力學

2021 年

作者：李宥頡
組織：National Taiwan University

序

目錄

第 1 章 運動學

1.1 斜拋

拋體運動根據運動獨立性（或稱運動重疊原理），可將一曲線運動分為兩個正交方向的直線運動來討論。一般來說，習慣分解成水平方向與鉛直方向，以常見的直角笛卡爾座標（Cartesian Coordinate），我們將水平方向稱為 x 方向，鉛直方向稱為 y 方向，由於重力恆指向 $-y$，故鉛直方向作鉛直上拋運動，且水平方向不受重力，故水平方向作等速度運動。根據上述，運動的含時參數方程（參數為時間 t）為

$$x = v_0 \cos\theta t \qquad y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.1}$$

$$v_x = v_0 \cos\theta \qquad v_y = v_0 \sin\theta - gt \tag{1.2}$$

對於斜拋來說，我們主要對飛行時間 T、最大高度 H、水平射程 R 有興趣。直覺上飛行時間應由鉛直方向決定，因為水平方向作等速度運動，看不出時間的影響，故從鉛直方向的上拋運動判斷。由於上拋上下程的對稱性，飛行時間 $T = T+T = 2T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2v_{0y}}{g}$。由於水平方向為等速度運動，水平射程 $R =$ 水平初速 $\times T = \frac{2v_0 \cos\theta \sin\theta}{g} = \frac{v_0 \sin 2\theta}{g}$。最後，最大高度 H 由上拋得出，可得 $H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$。

$$\begin{aligned} T &= \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \\ R &= \frac{v_0 \sin 2\theta}{g} \\ H &= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \end{aligned} \tag{1.3}$$

斜拋重點討論：

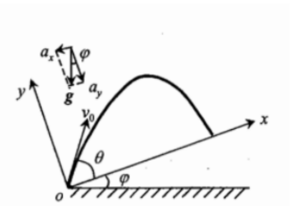
1. 水平射程 $R = \frac{v_0 \sin 2\theta}{g}$ 在初速 v_0 固定時，有一最大值 $R_{Max} = \frac{v_0^2}{g}$，並發生在 $\theta_{Max} = \frac{\pi}{4}$
2. 同一水平射程 $R = \frac{v_0 \sin 2\theta}{g} = \frac{2v_0 \sin\theta \cos\theta}{g}$，在固定初速度並透過簡單的代換可知，有兩個拋射角 θ_1, θ_2 滿足同一射程，且

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \tag{1.4}$$

1.2 斜拋打斜面

1.2.1 運動方程

在討論斜面上的斜拋運動，我們常選擇平行斜面方向為 x 軸，而垂直斜面方向為 y 軸。分解初速和加速度之後，此時兩方向的運動均為等加速度運動。



$$x = (v_0 \cos\theta t) \pm \frac{1}{2}(g \sin\varphi)t^2 \qquad y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}(g \cos\varphi)t^2 \tag{1.5}$$

$$v_x = v_0 \cos\theta \pm (g \sin\varphi)t \qquad v_y = v_0 \sin\theta - (g \cos\varphi)t \tag{1.6}$$

若欲求斜拋打斜面的射程，即令方程式1.4中的 y 為 0，求出的 x 值即為射程 R

$$R = \frac{2v_0^2 \cos(\theta + \varphi)\sin\theta}{g \cos^2\varphi} \tag{1.7}$$

在固定 v_0 時，最大射程（$+$ 為向上斜拋，$-$ 為向下斜拋）

$$R_{Max} = \frac{v_0^2}{g(1 \pm \sin\varphi)} \tag{1.8}$$

和相對應的拋射角（− 為向上斜拋，+ 為向下斜拋）

$$\theta_{Max} = \frac{\pi}{4} \mp \frac{\varphi}{2} \tag{1.9}$$

證明

筆記 如何找三角函數極值：
1. 利用 sin，cos 的極值分別發生在 $\frac{\pi}{2}$，0
2. 利用三角疊合
3. 利用和差化積、積化和差轉回 1.
4. 一次微分檢驗

1.3 軌跡方程

雖然運動方程（即位置與時間的函數關係）已經提供充足的解題要素，在實際處理問題上，軌跡方程因為消去時間參數 t，因此在解題上面對不含時的問題中，可以更清楚看到初速與拋射角的關係。將方程 1.1代換

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \tag{1.10}$$

並代入 y，即可獲得軌跡方程

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \tag{1.11}$$

利用三角恆等式

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \tag{1.12}$$

代換的原因可以使軌跡方程中的角度，變成單一三角函數 $\tan\theta$，方便後續討論

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1 + \tan^2\theta\right) \tag{1.13}$$

從方程式1.13也可以側面證明出斜拋的確是數學上的拋物線 $y = ax^2$，且二次項係數為負，代表開口朝下。求出軌跡方程可幫助我們探討變數 x, y, v_0, θ 之間的關係。

1. 若假定某斜拋的座標起點為原點 $(0,0)$，並且在固定初速度 v_0，並可通過點 (x,y)，換句話說，方程 1.13當

中，只剩 $\tan\theta$ 為變數，且可改寫成 $\tan\theta$ 的二次函數

$$\tan^2\theta - \frac{2v_0^2}{gx}\tan\theta + \left(\frac{2v_0^2}{gx^2}y + 1\right) = 0 \tag{1.14}$$

由二次函數的公式解，可求出 $\tan\theta$

$$\tan\theta = \frac{v_0^2}{gx} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2 - \left(\frac{2v_0^2}{gx^2}y + 1\right)} \tag{1.15}$$

一般情況下，$\tan\theta$ 有兩解，且在斜拋的合理拋射角下（銳角），$\tan\theta$ 和 θ 為一對一的函數關係，即同一位置，在固定初速度之下，有兩個拋射角 θ_1, θ_2 對應到此位置，並且我們將證明，若此位置在斜面上（斜角為 φ），兩拋射角之間有關係（對應方程1.4，即是 $\varphi = 0$ 的情形）

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi \tag{1.16}$$

證明

2. 在初速度和擊中點的 x 座標固定，最大高度 y_{max}

$$y = y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \tag{1.17}$$

且拋射角 θ_0 必滿足

$$\tan\theta = \tan\theta_0 = \frac{v_0^2}{gx} \tag{1.18}$$

證明

在斜拋打斜面問題中，主要可以分為兩種方法，第一種利用軌跡方程，解代數問題，此方法時常配合二次函數的解，討論可行的拋射角。第二種方法是利用向量

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{1.19}$$

換句話說，位移向量總是 $\vec{v}_0 t$ 和 $\frac{1}{2}\vec{g}t^2$ 兩向量做向量加法，物理意義相當於先利用 v_0 作等速直線運動，再自由落體 $\frac{1}{2}gt^2$，搭配斜面的幾何，即可利用三角函數的正弦定律求解，見例題 2-7