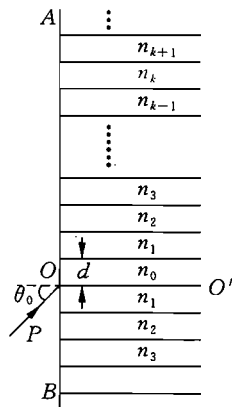


图 3-13

有一块透明光学材料,由折射率略有不同的许多相互平行、厚度 $d = 0.1 \text{ mm}$ 的薄层密接构成. 图 3-13 表示与各薄层垂直的一个截面, AB 为此材料的端面,与薄层界面垂直. OO' 表示薄层的中心面. 各薄层的折射率 $n_k = n_0 - kv$, 其中 $n_0 = 1.4142$, $v = 0.0025$. 今有一光线 PO 以入射角 $\theta_0 = 30^\circ$ 射向 O 点,求此光线在材料内能够到达的离 OO' 最远的距离.

解 设光进入材料后的折射角为 φ_0 (图 3-14). 则有

$$\sin \theta_0 = n_0 \sin \varphi_0, \quad (1)$$

此光进入薄层 1 时,入射角为 $\frac{\pi}{2} - \varphi_0$, 折射角为 $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$, 则有

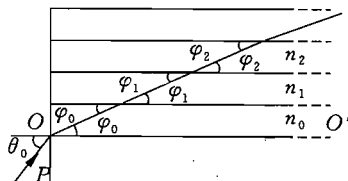


图 3-14

$$n_0 \cos \varphi_0 = n_1 \cos \varphi_1,$$

依此类推:

$$n_0 \cos \varphi_0 = n_1 \cos \varphi_1 = \cdots = n_k \cos \varphi_k = \text{常数}. \quad (2)$$

因为 $n_k = 1.4142 - k \times 0.0025$, 所以 $\cos \varphi_k$ 随 k 的增大而增大, φ_k 随 k 的增大而减小. 即光线在连续变化的媒质中将向折射率大的方向偏转, 满足②式而 $\cos \varphi_k$ 值最接近 1 的那个值所对应的 k 即光线能进入的最远的薄层的序号, 在这薄层的上表面将发生全反射. 然后光线返回, 逐层折射进入材料的下半部, 到达 k 层又被反射回去, 来回传播. 因此, 需要求出能满足

$$\cos \varphi_k = \frac{n_0 \cos \varphi_0}{n_k} = \frac{n_0 \cos \varphi_0}{n_0 - kv} < 1, \quad (3)$$

的 k 的最大值. 由①式得

$$n_0 \cos \varphi_0 = n_0 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 / n_0^2} = \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \theta_0}, \text{ 代入③式, 化简:}$$

$$k < (n_0 - \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \theta_0}) / v,$$

代入数据得

$$k < 36.52.$$

取小于 36.52 的最大整数, 得 $k = 36$. k 层上表面即光线能到的离 OO' 最远处, 它与 OO' 的距离为

$$h = (k+1)d = 3.7 \text{ mm}.$$

在特殊情况下, 如果 $(n_0 - \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \theta_0}) / v$ 恰好等于某整数 k' , 光由 $k' - 1$ 层进入 k' 层时即与 OO' 平行, 故 $k' - 1$ 层上表面即为光线能到达的最远处, 此时

$$h = (k' - 1 + 1)d = k'd.$$

(二) 费马原理

费马原理指出, 光在指定的两点之间传播, 实际的光程总是为最小、最大或保持恒定. 这里的光程是指光在某种均匀介质中通过的路

程和该种媒质的折射率的乘积。

费马原理是几何光学中的一个十分重要的基本原理,从费马原理可以推导出几何光学中的很多重要规律.例如光的直线传播、反射定律、折射定律,都可以从光程极小推出.如果反射面是一个旋转椭圆面,而点光源置于其一个焦点上,所有反射光线都经过另一个焦点,便是光程恒定的一个例子.此外,透镜对光线的折射作用,也是很典型的。

一平凸透镜的折射率为 n , 放置在空气中, 透镜孔径的半径为 R . 在透镜外主光轴上取一点 F' , $OF' = f'$ (图 3-15). 当平行光沿主光轴入射时, 为使所有光线均会聚于 F' 点. 试问: (1) 透镜凸面应取什么形状? (2) 透镜顶点 A 与点 O 相距多少? (3) 对透镜的孔径 R 有何限制?

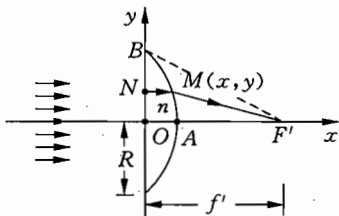


图 3-15

解 根据费马原理, 以平行光入射并会聚于 F' 的所有光线应有相等的光程, 即最边缘的光线 BF' 与任一条光线 NMF' 的光程应相等. 由此可以确定凸面的方程. 其余问题亦可迎刃而解.

(1) 取 $o-xy$ 坐标系如图, 由光线 BF' 和 NMF' 的等光程性, 得

$$nx + \sqrt{(f' - x)^2 + y^2} = \sqrt{f'^2 + R^2},$$

整理后, 得到任一点 $M(x, y)$ 的坐标 x, y 应满足的方程为

$$(n^2 - 1) \left(x - \frac{n \sqrt{f'^2 + R^2} - f'}{n^2 - 1} \right)^2 - y^2 = \frac{(nf' - \sqrt{f'^2 + R^2})^2}{n^2 - 1}.$$

令 $x_0 = \frac{n \sqrt{f'^2 + R^2} - f'}{n^2 - 1}$, $a = \frac{nf' - \sqrt{f'^2 + R^2}}{\sqrt{n^2 - 1}}$, 则上式成为

$$(n^2 - 1)(x - x_0)^2 - y^2 = a^2.$$

这是双曲线的方程. 由旋转对称性, 透镜的凸面应是旋转双曲面.

(2) 透镜顶点 A 的位置 x_A 应满足

$$(n^2 - 1)(x_A - x_0)^2 = a^2,$$

或者

$$x_A = x_0 - \frac{a}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{\sqrt{f'^2 + R^2} - f'}{n - 1}.$$

可见,对于一定的 n 和 f' , x_A 由 R 决定.

(3) 因点 F' 在透镜外,即 $x_A \leq f'$, 这是对 R 的限制条件,有

$$\frac{\sqrt{f'^2 + R^2} - f'}{n - 1} \leq f',$$

即要求 $R \leq \sqrt{n^2 - 1}f'$.

讨论 在极限情形,即 $R = \sqrt{n^2 - 1}f'$ 时,有如下结果:

$$x_A = \frac{\sqrt{f'^2 + (n^2 - 1)f'^2} - f'}{n - 1} = f',$$

即点 A 与点 F' 重合. 又因

$$x_0 = \frac{n^2 f' - f'}{n^2 - 1} = f',$$

$$a = 0.$$

故透镜凸面的双曲线方程变为

$$(n^2 - 1)(x - f')^2 - y^2 = 0,$$

即 $y = \pm \sqrt{n^2 - 1}(x - f')$.

双曲线退化成过点 F' 的两条直线, 即这时透镜的凸面变成以 F' 点为顶点的圆锥面, 如图 3-16 所示. 考虑任意一条入射光线 NM , 由折射定律有 $n \sin \theta = \sin \theta_i$, 由几何关系

$$\sin \theta = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{f'^2 + R^2}}.$$

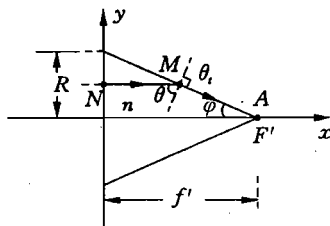


图 3-16

故

$$\sin \theta_c = \frac{nf'}{\sqrt{f'^2 + R^2}} = 1, \theta_c = \frac{\pi}{2}.$$

即所有入射的平行光线折射后均沿圆锥面到达点 F' , 此时的角 θ 就是全反射的临界角.

四、透镜成像

透镜是两个折射面为球面的一部分(或其中一个面为平面)的透明体, 其中中间厚边缘薄的称为凸透镜, 中间薄边缘厚的称为凹透镜.

(一) 球面折射成像公式 单球面的折射问题是研究透镜的基础.

如图 3-17 所示, 如果球面左、右方的折射率分别为 1 和 n , S' 为 S 的像. 因为 i 、 r 均很小, 所以

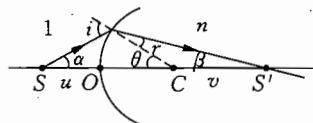


图 3-17

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{i}{r} = n. \quad (1)$$

因为

$$i = \theta + \alpha, r = \theta - \beta,$$

代入①式可有

$$\theta + \alpha = n(\theta - \beta). \quad (2)$$

对近轴光线来说, α 、 θ 、 β 同样很小, 所以有

$$\alpha = \frac{x}{u}, \theta = \frac{x}{R}, \beta = \frac{x}{v},$$

代入②式可得

$$\frac{1}{u} + \frac{n}{v} = \frac{n-1}{R}.$$

当 $u \rightarrow \infty$ 时的 v 就是焦距 f , 所以

$$f = \frac{R}{n-1} \cdot n.$$

(二) 透镜成像公式 以凸透镜为例, 推导薄透镜成像公式:

从物点 S 发出的某一束光 SA 经折射率为 n 的透镜两次折射后与主轴相交于 S' 点, S' 就是 S 的像. (图 3-18)

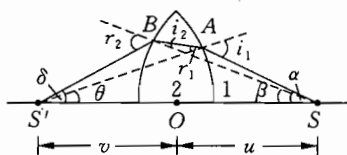


图 3-18

$$\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = n, \quad \frac{\sin i_2}{\sin r_2} = \frac{1}{n}.$$

因为 SA 是近轴光线, 所以 i_1 、 r_1 、 i_2 、 r_2 都很小, 所以

$$\frac{i_1}{r_1} = n, \quad \frac{i_2}{r_2} = \frac{1}{n}.$$

由上述两式可得 $i_1 + r_2 = n(i_2 + r_1)$. ①

由图 3-18 可知

$$i_2 + r_1 = \beta + \theta, \quad i_1 = \alpha + \theta, \quad r_2 = \beta + \delta,$$

将上述关系代入①式:

$$\alpha + \beta = (n-1)(\beta + \theta). \quad ②$$

对薄透镜来说, A 、 B 两个折射点到主轴基本等距, 设此距离为 x , 在②式中 α 、 β 、 θ 、 δ 均很小, 所以

$$\alpha = \tan \alpha = \frac{x}{u}, \quad \beta = \tan \beta = \frac{x}{R_2},$$

$$\theta = \tan \theta = \frac{x}{R_1}, \quad \delta = \frac{x}{v}.$$

式中 R_1 、 R_2 分别为 1、2 两个折射面的半径. 将上述关系代入②式可得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad ③$$

根据透镜焦距的定义, 当 $u \rightarrow \infty$ 时, $v = f$, 因此

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad ④$$

由③、④式即可得出

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}.$$

上面的③式也可以通过球面折射成像公式直接得出. 将凸透镜看成是两个球面, 只要将第一个球面折射后形成的像作为第二个球面的物(注意: 这是虚物)即可.

$$\begin{cases} \frac{1}{u} + \frac{n}{v_1} = \frac{n-1}{R_1}, \\ -\frac{n}{v_1} + \frac{1}{v} = \frac{n-1}{R_2}. \end{cases}$$

消去 v_1 , 即可得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

与③式相同.

这个公式的使用方法和球面镜成像公式相类似, 凸透镜 f 取正, 凹透镜 f 取负, 实物 u 取正, 虚物 u 取负; 实像 v 为正, 虚像 v 为负.

有了④式, 就可以求出透镜的焦距. 如果有一平凸玻璃透镜, 玻璃的折射率为 1.5, 凸面半径为 25 cm, 那么

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (1.5-1) \left(\frac{1}{0.25} \right),$$

$$f = 0.5 \text{ m}.$$

如果将上述平凸透镜浸在折射率为 $3/4$ 的水中, 只要将④式中的 n 改成 $n_{\text{玻水}}$ 即可:

$$n_{\text{玻水}} = \frac{n_{\text{玻}}}{n_{\text{水}}} = \frac{1.5}{4/3} = \frac{9}{8},$$

$$f' = 2.0 \text{ m} = 4f.$$

(三) 组合透镜成像 有时需要将两片透镜配合使用, 构成一个

透镜组. 透镜组的焦距怎样求呢?

如果由焦距分别为 f_1 和 f_2 的 A 、 B 两片薄透镜构成一个透镜组(共主轴), 将一个点光源 S 放在主轴上距透镜 u 处, 在透镜另一侧距透镜 v 处成一像 S' (图 3-19). 对这一成像结果, 可以从以下两个不同的角度来考虑.

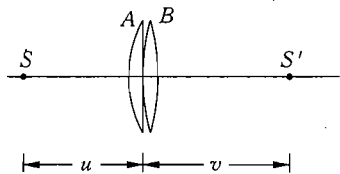


图 3-19

因为 A 、 B 都是薄透镜, 所以

互相靠拢地放在一起仍可看成一个薄透镜. 设这个组合透镜的焦距是 f , 则应有

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}, \quad (1)$$

另一个考虑角度可认为 S' 是 S 经 A 、 B 两个透镜依次成像的结果. 如 S 经 A 后成像 S_1 , 设 S_1 位于 A 右侧距 A 为 v_1 处, 应有

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}. \quad (2)$$

因为 S_1 位于透镜 B 右侧 v_1 处, 对 B 为一虚物, 物距为 $-v_1$, 再经 B 成像 S' , 所以有

$$\frac{1}{-v_1} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_2}, \quad (3)$$

由②、③可解得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}, \quad (4)$$

比较①、④两式可知

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

如果 A 、 B 中有凹透镜, 只要取负的 f_1 或 f_2 代入即可.

五、光学仪器的放大率

应用球面镜、透镜等光学元件可以制成各种光学仪器, 从成像性质来分, 可分为实像光学仪器和虚像光学仪器两大类.

(一) 实像光学仪器的放大率 幻灯机、照相机都是常见的实像光学仪器. 由于此类仪器获得的是物体的实像, 因而放大率 m 一般是指所成实像的长度放大率, 即 $v = mu$.

如果有一幻灯机, 当幻灯片与银幕相距 2.5 m 时, 可在银幕上得到放大率为 24 的像; 若想得到放大率为 40 的像, 那么, 假设幻灯片不动, 镜头和银幕应分别移动多少?

根据第一次放映可知

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2.5, \\ v_1 = m_1 u_1 = 24u_1. \end{cases}$$

可解得

$$u_1 = 0.1 \text{ m}, v_1 = 2.4 \text{ m},$$

$$f = \frac{u_1 v_1}{u_1 + v_1} = 0.096 \text{ m}.$$

第二次放映

$$\begin{cases} \frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f}, \\ v_2 = m_2 u_2 = 40u_2. \end{cases}$$

可解得

$$u_2 = 0.0984 \text{ m}, v_2 = 3.94 \text{ m}.$$

比较 u_1 和 u_2 , 可知镜头缩回 1.6 mm; 比较 v_1 和 v_2 , 可知银幕应移远 1.54 m.

(二) 虚像光学仪器的放大率 望远镜和显微镜是常见的虚像光学仪器. 由于此类仪器得到的是物体的虚像, 目的是扩大观察的视角, 因此放大率 m 一般是指视角放大率. 如果直接观察物体的视角为 α , 用仪器观察物体的视角为 β , 那么

$$m = \beta/\alpha.$$

先看显微镜的放大率. 如果有一台显微镜, 物镜焦距为 f_1 , 目镜焦距为 f_2 , 镜筒长 L , 若最后的像成在离目镜 d 处, 试证明显微镜的

$$\text{放大率 } m = \frac{Ld}{f_1 f_2}.$$

显微镜的光路如图 3-20 所示, AB 经物镜 I 成一放大实像

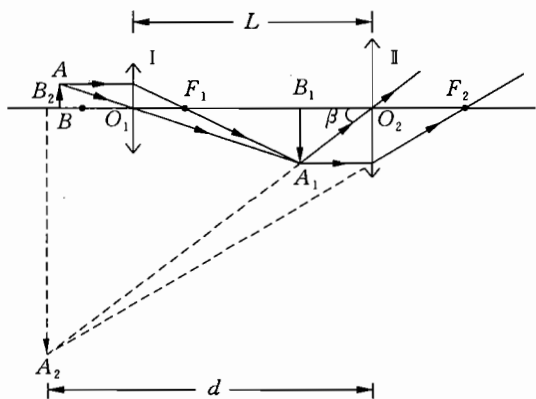


图 3-20

A_1B_1 , 物镜的长度放大率 $m_1 = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1O_1}{BO_1}$.

因 f_1 、 f_2 相对 L 都较小, 而且 B 很靠近 F_1 , 所以

$$B_1O_1 \approx L, BO_1 \approx f_1,$$

即

$$m_1 \approx L/f_1.$$

A_1B_1 位于目镜 II 的焦点内, 经目镜成一放大的虚像 A_2B_2 (通常让 A_2B_2 成在观察者的明视距离 d 上). 因为都是近轴光线, 所以此时观察者从目镜中看到 A_2B_2 的视角 β 为

$$\beta = \tan \beta = \frac{A_2B_2}{d} = \frac{A_1B_1}{B_1O_2} = \frac{A_1B_1}{f_2}.$$

若观察者不用显微镜, 直接观看 AB 的视角 α 为

$$\alpha = \tan \alpha = \frac{AB}{d},$$

则显微镜的放大率 m 为

$$m = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{A_1B_1}{f_2} \times \frac{d}{AB} \approx \frac{Ld}{f_1f_2}.$$

不难看出目镜的长度放大率为

$$m_2 = d/f_2,$$

所以有

$$m = m_1 m_2.$$

下面再看天文望远镜的放大率. 如果天文望远镜的物镜焦距为 f_1 , 目镜焦距为 f_2 , 试证明天文望远镜的放大率 $m = f_1/f_2$.

望远镜成像光路如图 3-21 所示, 远处物体 AB 由物镜 I 成像

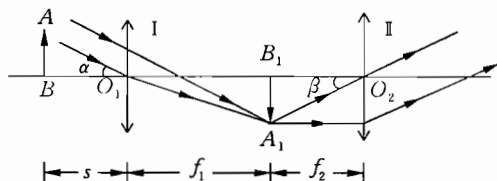


图 3-21

A_1B_1 , 然后再由目镜 II 在远处成一虚像 A_2B_2 (图中未画出), 观察者观察 A_2B_2 的视角即为图中的 β , $\beta \approx A_1B_1/f_2$. 若不用望远镜, 观察者直接观察距望远镜 S 远处的物体 AB 的视角, 近似为图中的 α

$$\alpha \approx AB/S = A_1B_1/f_1.$$

因此望远镜的放大率 m 为

$$m = \beta/\alpha = \frac{A_1B_1}{f_2} \times \frac{f_1}{A_1B_1} = \frac{f_1}{f_2}.$$

例题精讲

例 1 两块平面镜宽度均为 $l = 5 \text{ cm}$, 相交成角 $\alpha = 12^\circ$, 构成光通道. 两镜的右端相距为 $d = 2 \text{ cm}$, 左端靠在光接收器的圆柱形感光屏上, 试问入射光线与光通道的轴成的最大角 ϕ_{\max} 为多少, 才能射到光接收器上.

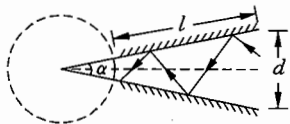


图 3-22

分析 光束在两平面镜之间不断反射, 一旦光束的方向与平面镜垂直即会沿原路返回, 若此时光束还会射到光接收器上将不满足题设条件. 所以, 以最大角度入射的光线应当与光接收器表面相切.

解 为了简化解题,我们讨论入射光线在两块平面镜之间未经多次反射就通过平面镜系统,如图 3-23 所示.由三角形 AOC 得到光接收器圆柱形表面的半径

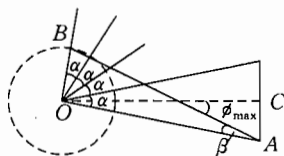


图 3-23

$$L + r = \frac{d}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

从三角形 ABO 中可以知道

$$\sin \beta = \frac{r}{L + r} = 1 - \frac{2L}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \approx 0.5,$$

即

$$\beta = 30^\circ,$$

于是

$$\phi_{\max} = \beta + \frac{\alpha}{2} = 36^\circ.$$

说明 本题中将折线化为直线的方法不仅在解平面镜成像问题中经常用到,而且在力学问题中也有涉及(如小球在两挡板之间来回的碰撞).

例 2 在半径 $R = 2 \text{ m}$ 、孔径 $d = 0.5 \text{ m}$ 的凹面镜的焦点位置上,放置一块圆形屏幕,使平行于轴的所有入射光线,经凹面镜反射后都将能到达该圆形屏幕,试求圆形屏幕直径.

分析 对凹面镜的所有近轴光线,经凹面镜反射后都将会聚于凹面镜的焦点上,显然,本题中的平行于主轴的光线不能看成近轴光线.

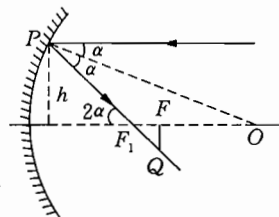


图 3-24

解 如图 3-24 所示, O 为凹面镜的曲率中心, F 为其焦点, h 表示凹面镜孔径之半. 过 P 点的平行于主轴的光线反射后交主轴于 F_1 点, 则

$$FF_1 = OF_1 - OF = \frac{R}{2 \cos \alpha} - \frac{R}{2},$$

在直角三角形 F_1FQ 中,应用小量近似,可得

$$\begin{aligned} x &= FF_1 \tan 2\alpha \approx FF_1 \sin 2\alpha = \left(\frac{R}{2\cos\alpha} - \frac{R}{2} \right) \sin 2\alpha \\ &= R \sin\alpha - \frac{R}{2} \sin 2\alpha = R \sin\alpha (1 - \cos\alpha) \\ &= R \sin\alpha \cdot \frac{\alpha^2}{2} \approx \frac{h^3}{2R^2}. \end{aligned}$$

将数值代入后可得 $x = 1.95 \text{ mm}$. 因此,圆形屏幕直径为 3.9 mm .

说明 有兴趣的读者还可进一步讨论如果在上述条件下圆形屏的直径减小到仅有原来的 $1/8$,问有多少部分的光可以到达在同一位置的屏幕上(答案为 $1/4$)?

例 3 有一半径为 $R = 0.128 \text{ m}$ 的玻璃半球,过球心 O 并与其平面部分相垂直的直线为其主轴,在主轴上沿主轴放置一细条形发光体 A_1A_2 ,其长度 $l = 0.020 \text{ m}$,若人眼沿主轴望去(图 3-25),可看到 A_1A_2 两个不很亮的像,(此外可能还有更暗的像,不必考虑).当 A_1A_2 在主轴上移动时,这两个像也在主轴上移动.现调整 A_1A_2 的位置,使它的两个像恰好头尾相接,此时 A_2 距球心 O 的距离 $a_2 = 0.020 \text{ m}$.试求半球玻璃的折射率 n (都只考虑近轴光线).

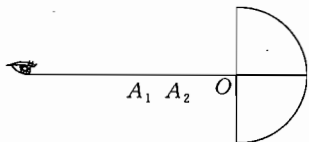


图 3-25

解 A_1A_2 的两个像,一个是光线在平面部分反射后形成的;另一个是光线进入半球后,经凹面镜反射,再穿出平面形成的.

很显然,平面部分形成的像是与 A_1A_2 对称的,现在我们来求第二个像.

如图 3-26 所示,从 A 点发出的光折射后进入半球射向凹镜,对凹镜来说,相当于光线从 B 点射来.因为只研究近轴光线,所以 i_1 和 r_1 都

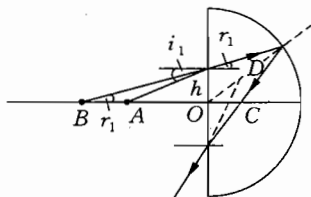


图 3-26

很小

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{\tan i_1}{\tan r_1} = \frac{h \cdot BO}{AO \cdot h}$$

$$BO = AO \cdot n. \quad (1)$$

用凹面镜公式 $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$ 求凹面镜成的像 C 的位置, 因为 $u = OB + R$, $v = R - OC$,

所以
$$\frac{1}{OB + R} + \frac{1}{R - OC} = \frac{2}{R},$$

解得
$$OC = \frac{OB \cdot R}{2OB + R} = \frac{n \cdot OA \cdot R}{2n \cdot OA + R}. \quad (2)$$

由上式可看出 C 点在半球内.

由 C 点发出的光线, 经折射穿出玻璃外时由外面观察其像点在 D 处, 用推导①式相同的方法可推得.

$$OD = \frac{OC}{n} = \frac{OA \cdot R}{2n \cdot OA + R}. \quad (3)$$

D 就是人眼看到 A 的像的位置. 由③式可知, OA 越大, OD 也越大, 且 $OD < OA$.

根据上述讨论, 可知 $A_1 A_2$ 的两个像头尾相接一定是如图 3-27 所示的情况, 图中 $A'_1 A'_2$ 是 $A_1 A_2$ 经平面所成的像, $D_1 D_2$ 是 $A_1 A_2$ 经凹镜所成的像. 因为 $OD_1 = OA'_2$, 所以

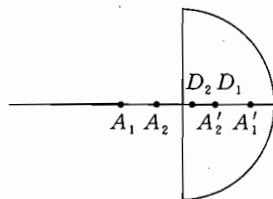


图 3-27

$$\frac{OA_1 \cdot R}{2n \cdot OA_1 + R} = OA_2,$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{(OA_1 - OA_2)R}{2 \cdot OA_1 \cdot OA_2} = \frac{l}{2 \cdot OA_1 \cdot OA_2} R \\ &= \frac{0.020}{2 \times 0.040 \times 0.020} \times 0.128 = 1.60. \end{aligned}$$

例 4 玻璃圆柱形容器的壁有一定的厚度,内装一种在紫外线照射下会发出绿色荧光的液体,即液体中的每一点都可以成为绿色光源.已知玻璃对绿光的折射率为 n_1 ,液体对绿光的折射率为 n_2 .当容器壁的内、外半径之比 $r:R$ 为多少时,在容器侧面能看到容器壁厚为零?

分析 所谓“从容器侧面能看到容器壁厚为零”,是指眼在容器截面位置看到绿光从 C 点处沿容器外壁的切线方向射出,即本题所描述为折射角为 90° 的临界折射.因为题中未给出 n_1 、 n_2 的大小关系,故需要分别讨论.

解 (1) 当 $n_1 < n_2$ 时

因为是要求 $r:R$ 的最小值,所以当 $n_1 < n_2$ 时,应考虑的是图 3-28 中 $ABCD$ 这样一种临界情况,其中 BC 光线与容器内壁相切, CD 光线和容器外壁相切,即两次都是临界折射.此时应该有

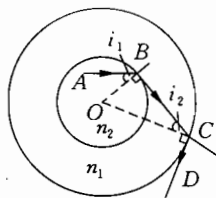


图 3-28

$$\frac{\sin i_2}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{n_1}.$$

设此时容器内壁半径为 r_0 ,在直角三角形 BCO 中, $\sin i_2 = r_0/R$. 当 $r < r_0$ 时, C 处不可能发生临界折射,即不可能看到壁厚为零;当 $r > r_0$ 时,荧光液体中很多点发出的光都能在 C 处发生临界折射,所以只要满足

$$r/R \geqslant 1/n_1,$$

即可看到壁厚为零.

(2) 当 $n_1 = n_2$ 时

此时荧光液体发出的光线将直线穿过容器内壁,只要在 CB 及其延长线上有发光体,即可看到壁厚为零,因此此时应满足的条件仍然是 $r/R \geqslant 1/n_1$.

(3) 当 $n_1 > n_2$ 时

因为 $n_1 > n_2$,所以荧光液体发出的光在容器内壁上不可能发生折射角为 90° 的临界折射,因此当 $r = r_0$ 时,所看到的壁厚不可能为

零了. 当 $r > r_0$ 时, 应考虑的是图 3-29 中 ABCD 这样一种临界情况, 其中 AB 光线的入射角为 90° , BC 光线的折射角为 r_1 , 此时应该有

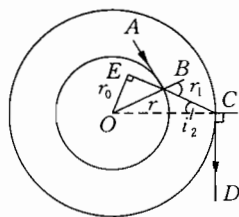


图 3-29

在直角三角形 OBE 中有

$$\sin r_1 = OE / OB.$$

因为图 3-28 和图 3-29 中的 i_2 角是相同的, 所以 $OE = r_0$, 即

$$\frac{\sin 90^\circ}{r_0/r} = \frac{n_1}{n_2},$$

将 $r_0 = \frac{R}{n_1}$ 代入, 可得当

$$r/R \geq 1/n_2.$$

时,可看到容器壁厚为零.

上面的讨论,图 3-28 和图 3-29 中 B 点和 C 点的位置都是任意的,故所得条件对眼的所有位置均能成立(本段说明不可少).

例 5 在直立的平面镜前放置一个半径为 R 的薄壁玻璃鱼缸, 缸中充满水, 鱼缸中心离镜面 $3R$. 远处一观察者沿着过球心与镜间的垂线注视鱼缸, 一条小鱼在离镜面最近处以速度 v 沿缸壁游动. 求观察者看到的鱼的两个像的相对速度 (水的折射率 $n = 4/3$).

分析 因为题中说明观察者是沿着过球心和镜面垂直的线观察,所以本题中讨论的都是近轴光线,可用小角近似.

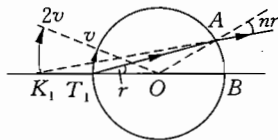


图 3-30

解 (1) 如图 3-30 所示, 从 T_1 点发出的光 T_1A 在水中的入射角为 r , 在空气中的折射角为 nr , 将出射光线反向延长与主轴交于 K_1 , 显然

$$\angle K_1AT_1 = nr - r = (n-1)r.$$

在三角形 K_1AT_1 中用正弦定理有

$$\frac{K_1T_1}{K_1A} = \frac{(n-1)r}{r} = n-1.$$

因为都是近轴光线, 所以有

$$K_1A \approx K_1O + R, K_1T \approx K_1O - R,$$

于是
$$\frac{K_1O - R}{K_1O + R} = n-1,$$

所以这个像 K_1 离球心的距离

$$K_1O = \frac{n}{2-n} \cdot R,$$

放大率
$$m_1 = \frac{K_1O}{T_1O} = \frac{n}{2-n} = 2.$$

(2) 如图 3-31 所示, 鱼 F 在平面镜中的像 T_2 和鱼运动的速度是相同的. 我们的任务是要找 T_2O 和 OK_2 的关系.

从 T_2 射出的光在 C 点的入射角为 ϵ , $\angle CT_2F = r$, $T_2O = kR$, 在三角形 T_2OC 中

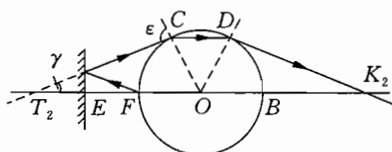


图 3-31

$$\frac{\epsilon}{r} = \frac{T_2O}{CO} = \frac{kR}{R} = k, \epsilon = kr.$$

水中的折射角为

$$\frac{\epsilon}{n} = \frac{kr}{n} = \angle DCO = \angle CDO,$$

因为
$$\angle COF = \epsilon - r = kr - r = r(k-1),$$

而且
$$\angle COD + \angle OCD + \angle ODC = 180^\circ,$$

$$\angle COD + \angle COF + \angle DOB = 180^\circ,$$

所以
$$\angle DOB + r(k-1) = 2 \frac{kr}{n},$$

即

$$\angle DOB = r \left(\frac{2k}{n} - k + 1 \right).$$

在三角形 DOK_2 中有

$$\frac{OK_2}{DK_2} = \frac{\epsilon}{r \left(\frac{2k}{n} - k + 1 \right)} = \frac{k}{\frac{2k}{n} - k + 1}.$$

此外

$$\frac{OK_2}{OK_2 - R} = \frac{k}{\frac{2k}{n} - k + 1},$$

因此像距为

$$OK_2 = \frac{kn}{n(2k-1) - 2k} \cdot R.$$

若 $k = 5$, $n = 4/3$, 可得

$$OK_2 = \frac{10}{3}R.$$

放大率为

$$\frac{OK_2}{OT_2} = \frac{n}{n(2k-1) - 2k}.$$

若把 $k = 5$, $n = 4/3$ 代入, 则放大率为 $2/3$.

由此可见, 如鱼以速度 v 向上运动, 则鱼的实像以速度 $\frac{2}{3}v$ 向下运动. 前面(1)中已知鱼的虚像以速度 $2v$ 向下运动, 因此两个像的相对速度为

$$2v + \frac{2}{3}v = \frac{8}{3}v.$$

例 6 有一块两面平行的透明板, 其厚度为 d , 折射率按下式变化

$$n_x = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{r}}.$$

一束光自 O 点由空气中垂直射入平行板内, 并且从 A 点以角 α 射出. 如图 3-32 所示. 已知: $n_0 = 1.2$, $r = 13 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$, 试求平板的厚度 $d = ?$

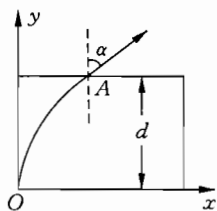


图 3-32

分析 本题的解题思路可以是: 先分析光线在板内的轨迹特征, 由此轨迹确定 A 点的空间位置及光线在该点的入射方向, 再由 A 点处光线的折射关系建立有关的方程来求解.

为此, 我们先来分析一下根据本题介质分布情况而建立的一个特殊模型. 设有折射率不同的几层均匀介质, 其层间的分界面互相平行, 又设有光线依次进入各层介质, 如图 3-33 所示, 其中各层介质的折射率分别为 n_1, n_2, n_3, \dots , 光线与各分界面法线的夹角分别为 i_1, i_2, i_3, \dots . 由折射定律有

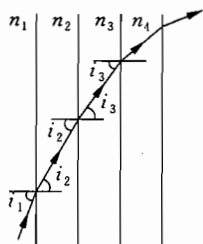


图 3-33

$$\frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{n_1}{n_2},$$

即
$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

同理有
$$n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3.$$

显然应有

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3 = \dots = \text{常数}.$$

解 根据以上分析所得之结论, 可将本题的介质分布看成是层数无限多、层厚趋于零的情况. 故仍有

$$n_x \sin i_x = \text{常数}.$$

由于 $x = 0$ 时

$$n_x = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{r}} = n_0.$$

又此时 $i_0 = 90^\circ$, $\sin i_0 = 1$, 故前式中的常数即为 n_0 , 则上式变为

$$n_x \sin i_x = n_0.$$

将 n_x 的表达式代入上式, 即得

$$\sin i_x = 1 - \frac{x}{r}.$$

由图 3-34 可见, 上式表示的是以点 $(r, 0)$ 为圆心, 以 r 为半径的圆的方程. 说明光线在此介质中是沿此圆弧传播的.

光线自题给的 A 点由平板中射入空气中时, 应满足的方程是 (注意此时介质分界面与 x 轴平行, 而前面讨论光在平板内传播时, 分层介质的分界面则与 x 轴垂直):

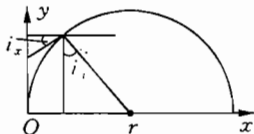


图 3-34

$$\sin \alpha = n_A \sin(90^\circ - i_A).$$

由于

$$n_A = \frac{n_0}{1 - \frac{x_A}{r}},$$

又注意到 A 点在前述的圆周上, 故有

$$\sin(90^\circ - i_A) = \cos i_A = \frac{\sqrt{r^2 - (r - x_A)^2}}{r}.$$

联立上述三式可解得

$$\sin \alpha = \frac{n_0}{r - x_A} \sqrt{2rx_A - x_A^2}.$$

将题中的已知数值代入上式可解得

$$x_A = 1 \text{ cm}.$$

故此平板的厚度为

$$d = y_A = \sqrt{r^2 - (r - x_A)^2} = 5 \text{ cm}.$$

例 7 一个人打算利用焦距 $f = 10 \text{ cm}$ 的凸透镜和平面镜来观

察自己的眼睛. 这时透镜到眼的距离为 $u = 15 \text{ cm}$. 为了使观察到的像位于明视距离 $d = 25 \text{ cm}$ 处, 问平面镜应放在透镜后的什么地方?

解 因光线第二次通过透镜后所成眼睛的像位于透镜后面 ($d = 25 \text{ cm} > u = 15 \text{ cm}$), 所以这必定是虚像. 根据题意 $d = u + f$, 这表示虚像在透镜的后焦点, 这是从平面镜反射光线会聚的点作为“物”经透镜成像形成的. 设它到透镜的距离为 u_1 , 根据透镜成像的

公式 $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$ 得

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{f}.$$

由此 $u_1 = f/2 = 5 \text{ cm}$.

在光线第一次通过透镜后, 如果没有平面镜, 所成的像到透镜的距离

$$v = \frac{uf}{u-f} = 30 \text{ cm}.$$

因为平面镜成的像与物体相对平面镜是对称的, 故所求的距离

$$l = u_1 + \frac{1}{2}(v - u_1) = 17.5 \text{ cm}.$$

说明 本题中眼睛经过凸透镜折射、平面镜反射、凸透镜折射三次成像过程.

例 8 有一光导纤维, 光芯为折射率 $n = 1.500$ 的透明度极好的介质, 其截面半径为 r ; 光芯外面包层的折射率 $n' = 1.400$. 有一半导体激光器 S , 位于光纤轴线的延长线上, 发出半角宽为 30° 的光束. 为便于使此光束全部进入光纤, 在光纤端面处烧结了一个其材料与光芯相同、半径为 R 的球冠 QAQ' , 端面附近的结构如图 3-35 所示 (包层未画出). S 可看作点光源, 光纤放在空气中, 空气的折射率 n_0 按 1.000 计算.

(1) 若要半导体激光器发出的光能够全部射到球冠上, 则光源 S 离 A 的距离 x 应满足什么条件?

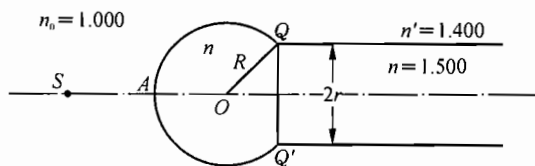


图 3-35

(2) 如果 $R = 1.8r$, 光源 S 与 A 点的距离为 R , 入射线与轴的夹角用 α 表示, 则 α 角分别为 $\alpha_1 = 30^\circ$ 、 $\alpha_2 = 25^\circ$ 和 $\alpha_3 = 20^\circ$ 的三根光线能否经过全反射在光纤中传播?

解 (1) 当发射光束刚好都能射到球面上时, 光束的边缘光线应与球面相切, 如图 3-36 所示, T 为切点, 由几何关系可知

$$\sin 30^\circ = \frac{R}{SO},$$

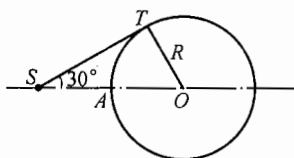


图 3-36

由此求得

$$\overline{SA} = R.$$

若光源与 A 的距离大于 R , 则有部分光线不能到达球面. 全部光束能射到球冠上的条件是光源与 A 点的距离

$$x \leq R \quad (1)$$

(2) $x=R$ 时与轴成 α 角的入射光线的光路图如图 3-37 所示, 图中 B 点位于轴上, 用虚线画出的 QBQ' 与 QAQ' 构成一个球面. θ 和 θ' 分别表示入射角和折射角. 设折射线与球面交于 P' 点, 用 β 表示 OP' 与轴之间的夹角, 用 α' 表示折射线与轴之间的夹角.

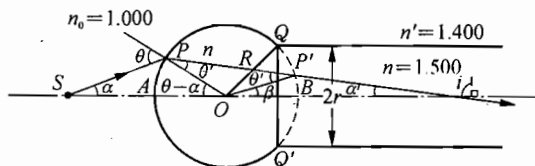


图 3-37

对 $\triangle OPS$,由正弦定理可得

$$\frac{2R}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin \alpha} \quad (2)$$

由折射定律得

$$\sin \theta = 1.5 \sin \theta' \quad (3)$$

由几何关系得

$$\beta = 2\theta' - \theta + \alpha \quad (4)$$

$$\alpha' = \theta - \alpha - \theta' \quad (5)$$

如果折射线的反向延长线与轴相交,光路图如图 3-38 所示.若对 α' 的正负号作出如下的规定:折射线向靠近轴的方向偏折时, α' 取正值;折射线向远离轴的方向偏折时(即折射线的反向延长线与轴的交点在 A 点的左侧), α' 取负值,则⑤式仍成立.

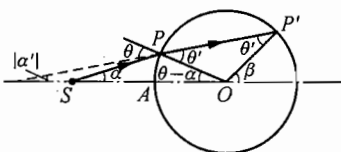


图 3-38

此外,由几何关系可知,折射线能进入光纤的条件是

$$|\beta| \leq \angle QOB \quad (6)$$

β 可能为负值,这表示 P' 在轴线以下.

而

$$\angle QOB = \arcsin \frac{r}{R},$$

代入数据,可知折射线能进入光纤的充要条件是

$$|\beta| \leq 33.75^\circ.$$

下面分别讨论三条光线的情况.

(i) $\alpha_1 = 30^\circ$ 时

a. 此入射光线的折射线能否进入光纤?

由②式得 $\sin \theta_1 = 2 \sin \alpha_1 = 1$, 得

$$\theta_1 = 90^\circ,$$

代入③式得

$$\theta'_1 = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) = 41.81^\circ,$$

代入④式得

$$\beta_1 = 2\theta'_1 - \theta_1 + \alpha_1 = 23.62^\circ. \quad (7)$$

因为

$$\beta_1 < \angle QOB, \quad (8)$$

故此折射线能进入光纤.

b. 此折射线能否在光芯包层的界面上发生全反射?

设光纤内光线射至光芯与包层界面时发生全反射的临界角为 i_c , 则

$$i_c = \arcsin\left(\frac{1.400}{1.500}\right) = 68.96^\circ \quad (9)$$

因为 $i = 90^\circ - \alpha'$, 所以当 α' 满足下面条件时折射线即能被全反射:

$$\alpha' \leq 90^\circ - 68.96^\circ = 21.04^\circ \quad (10)$$

现在 $\alpha'_1 = \theta_1 - \alpha_1 - \theta'_1 = 18.19^\circ$, 满足⑩式的要求. 故该光线能经过全反射在光纤中传播.

(ii) $\alpha_2 = 25^\circ$ 时

由②式得 $\sin \theta_2 = 2 \sin \alpha_2 = 2 \sin 25^\circ$, $\theta_2 = 57.70^\circ$,

$$\sin \theta'_2 = \frac{1}{1.5} \sin \theta_2, \theta'_2 = 34.30^\circ,$$

$$\beta_2 = 2\theta'_2 - \theta_2 + \alpha_2 = 35.90^\circ, \quad (11)$$

由⑥式可知, 该折射线不能进入 QQ' 右面的光纤.

(iii) $\alpha_3 = 20^\circ$ 时

由②式得 $\sin \theta_3 = 2 \sin \alpha_3 = 2 \sin 20^\circ$, $\theta_3 = 43.16^\circ$,

$$\sin \theta'_3 = \frac{1}{1.5} \sin \theta_3, \theta'_3 = 27.13^\circ,$$

$$\beta_3 = 2\theta'_3 - \theta_3 + \alpha_3 = 31.10^\circ, \quad (12)$$

由⑥式可知,此折射线能进入 QQ' 右面的光纤.

此时

$$\alpha'_3 = \theta_3 - \alpha_3 + \theta'_3 = -3.97^\circ \quad (13)$$

负号表示折射线的延长线与轴相交于 A 点的左方,它射至光纤的上半部的界面下,如图 3-39 所示, $|\alpha'_3| < 21.04^\circ$, 所以此光线可以经过全反射在光纤中传播.

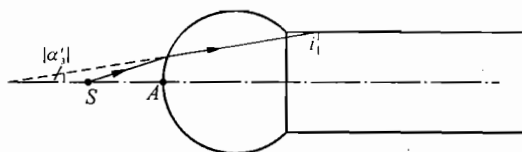


图 3-39

例 9 有一种高脚酒杯,如图 3-40 所示.杯内底面为一凸起的球面,球心在顶点 O 下方玻璃中的 C 点,球面的半径 $R = 1.50 \text{ cm}$, O 到杯口平面的距离为 8.0 cm .在杯脚底中心处 P 点紧贴一张画片, P 点距 O 点为 6.3 cm .这种酒杯未斟酒时,若在杯口处向杯底方向观看,看不出画片上的景物,但如果斟了酒,再在杯口处向杯底方向观看,将看到画片上的景物.已知玻璃的折射率 $n_1 = 1.56$, 酒的折射率 $n_2 = 1.34$. 试通过分析计算与论证解释这一现象.

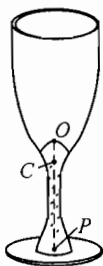


图 3-40

解 把酒杯放平,分析成像问题.

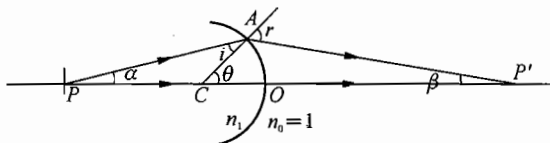


图 3-41

(1) 未斟酒时,杯底凸球面的两侧介质的折射率分别为 n_1 和 $n_0 = 1$. 在图 3-41 中, P 为画片中心,由 P 发出经过球心 C 的光线 PO 经过顶点不变方向进入空气中;由 P 发出的与 PO 成 α 角的另

一光线 PA 在 A 处折射. 设 A 处入射角为 i , 折射角为 r , 半径 CA 与 PO 的夹角为 θ , 由折射定律和几何关系可得

$$n_1 \sin i = n_0 \sin r \quad (1)$$

$$\theta = i + \alpha \quad (2)$$

在 $\triangle PAC$ 中, 由正弦定理, 有

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{\overline{PC}}{\sin i} \quad (3)$$

考虑近轴光线成像, α 、 i 、 r 都是小角度, 则有

$$r = \frac{n_1}{n_0} i \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{R}{\overline{PC}} i \quad (5)$$

由②、④、⑤式, n_0 、 n_1 、 R 的数值及 $\overline{PC} = \overline{PO} - \overline{CO} = 4.8 \text{ cm}$, 可得

$$\theta = 1.31i \quad (6)$$

$$r = 1.56i \quad (7)$$

由⑥、⑦式有

$$r > \theta \quad (8)$$

由上式及图 3-41 可知, 折射线将与 PO 延长线相交于 P' , P' 即为 P 点的实像. 画面将成实像于 P' 处.

在 $\triangle CAP'$ 中, 由正弦定理有

$$\frac{R}{\sin \beta} = \frac{\overline{CP'}}{\sin r} \quad (9)$$

$$\text{又有} \quad r = \theta + \beta \quad (10)$$

考虑到是近轴光线, 由⑨、⑩式可得

$$\overline{CP'} = \frac{r}{r - \theta} R \quad (11)$$

又有

$$\overline{OP'} = \overline{CP'} - R \quad (12)$$

由以上各式并代入数据, 可得

$$\overline{OP'} = 7.9 \text{ cm} \quad (13)$$

由此可见, 未斟酒时, 画片上景物所成实像在杯口距 O 点 7.9 cm 处. 已知 O 到杯口平面的距离为 8.0 cm , 当人眼在杯口处向杯底方向观看时, 该实像离人眼太近, 所以看不出画片上的景物.

(2) 斟酒后, 杯底凸球面两侧介质分别为玻璃和酒, 折射率分别为 n_1 和 n_2 , 如图 3-42 所示. 考虑到近轴光线有

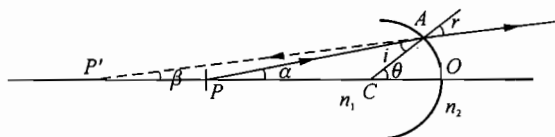


图 3-42

$$r = \frac{n_1}{n_2} i \quad (14)$$

代入 n_1 和 n_2 的值, 可得

$$r = 1.16i \quad (15)$$

与⑥式比较, 可知

$$r < \theta \quad (16)$$

由上式及图 3-42 可知, 折射线将与 OP 延长线相交于 P' , P' 即为 P 点的虚像. 画面将成虚像于 P' 处. 计算可得

$$\overline{CP'} = \frac{r}{\theta - r} R \quad (17)$$

又有

$$\overline{OP'} = \overline{CP'} + R \quad (18)$$

由以上各式并代入数据得

$$\overline{OP'} = 13 \text{ cm}$$

⑬

由此可见,斟酒后画片上景物成虚像于 P' 处,距 O 点 13 cm,即距杯口 21 cm. 虽然该虚像还要因酒液平表面的折射而向杯口处拉近一定距离,但仍然离杯口处足够远,所以人眼在杯口处向杯底方向观看时,可以看到画片上景物的虚像.

例 10 在如图 3-43 所示的光学系统中,会聚透镜 L_1 和 L_2 共轴,其焦距分别为 f_1 和 f_2 ,直径分别为 D 和 $D/2$,彼此相距 $2(f_1 + f_2)$. 物 AA' 与主轴垂直,长度为 D ,其中心 O_A 位于主轴上,离 L_1 的距离为 $2f_1$,屏 P 垂直于主轴,置于 L_2 右侧, O_P 是 O_A 经 L_1 和 L_2 所成的像点,这时在屏上只出现物 AA' 中央部分的像.

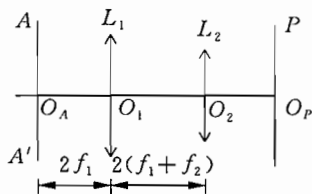


图 3-43

(1) 画出此情况的光路图,用它来解释此现象.

(2) 如果不改变 AA' 、 L_1 、 L_2 和屏 P 的位置,能否在此光学系统中加一个会聚透镜 L ,使得 AA' 全物都在 P 上成像? 如不能,请说明理由;如能,请说明 L 应放在何处,直径至少多大? 焦距 f 应如何选定?

解 (1) 根据透镜成像公式可知 AA' 经 L_1 所成的像 BB' 在 L_1 右方 $2f_1$ 处,正好在 L_2 左方 $2f_2$ 处,所以能成像在 L_2 右方 $2f_2$ 处的屏上. 但从图 3-44 可看出,从 A 点射出的 a 、 b 、 c 等光线都是无法再通过 L_2 成像的,所以在屏上所成的 AA' 的像肯定是不完整的,只有 A'' 以内的点才能在屏上成像.

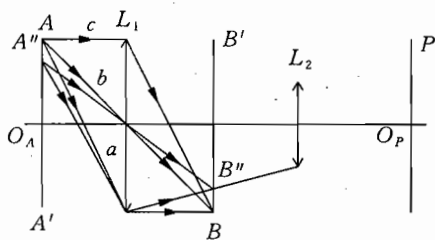


图 3-44

(2) 在不改变 AA' 、 L_1 、 L_2 和 P 的位置的条件下,要使 AA' 在屏上成完整的像,可在 L_1 、 L_2 之间加一个凸透镜 L . 由于只有使

BB' 经 L 折射后成的像成在原地(即与 BB' 重合), 才能使它经过 L_2 所成的像依然在屏上, 所以 L 必须放在 BB' 处。

为了使由 BB' 向屏传播的光线能全部通过 L , L 的直径至少为 D 。

为了使 AA' 能在屏上成像, L 的焦距 f 有一个范围。仍然以 A 点发出的光为例来说明(图 3-45): 如果 L 的焦距过大, 则 a 经过 L 折射后的光 a' 就不能到达 L_2 (b 、 c 就更不可能到达 L_2 了)。

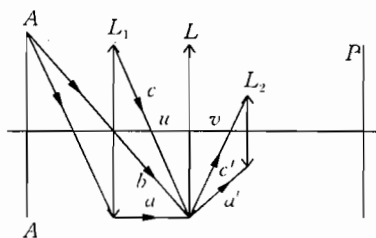


图 3-45

根据光线 a 和 a' , 可确定 L 焦距

的最大值 $f_{\max} = 4f_2$ 。如果 L 的焦距过小, 则 c 经过 L 折射后的光 c' 也已超过 L_2 顶端 (a 、 b 就更要越过了)。利用 c 和 c' 把 U 和 V 作为 L 的一对物像点, 可求出 L 焦距的最小值 f_{\min} 。

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot 2f_2} = \frac{1}{f_{\min}},$$

$$f_{\min} = \frac{4f_1f_2}{3f_1 + 4f_2}.$$

所以 f 应选定在一个范围内

$$\frac{4f_1f_2}{3f_1 + 4f_2} < f < 4f_2.$$

通过以上分析可看出, 焦距 f 的最佳选择应是使 A 点发出的光尽可能多地通过 L_2 , 并尽量利用 L_2 的中央部分成像。这就应使成像光束的中心光线, 即图 3-38 中的 b 光线, 经 L 折射后恰通过 L_2 的中心(图 3-46)。这种情况下 L_1 和 L_2 的光心 O_1

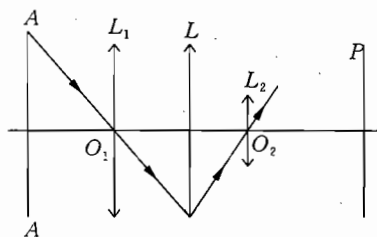


图 3-46

和 O_2 恰好是 L 的物、像点, 即有

$$\frac{1}{2f_1} + \frac{1}{2f_2} = \frac{1}{f},$$

$$f = \frac{2f_1 f_2}{f_1 + f_2}.$$

这就是应选定的 f 的最佳值.

例 11 有一薄平凸透镜, 凸面曲率半径 $R = 30 \text{ cm}$. 已知在利用近轴光线成像时: (1) 若将此透镜的平面镀银, 其作用等同于一个焦距是 30 cm 的凹面镜; (2) 若将此透镜的凸面镀银, 其作用也等同于一个凹面镜. 求在 (2) 情况下的等效凹面镜的焦距.

解 (1) 由于将透镜的平面镀银, 其作用等效于一个焦距是 30 cm 的凹面镜, 所以此等效凹面镜的曲率半径是 60 cm . 根据凹面镜的性质, 当物点置于曲率中心 C_1 处时, 经凹面镜反射应原路返回, 物像重合 (图 3-47). 因为从 C_1 点射出的光要原路返回, 所以此光经凸面折射后必须垂直于平面. 因为 i 和 r 都是小角, 所以有

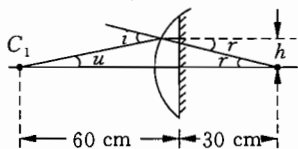


图 3-47

$$i = nr, \quad i = u + r, \quad \text{故 } u + r = nr, \quad \text{即 } n = 1 + u/r,$$

依题意有 $u = h/60, \quad r = h/30.$

所以 $n = 1.5.$

(2) 若凸面镀银, 只需找到等效凹面镜的曲率中心 C_2 , 即可求出焦距 f .

过凸面任一点 A 作一垂直于球面指向球心 C 的光线, 此光线经平面折射后交主光轴于 C_2 (图 3-48), 因为是薄透镜的近轴光线, i 和 r 都很小, 所以有

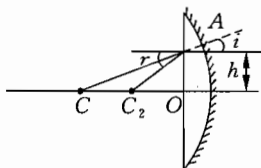


图 3-48

$$ni = r.$$

其中

$$i = \frac{h}{R}, r = h/C_2O,$$

$$n/R = 1/C_2O,$$

可得

$$C_2O = R/n.$$

根据光路可逆,由 C_2 发出的光经平面折射,凹面反射后一定能返回 C_2 点,所以 C_2 是此等效凹面镜的曲率中心.

$$f = C_2O/2 = R/2n.$$

前面已求出 $n = 1.5$, 可得

$$f = 30/(2 \times 1.5)\text{cm} = 10\text{cm}.$$

例 12 如图 3-49 所示,一细光束由空气中射到一透明平行平板的上表面,经折射后由平板下表面射出. 此细光束由两种不同频率的单体光①和②构成. 用 i 表示入射角,用 n_1 和 n_2 分别表示平板对①和②的折射率,且已知 $n_1 > n_2$.

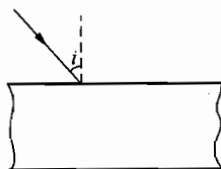


图 3-49

(1) 试分析讨论哪种单体光在穿过平板的过程中所用的时间较短.

(2) 若 $n_1 = 1.55$, $n_2 = 1.52$ 可做出什么判断?若 $n_1 = 1.40$, $n_2 = 1.38$,又可做出什么判断?

解 (1) 令 d 表示平板的厚度, v_1 和 v_2 分别表示单体光①和②在平板中的速度, r_1 和 r_2 分别表示它们的折射角, t_1 和 t_2 分别表示它们穿过平板所用的时间,则有

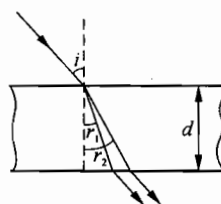


图 3-50

$$t_1 = \frac{d}{v_1 \cos r_1} \quad t_2 = \frac{d}{v_2 \cos r_2} \quad \text{①}$$

用 c 表示光在真空中的速度(近似等于光在空气中的速度),有

$$n_1 = \frac{c}{v_1}, \quad n_2 = \frac{c}{v_2} \quad ②$$

由折射定律有

$$\sin i = n_1 \sin r_1, \quad \sin i = n_2 \sin r_2 \quad ③$$

由①、②、③式得

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_2}\right)^2}}{n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_1}\right)^2}} \quad ④$$

当 $n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_2}\right)^2} < n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_1}\right)^2}$ 时, $t_1 < t_2$;

$n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_2}\right)^2} > n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_1}\right)^2}$ 时, $t_1 > t_2$;

$n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_2}\right)^2} = n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n_1}\right)^2}$ 时, $t_1 = t_2$.

化简后,当

$$\sin i > \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad ⑤$$

时, $t_1 < t_2$, 单色光①所用的时间较短;当

$$\sin i < \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad ⑥$$

时, $t_1 > t_2$, 单色光②所用的时间较短;当

$$\sin i = \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad ⑦$$

时, $t_1 = t_2$, 两种单色光所用的时间相等.

(2) 当 $n_1 = 1.55$, $n_2 = 1.52$ 时可得

$$\frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \approx 1.085 > 1$$

因 $\sin i$ 最大为 1, 由⑤式、⑥式可知, 不管入射角是多大, 一定是单色光②所用的时间较短.

当 $n_1 = 1.40$, $n_2 = 1.38$ 时可得

$$\frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \approx 0.983 < 1$$

由⑤、⑥式可知, 当入射角 i 较大时, 单色光①所用的时间较短; 当入射角 i 较小时, 单色光②所用的时间较短. 因为 $\frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} < 1$,

故存在某一入射角 i' 可使 $\sin i' = \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$, 当入射光以此入射角入射时, 由⑦式可知单色光①、②在平板中经历的时间相同.

例 13 一照相机的焦距 f_0 为 7.5 cm, 能调节到的最大像距为 $v_{\max} = 8$ cm, 今在相机镜头上安上一个焦距 f_1 为 60 cm 的薄凸透镜 (它和原相机镜头的间距可视为零), 求 (1) 安上薄凸透镜后的最近拍摄距离. (2) 原相机上无穷远的那一档刻度现代表多远的拍摄距离.

分析 因两薄透镜紧贴, 由组合成像规律可知 $u_2 = -v_1$, 这样很容易得两紧贴薄透镜的等效焦距为 $f = f_1 f_2 / (f_1 + f_2)$.

解 (1) 安上薄凸透镜后拍摄最近距离时暗箱的长度仍为 v_{\max} , 这样

$$\frac{1}{u_{\min}} + \frac{1}{v_{\max}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_0},$$

代入数据后得 $u_{\min} = 40$ cm.

(2) 拍摄无穷远处时可以认为暗箱长度调到最小, 在未加薄凸透镜时有

$$v_{\min} = f_0 = 7.5 \text{ cm},$$

加装薄凸透镜后有

$$\frac{1}{u_{\max}} + \frac{1}{v_{\min}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_0},$$

即

$$u_{\max} = f_1 = 60 \text{ cm}.$$

例 14 望远镜的物镜直径 $D = 250 \text{ cm}$, 其焦距 $f = 160 \text{ m}$. 要用此望远镜对相距 $L = 320 \text{ km}$, 直径 $d = 2 \text{ m}$ 的人造地球卫星拍摄照片, 试问: (1) 照像底片应该放在距焦点多远的位置上? (2) 人造卫星的像的大小是多少? (3) 在冲洗好的照片中卫星的直径是多大?

分析 因卫星离观察者的距离远大于透镜焦距, 故可认为像底片在焦点外侧很近处, 根据这个关键可进行适当近似.

解 (1) 设照像底片应放在焦点外侧相距 Δx 远处, 由透镜成像公式的变形得

$$v = fu / (u - f).$$

将像距 $v = f + \Delta x$, 物距 $u = L$ 代入上式得

$$\Delta x = \frac{fL}{L-f} - f = \frac{f^2}{L-f} \approx \frac{f^2}{L} \quad (L \gg f),$$

代入数据后得 $\Delta x = 8 \text{ cm}$.

(2) 设人造卫星像的直径为 d , 人造卫星的直径为 D , m 为放大率, 则有

$$d = mD = \frac{v}{u}D = \frac{f+\Delta x}{L}d \approx \frac{f}{L}d \quad (f \gg \Delta x),$$

代入数据后得 $d = 1 \text{ mm}$.

(3) 由于人造卫星很远, 由卫星发出的光线进入望远镜时都可视为平行光线, 如图 3-51 所示, 由光路图可得

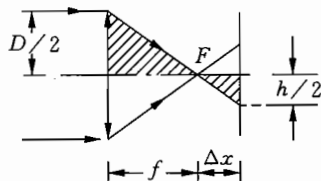


图 3-51

$$\frac{h/2}{D/2} = \frac{\Delta x}{f},$$

代入数据后得冲洗后的像片中卫星的直径是 $h = 1.25 \text{ mm}$.

练 习 题

A 组

1. S 为光屏上一点光源, M 为一平面镜, 光屏与平面镜平行放置, SO 是一条垂直照射在 M 上 O 点的光线, 已知 $SO = a$, 若 M 绕 O 以角速度 ω 逆时针旋转, 当转过 30° 时, 光斑 S' 在屏上移动的瞬时速度等于多少?

2. 一盏灯发出一束光, 会聚在距灯 1 m 远处, 形成一个光斑. 现在灯和光斑之间距灯 70 cm 处放两个互相垂直的正方形平面镜, 使两镜面的交线与这束光的轴线垂直相交, 并且其中一个镜面与光束轴线的夹角是 30° , 求放入这两个平面镜后光束在距灯多远处会聚?

3. 一凸镜和一平面镜相距 28 cm , 相对而立, 在它们的中点放一点光源 S , 利用遮光板使光线先由凸镜反射, 再经平面镜反射, 所成的像在平面镜后 38 cm 处, 求凸镜的曲率半径.

4. 一块厚度为 d , 折射率为 n 的透明玻璃板的前表面透光、后表面镀银而成为一平面镜. 今有一点光源 S 位于离此玻璃板前表面 l 处, 如图 3-52 所示, 已知 S 通过此平面镜反射所成的像为 S' , 求 S 与 S' 之间的距离为多少?

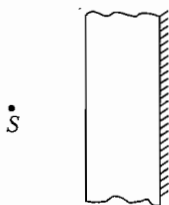


图 3-52

5. 从地面上观测太阳, 太阳的直径两端对人眼所张的角(即为视角)约为 $9.2 \times 10^{-3}\text{ rad}$, 在正午太阳当顶时, 人从水面下观察太阳, 其视角变为多少? 已知水的折射率为 $\frac{4}{3}$.

6. 两平面镜 M_1 和 M_2 夹一很小的角 θ , 当一根光线从 M_1 的 A 点以垂直于 AB 的方向射到 M_2 上, 如图 3-53 所示, 如果这根光线经过 100 次来回反射后仍然跑不出两镜面, 则 θ 角不能超过多少(其中 $AB = 1\text{ m}$, $AC = 5\text{ cm}$)?

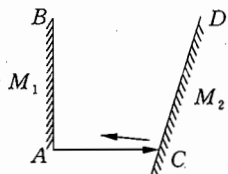


图 3-53

7. 光屏与遮光板互相平行,两者相距为 b ,遮光板上有一个半径为 r 的圆孔.今在此孔中嵌入透镜,设透镜与孔等大,且其主光轴与光屏垂直,再在此透镜的主光轴上与光心相距为 a 处置一点光源 S ,因而在光屏上形成一个半径为 R 的圆形光斑.已知 $a = 30 \text{ cm}$, $r = 1 \text{ cm}$, $R = 5 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$.试求此透镜的焦距.

8. 有一凸透镜,其焦距为 20 cm ,一点光源以 40 cm/s 的速度沿主光轴匀速靠近透镜,求点光源与透镜相距 60 cm 时,像点移动的速度.

9. 真空中有一个半径为 R 的均匀透明球,今有两束相距为 $2d$ ($d \leq R$) 对称地(即两光束与球的一条直径平行并且分别与其等距离)射到球上,试就球的折射率 n 的取值范围进行讨论:

(1) n 取何值时两束光一定在球内相交?

(2) n 取何值时两束光一定在球外相交?

(3) 如果 n 、 d 、 R 均已给定,如何判断此时两束光的交点是在球内还是在球外.

10. 图 3-54 中, MN 为一竖直墙,一平面镜 OB 绕过 O 点的垂直于图面的水平轴转动,转动角速度为 ω ,在墙上的 A 点有一水平光束射出而投射到平面镜上被反射后又射到墙上形成光点 D .试求此时反射光点 D 在墙上移动的速度.已知此时平面镜与墙之间的夹角为 θ , $AO = d$.

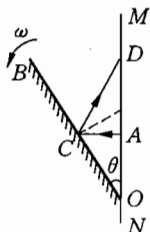


图 3-54

11. 图 3-55 所示为一凹球面镜,球心为 C ,内盛透明液体.已知 C 至液面的高度 CE 为 40.0 cm ,主轴 CO 上有一物 A ,物离液面高度 AE 恰好为 30.0 cm 时,物 A 的实像和物处于同一高度.实验时光圈直径很小,可以保证近轴光线成像.试求该透明液体的折射率 $n = ?$

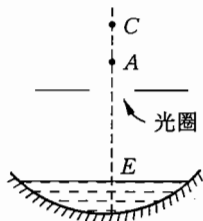


图 3-55

12. 有一透明立方体,放在空气中,其折射率为 1.50 ,平行光线从立方体的顶面斜射进来,然后投射到它的一个侧面上,不考虑经这一侧面反射后的光线.求

(1) 这一光线能否从这一侧面射出?

(2) 如果这光线能从这一侧面射出,那么,这一透明材料的折射率应满足何条件?

13. 如图 3-56,一束白光沿 x 方向通过屏 P 上的小孔 C 后,射向玻璃立方体 A ,设 A 的折射率在 y 方向上随着 y 值的增加而线性增大;但在与 y 轴垂直的平面内是均匀的.从 A 射出的光线经过折射率均匀的玻璃三棱镜 B 后,照到与 x 轴垂直的观察屏(毛玻璃) E 上.试在图 3-57 中定性地画出所看到的 E 上的图像.

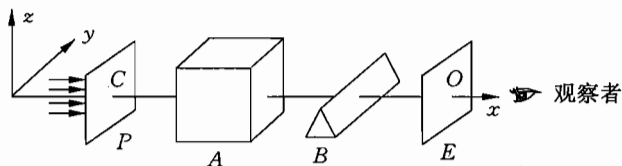


图 3-56

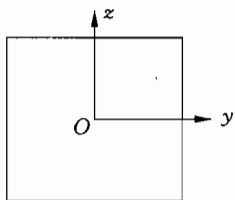


图 3-57

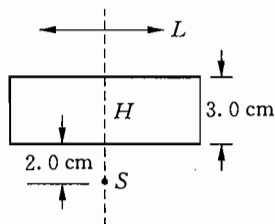


图 3-58

14. 有一水平放置的平行平面玻璃板 H ,厚 3.0 cm ,折射率 $n = 1.5$.在其下表面下 2.0 cm 处有一小物 S ;在玻璃板上方有一薄透镜 L ,其焦距 $f = 30\text{ cm}$,透镜的主轴与玻璃板面垂直; S 位于透镜的主轴上,如图 3-58 所示.若透镜上方的观察者顺着主轴方向观察到 S 的像就在 S 处,问透镜与玻璃板上表面的距离为多少?

15. 在焦距为 1.5 cm 的凸透镜 O 右边 40 cm 处放一平面镜,平面镜垂直于主轴.有一点光源 S 放在 O 的左面主轴上离 O 为 10 cm 处,求最后成像的位置.

16. 有两个焦距分别为 f_a 和 f_b 的凸透镜. 如果把这两个透镜作适当的配置, 则可使一垂直于光轴的小物体在原位置成一等大、倒立的像, 如图 3-59 所示. 试求出满足上述要求的配置方案中各透镜的位置.

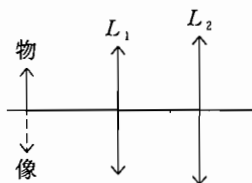


图 3-59

17. 在焦距为 f 的凸透镜 L 的主光轴上放置一个发光圆锥面(如图 3-60), 圆锥的中心轴线与主光轴重合, 锥的顶点位于焦点 F , 锥高等于 $2f$, 锥的母线与其中心轴线的夹角等于 α . 求圆锥面的像.

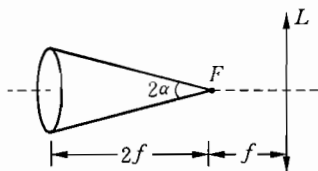


图 3-60

18. 如图 3-61, 一个半径为 R 的透明材料制成的球, AB 为其一条直径, AB 两点附近的球面透光, 球表面的其他大部分地方均涂黑而不透光. 今在球内 B 处有一个小发光泡, 而在球的左侧外部 AB 直线上进行观测. 求

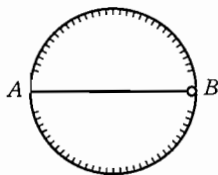


图 3-61

(1) 试讨论像的位置与球的折射率的关系;

(2) 若球的折射率为 n , 像在球的右侧, 则小泡的像距 B 点多远?

(3) 在(2)中, 像的横向放大率为多少?

19. 上题中, 若在球的左侧贴近 A 处置一平面镜, 其镜面与 AB 垂直, 与球面相切, 试求 n 为何值时, 可使上题(2)中所成的虚像, 再经过此系统的作用, 最后在球的右侧形成一个实像.

B 组

20. 有一根玻璃管, 它的内、外半径分别为 r 和 R , 充满发光液, 在 X 射线的影响下, 发光液会发出绿光. 对于绿光, 玻璃和液体的折射率分别为 n_1 和 n_2 .

如果有人从外表面观察, 玻璃管的厚度似乎为零, 请问比值 $\frac{r}{R}$ 必

须满足何条件?

21. 深为 75 毫米的圆柱形容器内, 盛满折射率为 $n = 5/3$ 的液体, 在液面上放一焦距为 15 毫米的平凸透镜, 容器的底面放一平面反射镜, 如图 3-62 所示. 在透镜主光轴上方 30 毫米的地方, 有一发光物点 P . 试求此发光物点通过该系统所成像的位置?

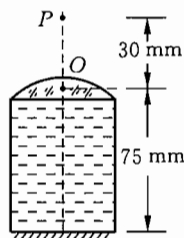


图 3-62

22. 阿贝折射计的原理如图 3-63 所示, 将待测液体介质(折射率 n_x)覆于对钠黄光($\lambda_D = 5893$ 埃)的折射率 $n_D = 1.5252$ ($n_D > n_x$) 的棱镜上. 今用扩展钠灯光源照射覆有待测介质的棱面 A , 在棱镜的另一棱面 B 的出射方向上用望远镜进行观测, 由于 $n_D > n_x$, 所以在棱镜中没有折射角大于 i_c 的光线. 所以观察者就能发现在与 B 棱面法线成 $29^\circ 21'$ 的方向上出现了亮暗分明的分界线. 若棱镜顶角 $\alpha = 80^\circ$, 求待测液体的折射率 n_x .

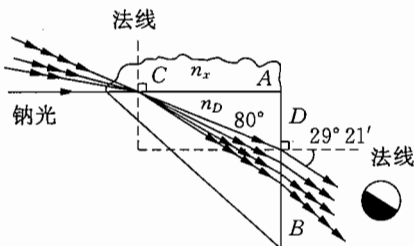


图 3-63

23. 一个焦距为 f 的会聚透镜, 在其左侧的主光轴上离透镜 $2f$ 处有一小光源, 在右侧屏上观察到此光源的清晰的像. 现在光源和透镜的位置保持不变而在光路中插入一个厚度为 d ($d < f$) 的平板玻璃(平板与光轴垂直), 若还要在屏上得到光源清晰的像, 则屏应怎样移动(分别就玻璃放在光源和透镜之间以及玻璃放在透镜和屏之间两种情况讨论)?

24. 图 3-64 是一种反射式望远镜的示意图. 已知凹镜焦距 $f_1 = 100$ cm, 平面镜与凹镜主轴成 45° 角, 凹镜主轴与平面镜交于 O_2 , $O_1O_2 = 0.95$ m, 目镜(凸透镜)光心到凹镜主轴的距离 $d = 0.15$ m, 两镜

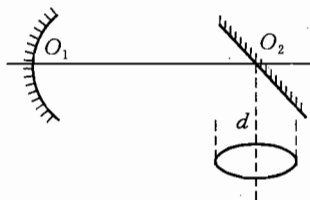


图 3-64

主轴相互垂直. 目镜焦距 $f_2 = 10.2 \text{ cm}$.

求: (1) 通过目镜看到的物体像的位置;

(2) 此望远镜的放大率 m .

25. 如图 3-65 所示,

外形一样, 折射率均为 n 的两个薄平凸透镜, 一个透镜的平面镀银, 另一个的凸面镀银. 如果光线从未镀银的一面入射, 它们的焦距之比为多少?

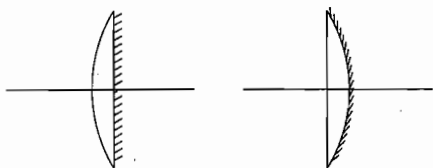


图 3-65

26. 在半径 $R = 2 \text{ 米}$ 、孔径 $d = 0.5 \text{ 米}$ 的凹镜焦点(接近轴光线确定的)位置上, 放一块圆形的屏幕, 使平行于主轴的所有入射光线经凹镜反射后都能到达该屏幕. 试求该圆形屏幕的直径至少多大? 如果将入射光束的半径缩小到只剩下原来的一半, 则屏幕上亮斑直径将缩小到多少? 由此可得到什么结论?

27. 如图 3-66 所示, 容器中装有深度为 $2h$ 的某种液体, 其折射率为 n . 中心有圆孔的不透明板恰好位于液体深度的一半, 圆孔内镶嵌一个空心薄壁凸透镜, 其半径恰好等于孔的半径 r , 该透镜在液体中的焦距长为 f . 一个点光源 S 位于透镜的主轴上且距液面高度为 H , 求在点光源照射下, 容器底部亮圆的半径大小.

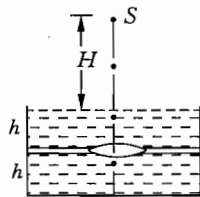


图 3-66

28. 如图 3-67, 两凸透镜 L_1 和 L_2 及一发光圆盘 A 共轴(透镜主光轴为 OO')放置, A 、 L_1 、 L_2 的半径分别为 1 cm 、 4 cm 和 2 cm . 固定 A 与 L_1 而使 L_2 左右移动, 发现仅有一个位置能使 L_2 接收到经 L_1 射过来的全部光线, 即将 L_2 固定于此位置, 然后在

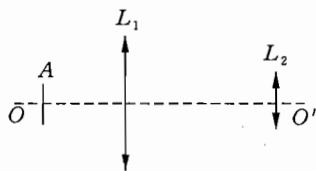


图 3-67

L_2 的右侧垂直于主光轴再置一光屏, 以 x 表示光屏与 L_2 的距离, 使 x 由零逐渐增大时, 发现: 当 x 小于某值时, 光屏上可见到一个大小

不变的光斑;当 x 大于此值时,圆形光斑的半径 r 随 x 线性增加,其变化率 $\frac{\Delta r}{\Delta x} = \frac{4}{3}$. 求透镜 L_1 和 L_2 的焦距 f_1 和 f_2 各为多少?

29. 一薄透镜一侧有一球面物,球心在透镜的主轴上,透镜两边的介质均为空气,透镜焦距为 f . 试给出一种方案,能使此球面物通过此透镜成像仍为一球面. 假设球面各部分发出的光线均不被球面的其他部分挡住.

30. 如图 3-68 所示,一个半径为 R_1 的不透明黑球外面包着一半径为 R_2 的同心透明介质球层, $R_1/R_2 = 2/3$, 介质层的材料折射率 $n = 1.35$. 介质层外表面的右半部分(图中 ACB 球面)为磨砂面. 现用水平平行光从左向右照射介质层(已知在题给条件下,在图面内能到达 ACB 面上的各光线,随着入射角的增大其折射线与 ACB 面的交点是朝一个方向变动的).

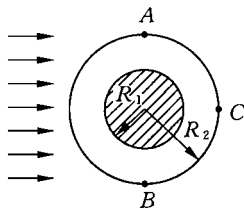


图 3-68

(1) 试求 ACB 球面上被照到的范围是什么图形(准确地用反三角函数表示)?

(2) 如其他条件不变,而介质层的折射率依次从 $n = 1.35$ 增大到 $n \geq 1.5$, 试定性地说出 ACB 球面上被照到的范围是如何变化的.

31. 一光学系统的结构如图 3-69 所示,薄透镜 L_1 为会聚透镜,焦距为 f_1 ;薄透镜 L_2 为发散透镜,焦距为 $-f_2$. 成像面 P 处放有照相底片, L_1 和 P 的位置固定不动,现给定 $f_1 = 3.00 \text{ cm}$, P 与 L_1 之间距离 $l = 4.50 \text{ cm}$. L_1 与 L_2 之间的距离 d 是可调的. 要求通过调节 d 使无穷远处的物或近处的物都能在底片上成实像,问:

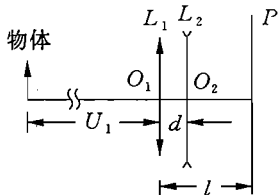


图 3-69

(1) 如果 $f_2 = 3.00 \text{ cm}$, 物体从无穷远处移到 $u = 100.0 \text{ cm}$ 处, 则 L_2 移动的距离应为多少?

(2) 是否只要 f_2 和 d 取值适当, 不管物体在什么地方都能在 P 上成实像? 如不能, 则对物距有何限制?

(3) 如果要求采用一个焦距确定的 L_2 , 通过调节 d 的数值使物距满足上面第 2 问要求的物体都能在 P 上成实像, 则 L_2 的焦距 f_2 应满足什么条件及相应的 d 的调节范围.

32. 长度为 4 mm 的物体 AB 由图 3-70 所示的光学系统成像. 光学系统由一个直角棱镜、一个会聚透镜和一个发散透镜组成, 各有关参数和几何尺寸均标示于图上. 求:

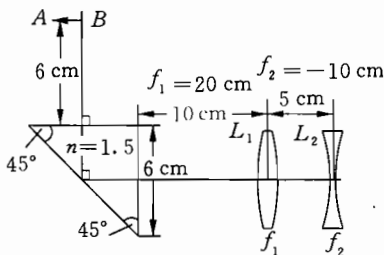


图 3-70

(1) 像的位置;

(2) 像的大小, 并作图说明是实像还是虚像, 是正立还是倒立的.

33. 半球形玻璃透镜的半径为 R , 置于空气中, 它的曲面上涂有水银, 成为反射面. 有一点光源 S 放在透镜主轴上距透镜平面为 d 处(图 3-71), 如果此时由透镜平面反射所成的像恰好与曲面反射所成的像重合, 求此玻璃的折射率.

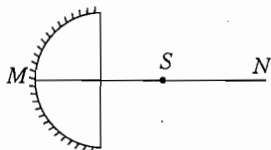


图 3-71

34. 显微镜的物镜组中常配有一个图 3-72 所示的透镜, 它的表面是球面, 左表面 S_1 的球心为 C_1 , 半径为 R_1 ; 右表面 S_2 的球心是 C_2 , 半径是 R_2 . 透镜的折射率为 n , 两球心间的距离 $C_1C_2 = \frac{R_2}{n}$. 在使用时被观察物体被置于 C_1 处, 试证明:

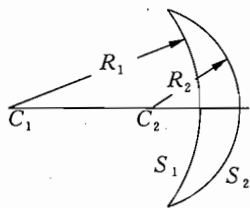


图 3-72

(1) 从物体射向此透镜的光线, 经透镜折射后, 所有光线均交于一点 Q ;

(2) $QC_2 = nR_2$.

35. 开普勒望远镜的目镜焦距 1 厘米, 用来观察天体时, 最后成像在无限远处, 这时镜筒被调到 51 厘米. 若改用它观察地面上

的某一目标时,需将目镜移动 0.5 厘米才能使像最后仍成在无穷远处.求:

(1) 上述移动目镜时,是使镜筒长度变长还是缩短?

(2) 地面上的观察目标离观察者有多远?

36. 由折射率 $n_1 = 1.5$ 的玻璃制成的对称双凸透镜,在空气中的焦距 $f = 30$ 厘米. 把它平放在平面反射镜上[如图 3-73(a)所示],形成一个折、反射系统,该系统的焦距是多少?

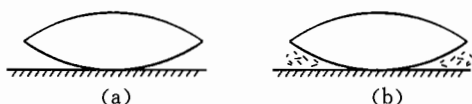


图 3-73

如果在透镜与平面镜间充满水,水的折射率 $n_2 = \frac{4}{3}$ [如图 3-73(b)所示],这个系统的焦距又是多少?

37. 焦距 f 的数值均相同的三个薄透镜 L_1 、 L_2 与 L_3 依次为凸透镜、凹透镜与凸透镜,它们构成一个共轴光学系统,相邻透镜间的距离均为 d ,各透镜的光心分别为 O_1 、 O_2 、 O_3 ,如图 3-74 所示. 在透镜 L_1 左方,位于主光轴上的物点 P ,经过此光学系统最终成像于透镜 L_3 右方的 Q 点. 若距离 $\overline{PO_2} = \overline{O_2Q}$,则物点 P 与透镜 L_1 的距离应为多少?

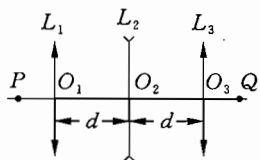


图 3-74

38. 有一种称为直视分光镜的光谱学仪器. 所有光学元件均放在一长直圆筒内. 筒内有三个焦距分别为 f_1 、 f_2 和 f_3 的透镜 L_1 、 L_2 和 L_3 , $f_1 = f_2 > f_3$; 观察屏 P ,它是一块带有刻度的玻璃片;由三块形状相同的等腰棱镜构成的分光元件(如图 3-75 所示),棱镜分别用折射率不同的玻璃制成,两侧棱镜的质料相同,中间棱镜则与它们不同,棱镜底面与圆筒轴平行. 圆筒的一端有一与圆筒轴垂直的狭缝,它与圆筒轴的交点为 S ,缝平行于棱镜的底



图 3-75

面. 当有狭缝的一端对准筒外的光源时, 位于圆筒另一端的人眼可观察到屏上的光谱.

已知: 当光源是钠光源时, 它的黄色谱线(波长为 589.3 nm , 称为 D 线)位于圆筒轴与观察屏相交处. 制作棱镜所用的玻璃, 一种为冕牌玻璃, 它对钠 D 线的折射率 $n_D = 1.5170$; 另一种为火石玻璃, 它对钠 D 线的折射率 $n'_D = 1.7200$.

(1) 试在图 3-76 中绘出圆筒内诸光学元件相对位置的示意图并说出各元件的作用.



图 3-76

(2) 试论证三块棱镜各应由何种玻璃制成并求出三棱镜的顶角 α 的数值.

39. 在焦距为 20.00 cm 的薄凸透镜的主轴上离透镜中心 30.00 cm 处有一小发光点 S , 一个厚度可以忽略的光楔 C (顶角 α 很小的三棱镜) 放在发光点与透镜之间, 垂直于主轴, 与镜的距离为 2.00 cm , 如图 3-77 所示. 设光楔的折射率 $n = 1.5$, 楔角 $\alpha = 0.028 \text{ rad}$. 在透镜另一侧离透镜中心 46.25 cm 处放一平面镜 M , 其反射面向着透镜并垂直于主轴. 问最后形成的发光点的像相对发光点的位置在何处 (只讨论近轴光线, 小角度近似适用. 在分析计算过程中应作出必要的光路图)?

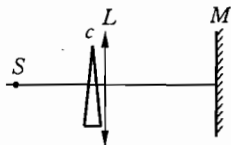


图 3-77

40. 如图 3-78 所示, L_1 和 L_2 为两个共轴的薄凸透镜, OO' 为其主轴. L_1 的焦距 $f_1 = 10 \text{ cm}$, 口径(直径)为 $d_1 = 4.0 \text{ cm}$, L_2 的焦距 $f_2 = 5.0 \text{ cm}$, 口径(直径)为 $d_2 = 2.0 \text{ cm}$. 两镜相距 $a = 30 \text{ cm}$. AB 为一与透

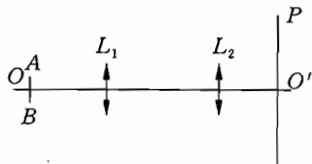


图 3-78

镜共轴的直径为 $d = 2.0 \text{ cm}$ 的均匀发光圆盘,它有清晰的边缘,把它放在 L_1 左侧 20 cm 处,它在 L_2 右侧垂直于 OO' 的光屏 P 上成像。

(1) 求光屏应放在何处?

(2) 现发现光屏上的像的中间部分较亮,边缘部分较暗.为了使像的边缘部分也能和中间部分一样亮,但又不改变像的位置和大小,可以在 OO' 上插放一个共轴的薄凸透镜 L_3 . 求 L_3 应放在何处? 口径(直径)至少要多大? 焦距应是多少?

41. 目前,大功率半导体激光器的主要结构形式是由许多发光区等距离地排列在一条直线上的长条状,通常称为激光二极管条.但这样的半导体激光器发出的是很多束发散光束,光能分布很不集中,不利于传输和应用.为了解决这个问题,需要根据具体应用的要求,对光束进行必要的变换(或称整形).如果能把一个半导体激光二极管条发出的光变换成一束很细的平行光束,对半导体激光的传输和应用将是非常有意义的.为此,有人提出了先把多束发散

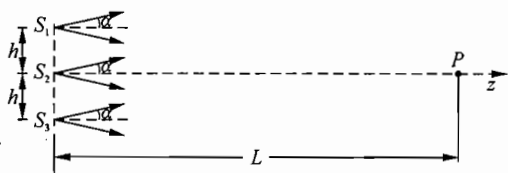


图 3-79

光会聚到一点,再变换为平行光的方案,其基本原理可通过如下所述的简化了的情况来说明。

如图 3-79, S_1 、 S_2 、 S_3 是等距离(间距为 h)地排列在一直线上的三个点光源,各自向垂直于它们的连线的同一方向发出半顶角为 $\alpha = \arctan(1/4)$ 的圆锥形光束.请使用三个完全相同的、焦距为 $f = 1.50h$ 、半径为 $r = 0.75h$ 的圆形薄凸透镜,经加工、组装成一个三者都在同一平面内的组合透镜,使三束光都能全部投射到这个组合透镜上,且经透镜折射后的光线能全部会聚于 z 轴(以 S_2 为起点,垂直于三个点光源连线,与光束中心线方向相同的射线)上距离 S_2 为 $L = 12.0h$ 处的 P 点.(加工时可对透镜进行外形的改变,但不能改变透镜焦距.)

(1) 求出组合透镜中每个透镜光心的位置。

(2) 说明对三个透镜应如何加工和组装,并求出有关数据。

第四讲 光的本性和原子物理

知识要点和基本方法

一、光的波动性

光波是一种电磁波,在真空中的波速 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$. 证实光具有波动性的实验主要有光的干涉、光的衍射和光的偏振. 在中学物理竞赛中,仅对光的干涉有定量的要求.

要产生光的干涉现象必须有两个相干光源. 下面介绍的几种干涉就是根据产生相干光源的途径不同而区分的. 光程 L 定义为 nr , n 为媒质的折射率, r 为距离. 当两个相干光源到观察点的光程差 δ 为光波长 λ 的整数倍时,两束光互相加强,即干涉相长;在 δ 为 $\lambda/2$ 的奇数倍时,两束光互相抵消,即干涉相消.

(一) 双缝干涉

由两条靠近的窄缝中射出的光作为相干光源的干涉叫双缝干涉. 如果两窄缝到某处的光程差为 δ , 那么有

$$\delta = \begin{cases} \pm k\lambda, & k = 0, 1, 2, \dots \text{明纹,} \\ \pm (2k-1) \frac{\lambda}{2}, & k = 1, 2, 3, \dots \text{暗纹.} \end{cases}$$

在图 4-1 中, S_1 和 S_2 到 P 点的光程差

$$\delta = d \cdot \sin \theta.$$

因为 θ 很小, 所以

$$\delta = d \cdot \tan \theta = d \cdot \frac{x}{L}.$$

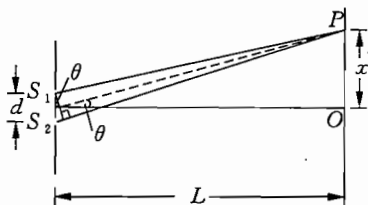


图 4-1

因此,当

$$d \cdot \frac{x}{L} = \pm k\lambda,$$

$$x = \pm k \frac{L}{d} \lambda, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

时,光屏上呈现亮纹,各亮纹(暗纹亦同)之间的距离

$$\Delta x = \lambda \frac{L}{d}.$$

在一次双缝干涉实验中,如果用折射率为 1.58 的云母片覆盖双缝中的一条窄缝,此时屏上的第七条亮纹移到了原来零级亮纹的位置上.若入射光的波长为 5500 \AA ,问云母片的厚度是多少?

设云母片厚度为 D ,光进入云母片后的光程为 $L = nD$, 比不覆盖云母片时增加了 $(n-1)D$. 屏上的第七条亮纹移到了原来零级亮纹的地方,说明两缝的光程差 δ 由原来的 7λ 变成了零. 因此有

$$(n-1)D = 7\lambda,$$

$$D = \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7 \times 5500 \times 10^{-10}}{1.58-1} \text{ m} = 6.6 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

(二) 薄膜干涉

由薄膜的上、下表面的反射光作为相干光源的干涉叫做薄膜干涉. 在定量分析薄膜干涉时,要注意光从光疏媒质射到光密媒质上发生反射时,相位会改变 π ,即相差 $\lambda/2$ 的光程. 薄膜干涉现象在自然界中十分常见,如下雨天柏油路面上的彩色油膜即是一例.

牛顿环是薄膜干涉的典型例子. 在一块光平的玻璃片 B 上,放一曲率半径为 R 的平凸透镜 A (图 4-2). 如果用波长为 λ 的单色光照射, A 下表面某处离 B 上表面之间的距离为 e , 那么有

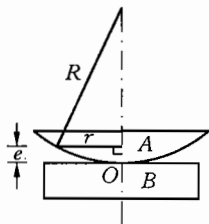


图 4-2

$$\left\{ \begin{array}{l} 2e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \text{亮环} \\ 2e + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{暗环} \end{array} \right\} \quad \textcircled{1}$$

式中加一项 $\lambda/2$ 是由于光在 B 上表面反射时的半波损失. 从图 4-2 中的三角形可得

$$r^2 = R^2 - (R - e)^2 = 2Re - e^2.$$

因为 $e \ll R$, 因此略去 e^2 项,

$$e = r^2 / 2R \quad (2)$$

②式代入①式

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \text{亮环};$$

$$r = \sqrt{kR\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{暗环}.$$

牛顿环中心处的空气层厚度 $e = 0$, 而实验观察到的是一暗斑, 这就是因为光从光疏媒质到光密媒质界面反射时有半波损失.

除了双缝干涉和薄膜干涉以外, 还有许多能形成相干光源的方法, 都可以用类似于双缝干涉的方法来研究.

二、光的粒子性

光在具有波动性的同时也具有一定的粒子性, 特别是在光的波长较短的时候. 证实光具有粒子性的实验主要有光电效应和康普顿效应等实验. 中学阶段只要求了解光电效应实验.

(一) 光电效应

实验装置如图 4-3 所示. 图中伏特表可测量加在光电管上的电压(当 P 点偏 A 时加的是正向电压, P 点偏 B 时加的是反向电压), 电流计测的是流过光电管的电流.

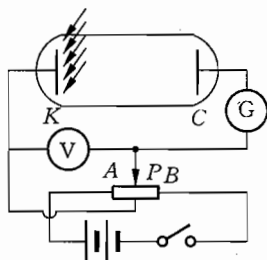


图 4-3

(1) 用某种单色光照射 K , 逐步增大 KC 之间的正向电压 U_+ , 同时测量光电流 I , 可看到如图 4-4 所示规律. I_0 叫做此时的饱和光电流. 如果增大入射光的强度, I_0 的值也会增大. 由此推知: 单位时间内由阴极 K 释放出的光电子数与入射光的强度成正比.

(2) 在 K 、 C 间加上反向电压, 可测得使光电流减为零的反向截止电压. 实验表明, 增大入射光的频率, 测得的反向截止电压也增大, 而改变入射光的强度, 反向截止电压不变. 由此推知, 由 K 释放出来的光电子的最大初动能随入射光频率的增大而增大, 与入射光强度无关.

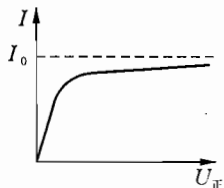


图 4-4

(3) 改变 K 的材料, 用不同频率的单色光照射, 可从中发现: 对每种金属, 入射光的频率必须大于某一极限频率才能发生光电效应; 低于这个频率的光, 无论强度多大, 照射时间多长, 也不能发生光电效应.

(二) 爱因斯坦的光子理论

光的波动理论对光电效应的实验现象无法解释. 这主要表现在:

(1) 光的波动说, 认为光的能量是由光振动的振幅 (即光的强度) 决定的, 而与光的频率无关. 依此看来, 光电子的最大初动能似应随入射光的强度增加, 但实验结果是光电子的最大初动能随入射光的频率增加, 而与入射光的强度无关.

(2) 依照光的波动说, 只要入射光的强度足够大, 无论光的频率如何, 都应发生光电效应, 实验结果却是对每种金属都存在一个极限频率, 低于这个频率的光无论强度多大都不能发生光电效应.

为了解释光电效应, 爱因斯坦提出了光子理论: 认为光的发射和吸收是不连续的, 光的传播也是不连续的, 光是一束光子流, 每个光子具有的能量 E 与光的频率 ν 成正比, 即 $E = h\nu$.

光子理论能成功地解释光电效应: 当光照射金属时, 金属中的某个电子吸收了入射光中一个光子的能量后, 动能增至足以克服周围原子的引力而从金属表面逸出, 成为光电子, 这就是光电效应. 设入射光子的能量为 $h\nu$, 电子从金属表面逸出所需的逸出功为 W , 光电子的最大初动能为 $\frac{1}{2}mv_m^2$, 根据能量守恒有:

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - W.$$

此方程称为爱因斯坦光电效应方程, 根据这一方程很容易解释光电

效应实验的现象.

根据爱因斯坦光电效应方程, 光电子的最大初动能 $\frac{1}{2}mv_m^2$ 和光的频率 ν 应有如图 4-5 所示的关系. 对于一种金属来说, 逸出功 W 是个定值, 因此光电子的最大初动能将随着入射光频率的增大而增大, 而与入射光的强度(即光子的多少)无关. 如果入射光的频率小于极限频率 ν_0 , 即无法产生光电效应, 光的强度再大也无用. 极限频率与逸出功的关系应该是 $\nu_0 = W/h$.

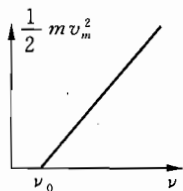


图 4-5

(三) 光子的质量和动量

光子既然具有一定的能量, 就必然具有质量. 按照狭义相对论的质能关系 $E = mc^2$ 和光子的能量公式 $E = h\nu$ 可知

$$mc^2 = h\nu, \quad m = h\nu/c^2.$$

动量
$$p = mc = h\nu/c = h/\lambda.$$

因为光子具有动量, 所以当一束光子击中一个平面时, 就会对此平面产生一个压力, 这就是光压. 光压的数值为

$$P = (1 + \rho) \frac{\Phi}{c}.$$

式中 Φ 为入射光的光强, ρ 为平面的反射系数.

三、原子结构

(一) 卢瑟福的原子核式结构

人们认识原子有复杂结构是从 1897 年汤姆生发现电子开始的.

α 粒子散射实验是 1911 年卢瑟福提出原子核式结构模型的实验基础. 核式结构学说认为: 在原子的中心有一个很小的核(称原子核), 原子的全部正电荷和几乎全部质量都集中在原子核里, 带负电的电子在核外空间绕着核高速旋转. 从 α 粒子散射实验的数据可以估计出原子核的大小约为 $10^{-15} \sim 10^{-14}$ m, 原子半径大约是 10^{-10} m.

(二) 玻尔的原子理论

卢瑟福的学说虽能成功地解释 α 粒子散射实验, 但却无法解释

原子的稳定性和原子光谱是明线光谱等问题. 为此, 1913 年玻尔提出如下假设:

1. 原子只能处于一系列不连续的能量状态中, 在这些状态中原子是稳定的, 电子虽然做加速运动, 但并不向外辐射能量, 这些状态叫定态.

2. 原子从一种定态跃迁到另一种定态时, 它辐射(或吸收)一定频率的光子, 光子的能量是由这两种定态的能量差决定, 即

$$h\nu = |E_{\text{初}} - E_{\text{终}}|.$$

3. 原子的不同能量状态跟电子沿不同的圆形轨道绕核运动相对应, 原子的定态是不连续的, 因此电子的可能轨道的分布也是不连续的, 只有满足下列条件的轨道才是可能的: 轨道半径 r 跟电子动量 mv 的乘积等于 $h/2\pi$ 的整数倍, 即

$$mvr = n \cdot \frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

式中的 n 是正整数, 叫量子数, 这种现象叫轨道的量子化.

经推导可得出氢原子中的电子的各可能轨道半径和对应能量为

$$r_n = n^2 r_1 = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 k m e^2}, \quad E_n = \frac{E_1}{n^2} = -\frac{2\pi^2 k^2 e^4 m}{n^2 h^2}.$$

式中 n 为量子数, $r_1 = 0.53 \text{ \AA}$ 为电子的第一可能轨道半径, $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ 为电子在第一可能轨道半径上时对应的能量.

(三) 氢光谱及其规律

由玻尔理论可知, 氢原子中的电子从较高能级(设其量子数为 n)向较低能级(设其量子数为 n')跃迁时, 它向外辐射的光子能量为

$$h\nu = E_n - E_{n'} = -\frac{2\pi^2 k^2 e^4 m}{h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right),$$

由于 $c = \lambda\nu$ 且令 $R = 2\pi^2 k^2 e^4 m / h^3 c$, 则

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

式中 $n = n' + 1, n' + 2, n' + 3, \dots$. $R = 1.097\,373 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ 称为里德伯恒量. 上式常称为巴耳末公式, 是瑞士的中学教师巴耳末首先从研究氢光谱在可见光区的四条谱线总结出来的经验公式. 巴耳末实验测得的 R 值为 $1.096\,776 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, 和由玻尔理论推出的理论值十分吻合, 因此用玻尔理论能较好地解释氢原子的光谱规律, 包括氢光谱的各种线系, 如赖曼系 ($n' = 1$), 巴耳末系 ($n' = 2$), 帕邢系 ($n' = 3$), 布喇开系 ($n' = 4$) 等的规律.

当然, 玻尔理论也有局限性, 它在解释两个以上电子的比较复杂的原子光谱时遇到了困难. 后来诞生了更彻底的量子理论——量子力学, 在量子力学中, 玻尔理论中的电子轨道, 只不过是电子出现机会最多的地方.

(四) 原子的受激辐射——激光

原子发光有两种情形: 一种是处于激发态的原子, 只能停留很短的时间(约为 10^{-8} s 数量级), 就自发地跃迁到较低能级去, 同时辐射出一个光子, 这种辐射叫自发辐射. 普通光源发光的情形就是这种辐射, 它们的频率、初相和偏振方向互不相同, 但如果当原子处于激发态 E_2 时, 恰好有能量 $h\nu = E_2 - E_1$ 的光子从附近通过, 在入射光子的电磁场的影响下, 原子会发出一个同样的光子而跃迁到低能级 E_1 上去, 这种辐射叫受激辐射. 受激辐射产生的光子的频率、发射方向、初相和偏振方向等, 都跟入射光子完全一样.

激光就是由受激辐射产生的. 一个入射光子由于引起受激辐射可以得到两个同样的光子, 如果这两个光子在媒质中传播时再引起其他原子发生受激辐射, 就会产生越来越多的相同的光子, 使光得到加强, 这就是激光. 它具有很好的单色性、方向性和相干性, 并且亮度极高.

四、原子核

(一) 天然放射现象

人类认识原子核的复杂结构, 是从发现天然放射现象开始的, 1896 年, 贝克勒尔发现铀和含铀的物质能发出某种看不见的射线, 这种射线可以穿透黑纸使照相底片感光. 进一步的研究表明, 这种放射性元素发出的射线通常有三种: 分别叫 α 射线、 β 射线和 γ 射线.

后经证实 α 射线就是氦原子核, β 射线就是高速电子流, γ 射线是一种波长很短的电磁波. 这三种射线都是由原子核内发出的, 表明原子核也有其内部结构.

放射性元素衰变有一定的速率, 我们把放射性元素的原子核有半数发生衰变需要的时间叫半衰期. 半衰期 τ 由该元素的原子核内部本身的因素决定, 跟原子所处的物理状态或化学状态无关. 如果用 N_0 表示初始时的原子核数, 经 t 时间后未衰变的原子核数为 N , 则有

$$N = N_0 2^{-t/\tau}.$$

但要注意, 对于某一个特定的核来说, 何时衰变是偶然的, 上式仅是对大量原子核的统计规律.

放射性元素放出的 α 射线、 β 射线和 γ 射线都是看不见的, 须用适当的仪器才能探测到, 常用的有云室、计数器和乳胶照相等方法.

(二) 原子核的组成

1919 年卢瑟福用 α 粒子轰击氮原子核而发现质子. 1932 年查德威克通过分析用 α 粒子轰击铍核所产生的一种射线而发现中子. 这样, 人们认识到原子核由质子和中子组成. 质子和中子通称为核子. 原子核的质量数等于其核子数, 原子核的核电荷数等于其原子序数. 具有相同的质子数和不同的中子数的原子互称为同位素.

(三) 核反应及核反应方程

原子核与原子核或其他粒子相互作用而引起的各种变化称为原子核反应. 核反应遵守下列守恒定律: (1) 电荷守恒, 即反应前后的核电荷数不变; (2) 质量守恒, 即反应前后的总质量数不变; (3) 能量守恒, 即反应前后系统的能量形式可以发生变化, 但总能量 (包括和质量联系的能量) 不变; (4) 动量守恒等. 利用这些守恒定律, 可以写出核反应方程式及计算它们的有关数据.

(四) 原子核的结合能与质能方程

爱因斯坦由相对论得出的质能方程为

$$E = mc^2.$$

这个方程表示物体的质量跟它的能量有一定的关系, 即如果它的能

量增加了 ΔE , 那么它的质量也相应地增加 Δm , 反之亦然. 且有

$$\Delta E = \Delta mc^2.$$

式中 c 为真空中的光速.

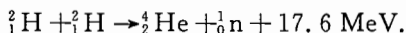
核子在结合成原子核时, 由于有强大的核力作用, 必须释放一定的能量. 反之, 将原子核分解成核子时, 则要吸收同样多的能量, 这个能量叫原子核的结合能. 由于核子结合成原子核时放出了结合能, 因此核的质量跟组成它的核子的质量比较起来就要小一些, 这叫做核的质量亏损.

原子核的结合能与其核子数之比叫每个核子的平均结合能. 不同原子核的平均结合能不同, 轻核和重核的平均结合能都较小, 中等质量数的原子核, 平均结合能较大, 质量数为 $50 \sim 60$ 的原子核平均结合能最大.

(五) 重核的裂变和轻核的聚变

重核的核子平均结合能比中等质量的核的核子平均结合能小, 因此重核分裂成中等质量的核时, 会有一部分结合能释放出来, 这种核反应叫裂变, 如铀核裂变. 当中子打击铀 235 后, 应形成处于激发状态的复核, 复核裂变为两个质量差不多的相等的碎片, 同时放出 2—3 个中子, 这些中子如能再引起其他铀核裂变, 就可使裂变反应不断地进行下去, 这种反应叫链式反应. 显然, 链式反应要不断进行下去的一个重要条件是每个核裂变时产生的中子数要在一个以上.

轻核的结合能更小, 某些轻核结合成质量较大的核时, 能释放出更多的结合能, 这种轻核结合成质量较大的核叫做聚变. 如



使核发生聚变, 必须使它们接近到 10^{-15} m . 一种办法是把核加热到很高温度, 使核的热运动动能足够大, 能够克服相互间的库仑斥力, 在互相碰撞中接近到可以发生聚变的程度, 因此, 这种反应又叫做热核反应.

(六) 基本粒子

按照基本粒子之间的相互作用可分为三类:

强子:凡是参与强相互作用的粒子都叫强子,质子是最早发现的强子.强子又分为重子(中子、质子、超子)和介子两类.重子的质量都比较大,介子的质量介于质子和电子之间.

轻子:都不参与强相互作用,只发现几种.电子是最早发现的轻子,轻子质量一般都较小.

媒介子:只发现一种即光子,静质量为零,是传递电磁相互作用的粒子.

每一种基本粒子都有自己的反粒子,正反粒子相遇时,会发生湮灭现象,如

$${}^0_{-1}\text{e} + {}^0_{+1}\text{e} \rightarrow \gamma + \gamma.$$

即电子与正电子相遇时,会湮灭产生两个光子.

例题精讲

例1 在杨氏双缝干涉的实验装置中, S_2 缝上盖厚度为 h 、折射率为 n 的透明介质,问原来的零级明条纹移向何处?若观察到零级明条纹移到原来第 k 级明条纹处,求该透明介质的厚度 h ,设入射光的波长为 λ .

解 设从 S_1 、 S_2 到屏上 P 点的距离分别为 r_1 、 r_2 ,则到 P 点的光程差为

$$\delta = (r_2 - h + nh) - r_1,$$

当 $\delta = 0$ 时,对应零级条纹的位置应满足

$$(r_2 - r_1) = -(n-1)h,$$

原来两光路中没有介质时,零级条纹的位置满足 $r_2 - r_1 = 0$,与有介质时相比, $(r_2 - r_1) = -(n-1)h < 0$,可见零级明条纹应该向着盖介质的小孔一侧偏移.

原来没有透明介质时,第 k 级明条纹满足

$$xd/L = r_2 - r_1 = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当有介质时,零级明条纹移到原来的第 k 级明条纹位置,则必同时满足

$$r_2 - r_1 = -(n-1)h$$

和

$$r_2 - r_1 = k\lambda,$$

从而

$$h = \frac{-k\lambda}{n-1},$$

显然, k 应为负整数.

例 2 在透镜主轴上的物点 S 为波长 $\lambda = 5200 \text{ \AA}$ 的单色光源, 且离镜 15 cm , 今沿直径对截透镜并分开距离 $d = 0.4 \text{ cm}$, 用黑纸挡住分开的缝, 如图 4-6 所示, 则在距透镜为 50 cm 处的屏上可以观察到干涉条纹, 求屏上干涉条纹数 N . 已知凸透镜的焦距为 10 cm .

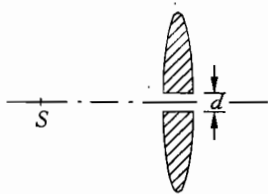


图 4-6

分析 点光源 S 发出的光经透镜上下两半后, 分别成像于 S_1 、 S_2 处, 这是两个相干的点光源, 它们发出的两束相干光在图 4-7 中画斜线的区域内重叠, 在重叠区域的屏幕上可以观察到干涉条纹.

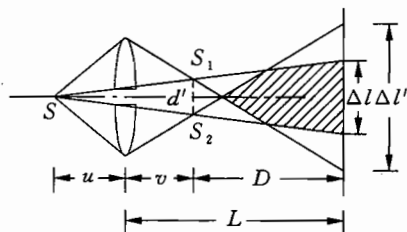


图 4-7

解 点光源 S 经透镜上、下两半后, 分别成像于 S_1 和 S_2 , 由透镜成像公式得像距

$$v = \frac{uf}{u-f} = 30 \text{ cm},$$

S_1 和 S_2 之间的距离 d' 可由几何关系求出, 为

$$\frac{d'}{d} = \frac{u+v}{u},$$

代入数据得 $d' = 1.2 \text{ mm}$.

S_1 和 S_2 为相干光源, 它们在屏上产生干涉条纹的间距为

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda,$$

如图 4-6, 屏上两束光重叠的范围为

$$\Delta l = \frac{d}{u}(u + L),$$

因此屏上出现的干涉条纹的数目为

$$n = \frac{\Delta l}{\Delta x} = 20 \text{ 条}.$$

即出现 20 条干涉条纹.

说明 在上述计算中实际上已假设图 4-7 中的 $\Delta l' > \Delta l$, 如果实际情形相反, 即 $\Delta l' < \Delta l$ (取决于屏离透镜的远近与透镜的直径), 则屏上两束相干光源重叠的范围将是 $\Delta l'$ 而不是 Δl , 出现的条纹数应由 $n = \Delta l' / \Delta x$ 算出.

例 3 在图 4-8 的装置中, 已知 $\overline{S_1 S_2} = 0.1 \text{ mm}$, 离双缝 10 cm 处的理想透镜的焦距 $f' = 10 \text{ cm}$, 其光轴通过 S 单缝. 若用 $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ 的紫光照射 S 缝, 则在离透镜 12 cm 的照相干板上将摄得什么图样?

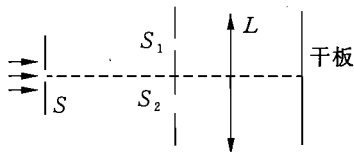


图 4-8

解 (1) S_1 和 S_2 为相干光源. 在干板上任选一点 P . 考虑图 4-9 中从 S_1 、 S_2 到达 P 点的两条特定路线, 这两路光程一定有一特定的光程差, 从而在干板上形成双缝干涉条纹.

(2) 再讨论理想透镜 L 和干板 P 所组成的观察系统所观察的是哪一个平面屏幕上的干涉条纹. 为计算光程差 ($\overline{S_1 A P} - \overline{S_2 B P}$), 先根据理想透镜 L 的特性得出:

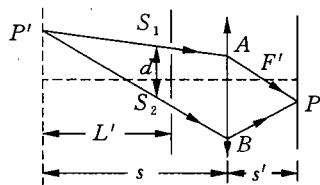


图 4-9

$$\text{光程 } \overline{P'S_1AP} = \text{光程 } \overline{P'S_2BP}$$

这里 P' 为像点 P 所对应的物点. 于是 P 点的光程差为

$$\begin{aligned}
 \delta_P &= (\overline{S_1AP} - \overline{S_2BP}) \\
 &= (\overline{S_1AP} - \overline{P'S_1AP}) - (\overline{S_2BP} - \overline{P'S_2BP}) \\
 &= \overline{P'S_2} - \overline{P'S_1}.
 \end{aligned}$$

对透镜 L 来说,干板 P 平面所对应的物平面是双缝左方的 P' 平面, L 和 P 这一观察系统所看到的是 P' 平面上的干涉图样. 由于 P' 面位于双缝左方,那里并不存在实际的干涉场,所以称双缝左方空间为一虚干涉场. P' “屏”上的虚干涉条纹作为透镜 L 的实物,经 L 变换后成为双缝右方的干板上的实干涉条纹.

(3) 应用透镜成像公式

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'},$$

可算出 P' 面位于双缝左方 50 cm 处,即 $L' = 50$ cm. P' 面上虚干涉条纹的间距为

$$\Delta x' = \frac{L'}{d} \lambda = 2 \text{ mm}.$$

干板 P 上条纹间距

$$\Delta x = \Delta x' \left(\frac{s'}{s} \right) = -0.4 \text{ mm}.$$

这里的负号对条纹间距数值并无实际意义.

例 4 菲涅耳双面镜. 如图 4-10 所示,平面镜 M_1 和 M_2 之间的夹角 θ 很小,两镜面的交线 O 与纸面垂直, S 为光阑上的细缝(也垂直于图面),用强烈的单色光源来照明,使 S 成为线状的单色光源, S 与 O 相距为 r . A 为一挡光板,防止光源所发的光没有经过反射而直接照射光屏 P .

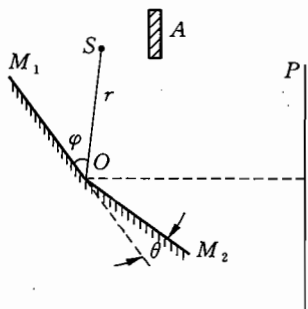


图 4-10

(1) 若图中 $\angle SOM_1 = \varphi$, 为在 P 上观察干涉条纹,光屏 P 与平面镜 M_2 的夹角最好为多少?

(2) 设 P 与 M_2 的夹角取(1)中所得的最佳值时, 光屏 P 与 O 相距为 L , 此时在 P 上观察到间距均匀的干涉条纹, 求条纹间距 Δx .

(3) 如果以激光器作为光源, (2)的结果又如何?

解 (1) 如图 4-11, S 通过 M_1 、 M_2 两平面镜分别成像 S_1 和 S_2 , 在光屏 P 上看来, S_1 和 S_2 则相当于两个相干光源, 故在光屏 P 上会出现干涉现象. 为在 P 上观察干涉条纹, 光屏 P 的最好取向是使 S_1 和 S_2 与它等距离, 即 P 与 S_1S_2 的连线平行.

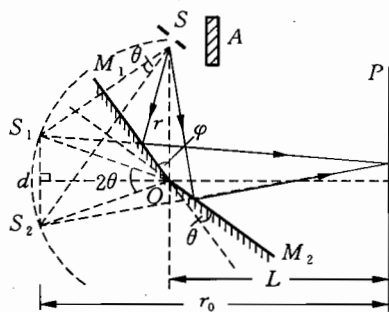


图 4-11

图中 S_1 和 S 关于平面镜 M_1 对称, S_2 和 S 关于平面镜 M_2 对称, 所以, $\triangle OS_1S_2$ 为顶

角为 2θ , 腰长为 r 的等腰三角形, 故光屏 P 的最佳取向是 P 的法线 (通过 O 点) 与平面镜 M_2 的夹角等于 φ , 或光屏 P 与平面镜 M_2 的夹角为 $90^\circ - \varphi$.

(2) 由图可看出, S_1 和 S_2 之间的距离为 $d = 2r\sin\theta$, S_1 和 S_2 到光屏 P 的距离为 $r_0 = r\cos\theta + L \approx r + L$, 由此, 屏上的干涉条纹间距为

$$\Delta x = \frac{(r+L)\lambda}{2r\sin\theta}.$$

(3) 如果以激光器作为光源, 由于激光近于平行, 即相当 S 位于无穷远处. 上式简化为

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\theta}.$$

若用两相干光束的夹角 $\alpha = 2\theta$ 表示, 上式可写成

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

例 5 图 4-12 是一套测量样品热膨胀系数的装置. 其中透明平板由两根等长的铜柱支持, 平板下置有待测样品, 样品的上表面与平板的下表面形成一个很薄的劈形空气隙(图中画的是夸大的), 空气隙的右端较厚. 今自上至下以波长 $\lambda = 5800 \text{ \AA}$ 的单色平行光垂直照射到透明平板上. 这样, 从反射光中可以观察到空气

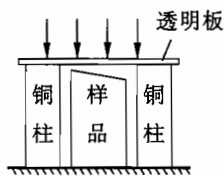


图 4-12

隙上下两面反射光所形成的干涉条纹. 已知样品和铜柱的长度都约为 6 cm , 在温度升高 100°C 的过程中, 干涉条纹向左移过 20 条, 铜的热膨胀系数为 $14 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. 试求此样品的热膨胀系数.

分析 当温度升高时, 由于热膨胀, 样品和铜柱都随之伸长. 若两者的伸长量一样, 则透明板与样品间的空气隙厚度不变, 观察到的干涉条纹位置也不会发生变化. 若铜的热膨胀系数较大, 则铜块的伸长量较多, 空气隙将会变厚, 空气隙的一个厚度值将由原来的某一位置向左移至一个新的位置, 该厚度对应的干涉条纹也将随之由原位置向左移至新的位置. 反之, 若铜的热膨胀系数较小, 则干涉条纹向右移动. 综合上述可知, 本题样品的热膨胀系数应小于铜的热膨胀系数.

对于一个固定的观察处, 条纹向左移动一条表明空气隙上下两表面反射光的光程差增加一个波长, 即空气隙的厚度增加半个波长. 这样, 移动 20 条条纹对应的空气隙厚度的增加量为

$$\Delta l = 10\lambda.$$

这个增加量是铜的膨胀伸长量与样品的膨胀伸长量之差.

解 设铜柱的原长为 l_1 , 热膨胀系数为 α_1 , 样品的原长为 l_2 , 热膨胀系数为 α_2 , 温度的升高量为 Δt , 则应有

$$\Delta l = l_1 \alpha_1 \Delta t - l_2 \alpha_2 \Delta t,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{l_2} \left(\alpha_1 l_1 - \frac{\Delta l}{\Delta t} \right) = \frac{l_1}{l_2} \alpha_1 - \frac{\Delta l}{l_2 \Delta t}.$$

由于 l_1 和 l_2 都约为 6 cm , 则上式近似为

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \alpha_1 - \frac{\Delta l}{l_2 \Delta t} = 14 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} - \frac{10 \times 5\,800 \times 10^{-10}}{6 \times 10^{-2} \times 100} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ &= 13 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.\end{aligned}$$

例 6 利用激光测速器测量粒子的运动速度时,是用激光发出的两束相干光照射粒子,两束光夹角为 $\alpha = 60^\circ$, 粒子的运动方向与 α 角的角平分线垂直,如图 4-13 所示. 被粒子反射的光由光电管接收后转移为电信号,当激光射线的波长 $\lambda = 0.63 \text{ } \mu\text{m}$ 时记下的交变信号频率 $\nu = 320 \text{ kHz}$, 求粒子的运动速度.

解 设粒子通过 O_1 和 O 两点,受相干光照射后,其反射叠加正好是连续两次产生最强的电信号(对应于相干条纹的两个相邻的亮条纹). 根据产生干涉条纹的条件,若两束光传到 O_1 点的光程差为 λ (波长),从图 4-14 可以看出,即是

$$OP + OQ = \lambda. \quad (1)$$

由图中几何关系知:

$$OP = OO_1 \sin \angle OO_1 P = OO_1 \cdot \sin(\alpha/2),$$

$$OQ = OO_1 \sin \angle OO_1 Q = OO_1 \cdot \sin(\alpha/2),$$

将上两式代入(1)式得

$$2OO_1 \sin(\alpha/2) = \lambda, \quad (2)$$

再设粒子从 O_1 点到 O 点的运动速度为 v_1 , 所经过的时间为 t , 有 $t = 1/\nu$, 由匀速运动公式 $S = vt$ 得

$$v = S/t = S\nu = OO_1 \cdot \nu. \quad (3)$$

由(2)式得

$$OO_1 = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

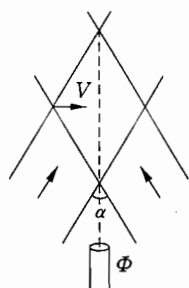


图 4-13

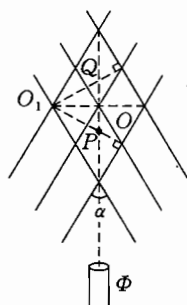


图 4-14

代入(3)有

$$v = \frac{\nu\lambda}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

代入已知数据,可得粒子运动的速度

$$v = 20 \text{ cm/s}.$$

说明 平行光干涉条纹的特点是干涉条纹间距 Δx 与屏幕离透镜 L 的距离无关,但屏幕必须位于两束光的相干叠加区才行.

例 7 考虑不用发射到绕太阳运动的轨道上办法,要在太阳系建立一个质量为 m 的静止空间站. 这个空间站有一个面向太阳的大反射面(反射系数为 1),来自太阳的辐射功率 L 产生的辐射压力使空间站受到一个背离太阳的力,此力与质量为 M_s 的太阳对空间站的万有引力方向相反,大小相等,因而空间站处于平衡状态. 忽略行星对该站的作用力,求:

(1) 此空间站反射面的面积 A .

(2) 平衡条件和太阳与空间站之间的距离是否有关?

(3) 设反射面是边长为 d 的正方形,空间站的质量为 10^6 千克,确定 d 之值. 已知太阳的辐射功率是 3.77×10^{26} 瓦. 太阳质量为 1.99×10^{30} 千克.

解 (1) 设空间站与太阳的距离为 r ,则太阳辐射在空间站反射面上单位面积内的功率即光强 $\Phi = \frac{L}{4\pi r^2}$,太阳光对反射面产生的压强是光子的动量传递给反射面的结果,这一光压为

$$P = \frac{2\Phi}{c} = \frac{L}{2\pi r^2 c}.$$

于是反射面受到的辐射压力

$$F_{\text{辐射}} = PA = \frac{L}{2\pi r^2 c} A.$$

太阳对空间站的万有引力为 $F_{\text{引力}} = G \frac{M_s m}{r^2}$,

式中 G 为万有引力常数. 在空间站处于平衡状态时, $F_{\text{引力}} = F_{\text{辐射}}$, 即

$$G \frac{M_s m}{r^2} = \frac{L}{2\pi r^2 c} A,$$

这就得到,反射面的面积

$$A = \frac{2\pi G M_s m c}{L}.$$

(2) 由上面的讨论可知,由于辐射压力和太阳引力都与 r^2 成反比,因而平衡条件与太阳和空间站的距离 r 无关.

(3) 若 $A = d^2$, 并以题给数据代入前式得到

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{2\pi G M_s m c}{L}} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi(6.67 \times 10^{-11} \text{ 牛} \cdot \text{米}^2 / \text{千克}^2)(1.99 \times 10^{30} \text{ 千克})}{(10^6 \text{ 千克})(3.00 \times 10^8 \text{ 米/秒})}} \\ &\quad \quad \quad 3.77 \times 10^{26} \text{ 瓦}} \\ &= 2.58 \times 10^4 \text{ 米.} \end{aligned}$$

例 8 处在激发态的氢原子向能量较低的状态跃迁时会发出一系列不同频率的光,称为氢光谱. 氢光谱线的波长 λ 可以用下面的巴耳末-里德伯公式来表示

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

n, k 分别表示氢原子跃迁前后所处状态的量子数. $k=1, 2, 3, \dots$ 对于每一个 k , 有 $n=k+1, k+2, k+3, \dots$ R 称为里德伯常量, 是一个已知量. 对于 $k=1$ 的一系列谱线其波长处在紫外线区, 称为赖曼系; $k=2$ 的一系列谱线其波长处在可见光区, 称为巴耳末系.

用氢原子发出的光照射某种金属进行光电效应实验, 当用赖曼系波长最长的光照射时, 遏止电压的大小为 U_1 , 当用巴耳末系波长最短的光照射时, 遏止电压的大小为 U_2 . 已知电子电荷量为 e , 真空中的光速为 c , 试求: 普朗克常量和该种金属的逸出功.

解 由巴耳末-里德伯公式.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

可知赖曼系波长最长的光是氢原子由 $n = 2$ 到 $k = 1$ 跃迁时发出的, 其波长的倒数

$$\frac{1}{\lambda_{12}} = \frac{3R}{4} \quad ①$$

对应的光子能量为

$$E_{12} = hc \frac{1}{\lambda_{12}} = \frac{3Rhc}{4} \quad ②$$

式中 h 为普朗克常量. 巴耳末系波长最短的光是氢原子由 $n = \infty$ 到 $k = 2$ 跃迁时发出的, 其波长的倒数

$$\frac{1}{\lambda_{2\infty}} = \frac{R}{4} \quad ③$$

对应的光子能量

$$E_{2\infty} = \frac{Rhc}{4} \quad ④$$

用 A 表示该金属的逸出功, 则 eU_1 和 eU_2 分别为光电子的最大初动能. 由爱因斯坦光电效应方程得

$$\frac{3Rhc}{4} = eU_1 + A \quad ⑤$$

$$\frac{Rhc}{4} = eU_2 + A \quad ⑥$$

解得

$$A = \frac{e}{2}(U_1 - 3U_2) \quad ⑦$$

$$h = \frac{2e(U_1 - U_2)}{Rc} \quad ⑧$$

例 9 在一个密闭的容器中装有放射性同位素氪($_{36}\text{Kr}^{85}$)气, 在温度为 20°C 时, 其压强为 1 atm . 将容器埋入地下深处, 经过 22 年后

取出.在此期间有些氦气经 β 衰变成为铷($_{37}\text{Rb}^{85}$),铷最后是固体状态.现在,在温度仍是 20°C 时,测得容器中的压强为 0.25 atm ,并测得容器中有固体铷 $0.75 \times 10^{-3}\text{ mol}$,铷的体积与容器体积比较可以忽略不计,试计算埋入时氦的质量以及氦的半衰期.

解 设 n_0 为埋入时氦的物质的量,氦埋入时和取出时都是气体状态,已知衰变的铷是 $0.75 \times 10^{-3}\text{ mol}$,所以埋入时氦的气态方程是

$$P_0 V = n_0 RT.$$

取出时剩下的氦的气态方程是

$$0.25 P_0 V = (n_0 - 0.75 \times 10^{-3}) RT.$$

两式相比得 $n_0 = 1.00 \times 10^{-3}\text{ mol}$.

埋入时氦的质量为 $m = 8.5 \times 10^{-2}\text{ kg}$,

取出后容器中氦气只剩下

$$n = n_0 - 0.75 \times 10^{-3}\text{ mol} = 0.25 \times 10^{-3}\text{ mol}.$$

设氦的半衰期为 τ ,则根据半衰期的意义可得

$$\frac{n}{n_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{22/\tau},$$

即
$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{22/\tau},$$

所以 $\tau = 11\text{ 年}$.

例 10 证明一动量为 p 的自由电子,在与光子的碰撞中,完全吸收该光子是不可能的.

解 设自由电子与光子碰撞前的动量、能量分别为 p 、 E 与 q 、 ϵ ;碰后的动量、能量分别为 p' 、 E' 与 q' 、 ϵ' .如果光子被完全吸收,则 $q' = 0$, $\epsilon' = 0$,如图所示, θ 为 p 与 q 的夹角.

由动量、能量守恒定律有:

$$p + q = p' \text{ (矢量式).}$$

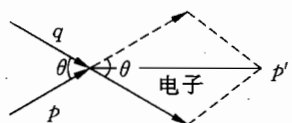


图 4-15

$$\text{或} \quad p'^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta, \quad (1)$$

$$E + \varepsilon = E', \quad (2)$$

$$\text{又} \quad E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2},$$

$$E' = \sqrt{m_0^2 c^4 + p'^2 c^2},$$

$$\varepsilon = qc.$$

其中 m_0 为电子的静止质量, 将 E 、 E' 及 ε 的表达式代入(2)式得:

$$p'^2 - p^2 - q^2 = 2q \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}. \quad (3)$$

联立(1)、(3)式

$$p \cos \theta = \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}.$$

上式的左边小于等于 p , 右边大于 p , 故此式不可能成立, 由此推出光子不可能被自由电子完全吸收.

例 11 已知基态 He^+ 的电离能为 $E = 54.4 \text{ eV}$.

(1) 为使处于基态的 He^+ 进入激发态, 入射光子所需的最小能量应为多少?

(2) He^+ 从上述最低激发态跃迁返回基态时, 如考虑到该离子的反冲, 则与不考虑反冲相比, 它所发射的光子波长的百分变化有多大(离子 He^+ 的能级 E_n 与 n 的关系和氢原子能级公式类似. 电子电荷取 $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$, 质子和中子质量均取 $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$. 在计算中, 可采用合理的近似)?

分析 从最低激发态返回基态时, 若考虑该离子的反冲, 则这一过程中遵循动量守恒定律, 另外能量守恒关系依然成立.

解 (1) 电离能表示 He^+ 的核外电子脱离氮核的束缚所需要的能量. 入射光子所需的最小能量对应于核外电子由基态能级跃迁到第一激发态, 所以

$$E_{\min} = E \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 54.4 \times \left(1 - \frac{1}{4} \right) \text{ eV} = 40.8 \text{ eV}.$$

(2) 若不考虑离子的反冲, 由第一激发态跃迁回基态发射的光

子有关系式:

$$E_{\min} = h\nu_0.$$

若考虑离子的反冲, 设光子的频率为 ν , 离子的反冲速度为 v , 则

$$E_{\min} = h\nu + \frac{1}{2}Mv^2,$$

$$Mv = h\nu/c.$$

于是, 波长的相对变化

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} = \frac{h\nu_0 - h\nu}{h\nu},$$

即

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{Mv^2/2}{Mv c} = \frac{Mv c}{2Mc^2} = \frac{h\nu}{2Mc^2}.$$

由于 $Mc^2 \gg h\gamma \gg h(\gamma - \gamma_0)$,

所以

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{h\gamma_0}{2Mc^2} - \frac{h(\gamma - \gamma_0)}{2Mc^2} \approx \frac{h\gamma_0}{2Mc^2}.$$

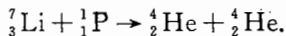
代入数据得

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = 5.4 \times 10^{-9},$$

即百分变化为 0.000 000 54%.

例 12 在用质子(${}^1_1\text{P}$)轰击固定锂(${}^7_3\text{Li}$)靶的核反应中, (1) 计算放出 α 粒子的反应能; (2) 如果质子能量为 1 MeV, 问在垂直质子束的方向观测到 α 粒子的能量有多大? 有关原子核的质量如下: ${}^1_1\text{H}$, 1.007 825; ${}^4_2\text{He}$, 4.002 603; ${}^7_3\text{Li}$, 7.015 999.

解 (1) 核反应方程如下:



静质量 $M_0 \quad M_1 \quad M_3 \quad M_2$

动能 $E_0 \quad E_1 \quad E_3 \quad E_2$

由总质量和总能量守恒:

$$M_0 + \frac{E_0}{c^2} + M_1 + \frac{E_1}{c^2} = M_2 + \frac{E_2}{c^2} + M_3 + \frac{E_3}{c^2}.$$

则由反应能 Q 的定义得:

$$\begin{aligned} Q &= (E_2 + E_3) - (E_0 + E_1) \\ &= [(M_0 + M_1) - (M_2 + M_3)]c^2 \\ &= [(7.015\,999 + 1.007\,825) - 2 \times 4.002\,603] \times 931.5 \\ &= 17.35 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中: } 1u \cdot c^2 &= (1.66 \times 10^{-27} \text{ 千克}) \times (2.997\,925 \times 10^8 \text{ 米/秒})^2 \\ &= 931.5 \times 10^6 \text{ eV} \\ &= 931.5 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

(2) 设锂靶是静止的, 根据动量守恒, 可知, 反应所产生的两个相同的 α 粒子(${}^4_2\text{He}$ 核)应沿入射质子的方向对称分开. 如图 4-16 所示.

由动量守恒定律有:

$$P_1 = P_2 + P_3 (\text{矢量式}).$$

矢量 P_1 、 P_2 、 P_3 合成的三角形, 二底角皆为 θ , 又因 $M_2 = M_3$, 因而有 $E_2 = E_3$.

已知反应能 $Q = 17.35 \text{ MeV}$, 且:

$Q = E_2 + E_3 - E_1$, 其中 $E_1 = 1 \text{ MeV}$, 可得:

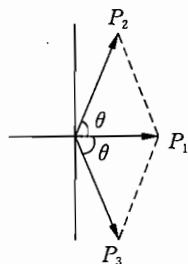


图 4-16

$$E_2 = E_3 = \frac{1}{2}(Q + E_1)$$

$$= \frac{1}{2} \times (17.35 + 1) \text{ MeV}$$

$$= 9.175 \text{ MeV}.$$

即反应所生成的 α 粒子其能量为 9.175 MeV .

α 粒子飞出方向与沿入射质子的方向之间的夹角为 θ , 因此:

$$P_1^2 = P_2^2 + P_3^2 - 2P_2P_3\cos\theta.$$

由 $P^2 = 2ME$, 得

$$M_3 E_3 = M_1 E_1 + M_2 E_2 - 2M_1 M_2 E_1 E_2 \cos \theta.$$

代入反应能 Q 的定义式

$$\begin{aligned} Q &= E_2 + E_3 - E_1 \\ &= \left(1 + \frac{M_2}{M_3}\right) E_2 - \left(1 - \frac{M_1}{M_3}\right) E_1 - \frac{2\sqrt{M_1 M_2 E_1 E_2}}{M_3} \cos \theta. \end{aligned}$$

将上式中质量数改为质量比得

$$Q = \left(1 + \frac{A_2}{A_3}\right) E_2 - \left(1 - \frac{A_1}{A_3}\right) E_1 - \frac{2\sqrt{A_1 A_2 E_1 E_2}}{A_3} \cos \theta.$$

其中 $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 4$, 代入上式:

$$Q = 2E_2 - \frac{3}{4}E_1 - \sqrt{E_1 E_2} \cos \theta.$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } \cos \theta &= \frac{2E_2 - Q - \frac{3}{4}E_1}{\sqrt{E_1 E_2}} \\ &= \frac{\left(2 \times 9.175 - 17.35 - \frac{3}{4} \times 1\right)}{\sqrt{1 \times 9.175}} = 0.0825, \end{aligned}$$

所以, $\theta = 85^\circ 16'$.

由此可知, 在垂直于质子束的方向上观察到的 ${}^4_2\text{He}$ 的能量近似就是 9.175 MeV.

例 13 原子核俘获一个 μ^- 子 (μ^- 子质量是电子质量的 207 倍, 电荷与电子相同) 形成 μ 原子, 假设原子核静止. 试求:

(1) μ^- 子的第一轨道半径. 已知原子核的质量数为 A , 且中子数 N 等于质子数 Z , 氢原子的第一玻尔轨道半径 $d_0 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$.

(2) 当 A 大于什么值时, μ^- 的轨道将进入原子核内. 已知原子核半径的公式为 $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3} \text{ m}$.

分析 原子核俘获一个 μ^- 子形成原子, 这和原子核俘获一个电子形成氢原子类似, 通过比较这两种情况, 即能求得问题的解.

解 (1) 用 m_μ 、 a 和 v 分别表示 μ^- 子的质量、第一轨道半径和

速度,根据库仑定律和牛顿定律,可列出第一轨道上的运动方程:

$$K \frac{\left(\frac{1}{2}A\right)e^2}{a^2} = m_{\mu} \frac{v^2}{a}.$$

根据量子化条件,对第一轨道有

$$m_{\mu} v a = \frac{h}{2\pi}.$$

同理,对氢原子可得下式

$$k \frac{e^2}{a_0^2} = m_e \frac{v_0^2}{a_0},$$

$$m_e v_0 a_0 = \frac{h}{2\pi}.$$

式中 m_e 、 a_0 和 v_0 分别表示电子的质量、第一轨道半径和速度.

$$\text{由以上四式可解得 } a = \frac{2a_0}{A} \cdot \frac{m_e}{m_{\mu}},$$

$$\text{代入有关数据,得 } a = \frac{5.11 \times 10^{-13}}{A} \text{ m}.$$

(2) 要使 μ^- 子轨道进入原子核内,则要满足

$$\frac{2a_0}{A} \cdot \frac{m_e}{m_{\mu}} < R,$$

将题中已知的各量代入,可解得

$$A > 94.$$

练 习 题

A 组

1. 在白光下观察厚度为 5.2×10^{-5} cm 的透明薄膜, 白光的入射角(即与平面法线的夹角)为 31° , 薄膜的折射率为 1.35. 试求: 在可见光 (380 ~ 780 nm) 范围内, 哪些波长的光将在反射光中消失, 并预测该薄膜在反射光下的颜色.

2. 在半导体元件的生产中, 为了测定 Si 片上的 SiO_2 薄膜厚度, 将 SiO_2 薄膜磨成劈尖形状, 如图 4-17 所示, 用波长 $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ 的绿光照射, 已知 SiO_2 的折射率为 1.46, Si 的折射率为 3.42, 若观察到劈尖上出现了 7 个条纹间距, 问 SiO_2 薄膜的厚度是多少?

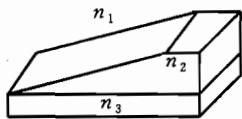


图 4-17

3. 光学仪器中使用的是涂膜镜头, 若薄膜的折射率 $n = 4/3$, 小于玻璃的折射率, 在入射光包含波长 $\lambda_1 = 7 \times 10^{-7} \text{ m}$ 和 $\lambda_2 = 4.2 \times 10^{-7} \text{ m}$ 两种成分的情况下, 为使两种波长的反射光被最大限度减弱, 试求这种薄膜的厚度.

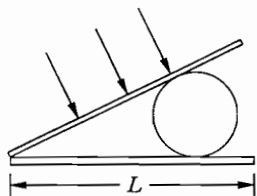


图 4-18

4. 用尖劈空气膜的干涉测微丝的直径, 如图 4-18, 两块平面玻璃一端互相接触, 另一端夹着待测的微丝, 微丝与接触棱平行, 用单色 (5893 \AA) 平行光垂直照射在玻璃上, 两块玻璃间的空气膜对光产生等厚干涉, 测量出 $L = 28.880 \text{ mm}$, 用显微镜读出 30 条干涉条纹(亮纹)的间距为 $\Delta x = 4.295 \text{ mm}$, 求金属微丝的直径.

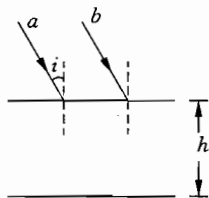


图 4-19

5. 如图 4-19 所示, 皂膜的厚度 h 至少为多少时, 波长为 $\lambda = 5.5 \times 10^{-7} \text{ m}$ 的光以 30° 入射角投射时, 才能看到膜最明亮? (皂

膜的折射率 $n = 4/3$)

6. 洛埃镜实验中,如图 4-20,点光源 S 在镜平面上方 2 mm 处,反射镜位于光源与屏幕正中间,镜长 $l = 40$ cm,屏到光源的距离 $D = 1.5$ m,波长为 $5\,000\text{ \AA}$,试求:(1)条纹间距;(2)屏幕上干涉条纹的范围;(3)干涉条纹总数.

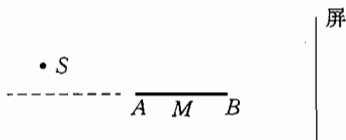


图 4-20

7. 在杨氏双缝干涉实验中,波长为 600 nm 的单色光垂直照射到两个非常靠近的狭缝上,光屏离双缝 1 m . 在光屏上中心亮条和第 10 条亮条的距离为 300 mm . 试求

(1) 两条狭缝之间的距离;

(2) 当将一块厚度为 0.02 mm 的透明薄膜放到其中一条狭缝上时,光屏上的中心亮条移动了 30 mm . 求薄膜的折射率.

8. 用波长为 $3\,500 \times 10^{-10}\text{ m}$ 的光照射某种金属表面,选择了一定的截止电压来“截止”光电流,当光的波长变化了 $500 \times 10^{-10}\text{ m}$ 时,为使光电流完全终止,截止电压必须增加 0.59 V ,若已知普朗克常数,试求电子的电量是多少?

9. 在光电效应实验中,设纵坐标表示所加的电压 U ,横坐标为光子的频率 ν ,若某金属的极限频率为 ν_0 ,普朗克恒量为 h ,电子电量为 e ,试在 $U-\nu$ 图中画出能产生光电流的区域(用斜线表示).

10. 用波长为 $0.710 \times 10^{-10}\text{ m}$ 的射线照射金箔,使金箔发射光电子,打出的电子在磁感强度为 B 的磁场中作半径为 R 的圆运动,实验测得 $BR = 1.88 \times 10^{-4}\text{ T} \cdot \text{m}$. 试求:(1)光电子的最大速度;(2)从金箔打出电子所需做的功是多少?

11. 设加在伦琴射线管两端的电压为 $20\,000\text{ V}$,假设在一段时间内共有 1.25 C 电量的电子从阴极飞出,问它们到达对阴极时,一共获得多大的动能? 电子与对阴极撞击后,假定有 80% 的能量变成了热量,而被 160 g 的极板吸收,则能使对阴极的温度升高多少度(对阴极物质比热为 $0.03\text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$)? 所辐射的伦琴射线的最短波长是多少?

12. 估算氢原子从 $n = 4$ 到 $n = 1$ 直接跃迁时氢原子的反冲动能, 设跃迁前氢原子静止.

13. 在 α 粒子的散射实验中, 设一个射在铜箔上的 α 粒子具有动能为 7.68 MeV , 如果有一铜原子核 ($Z = 29$) 的位置恰好在 α 粒子的前进方向上, 求 α 粒子所能到达的离铜原子核的最短距离?

14. 动能为 $E_\alpha = 4 \text{ MeV}$ 的 α 粒子轰击静止的氮 14 时, 释放出一动能为 $E_p = 2.08 \text{ MeV}$ 的质子, 质子的运动方向与 α 粒子的运动方向成 60° , 求反应能.

B 组

15. 块规是机械加工中用的一种长度标准, 它是一钢质长方体, 它的两个端面经过抛平磨光, 达到相互平行. 图 4-21 中, G_1 、 G_2 是同规号的两个块规, G_1 的长度是标准的, G_2 是要校准的. 校准方法如下: 把 G_1 和 G_2 放在钢质平台上, 使面 and 面严密接触, G_1 、 G_2 上面用一透明平板 T 压住. 如果 G_1 和 G_2 的高度 (即长度) 不等, 微有差别, 则在 T 和 G_1 、 G_2 之间分别形成尖劈形空气薄层, 它们在单色光垂直照射下各产生干涉条纹.

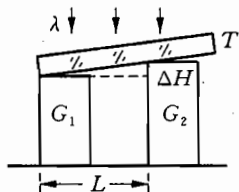


图 4-21

(1) 设入射光的波长为 5893 \AA , G_1 和 G_2 相隔 $L = 5 \text{ cm}$, T 和 G_1 、 G_2 间的干涉条纹间距都是 0.5 mm , 试求 G_2 和 G_1 的高度之差, 怎样判断它们谁长谁短?

(2) 如果 T 和 G_1 间的干涉条纹的间距是 0.5 mm , 而 T 和 G_2 间的是 0.3 mm , 则说明什么问题?

16. 一束光垂直投射在厚度均匀的油膜上, 油膜上方是空气, 下面是玻璃. 所用空气中的入射光波的波长可连续变化. 发现在 5000 \AA 和 7000 \AA 这两个波长处观察到反射光束中的干涉极小值, 而在这两波长间没有其他的波长发生干涉极小. 求油膜厚度, 并问在 5000 \AA 到 7000 \AA 之间, 当入射光波波长为何值时, 反射光得到干涉极大值? 设玻璃对各种波长的可见光的折射率均为 $n_3 = 1.50$,

油膜对可见光的折射率为 $n_2 = 1.38$.

17. 用放射源钋(Po)发射的 α 粒子打在铍核(${}^9_4\text{Be}$)上,产生一种新的粒子和另一生成物,这些新粒子组成的粒子流有以下特点:

(1) 在任意方向的磁场中都不偏转;

(2) 让它与含氢物质中的静止氢核相碰撞,也可把氢核击出,被击出氢核的能量为 $E_N = 4.7 \text{ MeV}$; 让它与含氮物质中的静止氮核相碰撞,也可把氮核击出,被击出氮核的能量为 $E_N = 1.2 \text{ MeV}$. 碰撞可视作为对心完全弹性碰撞,且已知氢核与氮核的质量比为 $1:14$.

试根据以上数据求出新粒子质量与氢核质量之比,对此新粒子是什么粒子作出判断,并写出 α 粒子轰击 ${}^9_4\text{Be}$ 的核反应方程.

18. (1) 试证明当质子和静止的中子发生弹性碰撞时,碰后质子和中子的运动方向之间的夹角为 90° ; (2) 初动能为 $E_K = 7 \text{ MeV}$ 的快中子在氢中减速,设碰撞是弹性的. 平均和碰撞前的方向偏转 $\theta = 45^\circ$, 试求中子的能量减少到 $T = 300 \text{ K}$ 相应的平均热能的碰撞次数.

19. 已知太阳每秒辐射出 $3.8 \times 10^{26} \text{ J}$ 的能量,问:

(1) 太阳每秒钟损失多少吨质量?

(2) 假设太阳放射出的能量是由于“燃烧氢”的核反应, $4 {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2 {}^0_{+1}e + 2\gamma$ 提供,这一核反应放出 28 MeV 的能量. 式中 e 为电子, γ 为中微子,中微子是一种质量远小于电子质量、穿透力极强的中性粒子. 试计算地球上与太阳光垂直的每平方米面积上每秒钟有多少中微子到达.

(3) 假设原始的太阳全部由 ${}^1_1\text{H}$ 和电子组成,且仅有 10% 的 ${}^1_1\text{H}$ 可供“燃烧”,试估算太阳的寿命.

已知:太阳质量为 $M_\text{日} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$, 日地距离 $R = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$. 电子电量 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, 质子质量 $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

20. 在原子反应堆中,用石墨作减速剂,铀核裂变所产生的快中子,通过和碳核不断碰撞而被减速,假设中子与碳核的碰撞是完全弹性碰撞,并且碰撞前碳核是静止的,碰撞后中子和碳核的速度跟碰撞前中子的速度沿同一直线. 已知碳核的质量近似为中子质量的 12 倍,中子原来的能量为 E_0 .

(1) 经过一次碰撞后,中子的能量变为多少?

(2) 若 $E_0 = 1.75 \text{ MeV}$, 试问经过多少次碰撞后,中子的能量才能减少到 0.025 eV ?

21. 一个能量为 20 keV 的正电子和一个静止的电子相遇而湮没产生两个能量相等的光子,如图 4-22 所示. 试求:光子的射出方向与电子的入射方向所成的夹角.

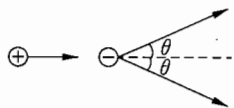


图 4-22

22. 1979 年,7 颗人造卫星同时接收到来自远方的中子星发射出的 γ 射线,经分析确认,这些 γ 光子是电子—正电子湮灭时放出的,即 $e + e^+ \rightarrow n\gamma$, 其中, n 表示光子数目. 已知电子、正电子的静止质量 $m_0 = 8.2 \times 10^{-14} \text{ J}/c^2$, 静止质量为 m_0 的粒子,其能量 E 和动量 p 满足 $E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$, 式中 c 表示光速,普朗克恒量 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. (1) 试证明 $n \neq 1$. (2) 若电子、正电子的动量为零, $n = 2$, 求 γ 光子的频率.

23. 用波长 $\lambda = 5.40 \times 10^3 \text{ \AA}$ 的光垂直射在某一平面上,一半被吸收,一半被反射. 若平面吸收 $2.21 \times 10^2 \text{ J/s} \cdot \text{m}^2$ 的能量,那么:

(1) 在每平方米的面积上,在 1.00 s 内被多少个光子照射?

(2) 在每平方米的面积上,在 1.00 s 内,接收的冲量有多大?

(3) 光子施于该平面的光压是多少?

24. 一红宝石激光脉冲器可发射波长 $\lambda = 6935.9 \text{ \AA}$ 的巨脉冲,假定每个脉冲都可以看作是一个具有能量 $E = 0.3 \text{ J}$ 、持续时间为 $\tau = 0.1 \text{ ms}$ 的平行光束,光束的截面是直径为 5 mm 的圆面,脉冲在折射率为 1 的空气中传播.

(1) 计算一个脉冲内所包含的光子数 N ;

(2) 计算光束单位体积内的能量 ω ;

(3) 设脉冲垂直投射到一个屏上,屏对光是完全吸收的,计算此脉冲在屏上产生的压强.

25. 一薄透镜的焦距 $f = 10 \text{ cm}$, 光心为 O , 主轴为 MN . 现将透镜一切二,剖面通过主轴.

(1) 将切开的两半透镜各沿垂直于剖面的方向拉开,使剖面与 MN 的距离均为 0.1 mm ,移开后的空隙用不透光物质填充组成干

涉装置,如图 4-23 所示. 其中 P 为单色光源($\lambda = 5500 \text{ \AA}$), $PO = 20 \text{ cm}$, B 为垂直于 MN 的屏, $OB = 40 \text{ cm}$.

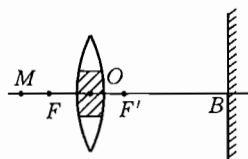


图 4-23

- (a) 用作图法画出干涉光路图;
- (b) 算出屏 B 上呈现的干涉条纹间距;

(c) 如屏向右移动,干涉条纹间距怎么变化?

(2) 将切开的两半透镜沿主轴 MN 方向移开一小段距离,构成干涉装置(图 4-24). P 为单色光源,位于半透镜 L_1 的焦点 F_1 外.

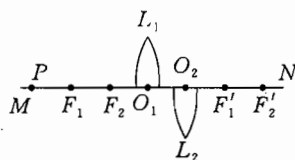


图 4-24

- (a) 用作图法画出干涉光路图;
- (b) 用斜线标出相干光束交叠区;
- (c) 在交叠区放一观察屏,该屏与 MN 垂直,画出屏上干涉条纹的形状.

26. 图 4-25 是双面镜干涉示意图,两平面镜交缝 K 对齐并倾斜一个很小的角度 θ (θ 约为 $\frac{1}{2}^\circ \sim 1^\circ$),在交缝前放一细长的并与 K 相平行的波长为 λ 的单色强光源 S , A 为遮光板,不使 S 的光直接照射在屏 HH' 上,双面镜的两束反射光相遇时产生干涉. 已知 $\overline{SK} = r$, K 距 HH' 为 R , θ , 求在 HH' 上产生的两相邻干涉条纹的间隔 Δy .

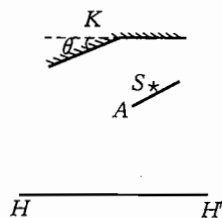


图 4-25

27. 与氢原子相似,可以假设氦的一价正离子(He^+)与锂的二价正离子(Li^{++})核外的那一个电子也是绕核做圆周运动. 试估算 (1) He^+ 、 Li^{++} 的第一轨道半径; (2) 电离能量、第一激发能量; (3) 赖曼系第一条谱线波长分别与氢原子的上述物理量之比.

第五讲 狭义相对论

知识要点和基本方法

为了解决牛顿力学在某些问题上遇到的困难和局限性,爱因斯坦于1905年提出了狭义相对论.这一理论建立在以下两条基本原理之上:

1. 狭义相对性原理:一切物理规律在任何惯性系中具有相同的形式.
2. 光速不变原理:真空中的光速对任何观察者来说都是相同的.

一、时间膨胀和长度收缩

1. 同时性的相对性

当A坐在高速轿车中越过站在地面上的B时,离B等距离的甲、乙两处各发生一个闪电.两处闪电的光同时到达B处,B感觉到甲、乙两处同时闪电.由于A向甲高速行驶,因此A先看到甲处传来的光,后看到乙处传来的光,A感觉到甲处先闪电,乙处后闪电(如图5-1).

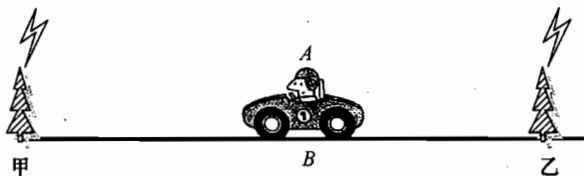


图 5-1

由此可见,一个人认为是同时发生(在不同地点)的两件事情,另一个人可认为不是同时发生的.这是光速不变原理的直接结果.

如果认为光速也满足速度相加法则,那么 A 会认为甲处的光是因传播得快而早到,乙处的光是因传播得慢而迟到. 同时性就不会被破坏了.

2. 时间膨胀

如图 5-2 所示,设 S' 系以速度 u 沿 x 方向相对 S 系运动, S' 系中的 A' 处有一光源,发出的光被平面镜 M 反射回 A' 点. S' 系中的人认为此过程历时

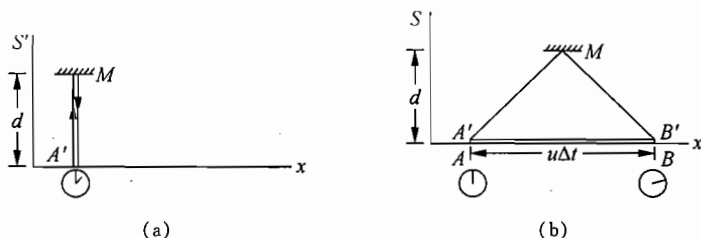


图 5-2

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}.$$

同样是这个过程,在 S 系中的人便认为此过程历时

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{d^2 + \left(\frac{u \cdot \Delta t}{2}\right)^2}}{c} = \frac{2d}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

我们定义发生在同一地点的两件事情的时间间隔叫本征时间,用 Δt_0 表示. 在上例中, S' 系中的人感觉到光发出和返回两件事情都发生在 A' 处,因此他测量的时间 $\Delta t'$ 就是本征时间 Δt_0 . 而 S 系中的人感觉到光发出是在 A 点,返回是在 B 点,因此他测量的是非本征时间.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

显然,非本征时间 Δt 比本征时间 Δt_0 要长一些,或者说运动的时钟

走慢了. 这一效应称为时间膨胀.

3. 长度收缩

同样有一 S' 系以速度 u 沿 x 方向相对 S 系运动, S' 系中固定了一根长 l' 的尺, 如图 5-3 所示. S 系中有一人要测量尺的长度, 他选了一个定点 x_1 , 测得 B' 点和 A' 点先后越过 x_1 点, 间隔时间为 Δt , 于是他认为尺长

$$l = u \cdot \Delta t.$$

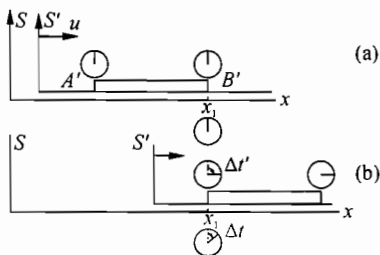


图 5-3

因为 B' 点和 A' 点越过 x , 这两件事情发生在同一地点, 因此 Δt 是本征时间.

S' 系中另有一人也在测量尺的长度, 他测得 B' 点和 A' 点越过 S 系中的 x_1 点历时 $\Delta t'$, 而且 x_1 点以速度 u 向左运动, 所以他认为尺长

$$l' = u \cdot \Delta t'.$$

因 S' 系中的人感到 B' 点和 A' 点越过 x_1 点这两件事情发生在不同的地点, 因此他测得的应该是非本征时间, 所以有

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

我们定义相对尺静止的人 (即 S' 系中的人) 测得的尺长为本征长度 l_0 (即上述的 l'), 那么

$$l_0 = l' = u \cdot \Delta t' = u \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

故

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

可见运动的尺缩短了. 这一效应称为长度收缩.

二、洛伦兹变换

1. 洛伦兹变换

设 S 系和 S' 系的坐标轴相互平行, x 轴与 x' 轴重合. 假如 S' 系以速度 u 沿 x 正方向匀速运动, 在 $t = t' = 0$ 时, 两坐标系的原点 O 与 O' 重合, 那么某事件在 S 系中的时空坐标 (x, y, z, t) 与在 S' 系中的时空坐标 (x', y', z', t') 之间有什么关系呢?

设在 S' 系中, 事件发生在离 $y'z'$ 平面 x' 处, 由长度收缩, S 系中的人看来, 此距离为 $x' \sqrt{1 - u^2/c^2}$, 而 $y'z'$ 平面离 yz 平面的距离显然为 ut (如图 5-4(a)), 于是该事件在 S 系中的坐标

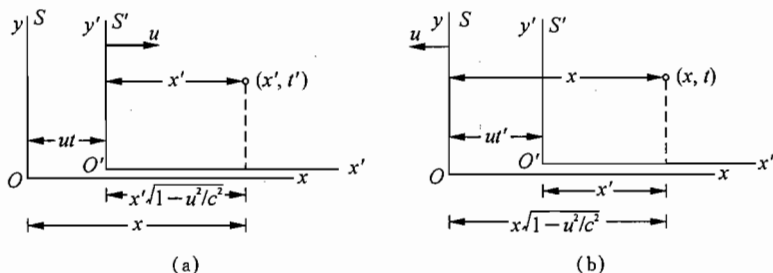


图 5-4

$$x = ut + x' \sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

可解得

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1)$$

同理, 若在 S 系中的人看来事件发生在与 yz 平面相距 x 处, 由长度收缩, S' 系中的人感到此距离为 $x \sqrt{1 - u^2/c^2}$, 而 yz 平面离 $y'z'$ 平面 ut' (如图 5-4(b)), 于是该事件在 S' 系中的坐标

$$x' = x \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - ut'.$$

可解得

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2)$$

由①、②式消去 x' , 可得到 t' 与 x 、 t 的关系

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

由此得洛伦兹变换

$$\begin{cases} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

及其逆变换

$$\begin{cases} x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

当 $u \ll c$, 略去 u^2/c^2 , 洛伦兹变换过渡到伽利略变换.

2. 速度变换

设有物体从 $t = t' = 0$ 开始自原点出发沿 x' 轴匀速运动, 经 t' 时

间后到达 $x' = v't'$ 点. 在 S' 系中, 物体到达这一事件的时空坐标为 $(x' = v't', t')$. 设在 S 系中, 这一事件的时空坐标为 (x, t) , 由洛伦兹变换, 有

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{v't' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{(v' + u)t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t' + \frac{u}{c^2}v't'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\left(1 + \frac{u}{c^2}v'\right)t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

在 S 系中, 有 $x = vt$, 则

$$v = \frac{x}{t} = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'} \quad (3)$$

其逆变换为

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v}.$$

以上两式即速度变换. 当 $u \ll c$, $v' \ll c$ 时, 两式过渡为经典速度相加法则.

用洛伦兹变换可以说明同时性的相对性:

设有两事件, 在 S 系中的时空坐标为 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2) , 由洛伦兹变换, 在 S' 系中的时间为

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

如果 $t_2 = t_1$, 但 $x_2 \neq x_1$, 就有 $t'_2 \neq t'_1$. 可见, 在 S 系中同时在不同地点发生的两事件, 在 S' 系中不再是同时发生的. 同理有

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1 + \frac{u}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

如果 $t'_2 = t'_1$, 但 $x'_2 \neq x'_1$, 则 $t_2 \neq t_1$, 即在 S' 系中同时在不同地点发生的两事件, 在 S 系中不再是同时发生的.

相对论的一系列结论都是从“光速不变原理”推导出来的, 包括洛仑兹变换. 那么用这些结论当然可以“验证”光速在任何参照系中不变的结论. 以 $v' = c$ 代入③式, 可得

$$v = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c^2} \cdot c} = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c}} = c.$$

用洛仑兹变换也可以“验证”任何物体的速度不可能大于真空中的光速 c .

设有一飞行器以 $u = 0.6c$ 的速度在地面上空飞行. 如果这时从飞行器上沿其前进方向发射一物体, 其相对飞行器的速度为 $0.8c$, 问从地面上观察, 该物体的速度多大?

以 $v' = 0.8c$, $u = 0.6c$ 代入③式, 得

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'} = \frac{0.8c + 0.6c}{1 + \frac{0.8 \times 0.6}{c^2}c^2} = 0.946c,$$

此即物体相对地面的速度.

三、相对论的动量和能量

1. 质速关系

现在我们用一个特殊的例子来推导相对论中粒子的质量和速度

的关系.

设在 S' 系中有一对全同粒子 A 、 B 沿 x' 轴相向运动, 速度均为 v , 正碰后成为一个复合粒子, 且静止不动(图 5-5), 设 S' 系以速度 v 沿同一直线相对 S 系运动, 则在 S 系中, 粒子 B 静止不动, 粒子 A 以速度 V 运动, 其中 V 可由速度变换求得

$$V = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad (4)$$

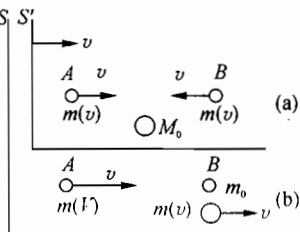


图 5-5

碰后, 复合粒子以速度 v 运动.

我们现在 S 系中列出此过程的动量和质量关系. 相对论中认为动量和质量仍应守恒. 可以设想质量为速率的函数, 于是有

$$m(V)V = M(v)v \text{ (动量守恒),}$$

$$m(V) + m_0 = M(v) \text{ (质量守恒).}$$

由以上两式消去 M , 化简得

$$\frac{m(V)}{m_0} = \frac{v}{V - v} \quad (5)$$

由④式, 可将上式右边化为 V 的显函数. 将④式变形得

$$\frac{V}{c^2}v^2 + V - 2v = 0,$$

$$\text{即} \quad v^2 - \frac{2c^2}{V}v + c^2 = 0.$$

由此解得

$$v = \frac{c^2}{V} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{V}\right)^2 - c^2} = \frac{c^2}{V} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right).$$

当 $v \ll c$ 时, 显然应有 $V = 2v$, 即 $v = \frac{V}{2}$, 可见上式根号前应取负号,

而有

$$v = \frac{c^2}{V} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right).$$

于是

$$\begin{aligned} V - v &= V - \frac{c^2}{V} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right) = \frac{c^2}{V} \left(\frac{V^2}{c^2} - 1 + \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right) \\ &= \frac{c^2}{V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right). \end{aligned}$$

代入⑤式,得

$$\begin{aligned} \frac{m(V)}{m_0} &= \frac{v}{V - v} = \frac{\frac{c^2}{V} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right)}{\frac{c^2}{V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ m(V) &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

由于 V 的任意性,有

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

⑥式即质速关系. 它与实验完全符合.

2. 相对论动量

相对论中,动量仍定义为质量与速度的乘积,但质量是速率的函数,于是动量

$$p = m(v)v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

其实,相对论动量概念在上文导出质速关系时已经用到过.

3. 相对论能量

相对论中,力仍定义为动量对时间的变化率

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

相对论中,动能定理仍然成立,但动能的形式将不同. 设有力 F 沿着粒子的运动方向施加于粒子. 力的元功

$$\begin{aligned} Fds &= \frac{dp}{dt} ds = v dp = v d(mv) \\ &= v^2 dm + mv dv. \end{aligned}$$

由质速关系⑥式,有

$$m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2,$$

即

$$m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2.$$

两边微分

$$c^2 2m dm - m^2 2v dv - v^2 2m dm = 0,$$

即

$$c^2 dm = mv dv + v^2 dm.$$

代入 Fds 表达式

$$Fds = c^2 dm.$$

由动能定理

$$Fds = dE_k,$$

于是有

$$dE_k = c^2 dm,$$

两边积分

$$E_{k2} - E_{k1} = \int_1^2 c^2 dm.$$

若取初态 $v_1 = 0$, 则 $E_{k1} = 0$, 终态 $v_2 = v$, 对应的动能为 E_k , 质量为 $m(v)$, 则有

$$E_k = m(v)c^2 - m_0c^2$$

式中 m_0c^2 与粒子处于静止状态的能量相对应, 称为粒子的静能. $m(v)c^2$ 为粒子处于速率为 v 的运动状态时的能量, 它在数值上等于动能 E_k 与静能 m_0c^2 之和, 爱因斯坦把 $m(v)c^2$ 称为粒子的总能量, 用 E 表示, 即

$$E = m(v)c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 \quad (7)$$

式中 v 为粒子的速度. ⑦式常称为质能关系. 粒子的动能等于总能量与静能之差

$$E_k = m(v)c^2 - m_0c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 - m_0c^2 \quad (8)$$

当 $v \ll c$ 时, $1 / \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$, 于是

$$E_k \approx m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) - m_0c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

与牛顿力学中动能表达式相同. 这表明牛顿力学中动能表达式是相对论中动能表达式⑧在 $v \ll c$ 时的特例.

质能关系式⑦大大拓宽了我们关于质量和能量这两个概念的认识, 把质量的变化和能量的变化联系起来. 当粒子的质量改变 Δm 时, 必伴随着总能量的变化 ΔE , 两者的关系为

$$\Delta E = \Delta mc^2.$$

核反应中所释放的巨大能量, 正是反应前后粒子质量微小变化(亏损)的结果. 原子弹和核反应堆就是根据这一原理制成的. 尽管质能关系原是爱因斯坦的一种假设, 但现已为大量实践所证实, 它为人类开发利用能源提供了一条新途径.

4. 相对论能量与动量的关系

由质能关系⑦式, 有

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2.$$

可得

$$E^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^4,$$

即

$$E^2 - \frac{E^2 v^2}{c^2} = m_0^2 c^4.$$

但 $E = mc^2$, $E^2 v^2 / c^2 = m^2 v^2 c^2 = p^2 c^2$, 上式化为

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4,$$

或

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4.$$

此即相对论能量与动量的关系式,可用图 5-6 所示的三角形表示.

对于静质量 $m_0 = 0$ 的粒子,上式变为

$$E = pc.$$

光子就是静质量为零的粒子.对光子,有 $m_0 c^2$

$$E = h\nu,$$

故光子的动量 $p = h\nu / c$,

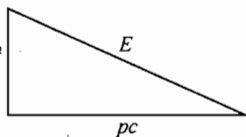


图 5-6

式中 h 为普朗克常数, ν 为光的频率. 可见光子的能量和动量均为频率的函数(光子的速度恒为 c).

例题精讲

例 1 天津和北京相距 120 km. 北京某日上午 9 时整有一老者去世,同日天津于北京时间上午 9 时 0 分 0.000 3 秒有一婴儿诞生. 试问,在以 $0.8c$ 的速率沿北京到天津方向飞行的飞行器中观测,这两个事件的时间间隔是多少? 何者发生在前?

解 设地面为 S 系,飞行器为 S' 系. 在 S 系中,北京坐标为 x_1 ,天津坐标为 x_2 ,老者去世时间为 t_1 ,婴儿诞生时间为 t_2 . 由题意, $u = 0.8c$, $x_2 - x_1 = 120$ km, $t_2 - t_1 = 0.000 3$ s, 由洛伦兹变换有

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{0.000 3 - \frac{0.8c}{c^2} \times 1.2 \times 10^5}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \\ &= -\frac{1}{3} \times 10^{-4} \text{ s} = -3.33 \times 10^{-5} \text{ s}. \end{aligned}$$

可见在 S' 系中看来, 婴儿诞生在前, 比老者去世早 3.33×10^{-5} 秒, 先后次序颠倒了.

例 2 μ 子在相对自身静止的惯性参考系中的平均寿命 $\tau_0 \approx 2.0 \times 10^{-6}$ s. 宇宙射线与大气在高空某处发生核反应产生一批 μ 子, 以 $v = 0.99c$ 的速度 (c 为真空中的光速) 向下运动并衰变. 根据放射性衰变定律, 相对给定惯性参考系, 若 $t = 0$ 时刻的粒子数为 $N(0)$, t 时刻剩余的粒子数为 $N(t)$, 则有 $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$, 式中 τ 为相对该惯性系粒子的平均寿命. 若能到达地面的 μ 子数为原来的 5%, 试估算 μ 子产生处相对于地面的高度 h . 不考虑重力和地磁场对 μ 子运动的影响.

解 因 μ 子在相对自身静止的惯性系中的平均寿命

$$\tau_0 \approx 2.0 \times 10^{-6} \text{ s},$$

根据时间膨胀效应, 在地球上观测到的 μ 子平均寿命为 τ ,

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

代入数据得

$$\tau = 1.4 \times 10^{-5} \text{ s}.$$

相对地面, 若 μ 子到达地面所需时间为 t , 则在 t 时刻剩余的 μ 子数为

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau},$$

根据题意有

$$\frac{N(t)}{N(0)} = e^{-t/\tau} = 5\%.$$

对上式等号两边取 e 为底的对数得

$$t = -\tau \ln \frac{5}{100},$$

代入数据得

$$t = 4.19 \times 10^{-5} \text{ s}.$$

根据题意, 可以把 μ 子的运动看作匀速直线运动, 有

$$h = vt,$$

代入数据得

$$h = 1.24 \times 10^4 \text{ m}.$$

例3 前灯效应. (1) 在 S' 系中, 一光束沿与 x' 轴成 θ_0 角的方向射出, 求在 S 系中光束与 x 轴所夹之角 θ , 设 S' 系以速率 u 沿 x 轴相对 S 系运动.

(2) 一光源在其静止的坐标系中向各个方向均匀地辐射光线, 当它以接近于光速的速率 u 在某一坐标系中运动时, 它在前进的方向上强烈地辐射. 这种现象叫做前灯效应, 在同步加速器中非常显著. 在那里电子以相对论性的速率运动, 在前进方向上一窄束圆锥中发射光线. 若发射出的辐射有一半在 10^{-3} 弧度的圆锥张角中, 应用 (1) 中的结果求光源的速率.

解 (1) 设光在 $t=t'=0$ 时从原点射出, 在 t' 时刻到达 $P(x', y')$, 其中 $x' = ct' \cos \theta_0$, $y' = ct' \sin \theta_0$, 如图 5-7 所示. 由洛伦兹变换, 在 S 系中 P 点坐标为

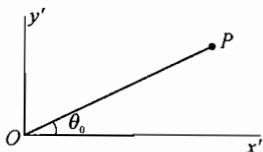


图 5-7

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{ct' \cos \theta_0 + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

$$y = y' = ct' \sin \theta_0,$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{ct' \sin \theta_0}{ct' \cos \theta_0 + ut'} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 + \frac{u}{c}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (1)$$

或
$$\cos \theta = \frac{\cos \theta_0 + \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c} \cos \theta_0} \quad (2)$$

(2) 由题意, 应取 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta = 10^{-3}$, 代入①中 $\tan \theta$ 表达式, 由 $\tan \theta \approx \theta$, 有

$$\tan \theta \approx \theta = 10^{-3} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} + \frac{u}{c}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{c}{u} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}},$$

$$\frac{c^2}{u^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = 10^{-6},$$

$$\frac{c^2}{u^2} = 1 + 10^{-6},$$

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{1 + 10^{-6}},$$

$$u = c \sqrt{\frac{1}{1 + 10^{-6}}} \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \times 10^{-6}\right) = c(1 - 5 \times 10^{-7}).$$

例 4 封闭的车厢中有一点光源 S , 在距光源 l 处有一半径为 r 的圆孔, 其圆心为 O_1 . 光源一直在发光, 并通过圆孔射出. 车厢以高速 v 沿固定在水平地面上的 x 轴正方向匀速运动, 如图 5-8 所示. 某一时刻, 点光源 S 恰位于 x 轴的原点 O 的正上方, 取此时刻作为车厢参考系与地面参考系的时间零点. 在地面参考系中坐标为 x_A 处放一半径为 R ($R > r$) 的不透光的圆形挡板, 板面与圆孔所在的平面都与 x 轴垂直. 板的圆心 O_2 与 S 、 O_1 都等高. 起始时刻经圆孔射出的光束会有部分从挡板周围射到挡板后面的大屏幕(图 5-8 中未画出)上. 由于车厢在运动, 将会出现挡板将光束完全遮住, 即没有光射到屏上的情况. 不考虑光的衍射, 试求:

- (1) 车厢参考系中(所测出的)刚出现这种情况的时刻.
- (2) 地面参考系中(所测出的)刚出现这种情况的时刻.

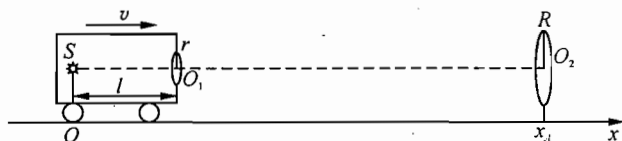


图 5-8

解 (1) 相对于车厢参考系, 地面连同挡板以速度 v 趋向光源 S 运动. 由 S 发出的光经小孔射出后成锥形光束, 随离开光源距离的增大, 其横截面积逐渐扩大. 若距 S 的距离为 L 处光束的横截面正

好是半径为 R 的圆面,如图 5-9 所示,则有

$$\frac{r}{l} = \frac{R}{L},$$

可得

$$L = \frac{Rl}{r}.$$

①

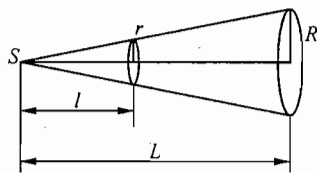


图 5-9

设想车厢足够长,并设想在车厢前端距 S 为 L 处放置一个半径为 R 的环,相对车厢静止,则光束恰好从环内射出.当挡板运动到与此环相遇时,挡板就会将光束完全遮住.此时,在车厢参考系中挡板离光源 S 的距离就是 L .在车厢参考系中,初始时,根据相对论,挡板离光源的距离为

$$x_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2)$$

故出现挡板完全遮住光束的时刻为

$$t = \frac{x_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - L}{v} \quad (3)$$

由①、③式得

$$t = \frac{x_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} - \frac{Rl}{rv} \quad (4)$$

(2) 相对于地面参考系,光源与车厢以速度 v 向挡板运动.光源与孔之间的距离缩短为

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5)$$

而孔半径 r 不变,所以锥形光束的顶角变大,环到 S 的距离即挡板完全遮光时距离应为

$$L' = \frac{Rl'}{r} = \frac{Rl}{r} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (6)$$

初始时,挡板离 S 的距离为 x_A , 出现挡板完全遮住光束的时刻为

$$t' = \frac{x_A - L'}{v} = \frac{x_A}{v} - \frac{Rl}{rv} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7)$$

例 5 串列静电加速器是加速质子、重离子以进行核物理基础研究以及核技术应用研究的设备,其构造示意图如图 5-10: S 是产生负离子的装置,称为离子源;中间部分 N 为充有氮气的管道,通过高压装置 H 使其对地有 $5.00 \times 10^6 \text{ V}$ 的高压. 现将氢气通入离子源 S . S 的作用是使氢分子变为氢原子,并使氢原子粘附上一个电子,成为带有一个电子电荷的氢负

离子. 氢负离子(其初速度为零)在静电场的作用下,形成高速运动的氢负离子束流. 氢负离子束射入管道 N 后将与氮气分子发生相互作用,这种

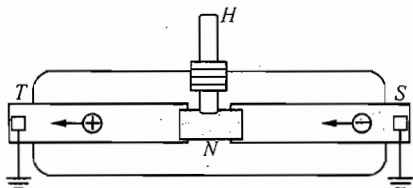


图 5-10

作用可使大部分的氢负离子

失去粘附在它们上面的多余的电子而成为氢原子,又可能进一步剥离掉氢原子的电子使它成为质子. 已知氮气与带电粒子的相互作用不会改变粒子的速度. 质子在电场的作用下继续飞向串列静电加速器的终端靶子 T . 求在考虑相对论效应的情况下,质子到达 T 时的速度 v .

电子电荷量 $q = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$, 质子的静止质量 $m_0 = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

解 带电粒子在静电场中从 S 到 T 的运动过程中,经历了从 S 到 N 和从 N 到 T 的两次加速. 粒子带的电荷量 q 的大小均为 $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$, 若以 U 表示 N 与地之间的电压,则粒子获得的动能

$$E_k = 2qU \quad (1)$$

质子在 T 处的质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (2)$$

氢负离子在 S 处的能量为 $m_0 c^2$, 质子到达 T 处时具有的能量为 mc^2 , 根据相对论能量关系有

$$mc^2 - m_0 c^2 = E_k \quad (3)$$

①式、②式及③式联立, 得

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1 + \frac{2qU}{m_0 c^2}$$

代入数据解得

$$v = 4.34 \times 10^7 \text{ m/s.}$$

例 6 试从相对论能量和动量的角度分析论证:

(1) 一个光子与真空中处于静止状态的自由电子碰撞时, 光子的能量不可能完全被电子吸收.

(2) 光子射到金属表面时, 其能量有可能完全被吸收并使电子逸出金属表面, 产生光电效应.

解 (1) 设电子处于静止状态时的质量为 m_0 , 光子的频率为 ν , 假定电子能完全吸收光子的能量, 吸收光子后, 电子以速度 v 运动, 则这一过程应遵循动量守恒定律, 有

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (1)$$

碰撞后系统的总能量为

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (2)$$

由①、②式消去 v , 得

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 \nu^2} \quad (3)$$

碰撞前电子与光子的总能量为

$$E_0 = h\nu + m_0c^2 \quad (4)$$

由③、④式

$$E^2 - E_0^2 = (m_0^2c^4 + h^2\nu^2) - (h\nu + m_0c^2)^2 = -2h\nu m_0c^2 \neq 0 \quad (5)$$

这表明,所假设的过程不符合能量守恒定律,因此这一过程实际上不可能发生.

(2) 束缚在金属中的电子和射入金属的光子二者构成的系统在发生光电效应的过程中动量不守恒,只需考虑能量转换问题. 设电子摆脱金属的束缚而逸出,需要对它做功至少为 W (逸出功),逸出金属表面后电子的速度为 v ,入射光子的能量为 $h\nu$,电子的静止质量为 m_0 ,若能产生光电效应,则有

$$h\nu \geq \left[\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - m_0c^2 \right] + W \quad (6)$$

逸出电子的速度 v 一般都比光速小很多,故有

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \quad (7)$$

忽略高阶小量,只取⑦式中的前两项,代入⑥式,可得到

$$h\nu \geq \frac{1}{2}m_0v^2 + W \quad (8)$$

可见,只要 $h\nu \geq W$, ⑧式就能成立,光电效应就能产生.

例7 设某原子核处于基态时的静止质量为 m_0 ,处于激发态时其能量与基态能量之差为 ΔE ,且受激原子核处于自由状态.

(1) 假设处于激发态的原子核原先静止,在发射一个光子后回到基态,试求其发射光子的波长 λ_0 .

(2) 由于无规则热运动,大量处于激发态的原子核原先不是静止的,可以沿任何方向运动,且速度的大小也是无规则的,可具有任何值. 现只考察那些相对实验室是向着或背着仪器做直线运动的激发态原子核,假定它们速度的最大值是 u ,试求这些受激核所发射光

子的最大波长和最小波长之差 $\Delta\lambda$ 与 λ_0 之比.

已知普朗克常量为 h , 真空中的光速为 c .

解 (1) 激发态核的能量为

$$E = m_0 c^2 + \Delta E \quad (1)$$

在发射光子的过程中系统动量守恒, 用 p 表示发射光子后核的动量, ν_0 表示光子的频率, 取光子运动方向为正方向, 有

$$0 = p + \frac{h\nu_0}{c} \quad (2)$$

基态核因反冲具有的动量为

$$p = -\frac{h\nu_0}{c} \quad (3)$$

因发射过程中的能量守恒, 有

$$m_0 c^2 + \Delta E = mc^2 + h\nu_0 \quad (4)$$

式中 m 表示基态核的动质量. 若用 v 表示基态核因反冲具有的速度, 则基态核的动量和动质量可表示成

$$p = mv \quad (5)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

由③~⑥各式可得

$$h\nu_0 = \frac{\Delta E(2m_0 c^2 + \Delta E)}{2(m_0 c^2 + \Delta E)} \quad (7)$$

因

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} \quad (8)$$

故得

$$\lambda_0 = \frac{2hc(m_0 c^2 + \Delta E)}{\Delta E(2m_0 c^2 + \Delta E)} \quad (9)$$

(2) 考虑激发态核向着仪器运动的情况. 对于以最大速度 u 向仪器运动的激发态核, 若用 p_1 表示发射光子后核的动量, 用 ν_1 表示

光子的频率,则由动量守恒有

$$\frac{\left(m_0 + \frac{\Delta E}{c^2}\right)u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = p_1 + \frac{h\nu_1}{c} \quad (10)$$

由能量守恒

$$\frac{\left(m_0 + \frac{\Delta E}{c^2}\right)c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_1 c^2 + h\nu_1 \quad (11)$$

其中 m_1 表示基态核的动质量. 若用 v_1 表示基态核的速度, 则有

$$p_1 = m_1 v_1 \quad (12)$$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \quad (13)$$

由⑨~⑬式可得

$$h\nu_1 = h\nu_0 \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} \quad (14)$$

注意到⑧式, 有

$$\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \quad (15)$$

由⑮式可看出, 向着仪器运动且速度小于 u 的激发态核, 它们发出的光子的波长比 λ_1 大, 速度大小分布在零与 u 之间的激发态核发出的光子的波长分布在 λ_0 与 λ_1 之间.

再考虑激发态背离仪器运动的情况. 对于以最大速度 u 背离仪器运动的激发态核, 用类似于上面的讨论有

$$-\frac{\left(m_0 + \frac{\Delta E}{c^2}\right)u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = p_2 + \frac{h\nu_2}{c} \quad (16)$$

$$\frac{\left(m_0 + \frac{\Delta E}{c^2}\right)c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_2 c^2 + h\nu_2 \quad (17)$$

式中 p_2 为发射光子后基态核的动量, ν_2 为光子的频率, m_2 为基态核的动质量. 若基态核的速度为 v_2 , 则有

$$p_2 = m_2 v_2 \quad (18)$$

$$m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \quad (19)$$

由⑬~⑮各式解得

$$h\nu_2 = h\nu_0 \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \quad (20)$$

注意到⑧式, 得

$$\lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} \quad (21)$$

由⑳式可以看出, 背离仪器运动且速度小于 u 的激发态核, 它们发出的光子的波长都比 λ_2 小. 速度大小分布在 u 与零之间的激发态核发出的光子的波长分布在 λ_2 与 λ_0 之间. 由此可知

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_0 \left(\sqrt{\frac{c+u}{c-u}} - \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \right) \quad (22)$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{2u}{\sqrt{c^2 - u^2}} \quad (23)$$

例 8 在高能物理中, 实验证明, 在实验室参考系中, 一个运动的质子与一个静止的质子相碰时, 碰后可能再产生一个质子和一个反质子, 即总共存在三个质子和一个反质子. 试求发生这一情况时, 碰前那个运动质子的能量 (对实验室参考系) 的最小值 (即阈值) 是多少.

已知质子和反质子的静止质量都是 $m_0 = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$. 不考

虑粒子间的静电作用。

解 从实验室参考系来看,碰前系统的总动量等于运动的那个质子的动量,设其方向沿 x 轴正方向,碰撞前后系统的总动量守恒,总能量守恒。若要碰后能存在三个质子和一个反质子且总能量为最小值,则可论证这四个粒子的动量必定相等。

(1) 先讨论碰后四个粒子的动量都沿 x 轴正方向的情况。

令 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 分别表示它们动量的大小,这四个动量中,若有任何两个不相等,如 $p_1 \neq p_2$,设 $p_1 < p_2$,则若将 p_1 增加 Δp ($\Delta p < p_2 - p_1$) 而将 p_2 减少 Δp (这时总动量不变),则有

$$(p_1 + \Delta p)^2 - p_1^2 = 2p_1\Delta p + (\Delta p)^2,$$

$$p_2^2 - (p_2 - \Delta p)^2 = 2p_2\Delta p - (\Delta p)^2.$$

这样一来,第一个粒子能量的平方增加了 $c^2[2p_1\Delta p + (\Delta p)^2]$,而第二个粒子能量的平方减少了 $c^2[2p_2\Delta p - (\Delta p)^2]$,两个粒子能量平方的净增量为

$$\begin{aligned} & c^2[2p_1\Delta p + (\Delta p)^2] - c^2[2p_2\Delta p - (\Delta p)^2] \\ &= c^2[2\Delta p(p_1 - p_2 + \Delta p)]. \end{aligned}$$

因已设 $p_1 < p_2$,且 $\Delta p < p_2 - p_1$,所以净增量是负的,总能量将减少。这就是说,设 $p_1 \neq p_2$ 时对应的总能量并不是最小值。由此可判断,四个粒子的动量必相等。

(2) 若四个粒子中,有一个粒子其动量 p_1 沿 x 轴的负方向,因为总动量守恒,则必有沿 x 轴正方向运动的另一粒子的动量增加了 p_1 ,因为能量的平方与 p^2 成线性关系,所以这时的总能量必然大于 p_1 沿 x 轴的正方向运动时的能量。也就是说,只要四个粒子中,有沿 x 轴的负方向运动的,则总能量必不是最小值。

(3) 若四个粒子的动量的方向不在同一直线上,这时将它们沿 x 轴方向和垂直于 x 轴方向分解,沿 x 轴方向总动量守恒;垂直于 x 轴方向的动量互相抵消,但它们却使粒子的能量增大了,也就是说,这时的能量也不是最小值。

总结以上可见,要想碰后四个粒子的总能量最小,根据总动量守

恒、能量守恒及相对论能量和动量关系式可知,碰后四个粒子的动量必相等。

设碰前运动质子的动量为 p , 质量为 m , 碰后四个粒子的动量为 p_1 、 p_2 、 p_3 和 p_4 , 四个粒子的质量分别为 m_1 、 m_2 、 m_3 和 m_4 , 根据动量守恒和能量守恒, 有

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4, \\ mc^2 + m_0c^2 &= m_1c^2 + m_2c^2 + m_3c^2 + m_4c^2. \end{aligned}$$

由上面论述可知

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{p}{4}.$$

碰后四个粒子的能量相等从而质量必相等。以 m' 表示碰后四个粒子中每个粒子的质量,

$$mc^2 + m_0c^2 = 4m'c^2.$$

对碰前那个运动的质子, 由相对论能量和动量关系有

$$(mc^2)^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4.$$

对四个粒子中任一个粒子, 由相对论能量和动量关系有

$$(m'c^2)^2 = c^2 \left(\frac{p}{4} \right)^2 + m_0^2 c^4.$$

可得

$$mc^2 = 7m_0c^2.$$

代入数据得

$$mc^2 = 1.05 \times 10^{-9} \text{ J}.$$

例 9 两个静质量均为 m_0 的粒子以 $\beta = \frac{v}{c} = 0.5$ 的速率从一共同点反向运动, 求

- (1) 每个粒子相对共同点的动量和能量;
- (2) 一个粒子在另一个粒子处于静止的参照系中的动量和能量.

解 (1) 每个粒子的动量

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta c = \frac{m_0}{\sqrt{1-0.5^2}} \cdot 0.5c = 0.58m_0c.$$

每个粒子的能量

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-0.5^2}} c^2 = 1.15m_0c^2.$$

(2) 在一个粒子处于静止的参照系中另一个粒子的速度

$$v' = \frac{0.5c + 0.5c}{1 + \left(\frac{0.5c}{c}\right)^2} = 0.8c.$$

于是在这个参照系里,粒子的动量

$$p' = \frac{m_0}{\sqrt{1-0.8^2}} \times 0.8c = 1.33m_0c,$$

能量

$$E' = \frac{m_0}{\sqrt{1-0.8^2}} c^2 = 1.67m_0c^2.$$

例 10 在北京的正、负电子对撞机中,电子可以被加速到动能 $E_k = 2.8 \times 10^3 \text{ MeV}$. 这种电子的速率比光速差多少? 这样的电子动量多大? 已知电子的静能为 $E_0 = 0.511 \text{ MeV}$.

解 电子的总能量

$$E = E_k + E_0.$$

由质能关系

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c^2.$$

$$\text{电子动能 } E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right],$$

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right]}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1.$$

由此解得

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(1 + \frac{E_k}{E_0}\right)^{-2},$$

而
$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{(c+v)(c-v)}{c^2} \approx \frac{2c(c-v)}{c^2} = 2 \frac{c-v}{c},$$

于是
$$\frac{c-v}{c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_k}{E_0}\right)^{-2},$$

由题意,
$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{2.8 \times 10^3}{0.511} = 5.48 \times 10^3,$$

代入上式,得

$$\begin{aligned} c-v &= \frac{c}{2} (1 + 5.48 \times 10^3)^{-2} \approx \frac{c}{2} (5.48 \times 10^3)^{-2} \\ &= \frac{1}{2} \times 3.0 \times 10^8 \times (5.48 \times 10^3)^{-2} = 4.995 \text{ m/s} \\ &\approx 5 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

电子动量

$$\begin{aligned} p = mv &\approx mc = \frac{mc^2}{c} \approx \frac{E_k}{c} = \frac{2.8 \times 10^3 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}{3 \times 10^8} \\ &= 1.49 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned}$$

例 11 一个静质量为 m_0 的粒子以 $0.8c$ 的速率同另一个处于静止状态的相同粒子撞击而形成一复合粒子. 试问复合粒子的静质量和速率各是多少?

解 碰撞过程中能量和动量守恒. 由能量守恒,有

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 + m_0 c^2 = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} c^2 \quad \textcircled{1}$$

式中 M_0 是复合粒子的静质量, u 是它的速率, $v = \frac{4}{5}c$ 是原出射粒子的速率. 由动量守恒,有

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}u \quad (2)$$

两式相除即得

$$\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} = \frac{1}{u},$$

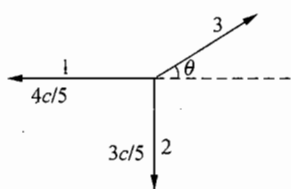
解出 u 并以 $v = \frac{4}{5}c$ 代入得

$$u = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0.8c}{1 + \sqrt{1 - (0.8)^2}} = 0.5c,$$

代入②得

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{m_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{u} = m_0 \frac{\sqrt{1 - 0.5^2} \times 0.8c}{\sqrt{1 - 0.8^2} \times 0.5c} = \frac{4}{\sqrt{3}} m_0 \\ &= 2.31 m_0. \end{aligned}$$

例 12 一个静质量为 M_0 的粒子当其处于静止状态时衰变成静质量相同的三个全同粒子, 其中两个粒子(以 1 和 2 标记, 如图 5-11)的速度和方向如图所示。



(1) 试计算粒子 3 的速度 v 的大小和方向(用 θ 表示);

(2) 求每个粒子的静质量。

图 5-11

解 (1) 设全同粒子的静质量为 m_0 , 由动量守恒

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - (4/5)^2}} \frac{4}{5}c = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v \cos \theta \quad (1)$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - (3/5)^2}} \frac{3}{5}c = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v \sin \theta \quad (2)$$

由能量守恒

$$M_0 c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-(4/5)^2}} c^2 + \frac{m_0}{\sqrt{1-(3/5)^2}} c^2 + \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} c^2 \quad (3)$$

由②/①式,得

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{1-(3/5)^2}} \frac{3}{5} / \frac{1}{\sqrt{1-(4/5)^2}} \frac{4}{5} = \frac{9}{16},$$

$$\cos \theta = \frac{16}{\sqrt{16^2 + 9^2}} = \frac{16}{\sqrt{337}},$$

代入①,得

$$v = \sqrt{\frac{337}{481}} c = 0.837c.$$

粒子3的速率为 $0.837c$, 与粒子1的运动方向反方向成 $\theta = \tan^{-1} \frac{9}{16}$ 的夹角.

(2) 由式③得

$$m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(4/5)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(3/5)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-337/481}} \right) = M_0$$

$$m_0 = 0.21M_0.$$

例 13 一粒子携带动能 E_k 与另一个静质量相同的静止粒子发生弹性碰撞, 碰后入射粒子的散射角与靶粒子的反冲角相等, 求此散射角. 设两粒子的静能皆为 E_0 .

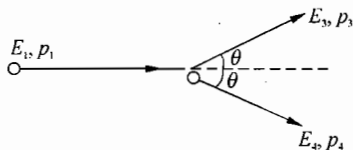


图 5-12

解 弹性碰撞的特点是不仅碰撞前后的动量不变, 而且碰撞前后的动能也不变. 由于碰撞前后总能量不变, 故碰撞前后动能不变意味着碰撞前后静能不变, 即每个粒子的静质量在碰撞前后保持不变.

设碰前入射粒子的动量为 p_1 , 总能量为 E_1 , 碰后入射粒子与靶粒子的动量和总能量各为 p_3 , E_3 和 p_4 , E_4 , 则由题意, 有 $E_1 = E_k + E_0$.

$$\text{由能量守恒有} \quad E_1 + E_0 = E_3 + E_4 \quad ①$$

$$\text{由动量守恒有} \quad p_1 = (p_3 + p_4) \cos \theta \quad ②$$

$$p_3 \sin \theta = p_4 \sin \theta \quad ③$$

由③式得 $p_3 = p_4$, 由能量动量关系即可知 $E_3 = E_4$, 由①式

$$E_3 = E_4 = \frac{1}{2}(E_1 + E_0) = \frac{1}{2}(E_k + 2E_0),$$

$$\text{由} \quad E_1^2 = p_1^2 c^2 + E_0^2, \quad E_3^2 = p_3^2 c^2 + E_0^2,$$

$$\text{可得} \quad p_1^2 = \frac{1}{c^2}(E_1^2 - E_0^2), \quad p_3^2 = \frac{1}{c^2}(E_3^2 - E_0^2).$$

代入②式, 注意 $p_3 = p_4$, 得

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{p_1^2}{4p_3^2} = \frac{\frac{1}{c^2}(E_1^2 - E_0^2)}{4 \cdot \frac{1}{c^2}(E_3^2 - E_0^2)} = \frac{(E_k + E_0)^2 - E_0^2}{4 \left[\frac{1}{4}(E_k + 2E_0)^2 - E_0^2 \right]} \\ &= \frac{E_k^2 + 2E_k E_0}{E_k^2 + 4E_k E_0} = \frac{E_k + 2E_0}{E_k + 4E_0}. \end{aligned}$$

可见 $\cos^2 \theta > \frac{1}{2}$, $\theta < \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$, $2\theta < 90^\circ$, 只有当 $E_k \ll E_0$ 时,

$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$, $2\theta = 90^\circ$, 此即牛顿力学的结果. 在相

对论力学中, 此角 $2\theta < 90^\circ$; 当 $E_k \gg E_0$ (极端相对论情况), $\cos^2 \theta \rightarrow 1$, $2\theta \rightarrow 0$. 相对论情况下散射角与反冲角相等时两者之和小于 90° (称为散射角的相对论压缩) 最先由钱皮恩于 1932 年所作的实验所证实.

例 14 一静质量为 M_0 的静止粒子, 发出一能量为 Q 的光子, 求剩余粒子的反冲速度和静质量.

解 设发射光子后粒子的质量为 m , 速度为 u , 由能量守恒, 有

$$M_0 c^2 = mc^2 + Q \quad ①$$

由动量守恒有

$$\frac{Q}{c} = mu \quad (2)$$

由①

$$m = M_0 - \frac{Q}{c^2},$$

代入②

$$u = \frac{Q}{mc} = \frac{Q}{\left(M_0 - \frac{Q}{c^2}\right)c} = \frac{Qc}{M_0c^2 - Q} \quad (3)$$

于是得剩余粒子的静质量为

$$\begin{aligned} m_0 &= m \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \left(M_0 - \frac{Q}{c^2}\right) \sqrt{1 - \frac{Q^2/c^2}{\left(M_0 - \frac{Q}{c^2}\right)^2 c^2}} \\ &= \left(M_0 - \frac{Q}{c^2}\right) \sqrt{\frac{M_0^2 + \frac{Q^2}{c^4} - 2M_0 \frac{Q}{c^2} - \frac{Q^2}{c^4}}{\left(M_0 - \frac{Q}{c^2}\right)^2}} \\ &= \sqrt{M_0^2 - 2M_0 \frac{Q}{c^2}} = M_0 \sqrt{1 - \frac{2Q}{M_0c^2}} \quad (4) \end{aligned}$$

我们来看一下粒子发射光子前后的静能差. 设此静能差为 Q_0 , 则

$$Q_0 = M_0c^2 - m_0c^2 = M_0c^2 - M_0c^2 \sqrt{1 - \frac{2Q}{M_0c^2}},$$

即

$$\begin{aligned} \frac{Q_0}{M_0c^2} &= 1 - \sqrt{1 - \frac{2Q}{M_0c^2}}, \\ \left(1 - \frac{Q_0}{M_0c^2}\right)^2 &= 1 - \frac{2Q}{M_0c^2}, \end{aligned}$$

解之得

$$Q = Q_0 \left(1 - \frac{Q_0}{2M_0c^2}\right).$$

可见, 所发射光子的能量并不等于粒子发射光子前后的静能差, 而是小于此静能差, 因为一部分能量转化成了粒子的反冲动能.

练 习 题

1. 一艘飞船以 $0.8c$ 的速度于中午飞经地球, 此时飞船上的人和地球上的人都将时钟拨到 12:00.

(1) 飞船上的钟为 12:30 时, 飞船飞经一个宇航站, 该站相对地球固定且站上的钟显示的是地球时间. 试问: 飞船到达宇航站时, 站上的时钟是几点?

(2) 飞船到达宇航站时向地球发一电磁信号, 地球上的人何时(地球钟)接到信号?

(3) 地球上的人立即回信号, 飞船上的人何时(飞船时间)收到信号?

2. 如图 5-13 所示, 在互相重合的 $x-y$ 系和 $x'-y'$ 系中, 有一根长 L_0 的棒 AB , 一端在 origin, 棒和 x 轴成 θ_0 角. 现在让棒和 $x'-y'$ 系一起以速度 v 沿 x 轴正方向运动, 求棒在固定的 $x-y$ 系中的长度和方位.

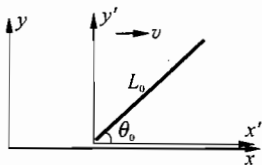


图 5-13

3. 在 S 系中有一根米尺固定在 x 轴上, 其两端各装一手枪, S' 系中的 x' 轴上固定有另一根长的带刻度尺, 当后者从前者旁以速度 u 经过时, S 系中的人同时扳动两枪机, 使子弹在 S' 系中的尺上打出两个记号. 求在 S' 系的尺上两记号之间的刻度差. 在 S' 系中如何解释此结果?

4. 在 S 系中观察到在同一地点发生两个事件, 第二个事件发生在第一个事件之后 2.0 秒, 在 S' 系中观察到第二个事件发生在第一个事件之后 3 秒. 求在 S' 系中这两个事件的空间距离.

5. 带正电的 π 介子是一种不稳定的粒子, 当它静止时, 平均寿命为 2.5×10^{-8} s, 然后衰变为 μ 介子和一个中微子. 今有一束 π 介子, 在实验室中测得它从产生到衰变通过的平均距离为 52 m, 求其速率.

6. 一静长为 l_0 的火箭飞船以恒速 v 相对地面飞行. 飞船的头部

(A')在 $t=t'=0$ 时通过地面上的 A 点,此时有一光信号从飞船头部 (A')发向尾部 (B').

(1) 按飞船的时间(t'),该信号何时到达船尾(B')?

(2) 按地面上的测量,该信号何时(t_1)到达船尾?

(3) 按地面上的测量,船尾何时(t_2)通过 A 点?

7. 在 S 系上,两事件 A、B 发生的时空坐标分别为 x_1, t_1 和 x_2, t_2 , 设 $x_2 > x_1, t_2 > t_1$, 即 B 事件发生在 A 事件之后. 试问,在另一参照系看来,这一前后次序是否有可能颠倒?如果要颠倒,这两事件在 S 系中的时空坐标间应有什么联系?如果两事件有因果联系,那么,在任何别的参照系看来,这种因果关系有无可能被破坏?为什么?

8. 有一间仓库长 3.5 m, 相对两壁各有一扇门. 若把一长为 4 m 的铁竿放进仓库, 则竿的一端将露在门外, 因而两扇门不可能同时关闭. 某甲学习过相对论, 他声称有一种方法, 不必把竿割断、弯曲或倾斜, 能在极短时间内把竿放进仓库并同时关上仓库的两门. (当竿端碰击门时, 门会自动打开) 你认为甲能否实现他的想法? 若可能的话, 将怎样实现? 若有一观测者某乙相对竿静止, 他对某甲设计的方案有何看法?

9. 在 S 系中, 沿 x 轴停放着两艘相同的飞船, 飞船长 100 m, 相距 200 m, 如图 5-14 所示. 现设想两飞船同时点燃火箭发动机, 并在极短的时间内加速到 $v = \frac{4}{5}c$. (1) 试从 S 系的观点, 画出加速后两飞船的图象. 怎样解释所画出的图象? (2) 若参照系 S' 相对 S 以 $v = \frac{4}{5}c$ 的速度沿 x 方向运动, 试从 S' 系的观点画出加速前两飞船的图象, 即两飞船的初始状态. (3) 试从 S' 观点画出两飞船加速后的图象并作出说明.

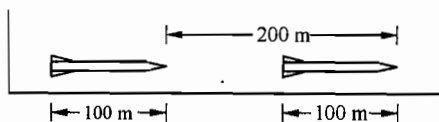


图 5-14

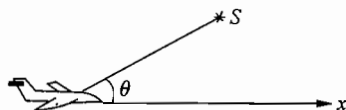


图 5-15

10. 一航天飞机沿 x 方向飞行, 接收到一颗恒星发出的光信号. 在恒星静止的参照系中, 飞机的飞行速度为 v , 恒星发出光信号的方向与飞机的轴成 θ 角, 如图 5-15 所示.

(1) 在飞机静止的参照系中, 此角(θ')多大?

(2) 若飞机的前端有一半球形观察室, 飞机上的人能看到所有 $\theta' < \frac{\pi}{2}$ 的恒星. 试证明, 若 $v \rightarrow c$, 则飞机上的人几乎能看到所有的恒星.

11. 一块厚玻璃以速率 v 向右运动. 在 A 点有一闪光灯, 它发出的光通过玻璃后到达 B 点(如图 5-16). A 、 B 之间距离为 L , 玻璃在其静止的坐标系中的厚度为 D , 玻璃的折射率为 n . 问光由 A 点传播到 B 点需多少时间?

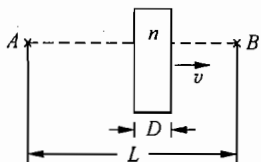


图 5-16

12. 两个静质量均为 m_0 的粒子各以 $\beta_1 = 0.5c$ 和 $\beta_2 = 0.8c$ 的速率从一共同点反向运动, 求(1)每个粒子相对共同点的动量和能量. (2)一个粒子在另一个粒子处于静止的参照系中的动量和能量.

13. 两个完全相同的质点, 静质量均为 m_0 , 以等值反向的速率 u 沿同一直线运动而发生碰撞, 碰后两质点粘成一个大质点. 求此大质点的质量.

14. (1) 如果一动能为 437 MeV(兆电子伏)的质子同另一个处于静止状态的质子发生弹性碰撞, 碰撞后它们以相等能量反跳, 试问, 二者运动方向的夹角是多大? 已知质子的静能为 938 MeV.

(2) 如果入射质子的总能量为 33 GeV(吉电子伏), 试问, 碰撞后两质子的运动方向之间的夹角是多大?

15. 一粒子衰变成能量分别为 E_1 和 E_2 的两个 γ 光子, 它们的夹角为 θ , 求此粒子的静质量 m_0 .

16. 设有一处于激发态的原子以一定速率运动, 当其发射一光子后衰变为基态, 并使自己处于静止状态, 此时原子的静质量为 m_0 . 若激发态比基态能量高 E_0 , 求其所发射光子的能量.

17. 设有一“光子火箭”完全用辐射能作为推进剂使自己从静止

开始加速. 如果这支火箭的初质量和末质量(均为静质量)分别为 M_i 和 M_f , 求该火箭的末速度.

18. 设一能量为 Q 的光子同正在运动的电子迎面碰撞, 如果碰撞后沿直线向后作反冲运动的光子具有与入射光子相同的能量 Q , 试问电子的初速度多大? 设电子的静质量为 m_0 .

19. 试从动力学观点证明下列过程是不可能的.

(1) 一个光子撞击到一静止的电子上, 并将它的所有能量给予后者;

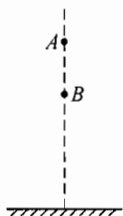
(2) 在真空中一个光子转变为一电子和一正电子;

(3) 一快速正电子和一个静止电子相互湮没仅生成一个光子.

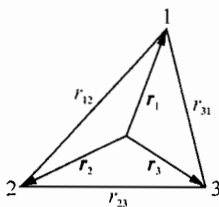
模拟试题一

1. 地面上高 H_A 和 H_B 处各有一小球 A、B, 两球在同一竖直线上, 试分析系统形成周期性运动的条件 (设小球之间碰撞为弹性, 且 $m_A = m_B$, 不考虑三体碰撞的情况).

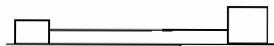
2. 空间中有 m_1 、 m_2 、 m_3 三个质点以万有引力相互作用. 若三质点绕其质心匀角速转动, 求相互之间距离和角速度 ω 满足的关系.



第 1 题图



第 2 题图

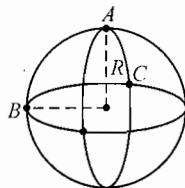


第 4 题图

3. 以第一宇宙速度发射 (竖直向上发射) 的导弹经一段时间后在离发射点不远处返回地面, 计算导弹在空中飞行的时间 (地球半径 $R = 6400 \text{ km}$).

4. 质量各为 m 和 M 的两物块用轻软的橡皮绳相连放在水平台面上, 橡皮绳原长为 a , 伸长时犹如一倔强系数为 k 的弹簧, 物体与台面的摩擦系数为 μ , 今将两物体拉开至相距 b ($b > a$) 释放. 求两物体从开始运动到相遇所经过的时间 (设 μ 很小), 以及相遇时两者的相对速度.

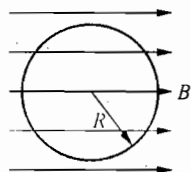
5. 如图, 把半径为 R 的球体均分为八等份, 其中一份均匀带电, 电荷体密度为 ρ , 试求此球体球心 O 处的场强大小.



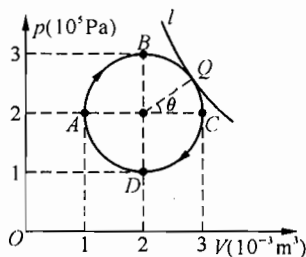
第 5 题图

6. 如图所示, 有一水平方向的匀强磁场, 磁感强度 B 很大, 一半径为 R , 厚度为 D ($D \ll R$) 的金属圆盘, 在此磁场中竖直下落, 盘面始终在竖

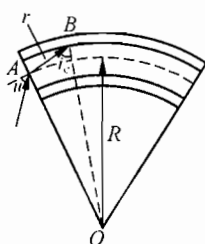
直平面内并与磁场 B 平行. 设该圆盘电阻为零, 密度 $\rho = 9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 所受空气阻力可略. 为使盘在下落过程中加速度比无磁场时减小千分之一, 试问 B 应为多大?



第 6 题图



第 7 题图



第 8 题图

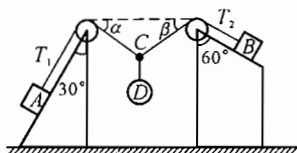
7. 1 mol 单原子分子理想气体经 $p-V$ 图上可以表示为圆的循环过程, 如图所示. 试求: (1) 过程中的最高温度; (2) 在一次循环后气体对外界做的功; (3) 气体在 ABC 过程中吸收的热量.

8. 如图表示一根弯曲的光导纤维, 其芯料和皮料的折射率分别为 n_g 和 n_c (且 $n_g > n_c$), 纤维芯的直径为 D , 曲率半径为 R . 证明: 入射光的最大孔径角 $2u$ 必须满足关系式 $\sin u = \sqrt{n_g^2 - n_c^2 \left(1 + \frac{D}{2R}\right)^2}$.

9. 在以 $v = 0.8c$ 的速度向北飞行的飞船上, 观察地面上的百米赛跑. 已知运动员由南向北跑, 若地面上的记录员测得某运动员的时间为 10 s , 求 (1) 飞船中测得的跑道长度和运动员行走的路程. (2) 飞船中记录的该运动员的百米速度.

模拟试题二

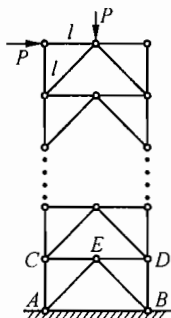
1. 如图, 已知 A 重为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}P$, B 重 $2P$, 分别放在光滑斜面上, 两滑块和球 C 、 D 用绳连接, C 、 D 各重 $\frac{P}{2}$. 求 (1) 平衡时的 α , β ; (2) 现将吊 D 的绳剪断, 求剪断后的瞬间 A 、 B 的加速度.



第 1 题图



第 2 题图



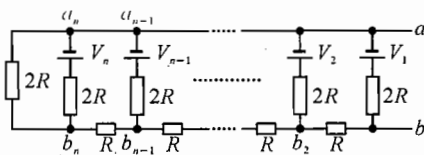
第 3 题图

2. 质量为 M , 开始时静止放在平滑水平面上的滑块内有长度均为 l 且互通的三段光滑轨道, $\alpha = 60^\circ$, 转弯处由光滑小圆弧连接. 设在左侧轨道上端有一质量为 m 的光滑小球, 于 $t=0$ 时刻自静止开始沿轨道自由下滑, 求: 小球从开始下滑直到最后重新返回左侧出发点的总时间.

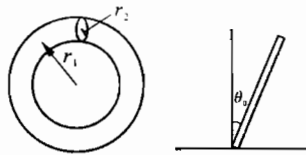
3. 如图所示, n 层支架由相同的等腰直角三角形板铰接而成, 其顶部受两个力作用, 其大小都为 P , 方向如图. 现不计架子本身的自重, 试求底部固定铰支座 A , B 处的约束反力.

4. 空间中有半径为 a , 带电量为 Q 的导体球壳, 现要使壳外的场强为常数, 求空间的体电荷分布.

5. 如图的有源网络, 电源无内阻, 电压已知, 试求 a 、 b 两点间的电压 V_{ab} .



第 5 题图



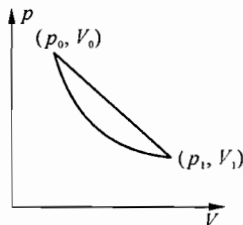
第 6 题图

6. 如图, 铜制圆环的两个半径分别为 $r_1 = 1 \text{ cm}$ 和 $r_2 = 1 \text{ mm}$, 圆环竖放在地面上, 环底和地面的磨擦足够大, 使其不能滑动, 圆环周围有竖直向上的匀强磁场 $B = 1.0 \text{ T}$. 开始时环偏离竖直方向一个角

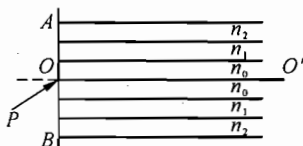
度 $\theta_0 = 1.0 \text{ rad}$, 尔后圆环倒向地面. 已知铜的电导率 $\sigma = 6.25 \times 10^7 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$. 密度为 $\rho = 8.93 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. 试通过估算说明圆环倒下过程中其重力势能主要是转化成动能还是转化成热能.

7. 如图, 0.1 mol 单原子分子理想气体从初态 ($p_0 = 32.0 \text{ Pa}$, $V_0 = 8.00 \text{ m}^3$) 经 $p-V$ 图上的直线过程到达终态 ($p_1 = 1.0 \text{ Pa}$, $V_1 = 64.0 \text{ m}^3$), 再经过绝热过程回到初态, 构成循环. 求 (1) 循环效率; (2) 上述循环的最高及最低温度.

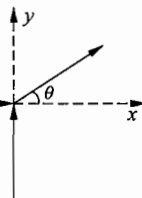
8. 一条直的机场跑道上空空气的折射率随高度 y 变化的规律为 $n = n_0(1 + \alpha y)$, $\alpha = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$, n_0 是地面处空气的折射率. 某人站在跑道上观看远处的跑道, 他的眼睛离地高度为 $h = 1.7 \text{ m}$, 求该人能看到的跑道的长度 d .



第 7 题图



第 8 题图



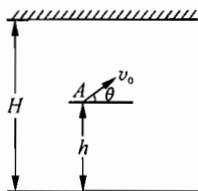
第 9 题图

9. 一个以 $0.8c$ 的速率沿 x 方向运动的粒子衰变成两个静质量均为 m_0 的粒子, 其中一个粒子以速度 $0.6c$ 沿 $-y$ 方向运动. 设衰变前粒子的静质量为 M_0 , 试求: (1) 另一个粒子的运动速率和方向; (2) m_0/M_0 .

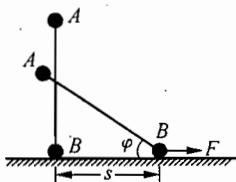
模拟试题三

1. 一盏灯挂在离地板高 h 、天花板下 $H-h$ 处. 灯泡爆破, 所有碎片以同样大小的初速度 v_0 朝各个方向飞去, 求碎片落到地面上的半径 R (可认为碎片与天花板的碰撞是弹性的, 与地面是完全非弹性的); 若 $H = 5 \text{ m}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, 求 h 为多大时, R 有最大值并求出该最大值.

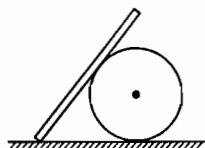
2. 质量为 m 的两个重球 A , B 由长为 l 的轻质杆连接, 竖立于光滑水平面上. 若在下端 B 球上作用一水平恒力 F , 使 B 端沿水平面移动距离 S , 求此时 B 端所受支承载力与角 φ 的关系.



第 1 题图



第 2 题图

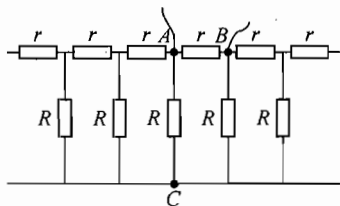


第 3 题图

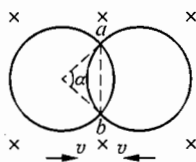
3. 如图, 已知匀质杆长为 l , 搁置于半径为 R 的圆柱上, 各处的摩擦系数均为 μ , 求系统平衡时, 杆与地面倾角 α 应满足的条件.

4. 自然界中, 有些湖泊会产生一种叫做“湖震”的奇异现象. 发生这种现象的湖泊通常是长而浅的, 为建立此模型, 选取一个长为 L , 宽为 d , 水深为 h 的容器. 当它受到扰动后, 水将整体在 L 方向上发生震荡. 现假设水面始终为平面, 求振动的周期.

5. 如图为大家熟悉的一种由电阻 r 和 R 所组成的无穷网络, 试求: (1) 节点 A 、 B 间的电阻; (2) 彼此相隔很远的两节点之间的电阻; (3) 在一般情况下, 包含 n 个电阻 r 的两节点之间的电阻.



第 5 题图

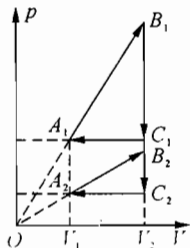


第 6 题图

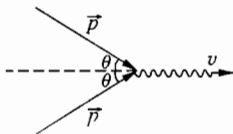
6. 两个半径为 R 的相同的金属圆环沿着通过两环圆心的直线在同一平面上相向平动, 磁感应强度为 B 的均匀磁场垂直于环面. 求当两圆环平动速度均为 v 而 $\alpha = \pi/3$ 时, 两环受力的大小 (a 、 b 接触良好, 长度等于圆环周长的金属丝的电阻为 r).

7. 等容摩尔热容为 C_V 的某理想气体, 经历如图所示的两个循

环过程 $A_1B_1C_1A_1$ 和 $A_2B_2C_2A_2$, 相应的效率为 η_1 和 η_2 , 试比较 η_1 与 η_2 的大小.



第 7 题图



第 9 题图

8. X 行星上大气的折射率随离行星表面的高度 h 按照 $n = n_0 - ah$ 规律减小, 行星半径为 R , 其表面某一高度 h_0 处有一条光线, 它始终维持在同一高度绕行星传播. 试求 h_0 .

9. 试证明: 能量相等的电子、正电子对自身湮灭时不可能只发出一个光子. 若要实现上述情况, 则需要一个很重的重粒子静止在旁边. 并确定这种情况下产生光子的最小能量.

模拟试题一答案

1. A、B 相撞时, 速度交换, 于是可将碰后的 B 看成 A, 这样两物体将相互不影响, 系统形成周期运动的条件是 $mT_A = nT_B$ (m 、 n 为自然数).

$$\text{由自由落体公式 } T_A = \sqrt{\frac{2H_A}{g}}, T_B = \sqrt{\frac{2H_B}{g}},$$

$$m \cdot \sqrt{H_A} = n \cdot \sqrt{H_B},$$

$$\frac{H_A}{H_B} = \frac{n^2}{m^2}, m, n \text{ 要互质.}$$

又题目要求, 不能在地面处发生碰撞, 故, m 、 n 要为一奇一偶.

2. 由题图可知 $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = 0$.

$$\text{对 } m_1, \text{ 有: } -m_1 \omega^2 \vec{r}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + G \frac{m_1 m_3}{r_{31}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1),$$

$$\vec{r}_3 = -\frac{1}{m_3}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2).$$

由以上二式可得

$$\vec{r}_1 \left(\omega^2 - G \frac{m_1}{r_{31}^3} - G \frac{m_2}{r_{12}^3} - G \frac{m_3}{r_{31}^3} \right) + \vec{r}_2 \left(G \frac{m_2}{r_{12}^3} - G \frac{m_2}{r_{31}^3} \right) = 0.$$

由 \vec{r}_1 、 \vec{r}_2 不共线,故 $G \frac{m_2}{r_{12}^3} - G \frac{m_2}{r_{31}^3} = 0$,

$$\omega^2 - G \frac{m_1}{r_{31}^3} + G \frac{m_2}{r_{12}^3} + G \frac{m_3}{r_{31}^3} = 0,$$

得 $r_{12} = r_{31}$.同理 $r_{12} = r_{31} = r_{23} = a$,

$$\text{故 } \omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}},$$

说明三角形为等边三角形.

3. 第一宇宙速度即环绕速度

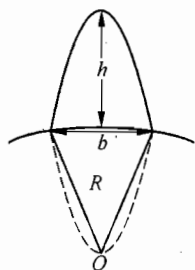
$$m \frac{v_0^2}{R} = mg, v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

$$\text{机械能守恒: } \frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{Mm}{R} = -G \frac{Mm}{R+h}.$$

由上两式可解得: $h = R$.

因为是竖直向上抛射,所以 b 很小,椭圆退化为一根直线,即 $a=R$ (焦点在地心 O 点).在物体抛射到返回地面的整个过程中,物体与地心 O 的连线扫过的面积为

$$S = \frac{1}{2}\pi ab + \frac{1}{2}Rb,$$




第3题图

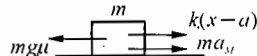
而面积速度(即单位时间里扫过的面积) $v_s = \frac{1}{2}v \cdot \frac{b}{2}$,因此 $t = \frac{S}{v_s} =$

$$(\pi + 2)\sqrt{\frac{R}{g}} = 4154 \text{ s}.$$

4. 设某时刻,两者的距离为 $x(x \geq a)$ 时,

对地: $M \cdot a_M = k(x-a) - Mg\mu$, 

$$a_M = \frac{k}{M}(x-a) - g\mu.$$

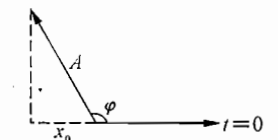
对 $M:m$: $m \cdot a_m = k(x-a) + ma_M - mg\mu$, 

$$a_m = \frac{M+m}{mM} \cdot k(x-a) - 2g\mu.$$

橡皮绳伸长量为 $x' = x - a$, 故回复力

$\sum F$ 可写成

$$\sum F = \frac{M+m}{M} kx' - 2mg\mu.$$



第4题图

上式看出,相当于一恒力 $2mg\mu$ 作用,使平衡位置有所改变,并且等效劲度系数为

$$k' = \frac{M+m}{M} k,$$

等效平衡位置为

$$x_0 = \frac{2mg\mu}{k'} = \frac{2mg\mu \cdot M}{(M+m)k}.$$

故 m 振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{M+m}{Mm}} k, \text{ 振幅为 } A = b - a - x_0.$$

由振幅矢量法, m 振动到绳长为 a 时, 有

$$\varphi = \pi - \cos^{-1} \frac{x_0}{A} = \pi - \cos^{-1} \left[\left(\frac{(b-a)(M+m)k}{2mMg\mu} - 1 \right)^{-1} \right],$$

$$t_1 = \frac{\varphi}{\omega} = \sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}} \cdot \left\{ \pi - \cos^{-1} \left[\left(\frac{(b-a)(M+m)k}{2mMg\mu} - 1 \right)^{-1} \right] \right\}.$$

m 相对 M 的速度为 v , 有: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k'x_0^2 = \frac{1}{2}k'A^2$,

$$v = \sqrt{\frac{k'}{m}(b-a) \left[b-a - \frac{4mMg\mu}{k(M+m)} \right]}.$$

此后,绳上无力作用, M 的加速度变成 $-g\mu$,则 m 相对 M 的加速度变成 $a' = -2g\mu$. 故

$$t_2 = \left| \frac{\Delta v}{a'} \right| = \frac{1}{2g\mu} \sqrt{\frac{k'}{m}(b-a) \left[b-a - \frac{4mMg\mu}{k(M+m)} \right]}.$$

最后, $t = t_1 + t_2$.

这时,两者相对速度为 v' ,有: $v^2 - v'^2 = 2 \cdot 2g\mu \cdot a$,

$$v' = \sqrt{\frac{M+m}{Mm}k(b-a)^2 - 4g\mu b},$$

$$t = \sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}} \cdot \left\{ \pi - \cos^{-1} \left[\left(\frac{(b-a)(M+m)k}{2mMg\mu} - 1 \right)^{-1} \right] \right\} \\ + \frac{1}{2g\mu} \cdot \sqrt{\frac{(M+m)k}{Mm}(b-a) \left[b-a - \frac{4Mmg\mu}{k(M+m)} \right]}.$$

评析: 本题是简谐振动计算的综合型问题,涉及相位计算与等效方法. 同时,正确选择参照系更是解题的关键.

5. 如图, $\triangle ABC$ 为等边三角形,八分之一一球产生的场的方向为 $O'O$ 方向, O' 为 $\triangle ABC$ 的中心,故

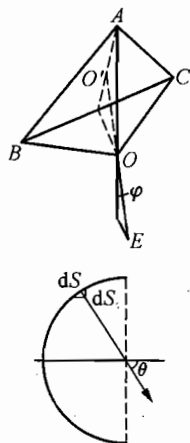
$$\varphi = \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

半球在 O 点的场可看成一个个薄球壳的叠加. 设面密度为 σ ,则有

$$dE' = \frac{\sigma \cdot ds \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma ds_{\parallel}}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

故

$$E' = \frac{\sigma \cdot s_{\parallel}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}.$$



第5题图

$$\text{由 } \sigma = \rho \cdot dr, E_{\text{总}} = \frac{\rho R}{4\epsilon_0}.$$

$$\text{由 } 4E\cos\varphi = E_{\text{总}}, \text{得: } E = \frac{\sqrt{3}\rho R}{16\epsilon_0}.$$

评析:本题是为训练如何将看似不对称的问题转化为对称问题而设,大家应好好体会.

6. 当圆盘在磁场区域内以速度 v 竖直下落时,由于在圆盘的厚度方向切割磁感线,故在厚度方向产生的感应电动势为 $\epsilon = BDv$.

由于电阻为零,故盘面瞬间就有电荷积累,由

$$C = \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{D}, \text{得 } Q = C\epsilon = \epsilon_0 \pi R^2 Bv.$$

$$\text{于是,产生电流为 } I = \frac{dQ}{dt} = (\epsilon_0 \pi R^2 B) \frac{dv}{dt}.$$

$$\text{方向从后向前. } F = BDI = (\epsilon_0 \pi R^2 B^2 D) \frac{dv}{dt}.$$

$$\text{由 } a = g - \frac{F}{m} = g - \frac{\epsilon_0 B^2}{\rho} \cdot a,$$

$$\text{即 } B = \left[\frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{g}{a} - 1 \right) \right]^{1/2}.$$

$$\text{由 } g - a = 10^{-3} g,$$

$$\text{得 } B = \sqrt{10^{-3} \frac{\rho}{\epsilon_0}} = 10^6 \text{ T}.$$

7. (1) 最高温度由等温线 l 决定,它与循环线相切于 Q 点,且 $\theta = 45^\circ$.

$$\text{由 } p_\theta \cdot V_\theta = \mu RT_{\text{max}} \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} T_{\text{max}} &= \frac{(2 + 1 \times \cos 45^\circ) \times 10^5 \times (2 + 1 \times \sin 45^\circ) \times 10^5}{8.31} \\ &= 88.2 \text{ K}. \end{aligned}$$

(2) 对外做功可表示为循环圆圈所围的面积

$$W = \pi \times 1 \times 10^5 \times 10^{-3} = 314 \text{ J}.$$

(3) 由 $Q = W + \Delta U$, $\Delta U = C_V \cdot \Delta T$,

$$T_A = \frac{p_A V_A}{R}, T_C = \frac{p_C V_C}{R},$$

$$\text{得 } \Delta U = \frac{3}{2}R \left(-\frac{p_A V_A}{R} + \frac{p_C V_C}{R} \right),$$

$$W = \frac{1}{2}W_2 + p_A \cdot (V_C - V_A) = 557 \text{ J},$$

$$Q = 1157 \text{ J}.$$

评析:本题是基本的热力学循环计算,循环是热力学中很重要的概念,需牢固掌握.

8. 设图中光线恰是临界入射角,

$$\text{由折射定律有: } \sin i_c = \frac{n_c}{n_g}.$$

$$\text{开始时,有: } 1.00 \sin u = n_g \sin r,$$

因而,在 $\triangle OAB$ 中,有

$$\frac{R}{\sin i_c} = \frac{R + \frac{D}{2}}{\sin(90^\circ + r)} = \frac{R + \frac{D}{2}}{\cos r}.$$

于是

$$\begin{aligned} \sin u &= n_g \sqrt{1 - \cos^2 r} \\ &= n_g \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(R + \frac{D}{2}\right)^2 n_c^2}{R^2 n_g^2}} \\ &= \sqrt{n_g^2 - n_c^2 \left(1 + \frac{D}{2R}\right)^2}. \end{aligned}$$

9. (1) 在飞船上看来,地面以 $u = -0.8c$ 运动,故地面上的长度 l_0 为本征长度,则在飞船上看来将收缩,故有

$$l_1 = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} = 60 \text{ m} \left(\beta = \frac{v}{c} \right).$$

飞船系中看到运动员的路程对应其始末位置的距离,将地面系中的坐标 x_1 、 x_2 变换到飞船系,有

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$s = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

由题意 $t_2 - t_1 = \Delta t = 10 \text{ s}$, $x_2 - x_1 = 100 \text{ m}$.

故 $x_2 - x_1$ 相对 $v \cdot \Delta t$ 可以忽略,于是 $S = -4 \times 10^9 \text{ m}$.

(2) 10 s 为地面系中同一只钟测得的时间,故为本征时间. 则在飞船系中测出的时间将膨胀,有

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}} = 16.7 \text{ s},$$

故
$$v' = \left| \frac{s}{t'} \right| = 0.8c.$$

评析: 本题较为基本,关键是判断出何为本征量,再结合洛伦兹变换求解,即同一只钟先后两次的读数差为本征时间,静长为本征长度.

模拟试题二答案

(1) 平衡时,

对 A: $T_1 = G_A \sin 60^\circ = P$.

对 B: $T_2 = G_B \sin 30^\circ = P$.

对 C、D: $G_C + G_D = T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta$.

可解得: $\alpha = \beta = 30^\circ$.

(2) 在 C、D 之间的绳刚被剪断的瞬间,设 C 的加速度的水平分量为 a_x , 竖直分量为 a_y , 根据牛顿第二定律可以求解.

1. 对 A: $-\frac{2}{3}\sqrt{3}P \sin 60^\circ + T_1 = \frac{2\sqrt{3}P}{3g}(a_x \cos 30^\circ - a_y \cos 60^\circ).$

$$\text{对 } B: 2P \cdot \sin 30^\circ - T_2 = \frac{2P}{g}(a_x \cos 30^\circ + a_y \cos 60^\circ).$$

$$\text{对 } C: (T_1 + T_2) \cdot \sin 30^\circ - \frac{P}{2} = \frac{P}{2g} \cdot a_y,$$

$$T_2 \cdot \cos 30^\circ - T_1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{P}{2g} \cdot a_x.$$

由以上四式可解得

$$a_A = a_x \cos 30^\circ - a_y \cos 60^\circ = \frac{21}{30 + 32\sqrt{3}}g,$$

$$a_B = a_x \cos 30^\circ + a_y \cos 60^\circ = \frac{3 + 6\sqrt{3}}{30 + 32\sqrt{3}}g.$$

2. 取滑块参照系, 小球受到三个力: mg 、 N 和 ma_M . 设小球相对 M 的加速度是 a_r , 所以对 m , 有

$$mg \cdot \sin \alpha + ma_M \cdot \cos \alpha = ma_r,$$

$$N + ma_M \cdot \sin \alpha = mg \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{对 } M: N \cdot \sin \alpha = Ma_M.$$

$$\text{由 } \alpha = 60^\circ, \text{ 可解得 } a_r = \frac{2\sqrt{3}(M+m)g}{4M+3m},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_r}} = \sqrt{\frac{(4M+3m)l}{\sqrt{3}(M+m)g}}.$$

下到底端时, 小球因转弯和滑块发生一个比较猛烈的作用, 这过程中动量守恒. 设转弯结束后小球和滑块的速度分别为 v 和 V , 有

$$mv = MV, \quad mgl \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2.$$

$$\text{可求出相对速度 } v_r = v + V = \sqrt{\frac{\sqrt{3}(M+m)gl}{M}}.$$

$$\text{水平段的时间: } t_2 = \frac{l}{v_r} = \sqrt{\frac{Ml}{\sqrt{3}(M+m)g}}.$$

$$\text{一个来回的总时间: } t = 4t_1 + 2t_2$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{3}(M+m)g} (2\sqrt{4M+3m} + \sqrt{M}).$$

$$3. (1) \text{ 对整体 } \sum F_x = 0, F_{Ax} + F_{Bx} + P = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{By} - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0, P \cdot nl + P \cdot l = F_{By} \cdot 2l \quad (3)$$

由②③式可得 $F_{Ay} = -\frac{P}{2}(n-1),$

$$F_{By} = \frac{1}{2}P(n+1).$$

(2) 将上面 $n-1$ 个板隔离出来,用和(1)相同的方法,可求得

$$F_{Dy} = \frac{1}{2}Pn.$$

(3) 将板 EDB 隔离出来

$$\sum M_E = 0, F_{Dy} \cdot l - F_{By} \cdot l = 0 \quad (4)$$

由①④式可知 $F_{Bx} = -\frac{P}{2}, F_{Ax} = -\frac{P}{2}.$

最后, $\vec{F}_A = \vec{F}_{Ax} + \vec{F}_{Ay},$

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{Bx} + \vec{F}_{By}.$$

4. 场强为常数,其值必须等于球面上场强的值,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{a^2}.$$

现考虑离球心 r 处的球面薄层,设电荷体密度为 ρ_r ,由高斯定理

$$\sum \Phi = \sum \frac{q}{\epsilon_0},$$

得 $E \cdot 4\pi(r + \Delta r)^2 - E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^2 \cdot \Delta r \cdot \rho_r}{\epsilon_0},$

将 E 代入,略去二级小量,得到

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \cdot 2r \cdot \Delta r = \frac{r^2 \cdot \Delta r \cdot \rho_r}{\epsilon_0}, \text{故 } \rho_r = \frac{Q}{2\pi a^2 r}.$$

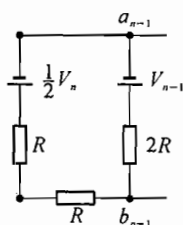
5. (1) 先看 a_n 、 b_n 及其左边, 可视为一等效电源, 其内阻为

$$r_n = 2R // 2R = \frac{1}{2} \cdot 2R = R,$$

其等效电压为开路电压 $U_n = V_n - 2R \cdot \frac{V_n}{4R} = \frac{1}{2}V_n$.

(2) 这样一来 a_{n-1} 、 b_{n-1} 之间左侧可化为第 5 题图. 同样, a_{n-1} 、 b_{n-1} 之间左侧也可看成等效电源, 其内阻 $r_{n-1} = 2R // 2R = R$, 电压为

$$\begin{aligned} U_{n-1} &= V_{n-1} - \frac{V_{n-1} - \frac{1}{2}V_n}{4R} \cdot 2R \\ &= \frac{1}{2}V_{n-1} + \frac{1}{4}V_n. \end{aligned}$$



第 5 题图

(3) 以此类推, ab 之间的电阻为 R , 电压为

$$V_{ab} = U_1 = \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{4}V_2 + \cdots + \frac{1}{2^n}V_n.$$

评析: 本题是戴维宁定理的妙用, 有兴趣的读者还可以试试用电流分布和叠加原理去解本题, 这里附上过程.

6. 先假设圆环倒地时间为 T , 则在这段时间内, 通过圆环的磁通量从开始时近似为零, 增大到倒地时的 $\varphi_1 = B\pi r_1^2$, 故感应电动势的平均值为

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta T} = \frac{B \cdot \pi r_1^2}{T}, \quad \bar{I} = \frac{\bar{\varepsilon}}{R} = \frac{\bar{\varepsilon} \pi r_2^2}{2\pi r_1} = \frac{\bar{\varepsilon} r_2^2}{2r_1},$$

$$\text{总共发热为 } W_s = \bar{I}^2 RT = \frac{B^2 \sigma \pi^2 r_1^3 r_2^2}{2T},$$

$$\text{圆环的角速度平均为 } \bar{\omega} = \frac{\pi}{2T},$$

$$\text{圆环的转动动能为 } W_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{3\rho \pi^4 r_1^3 r_2^2}{8T^2},$$

重力势能损失为 $E_p = mgr_1 = 2\rho g \pi^2 r_1^2 r_2^2$.

由 $E_p = W_s + W_k$, 即 $1 \approx \left(\frac{B^2 \sigma_1}{4\rho g}\right) \frac{1}{T} + \left(\frac{3\pi^2 r_1}{16g}\right) \left(\frac{1}{T}\right)^2$.

现在 $\frac{B^2 \sigma_1}{4\rho g} \approx 1$, $\frac{3\pi^2 r_1}{16g} \approx 10^{-3}$, 故 $1 = \frac{1}{T} + 10^{-3} \frac{1}{T^2}$, $T \approx 1$ s.

因此, $W_s : W_k \approx 1 : 10^{-3}$,

$W_s \gg W_k$. 可见倒地过程中, 重力势能主要转化为热量.

评析: 本题通过假设→估算→验证的路径求解, 这是解题时常用的手段, 也是一种研究方法, 很值得借鉴.

7. (1) 直线方程可表示为 $p = \alpha - \beta V$.

对初态和终态, 有 $\begin{cases} p_0 = \alpha - \beta V_0, \\ p_1 = \alpha - \beta V_1. \end{cases}$

故 $\alpha = \frac{255}{7}$ Pa, $\beta = \frac{31}{56}$ Pa/m³.

循环过程对外做功为

$$\begin{aligned} W &= W_{\text{直}} + W_{\text{绝}} \\ &= \frac{1}{2}(p_1 + p_0)(V_1 - V_0) + \frac{p_1 V_1 - p_0 V_0}{\gamma - 1} = 636 \text{ J}. \end{aligned}$$

(2) 为求吸热, 需确定直线过程吸放热转换点, 由热力学第一定律

$$dQ = \mu C_V dT + p dV, \quad C_V = \frac{3}{2}R.$$

结合 $pV = \mu RT$, $p = \alpha - \beta V$,

消去 p 、 T 得

$$dQ = \left[\frac{1}{\gamma - 1}(\alpha - 2\beta V) + (\alpha - \beta V) \right] \cdot dV$$

由 $dQ=0$ 得 $V_A = \frac{5\alpha}{8\beta} = 41.1 \text{ m}^3$,

$$p_A = 13.7 \text{ Pa}.$$

净吸热为

$$Q_1 = W + \Delta U \\ = \frac{1}{2}(p_A + p_0)(V_A - V_0) + \mu C_V(T_A - T_0) = 1\,215\text{ J}$$

$$\text{故 } \eta = \frac{W}{Q_1} = 52\%.$$

(3) 略.

8. 将跑道上的空气分割成许多平行于地面的薄层,由折射定律

$$n_0 = n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = \cdots = n_y \sin \theta_y.$$

由 $n_y = n_0(1 + \alpha y)$, 得 $n_0 = n_0(1 + \alpha y) \sin \theta$,

$$\text{代入上式得 } 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + 2\alpha y + \alpha^2 y^2.$$

由 α 很小, $\alpha^2 y^2$ 忽略, 因而 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\alpha y}$,

或 $\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{2\alpha} \cdot dx$, 积分得出光线的轨迹为 $y = \frac{\alpha}{2} x^2$.

$$\text{故 } d = \sqrt{\frac{2h}{\alpha}} = 1.5 \times 10^3 \text{ m}.$$

9. (1) 设第二个粒子的速率为 v ,

$$x \text{ 方向动量守恒 } \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \cos \theta = \frac{M_0 V_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

$$y \text{ 方向动量守恒 } \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \sin \theta = \frac{m_0 \cdot v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

$$\text{总能量守恒 } \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

故由 $v_0 = 0.8c$, $v_1 = 0.6c$, 消去 m_0/M_0 可得

$$v = 0.984c, \theta = \tan^{-1} 0.135.$$

(2) 将(1)中结果代入上式,可得 $\frac{m_0}{M_0} = 0.24$.

模拟试题三答案

1. (1) 假设碎片不会碰顶,应有 $v_0^2 t^2 - \left(\frac{1}{2}gt^2 - h\right)^2 = R^2$,

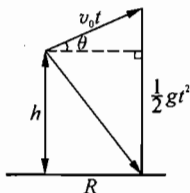
$$-\frac{1}{4}g^2 t^4 + (v_0^2 + gh)t^2 - h^2 = R^2.$$

$$\text{配方 } -\frac{1}{4}g^2 \left[t^2 - \frac{2(v_0^2 + gh)}{g^2} \right] + \frac{v_0^2}{g^2} (v_0^2 + 2gh) = R^2.$$

可见,当 $t^2 = \frac{2(v_0^2 + gh)}{g^2}$ 时,

$$R_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

$$\text{此时 } \theta = \sin^{-1} \left[\frac{(gt^2/2) - h}{v_0 t} \right]$$



第 1 题图

以上假设要求 $h + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \leq H$, 即 $h \leq H - \frac{v_0^4}{4g(v_0^2 + gh)}$.

(2) 若 h 不满足上述要求,则以 θ 角飞出的碎片将撞击天花板,飞行轨迹发生变化.此时,抛得最远的碎片应该是未撞击天花板而最高点恰好和天花板相切的碎片.这时有

$$v_0^2 \sin^2 \theta = 2g(H - h),$$

$$-h = v_0 \sin \theta \cdot t - gt^2/2, R = v_0 \cos \theta \cdot t.$$

由以上三式可解得

$$R'_{\max} = \sqrt{\frac{2v_0^2}{g} - 4(H - h)} \cdot (\sqrt{H - h} + \sqrt{H}).$$

(3) 因为 $R_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}$,

所以在不碰顶时, h 越大 R 越大. h 可取的最大值是

$$h = H - \frac{v_0^2}{4g(v_0^2 + gh)} = 2.56, \text{此时}, R_{\max} = 12.3 \text{ m.}$$

下面再考虑碎片碰顶的情况:

$$R'_{\max} = \sqrt{\frac{2v_0^2}{g} - 4(H-h)} \cdot (\sqrt{H-h} + \sqrt{H}),$$

当 $h = 3.75 \text{ m}$ 时 R 有极大值,

$$R'_{\max} = 12.99 \text{ m} > R_{\max},$$

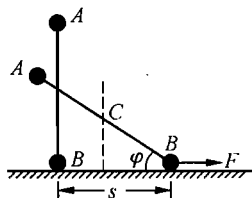
所以最后的结果是当 $h = 3.75 \text{ m}$ 时, R 有最大值 12.99 m .

2. 系统质心 C 的加速度

$$a_c = F/2m,$$

$$\text{位移 } s_c = s - \frac{1}{2}l\cos\phi = \frac{1}{2}a_c t^2.$$

由以上两式可解出 $t = 2m(2s - l\cos\phi)/F$.



第2题图

动能定理 $Fs + mgl(1 - \sin\phi)$

$$= mv_B^2/2 + m[(v_{AB}\sin\phi - v_B)^2 + (v_{AB}\cos\phi)^2]/2.$$

冲量定理 $Ft = mv_B - m(v_{AB}\sin\phi - v_B)$.

对 B 球 $N + T\sin\phi = mg$, $F - T\cos\phi = ma$.

在 B 参照系中, 对 A 球, 有

$$mg\sin\phi + T - ma_B\cos\phi = mv_{AB}^2/l,$$

$$\text{可解得 } v_{AB}^2 = \frac{4mgl(1 - \sin\phi) + 2Fl\cos\phi}{m(1 + \cos^2\phi)},$$

$$N = \frac{4mg(1 - \sin\phi) + mg\sin^2\phi - F\sin\phi\cos\phi(3 + \cos^2\phi)}{(1 + \cos^2\phi)^2}.$$

3. 设杆和圆柱体的重力分别为 G_1 和 G_2 , 对杆

$$\sum F_x = 0, f_3 + f_2\cos\alpha = N_2\sin\alpha \quad ①$$

$$\sum F_y = 0, N_3 + N_2\cos\alpha + f_2\sin\alpha = G_1 \quad ②$$

$$\sum M_{O'} = 0, G_1 \frac{l}{2} \cos \alpha = N_2 R \cdot \cot \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

对柱

$$\sum F_x = 0, f_1 + f_2 \cos \alpha = N_2 \sin \alpha \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0, f_2 \sin \alpha + G_2 + N_2 \cos \alpha = N_1 \quad (5)$$

$$\sum M_O = 0, f_1 = f_2 \quad (6)$$

$$\sum M_{O'} = 0, N_2 + G_2 = N_1 \quad (7)$$

以上七个方程中只有六个有效。由最后一式可知, $N_1 > N_2$, 又因为 $f_1 = f_2$, 所以一定是 2 处比 1 处容易移动。再来比较 2 处和 O' 处。

① 如果是 2 处先移动, 必有 $f_2 = \mu N_2$, 代入 (4) 式, 可得 $\mu = \tan \alpha$, 将此结果代入 (1)、(3)、(4) 式, 即有

$$f_3 = \frac{G_1 l \mu (1 - \mu^2)}{2R(1 + \mu^2)} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

$$N_3 = G_1 \left[1 - \frac{l \mu (1 - \mu^2)}{2R(1 + \mu^2)} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha) \right].$$

在这种情况下, 如要 $f_3 \leq \mu N_3$, 必须有 $l \leq \frac{R}{\mu} \cdot \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2}$, 杆要能搁

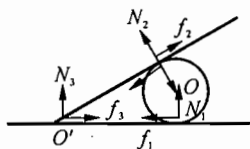
在柱上, 当然要 $l \geq \frac{R}{\tan \alpha / 2} = \frac{R}{\mu}$.

因此在 $\frac{R}{\mu} \leq l \leq \frac{R}{\mu} \cdot \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2}$ 时, $\alpha = 2 \arctan \mu$.

② 如果是 O' 处先移动, 必有 $f_3 = \mu N_3$. 代入前式, 有

$$f_2 = N_2 \tan \frac{\alpha}{2}, N_2 = G_1 l \cos \alpha \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{2R\mu},$$

$$2R = l \cos \alpha \left(1 + \frac{1}{\mu} \tan \frac{\alpha}{2} \right) \tan \frac{\alpha}{2}.$$



第 3 题图

满足上式的 α 即为平衡时的 α , 这时要求 $f_2 < \mu N_2$, 须有

$$l > \frac{R}{\mu} \cdot \frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}.$$

综上所述:

当 $\frac{R}{\mu} \leq l \leq \frac{R}{\mu} \cdot \frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}$ 时, $\alpha = 2\arctan \mu$;

当 $l > \frac{R}{\mu} \cdot \frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}$ 时, α 应满足

$$2R = l \cos \alpha \left(1 + \frac{1}{\mu} \tan \frac{\alpha}{2} \right) \tan \frac{\alpha}{2}.$$

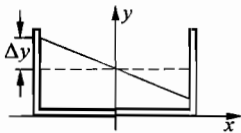
4. 如图, 设左边水面上升了 Δy ($\Delta y \leq h$), 那么水的质心在 x 、 y 方向上的位移分别为

$$\begin{aligned} \Delta x_c &= \frac{-\frac{1}{4}L \cdot \Delta y \cdot d \cdot \rho \cdot \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}L - \frac{1}{4}L \cdot \Delta y \cdot d \cdot \rho \cdot \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}L}{Lh\rho d} \\ &= -\frac{1}{6} \frac{L}{h} \cdot \Delta y, \\ \Delta y_c &= \frac{\frac{1}{4}L \cdot \Delta y \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{3}\Delta y \right) \rho d + \left[-\frac{1}{4}L \cdot \Delta y \left(\frac{h}{2} - \frac{1}{3}\Delta y \right) \right] \cdot \rho d}{Lh\rho d} \\ &= \frac{(\Delta y)^2}{6h}. \end{aligned}$$

因为 Δy_c 是二阶小量, 所以可忽略不计.

现在来考虑水的受力情况. 左、右壁的平均压强分别为

$$p_{\text{左}} = \frac{1}{2}\rho g(h + \Delta y), \quad p_{\text{右}} = \frac{1}{2}\rho g(h - \Delta y).$$



第4题图

水受的 x 方向的合外力

$$\begin{aligned} \sum F &= p_{\text{左}} \cdot (h + \Delta y)d - p_{\text{右}}(h - \Delta y)d \\ &= 2\rho gdh \cdot \Delta y. \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \sum F = -\frac{12\rho g d h^2}{L} \cdot \Delta x_C,$$

$$\text{故 } T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho d L h}{k}} = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}.$$

评析:通过考虑质心的位移和 $\sum F$ 的关系来解题,是一种比较独特的方法.

5. (1) 先求 AC 向左看的电阻 ρ :

$$\frac{(\rho+r)R}{\rho+r+R} = \rho, \text{ 故 } \rho = \frac{r}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4R}{r}} - 1 \right),$$

$$R_{AB} = \frac{2\rho \cdot r}{2\rho + r}.$$

(2) 若 B' 离 A 很远, 可认为电流从 A 流入后流向无穷远, 即从 A 到 C 与 C 到 B' 的电流相等, 于是电路化为图 1. 令

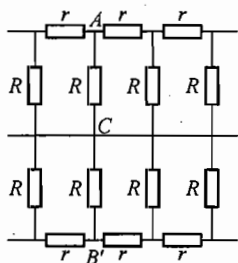
$$\rho' = \rho + r = \frac{r}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4R}{r}} + 1 \right),$$

$$R'_{AB} = 2R'_{AC} = 2 \frac{(\rho'/2) \cdot R}{\rho'/2 + R} = \frac{2\rho'R}{\rho' + 2R}.$$

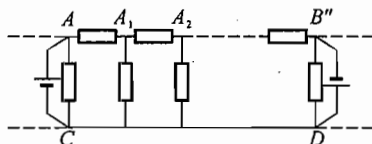
(3) AB'' 之间包含 n 个 r , 设电流先由 A 进 C 出, 接电动势 ϵ (如图 2), 故 $U_A = \epsilon$,

$$U_{A_1} = \epsilon \cdot \frac{\rho}{\rho + r}, U_{A_2} = U_{A_1} \cdot \frac{\rho}{\rho + r} = \epsilon \cdot \left(\frac{\rho}{\rho + r} \right)^2,$$

$$U''_B = \epsilon \cdot \left(\frac{\rho}{\rho + r} \right)^n, I = \epsilon \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{\rho} \right).$$



第 5 题图 1



第 5 题图 2

再由 D 进, 由 B' 出, D 与 C 等效, 同样有

$$U'_A = -\epsilon \left(\frac{\rho}{\rho + r} \right)^n, \quad U'_{B'} = -\epsilon, \quad I = \epsilon \left(\frac{1}{R} + \frac{2}{\rho} \right),$$

$$R''_{AB} = \frac{(U_A + U'_A) - (U'_B + U'_{B'})}{I}$$

$$= \frac{2R\rho'}{2R + \rho'} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho + r} \right)^n \right].$$

评析: 本题提供了电流分布法以外的节点电压法, 这也是一种普遍的方法.

6. 接触点 a 和 b 将两圆环各分为大、小两段圆弧, 圆环平时时产生的感应电动势为 $\epsilon_1 = \epsilon_2$, $\epsilon'_1 = \epsilon'_2$.

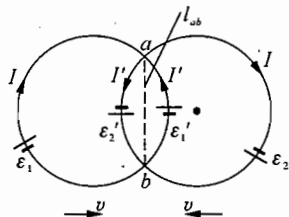
对回路, 总电动势

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 = 4BvR \sin \frac{\alpha}{2},$$

故
$$I = \frac{\epsilon_{\text{总}}}{r_{\text{总}}} = \frac{4\pi BvR \sin \frac{\alpha}{2}}{r(2\pi - \alpha)}.$$

同理, 对 I' 有

$$I' = \frac{4\pi BvR \sin \frac{\alpha}{2}}{r\alpha}.$$



第 6 题图

受力可等效为长度为 l_{ab} 的棒, 故大圆弧受力 $F_1 = Bl_{ab} \cdot I$, 小圆弧受力 $F'_1 = Bl_{ab} I'$, F_1 和 F'_1 方向皆与速度方向相反,

$$F = F_1 + F'_1 = Bl_{ab} (I + I'),$$

$$= \frac{36}{5} \frac{B^2 R^2 v}{r}.$$

评析: 本题关键是等效方法, 将圆弧等效为直线段.

7. 计算 $A_1 B_1 C_1 A_1$ 的效率. $W = \frac{1}{2} \cdot (V_2 - V_1)(p_2 - p_1)$,

由 $p_2 = kV_2$, $p_1 = kV_1$, $W = \frac{1}{2} k(V_2 - V_1)^2$.

$$\begin{aligned}
 Q &= Q_{A_1 B_1} = \Delta U + W_{A_1 B_1} \\
 &= \mu C_V \cdot (T_{B_1} - T_{A_1}) + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) \\
 &= \frac{k}{R}C(V_2^2 - V_1^2), C = \frac{1}{2}(\gamma + 1)C_V.
 \end{aligned}$$

故 $\eta = \frac{W}{Q} = \frac{R(V_2 - V_1)}{2C(V_2 + V_1)}$ 与 k 无关, 故 $\eta_1 = \eta_2$.

8. 如图, 若要使光线能一直维持在此波道, 则光线必将在离地 $h_0 + \Delta h$ 处的 P 点发生全反射, 有

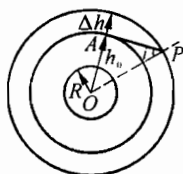
$$\sin i = \frac{R + h_0}{R + h_0 + \Delta h} = 1 - \frac{\Delta h}{h_0 + R}.$$

由临界角 i 满足

$$\sin i = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_0 - \alpha(h_0 + \Delta h)}{n_0 - \alpha h_0} = 1 - \frac{\alpha \Delta h}{n_0 - \alpha h_0},$$

可得到 $\frac{\alpha \Delta h}{n_0 - \alpha h_0} = \frac{\Delta h}{h_0 + R}$, $n_0 - \alpha h_0 = \alpha(h_0 + R)$, 则

$$h_0 = \frac{1}{2\alpha(n_0 - \alpha R)}.$$



第 8 题图

评析: 本题发生的现象称为圆折射, 在金星大气中可发生. 另外, 本题也可用费马原理求解, 大家不妨一试.

9. 设湮灭时, 情况如题图. 设电子动量为 p , 则有

$$2p \cos \theta = h\nu / c. \text{ 总能量守恒, 有: } 2\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = h\nu.$$

这样, 可消去 $h\nu$, 得到

$$p^2 c^2 + m_0^2 c^4 = p^2 c^2 \cos^2 \theta, p^2 c^2 \sin^2 \theta = -m_0^2 c^4 < 0.$$

这是不可能的, 故这样的情况不存在. 但若附近有一很重的粒子, 则它的作用是调节动量, 即动量可以任意分配, 守恒律不再满足. 故在这种情况下, 有

$$2\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = h\nu = E_\nu, E_{\min} = 2m_0 c^2$$

评析: 本题只需明确重粒子的意义即可.

习题参考答案与提示

第 一 讲

- A 组** 1. 6 V (由棒受力平衡求得 $I = 1 \text{ A}$). 2. (1) $v_0 = \frac{Bqd}{2m}$; (2) $\epsilon = \frac{B^2 d^2 q(R+r)}{mR}$; (3) $v = \frac{\sqrt{3}Bqd}{6m}$. 3. (1) $v = \frac{2E}{B}$ (qvB 、 Eq 、 mg 三力平衡); (2) $E' = \sqrt{3}E$ (竖直向上); (3) $t = (\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi) \frac{m}{Bq} = (3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi) \frac{E}{Bg}$.
4. $U = \frac{qr_0^2 B^2}{2m}$ (在外部磁场中走过 4 个 $\frac{3}{4}$ 圆周). 5. (1) $R = \frac{mv}{Bq}$; (2) $\Delta t = \frac{4m}{Bq} \cos^{-1} \frac{Bql}{2mv}$ (两圆弧互补). 6. $\Delta E_k = 0.003 \text{ J}$ (水平方向和竖直方向的运动相互独立). 7. (1) $B = 0.47 \text{ T}$; (2) $t = 1.39 \times 10^{-5} \text{ s}$; (3) $t' = 1.45 \times 10^{-7} \text{ s}$. 8. (1) $v = 20 \text{ m/s}$ (洛伦兹力等于电场力时); (2) $v_m = 45 \text{ m/s}$ ($\alpha = 0$ 时). 9. (1) $v_1 = \sqrt{2\mu g L}$, $v_2 = \sqrt{2\mu g L}/2$; (2) $B = m\sqrt{2\mu g L}/q\mu L$; (3) $E = 3\mu mg/q$, 水平向右. 10. 当线圈为圆形 (即面积最大) 时有最大磁力矩 $\frac{BIl^2}{4\pi}$. 11. 当安培力与轨道的合外力垂直时, 匀强磁场有最小的磁感强度 $B = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ T}$. 12. 安培力的水平分量互相抵消, 竖直方向的合力为 $2\pi BIR \sin \theta$.
13. (1) 10^{-4} A ; (2) $4.4 \times 10^{-5} \text{ A}$ (安培力矩和弹簧的扭力矩平衡). 14. 1.96 A (安培力矩和重力矩平衡). 15. $\frac{R_k}{R_{k+1}} = \sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}$ (粒子每转一圈能量增加 $2qU$). 16. 所有粒子都作螺旋线运动, 而且 v_y 都相同. 因为粒子在 $x-z$ 平面内做圆周运动的周期 $T = 2\pi \frac{m}{qB}$, 与 v 无关, 因此尽管各粒子的 v_x 不同, 但周期仍相同. 所有粒子将在 $t = 2\pi \frac{m}{qB}$ 时相聚在 y 轴上 $y = v_1 2\pi \frac{m}{qB}$ 处. 当

然,每过一个 T ,它们都会相聚一次,只是 y 增加了 $2\pi v_1 \frac{m}{qB}$. 17. (1) $t = 0.61 \times 10^{-6} \text{ s}$; (2) $1.22 \times 10^{-6} \text{ s}$ (只要粒子的回旋半径 $R > d$ 即可).

18. (1) $\frac{3\pi m^2 v_0^2}{4B^2 q^2}$; (2) $(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}) \frac{m}{qB}$; (3) $(\frac{3mv_0}{qB}, 0)$. 19. $r_{\min} = 4m^2 g \cot \theta / B^2 q^2$ (在旋转参考系中重力、锥面弹力、洛伦兹力和惯性离心力四力平衡). 20. 7.4 m/s (可参见例题 8 的思路).

B 组 21. (1) 右管液面高; (2) $B = \rho g d h / I$ (两管液面差产生的压力差和磁场力平衡). 22. 0.04 rad (动能相同,质量不同的粒子在同一磁场中的回旋半径不同). 23. $r = \frac{\sqrt{2}mv}{2Bq}$ (粒子在磁场中走 $1/4$ 个圆,能包围这 $1/4$ 个圆

的最小的圆的半径即是解). 24. (1) $B_1 = 0.37 \times 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{s/m}^2$; (2) $B = 1.48 \times 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{s/m}^2$ (电子束在通电螺线管内每转一圈聚焦一次). 25. $m_a / m_b = 7/17$ 或 $m_a / m_b = 7/5$ 或 $m_a / m_b = 7$. 26. (1) $3.73 \times 10^{-7} \text{ s}$; (2) $x = 5.1 \text{ cm}$, $y = 13 \text{ cm}$, $z = 2.95 \text{ cm}$. 27. 在 $0 < t < T$ 时,小球沿圆形轨道运动的速率随时间而均匀增大,对轨道的作用力与时间平方成正比,即: $v_1 = qB_0 r / 2mT$, $N_1 = q^2 B_0^2 r^2 / 4mT^2$. 在 $T > 0$ 时,小球作匀速圆周运动, $v_2 = qB_0 r / 2m$, 对轨道的作用力的大小不变, $B_2 = q^2 B_0^2 r / 4m$. 28. $B \leq$

$\frac{m}{q} \sqrt{\frac{6g \cos \alpha}{L}}$ (在摆球摆动的过程中,悬线上的张力必须大于零. 当 $\cos \beta = \frac{4}{3} \cos \alpha$ 时,对 B 有如上要求). 29. (1) 用左手定则可知载流子是正电荷;

(2) $U_1 - U_2$ 可称为霍耳电势差,用霍耳电场力和洛伦兹力平衡即可求出载流子密度 n . 30. $\theta = 180^\circ$ (线圈通电后产生的安培力矩和物体的重力矩互相平衡).

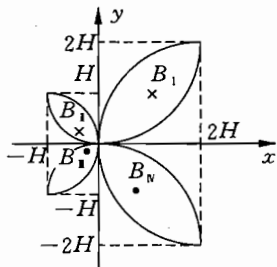
31. $P = 3.3 \times 10^6 \text{ W}$ (两个反向电流的安培力是互相排斥的,两根导线构成的电容器的两极是互相吸引的). 32. $x = \frac{Et}{B} - \frac{mE}{B^2 q} \cdot \sin \frac{Bqt}{m}$, $y = \frac{mE}{B^2 q} (1 - \cos \frac{Bqt}{m})$

(将离子某一时刻的速度看成两个速度的叠加,其中必须有一个分速度所产生的洛伦兹力和离子所受的电场力平衡). 33. (1) 若 $d = \sqrt{\frac{2Emh}{qB^2}}$, 则 $v_p =$

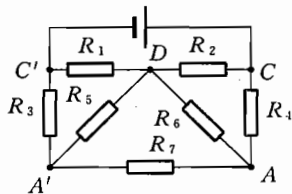
E/B , $\alpha_0 = 0$ (平抛); 若 $d > \sqrt{\frac{2Emh}{qB^2}}$, 则 $v_p = \left[\frac{q^2 E^2 d^2}{(qBd \pm \sqrt{q^2 B^2 d^2 - 2qEmh})^2} + \frac{q^2 B^2 d^2 - 2qEmh}{m^2} \right]^{\frac{1}{2}}$, $\alpha_0 = \tan^{-1} \left[\frac{q^2 B^2 d^2 - 2qEmh \pm qBd \sqrt{q^2 B^2 d^2 - 2qEmh}}{mqEd} \right]$

(斜抛); 若 $d < \sqrt{\frac{2Emh}{qB^2}}$, 则 α_0 、 v_p 无解, (垒球先在电场区域作抛体运动,然后在

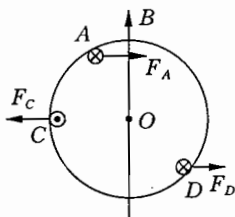
磁场区域作大半个圆周运动,再在电场区作抛体运动回到 P 点). (2) 当 $v_0 = d\sqrt{\frac{qE}{2hm}}$ 时,垒球由 P 点抛出直接击中 D 点;当 $v_0 = \frac{1}{2n+1}\left[d\sqrt{\frac{qE}{2hm}} + 2n\frac{E}{B}\right]$ 时,垒球到下面磁场区绕 n 次,最后由电场区击中 D 点;当 $v_0 = \frac{1}{2n-1}\left[d\sqrt{\frac{qE}{2hm}} + 2n\frac{E}{B}\right]$ 时,垒球到下面磁场区绕 n 次,最后由磁场区击中 D 点. 34. 如第 34 题图所示. B_I 、 B_{IV} 的磁感强度为 $m_e v / 2eH$. B_I 的范围由圆心分别在 $(2H, 0)$ 、 $(0, 2H)$, 半径为 $2H$ 的圆围成. B_{IV} 与 B_I 上、下对称. B_{II} 、 B_{III} 的磁感强度为 $m_e v / eH$. B_{II} 的范围由圆心分别在 $(-H, 0)$ 、 $(0, H)$, 半径为 H 的圆围成. B_{III} 和 B_{II} 上、下对称. (在这样一个蝶形区域磁场的作用下,所有从 $-x$ 方向飞来的电子均通过原点. 因为电子分布稀疏,因此电子间的相互作用可忽略) 35. (1) $I_{DD'} = 0.5 \text{ A}$ (等效电路图如第 35 题图 1 所示,由于对称性,可以将 D 和 D' 上、下拆开) (2) 如第 35 题图 2 和第 35 题图 3 所示的两个平衡位置. (因为 AA' 和 DD' 在圆环一条直径的两端,电流方向也相同,相对 O 点的力矩一定相互抵消,因此 CC' 的力臂必须为 0) 第 35 题图 2 的位置为稳定平衡,第 35 题图 3 的位置为不稳定平衡.



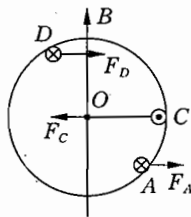
第 34 题图



第 35 题图 1



第 35 题图 2



第 35 题图 3

36. $1.43 \times 10^{-2} \text{ m}$ (电子在 x 方向作匀速运动,同时在 yOz 平面内作匀速圆周

运动.) 37. (1) 反向; (2) (1)中的情况因两环通有反向电流,所以在 $z = 0$ 平面上磁感强度为 0. 而超导体内的磁感强度也必为零,所以(1)的情况和在 $z = 0$ 处有一超导体,对 A 来说受力情况是完全一样的. 因此 A 所受的磁场力 $F_m = IlB = I \cdot 2\pi r \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot 2h} = \frac{\mu_0 I^2 r}{2h}$. 又因为 A 环是平衡的,所以 $h_0 = \frac{\mu_0 r I^2}{2Mg}$;
(3) $T = 2\pi\sqrt{\frac{h_0}{g}}$ (设 A 环向上偏离小位移 x , 可证明 A 环受的合外力 $\sum F = -\frac{\mu_0 r I^2}{2h_0^2} \cdot x$) 38. 位置: $x = 0.63 \text{ m}$, $y = 0.80 \text{ m}$, $z = 0$; 速度: 4.5 m/s , $\beta = 27^\circ$

第 二 讲

- A 组 1. $v = \frac{mg(4R + R_1 + R_2)a_0^2}{B^2 a_1^2 (a_1 + a_2)^2}$ 2. $Q_1 = \frac{B^2 l^2 (v_2 - v_1)}{2Rm}$; $Q_2 = \frac{2MgR - B^2 l^2 (v_2 - v_1)}{2(M + m)R}$ 3. $B = 1 \text{ T}$, $v_{\max} = 12 \text{ m/s}$ (达到 v_{\max} 时, $f = F_{\text{安}}$, $I = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\text{动}}}{R}$). 4. $\Delta U = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$ (引进两根半径方向的导线, 构成等边三角形). 5. (1) $\omega_2 = \omega_1 - \frac{2Fr}{B^2 l^2}$; (2) $P = Fl \cdot \omega_1$ (4 根辐条并联, 轮 2 的安培力矩等于阻力矩). 6. (1) $1.5 \Omega \leq R \leq 4.7 \Omega$; (2) 15 m/s . 7. (1) 顺时针; (2) $\omega = \frac{mgd}{Bq(r_2^2 - r_1^2)}$. 8. (1) $P_a : P_b = 8 : 1$; (2) $\theta = 60^\circ$. 9. (1) $Q = 0.11 \text{ C}$; (2) $\bar{\varepsilon} = 0.16 \text{ V}$; (3) $P = 20 \text{ W}$. 10. 5 J (取整个过程的平均值即可用能量守恒求解). 11. $4 : 1$ (用平均值: $\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$, 热量 $Q = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{R} \cdot \Delta t$).
12. $C = \frac{m(v_0 - v)}{B^2 l^2 v}$ (由 $C(B^2 l^2 v) \frac{v_0 + v}{2} = \frac{1}{2} m(v_0^2 - v^2)$ 求得). 13. (1) $Q = 2 \times 10^{-4} \text{ J}$; (2) $t = 1 \text{ s}$ (用冲量定理先求得杆运动的时间, 然后再求产生的热). 14. $1.75 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ (二齿轮产生的动生电动势是两个正串电源, 匀速下落时两轮的安培力矩之和等于重力矩). 15. (1) V_1 变小, V_2 变大;
(2) $V_1 = 6.75 \text{ V}$, $v = 6.25 \text{ m/s}$. 16. $\frac{\Delta B'}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t}$ (内柱内磁通量的变化产生的涡旋电场使带电粒子的运动速度不断变大, 因此 B' 也要不断变大).
17. (1) $F_m = 2.0 \text{ N}$, $a = 25 \text{ m/s}^2$; (2) a 不断减小, v 不断变大, 电流不断减小, 当 $a \rightarrow 0$ 时, $v \rightarrow v_{\max}$, $I \rightarrow I_{\min}$; (3) $v_{\max} = 11.25 \text{ m/s}$; (4) $P_0 = 6.875 \text{ W}$,

$P_m = 5.625 \text{ W}$. 18. (1) 在刚合上 K 的瞬时电压表示数最大, 为 12 V ; 电路稳定后, 电流表示数最大, 为 12 A ; (2) 刚断开 K 时, 电流表读数变为 0 , 电压表读数一瞬间变为 $4.8 \times 10^6 \text{ V}$ ($I_{\max} \times R_V$, $R_V = 4 \times 10^5 \Omega$); (3) 电压表容易损坏, 可在断开 K 之前先将电压表拆下, 电键也要放入油中. 19. (1) $I_1 =$

$$\frac{\epsilon}{2r}, P_{\max} = \epsilon^2/4r; \quad (2) U_1 = \frac{\epsilon}{2}, U_2 = \frac{\epsilon}{2} \sqrt{\frac{R}{r}}; \quad (3) \frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{r}{R}}.$$

20. 24 V (因 L 较大, 所以在 K 由 A 扳向 B 时, 可将 L 中的电流看成不变).

B 组 21. $\epsilon = -Blv \cdot \sin \alpha$ (可将缺口的环看作完整的环和一小段“负环”的叠加, 再将环的滚动看作围绕环心的转动和环的平动的叠加). 22. (1) $v_m = -\frac{mgR \sin \alpha + BL\epsilon}{B^2 L^2}$; (2) $E_c = mgs \sin \alpha \frac{CB^2 L^2}{m + CB^2 L^2}$ (棒所受的安培力和下滑力平衡, 可求得 v_m . 此时棒给电容器充电, S 合到 2 后棒作匀加速运动).

23. (1) 电压表读数为 Bdv , $U_a - U_b = Bdv$, $U_b = U_c$; (2) 电压表读数为 Bdv , $U_a - U_b = -Bdv$, $U_b - U_c = \frac{1}{2}Bdv$; (3) 电压表读数为 0 , $U_a - U_b = 2Bdv$, $U_b - U_c = -\frac{1}{2}Bdv$ (考虑导线切割磁感线的有效长度即可). 24. $B =$

$\frac{\sqrt{2}R}{2l_1 l_2} \sqrt{Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 + 2Q_2^2}$ (根据 Q_1 , 可求出地磁场竖直分量 B_1 的大小; 再根据 Q_2 , 可求得地磁场水平分量 B_2 的大小, 最后 $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$). 25. $0 < t < T$

时, 小球速率 v 随 t 增大, $v = \frac{qB_0 r}{2mT} \cdot t$, 小球对轨道的作用力 $N = \frac{q^2 B_0^2 r}{4mT^2} \cdot t^2$;

$t > T$ 时, $v = \frac{qB_0 r}{2m}$, $N = \frac{q^2 B_0^2 r}{4m}$ (在 $0 < t < T$ 时间内, 涡旋电场的电场力使小

球加速). 26. (1) $I_g = \frac{\pi D^2 k}{16r}$; (2) 同(1); (3) $I_g = \frac{\pi D^2 k}{8r}$; (4) $I_g =$

$\frac{1.05\pi D^2 k}{12r}$ (前 3 小题只要画出等效电路, 用 $\sum \epsilon = I \cdot \sum r$ 即可求解. 第(4)小题须将左、右边的 ϵ_1 和 ϵ_2 分别写出, 然后用右边回路可求出 I_g). 27. $\theta =$

$\sin^{-1} \frac{2B^2 a^2 v}{mgr(3+\sqrt{3})}$ (总有一根短金属条上有动生电动势 Bav , 用无限网络可算

出这根短金属条上的电流及其受的安培力, 然后用安培力和下滑力平衡求解).

28. (1) 电压表读数 $V = nBLv/(3n+2)$; (2) $V_{ef} = [(n+1)/(3n+2) + \sqrt{2}-1]BLv$ (用等效长度求出各段导线上的动生电动势及电流, 电压表读数 $V = I_g \cdot R_g$). 29. 0.32 m/s , 0.38 m/s (cd 杆受的安培力和摩擦力平衡).

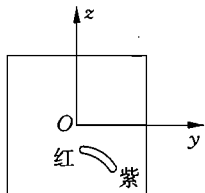
30. $U_A - U_B = -\sqrt{3}a^2 k/32$ (将电路分成若干个回路, 对每个回路用电压回路定

- 理即可). 31. (1) $B = \mu_0 \lambda \omega / 2\pi$; (2) $\epsilon = \mu_0 \lambda \omega R^2 / 8$; (3) $i_A = 0$ (长直螺线管外部磁场的磁感强度 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, 可将旋转的带电圆柱面等效成一个通电螺线管. 当通电螺线管内的磁场发生变化时, 在离轴线 r 处的感应涡旋电场场强 $E = \frac{R^2 \Delta B}{2r \Delta t}$).
32. (1) $i = \frac{\mu_0 \pi r^2 I \omega}{4\sqrt{2} R \Omega}$; (2) 力矩 $M = \frac{\mu_0^2 \pi^2 r^4 I^2}{32 R^2 \Omega} \omega \cdot \sin^2 \omega t$;
- (3) $\epsilon = -\frac{\mu_0^2 \pi^2 r^4 \omega^2 I}{32 R^2 \Omega} \cos 2\omega t$ (在圆环电流轴线上离环心 x 处的磁感强度 $B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$).
33. (1) $P_D = 2.16 \text{ W}$; (2) $P'_D = 4.4 \text{ W}$; (3) $v_{\max} = 7.2 \text{ m/s}$; (4) $F_{\max} = 1.3 \text{ N}$.
34. $P_1 = P_2 + P_1^2 \frac{N_1^2 r_2}{N_2^2 V_1^2}$, 是抛物线方程.
35. (1) $M = \mu_0 \pi r_2^2 N_1 N_2 I / 2r_1$; (2) $\epsilon = \frac{3}{2} \pi N_1 N_2 r_1^2 r_2^2 \omega (r_1^2 + x^2)^{-\frac{5}{2}}$;
- (3) $q = \mu_0 \pi r_2^2 N_1 N_2 I_1 / 2Rr_1$.

第 三 讲

- A 组** 1. $8\omega a$ (将 S' 在光屏上移动的速度分解成平行和垂直于光线的两个分速, 其垂直分速等于 ωR). 2. 0.4 m 处 (角镜能将任何入射光线平行反回).
3. 70 cm (先用凸镜的成像公式求出凸镜所成虚像的位置). 4. $\overline{SS'} = 2(l + \frac{d}{h})$ (先求出由于折射, 平面镜在玻璃中“变浅”的距离, 即求出平面镜等效反射面的位置).
5. $6.9 \times 10^{-3} \text{ rad}$ (作出两条对称的折射光线, 然后用小角近似). 6. $1 \times 10^{-6} \text{ rad}$ (参考例题 1 的思路). 7. 焦距为 3 cm 的凸透镜, 或者是焦距为 6 cm 的凹透镜 (凸透镜是光线会聚后再照在光屏上, 凹透镜是光线发散后直接照在光屏上).
8. 0.1 m/s , 向远离透镜方向 (将透镜成像公式两边对时间求导, 可得到物、像速度之间的关系, 即 $v_{\text{像}} = -(\frac{v}{u})^2 v_{\text{物}}$).
9. (1) 当 $n \geq 2$ 时, 两光在球内相交; (2) 当 $n < \sqrt{2}$ 时, 两光在球外相交; (3) 设 $n_0 = \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - (\frac{d}{R})^2}}$, 当 $n > n_0$ 时, 两光在球内相交; 当 $n = n_0$ 时, 两光在球面上相交; 当 $n < n_0$ 时, 两光在球外相交.
10. $v = \frac{2d\omega \tan 2\theta}{\cos 2\theta}$ (在镜面中作出 A 点的像 A' , 当镜面围绕 O 点以角速度 ω 转动时, 反射光围绕 A' 点以角速度

2 ω 转动). 11. $n = 13.3$ (要使 A 的实像和 A 在同一位置, 必须使 A 发出的光线经液面折射后沿凹球面的半径方向). 12. (1) 不能; (2) $n < \sqrt{2}$ (最容易从侧面出射的是从顶面沿着顶面入射的光线). 13. 如第 13 题图 (白光进入 A 以后向正 y 方向偏折, n 越大的色光偏折越大. 进入 B 以后向负 z 方向偏折, 同样是 n 越大偏折越大). 14. 1.0 cm (S 在 H 中的虚像再经 L 在原处成虚像). 15. 透镜左边 17.4 cm 处 (S 在 O_1 中成的实像 S_1 在平面镜中成虚像 S_2 , S_2 再在 O_1 中成实像). 16. 取焦距较小的 L_1 放在物右方 u 处, 把焦距较大的 L_2 放在 L_1 右方 d 处, 其中 $d =$



第 13 题图

$2\sqrt{f_1 f_2}$, $u = 2f_1 \sqrt{f_2} / (\sqrt{f_2} - \sqrt{f_1})$ (物在 L_1 中成缩小的实像, 再在 L_2 中成放大的虚像). 17. 圆锥面的像是一个一端在透镜右方距透镜 $\frac{3}{2}f$, 另一端位于无穷远处的半径为 $R = f \cdot \tan \alpha$ 的圆柱面, 为实像. 18. (1) 若 $n > 2$, v 为正值, 在球的左侧成实像; 若 $n = 2$, v 无意义, 不能成像; 若 $n < 2$, v 为负值, 在 A 的右方成虚像; (2) $l = \frac{2n-2}{2-n}R$; (3) $m = \frac{n}{2-n}$ (球面折射成像公式为 $\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_1 - n_2}{R}$, 可求得 $v = \frac{2R}{n-2}$). 19. $2 > n > 4 - 2\sqrt{2}$ (小泡先经过左球面成像, 此像经过平面镜反射后再由左球面成像, 最后再由右球面成像).

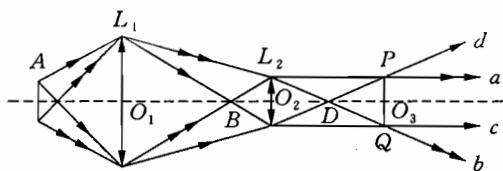
B 组 20. $\frac{r}{R} \geq \frac{1}{n_1}$ (如有绿光与玻璃管外表面相切射出, 从外表面观察, 玻璃管的厚度便似乎为零. 可参考例 4 思路). 21. 实像点在透镜上方轴上 20 mm 处 (成像过程: 凸透镜成实像, 液体上表面折射, 平面镜反射, 液体上表面折射, 凸透镜成像. 或者直接用凸透镜两边介质不同的成像公式 $\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}$ 也可以). 22. $n_x = 1.3372$ (以 $29^\circ 21'$ 角出射的光线正是沿着 A 棱面从待测介质射入棱镜的). 23. (1) 玻璃放在胶片和透镜之间, 像成在镜头后面 12.3 cm 处; (2) 放在离透镜 4.45 m 处 (可用小角近似). 24. (1) 目镜上方 5.1 m 处; (2) $m = 10$ (凹镜成的实像经平面镜反射成在目镜上方 10 cm 处). 25. $f : f' = \frac{n}{(n-1)}$ (参考例 10 的思路). 26. $r = \frac{(d/2)^2}{2[R^2 - 2(d/2)^2]} =$

$2.02 \times 10^{-3} \text{ m}$; 当 $d = 0.25 \text{ m}$ 时, $r' = 2.45 \times 10^{-4} \text{ m}$ (近轴光线确定的焦点

在主轴上离光心 $\frac{R}{2}$ 处,此题中的光线不全为近轴光线,须用反射定律来确定它

们的反射途径). 27. $R = r \left[1 + \frac{h(u+f)}{uf} \right]$ (先求出在水中看 S 点的等效位

置 S' ,然后用凸透镜的成像公式求出 S' 的像点 S''). 28. $f_1 = f_2 = 2 \text{ cm}$ (实际光路如第 28 题图所示.要使 A 发出的光经 L_1 全部被 L_2 接收,实际上就是 A



第 28 题图

成像在 L_2 上.据题意,光线经过 L_2 后必须形成一束平行光). 29. 设球面的

半径为 R ,球心到光心的距离为 u_0 ,那么应满足 $R = \sqrt{u_0(u_0 - 2f)}$ (可将球面

问题简化为过透镜主轴的一个截面内的圆的问题). 30. (1) ABC 上被照到

的区域为球面上一圆环形带,其边界与球心的连线跟水平线的夹角分别为 $\theta_A =$

$2\sin^{-1}0.741 \sim 90^\circ$, $\theta_M = 2\sin^{-1}0.667 \sim \sin^{-1}0.900$

(见第 30 题图); (2) 当 $n = 2$ 时,被照区域变成

一圆盘,然后变成一圆环,当 $n \rightarrow 1.5$ 时,被照区域

趋于一圆线,当 $n > 1.5$ 时,所有光都照不到 ABC

上. 31. (1) L_2 向 P 移动 0.12 m ; (2) 不能,物

距 u_1 必须大于 9.00 cm ,满足此条件的所有物体都

可以通过适当选择 f_1 和 d 使之成像于 P 上;

(3) $f_2 < 9 \text{ cm}$,当 $f_2 < 9 \text{ cm}$ 时,可由下式中求得任

一 v_1 相应的 d 以实现在 P 上成实像(v_1 为像距且

$0 < v_1 < l$), $d = \frac{v_1 + l}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(v_1 + l)^2 - 4[lv_1 - f_2(l - v_1)]}$. 32. (1) L_2 左

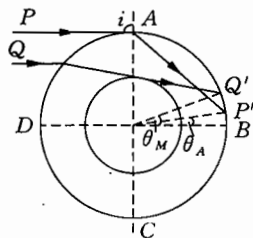
侧 10 cm 处; (2) 2 mm ,正立虚像(可将直角棱镜的斜面作为镜面处理.在考

虑 L_1 的物距时,要特别注意计算的应该是光强,而不是距离). 33. $n = R/(R$

$- 2d)$ (注意光线经过半球形玻璃的平面时的小角度折射). 34. 由第 34 题图

可知,由 C_1 发出的光在 S_1 面上不会改变方向,到 S_2 面上发生折射,反向延长

交于 Q 点.在 $\triangle C_1 C_2 M$ 中,由正弦定理有 $\frac{\overline{C_1 C_2}}{\sin i} = \frac{\overline{C_2 M}}{\sin \theta}$,由于 $C_2 M = R_2$,



第 30 题图

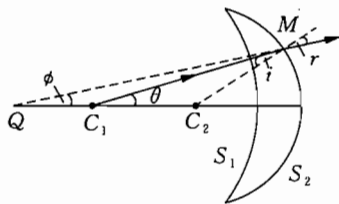
$C_1C_2 = \frac{R_2}{n}$, 所以 $\sin \theta = n \sin i$. 由折射

定律: $n \sin i = \sin r$, 可得: $\theta = r$. 在

$\triangle QC_1M$ 中, $\theta = \phi + \angle C_1MQ = \phi + (r - i)$, $\phi = \theta - (r - i) = i$. 在

$\triangle QC_2M$ 中, 由正弦定理得: $\frac{QC_2}{\sin r} =$

$\frac{C_2M}{\sin \phi} = \frac{R_2}{\sin i}$, 因此 $QC_2 = nR_2$. 由于



第 34 题图

QC_2 大小与入射角无关, 为一常量, 因此对于所有出射光线的反向延长线均相交于同一点 Q , 即 Q 是置于 C_1 的光点的理想像点. 35. (1) 应该使镜筒变长;

(2) $u = 50.5 \text{ m}$ (开普勒望远镜的镜筒长 $L = f_1 + f_2$). 36. (1) $f' = \frac{f}{2} =$

15 cm ; (2) $f'' = 22.5 \text{ cm}$ (相当于多个透镜组合, 空气中的透镜焦距 $f =$

$\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$. 空气中 n 个组合透镜的焦距 $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots + \frac{1}{f_n}$.)

(1) 相当于两个凸透镜组合. (2) 相当于 2 个凸透镜再加一个水中双凹透镜

组合. 37. $\frac{f(2f+d)}{f+d}$ 或 $\frac{fd}{d-f}$ (后式成立必须满足 $d > f$. 前者是 L_1 的像距

大于 d , 后者是 L_1 的像距等于 d). 38. (1) 略 (2) 中间为火石玻璃, 两边为冕牌玻璃, $\alpha = 123.6^\circ$ 39. $h = 0.55 \text{ cm}$, $\Delta S = 22 \text{ cm}$ 40. (1) L_2 右侧 12 cm 处

(2) 口径至少 2 cm , $f = 6.67 \text{ cm}$ 41. (1) $u = 1.757 h$, $\overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3} = 0.854 h$ (2) 略

第 四 讲

A 组 1. 红光 ($\lambda = 649 \text{ nm}$) 和紫光 ($\lambda = 433 \text{ nm}$) 将在反射光中消失, 看到的反射光为黄绿光 (计算出上、下表面反射光的光程差). 2. $D = 1.36 \times$

10^{-6} m (相邻两条亮纹的光程差为 1 个波长). 3. $3.94 \times 10^{-1} \text{ mm}$ (光线在薄膜的

上、下表面上反射时虽然都有半波损失, 但可以抵消. 增透膜的厚度应是增透光波长的 $(2n+1)/4$ 倍). 4. $5.94 \times 10^{-2} \text{ mm}$ (因为只需考虑光程差, 所以

不必顾虑半波损失. 可近似地认为光垂直于下底面). 5. $1.1 \times 10^{-7} \text{ m}$ (光线

在皂膜的上表面反射时有半波损失, 而下表面没有, 因此光程差为 $\frac{\lambda}{2}$ 时干涉相

长). 6. (1) 0.1875 mm; (2) 屏上镜平面上方(1.16~3.46)mm; (3) 12 条(确定 S 在 M 中像的位置,然后用双缝干涉的方法计算). 7. (1) 0.20 mm;

(2) 1.3(当一条狭缝挡上一块薄膜后,需考虑光程的变化). 8. $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C(截止电压需增加,说明波长减小). 9. 如

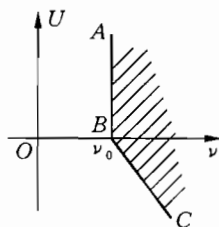
第 9 题图(因为 $U = \frac{h}{e}\nu - \frac{w}{e}$, 所以 BC 线的斜率

是 $\frac{h}{e}$). 10. (1) 3.31×10^7 m/s; (2) $1.44 \times$

10^4 eV. 11. (1) 2.5×10^4 J; (2) 1000 °C;

(3) 0.62 Å(伦琴射线中每一个光子的能量来自一个

外来的电子). 12. 1.384×10^{-26} J(根据相对



第 9 题图

论学说,光子的动量为 $\frac{\Delta E}{c}$). 13. 1.1×10^{-14} m(α 粒子靠近铜原子核时,克服

库仑力做功,势能增大,离核最近时,动能完全转化为电势能.电势能 $E_p =$

$-k \frac{29 \times 2e^2}{r}$). 14. -1.196 MeV(先用动量守恒知识求出碰后 α 粒子的动

能 E'_α ,反应能 $Q = E_p + E'_\alpha - E_\alpha$).

B 组 15. $\Delta H = \frac{\lambda}{2\Delta x} \cdot L = 29.47 \mu\text{m}$. 轻压盖板中央,干涉条纹变密的一

端块规长,条纹变疏的一端块规短; (2) G_2 的上表面与下表面不平行,劈角差

$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 1.35'$. 16. 油膜厚 6340.6 Å , 对 $\lambda = 5833 \text{ Å}$ 的光干涉极大

(5000 Å 和 7000 Å 的两种光在油膜中的光程分别是 1.25 个波长和 1.75 个波

长). 17. $\frac{m}{m_H} = 1.03$, 该粒子是中子, ${}_4^9\text{Be} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_6^{12}\text{C} + {}_0^1\text{n}$ (先分别由动量守

恒和能量守恒求出击出的氢核和氮核的速度,代入能量表达式中即可求出质量

比). 18. 大约需经过 28 次碰撞((1) 的结论用动量守恒和动能守恒关系联立即

可证明. (2) 同样利用动量守恒和动能守恒可得出中子和氢核碰撞 N 次以后的速

度 $v_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot v_0$, 再利用 $\frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{3}{2}kT$, 即可求出 n). 19. (1) $4.2 \times$

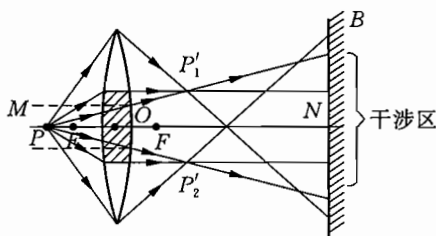
10^6 T/s; (2) $6 \times 10^{14} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$; (3) 1.1×10^{10} 年(地球上与太阳光垂直的

面积是在一个以太阳中心为圆心,日地距离为半径的球面上的一部分.如果要算

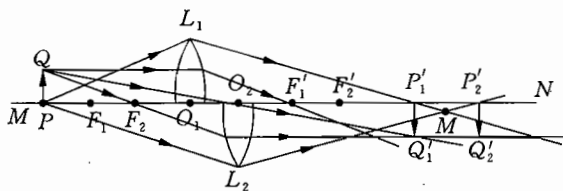
有多少中微子到达地球,则应该用地球的截面积,即 πR_\oplus^2). 20. (1) $0.72E_0$;

(2) 54 次(用动量、动能守恒的知识算出中子碰撞后的速度). 21. 82.13°

(本题是动量、能量守恒在正、负电子湮没实验中的具体应用,能量守恒的方程是 $2m_e c^2 + 20 \text{ keV} = 2h\nu$). 22. (1) 假设正、负电子湮没时只产生一个光子,根据动量守恒及能量守恒列式导出最后结果; (2) $1.24 \times 10^{20} \text{ Hz}$ (由(1)可得出两个光子的动量必然是等值反向的,再根据能量守恒可得到频率). 23. (1) $n = 1.2 \times 10^{21}$ 个; (2) $I = 2.21 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{s}$; (3) $p = 2.21 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$ (光子的能量 $E_0 = h \frac{c}{\lambda}$; 光子的动量 $p = h/\lambda$). 24. (1) $N = \frac{E\lambda}{hc} = 1.05 \times 10^{18}$ 个; (2) $\omega = 0.508 \text{ J/m}^3$; (3) $p = 0.508 \text{ N/m}^2$ (同 23 题提示). 25. (1) 干涉图如第 25 题图 1 所示. 干涉条纹间距 $\Delta x = 2.75 \times 10^{-4} \text{ m}$, 根据 $\Delta x = \lambda \frac{L}{d}$, 可知当 L 变大时, Δx 将变大; (2) 干涉光路图如第 25 题图 2 所示. 屏上的干涉条纹是以主轴为中心的一簇明暗相间的同心半圆环, 位于主轴下方. 26. $\Delta y = \frac{(R+r)\lambda}{2r\theta}$ (求出 S 在两平面镜中的虚像 S_1 、 S_2 的位置, 然后用双缝干涉求 Δy). 27. (1) 1:2, 1:3 (2) 电离能: 4:1, 9:1. 第一激发能: 4:1, 9:1 (3) 1:9



第 25 题图 1



第 25 题图 2

第五讲

1. (1) 12:50 (2) 1:30 (3) 4:30 2. $L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta_0}$, $\tan \theta =$

$\tan \theta_0 / \sqrt{1-v^2/c^2}$ 3. $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ m, S' 系认为两枪不同时发, 前面的枪先

发. 4. $\sqrt{5}c = 6.71 \times 10^8$ m 5. $0.99c$ 6. (1) $t' = \frac{l_0}{c}$ (2) $t_1 = \frac{l_0}{c} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$

(3) $t_2 = \frac{l_0}{v} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 7. 由洛伦兹变换, 在 S' 系中两事件的时间间隔为

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

欲使两事件次序颠倒, 应有 $t'_2 < t'_1$, 即 $t'_2 - t'_1 < 0$, 由上式, 这要求 $t_2 - t_1 < \frac{u}{c^2}(x_2$

$-x_1)$, 这只有在 $t_2 - t_1 < \frac{x_2 - x_1}{c}$ 时才有可能, 若两事件有因果联系, 由于任何

信号速度不可能大于光速, 故有 $t_2 - t_1 > \frac{x_2 - x_1}{c}$, 于是在任何参照系看来, 两

事件的次序不可能颠倒. 8. 只要让竿以足够大的速度运动, 由长度收缩, 竿的长度可能小于仓库的长度. 但在某乙看来, 仓库长反而缩短, 更不能放进竿.

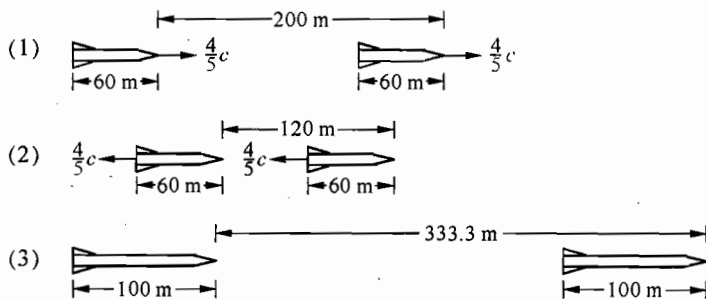
两者的矛盾来自同时性的相对性, 在乙看来, 两门并未同时关闭, 前方的门先打

开. 9. (1) 由长度收缩, 每艘飞船的长度都缩短为 $100 \sqrt{1-0.8^2} = 60$ m, 但

两飞船的距离仍为 200 m; (2) 飞船长度及两飞船的距离均收缩为 0.6 倍;

(3) 在 S' 系中, 飞船静止, 故长度为 100 m. 再者, 在 S' 系看来, 两飞船的发动机并不同时点燃的, 而是前面一艘先点燃, 先达到 $0.8c$, 故两飞船的距离不是

200 m, 而是 $200/0.6 = 333 \frac{1}{3}$ m.



第 9 题图

10. (1)

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}.$$

(2) 由上式解出 $\cos \theta$, 得

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta'},$$

以 $\theta' = \frac{\pi}{2}$ 代入上式, 得 $\cos \theta = -\frac{v}{c}$, 当 $v \rightarrow c$ 时, $\cos \theta \rightarrow -1$, $\theta \rightarrow \pi$. 11. 相

对地面参照系, 玻璃厚度减为 $D \sqrt{1 - v^2/c^2}$, 而光在玻璃中传播速度 u 则可由相对论速度变换求得:

$$u = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{c}{n}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}}.$$

于是光从进入玻璃到射出玻璃所需时间 t_1 可由下式求得

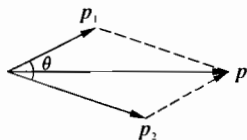
$$ut_1 = D \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt_1,$$

而光从 A 传播到 B 的总时间 $t = t_1 + t_2 = t_1 + \frac{L - ut_1}{c}$. $t = \frac{L}{c} +$

$\frac{D(n-1)(1-v/c)}{c \sqrt{1-v^2/c^2}}$. 12. (1) $E_1 = 1.15m_0c^2$, $p_1 = 0.58m_0c$; $E_2 =$

$1.67m_0c^2$, $p_2 = 1.33m_0c$ (2) $E = 2.69m_0c^2$, $p = 2.50m_0c$ 13. $2m_0 /$
 $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ 14. (1) 84.0° (2) 26.1° 15. 粒

子的能量 E 为两光子的能量和: $E = E_1 + E_2$, 粒子的动量 p 也为两光子的动量和: $p = p_1 + p_2$ (如第 16 题图所示), 而光子的动量值为其能量除以 c , 再利用粒子的能量动量关系即可求出粒子的静质量.



第 15 题图

$$m_0 = \sqrt{2E_1E_2(1 - \cos \theta)} / c^2$$

16. 由题意, 激发态原子的静能为 $m_0c^2 + E_0$. 设激发态原子的运动速度为 v , 发射光子的能量为 E' , 由能量守恒, 有

$$\frac{m_0c^2 + E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0c^2 + E',$$

由动量守恒,有

$$\frac{m_0 c^2 + E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c^2} = \frac{E'}{c}.$$

由以上两式即可解出:

$$E' = E_0 (1 + E_0 / 2m_0 c^2)$$

17. 辐射能即光子. 设某一时刻火箭的质量为 m , 它在辐射出动量为 dp 的若干光子后, 由能量守恒有

$$c^2 dm + c dp = 0 \quad (1)$$

而由动量守恒则有

$$d(mv) - dp = 0 \quad (2)$$

以②式代入①式得

$$d(mv) = -cdm,$$

两边积分得

$$\frac{M_f v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c \left[M_i - \frac{M_f}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right].$$

由此即可求出末速度

$$v = c(M_i^2 - M_f^2) / (M_i^2 + M_f^2)$$

18. 设电子初速度为 v_0 , 碰后电子速度为 v , 以光子运动方向为正 (如第 19 题图), 由能量守恒, 有



第 18 题图

$$Q + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} c^2 = Q + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 \quad (1)$$

由动量守恒, 有

$$\frac{Q}{c} - \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = -\frac{Q}{c} + \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

由①式, $|v| = v_0$, 代入②得

$$2 \frac{Q}{c} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} (v_0 + v) \quad (3)$$

可见 v 只能取正值, 于是由式③可得

$$\frac{Q}{c} = \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

由此可解出

$$v_0 = c / \sqrt{1 + (m_0 c^2 / Q)^2}$$

19. (1) 由能量、动量守恒和能量动量关系不难证明吸收光子全部能量后的电子的静质量必然增大, 而电子作为基本粒子, 静质量不可能改变. (2) 分别列出动量、能量守恒, 即可证明其不能同时满足. (3) 同(2).



张大同 华东师大二附中
特级教师，华东师范大学物理
系兼职教授，上海市物理学会
常务理事。1993年获“李政道
奖学金伯乐奖”。在长期的物
理教学工作中，特别是在尖子
生的培养方面，取得了优异成
绩。1991年至今，所辅导的学
生中总计获国际中学生物理奥
林匹克金牌8枚，银牌1枚，20
余人次进入国家集训队。主编
和编著的主要著作有《高中物
理竞赛专题辅导》、《多功能
题典·高中物理》和《读题与
做题》等。