Fundamentos del Filtrado Espacial

Procesamiento Digital de Imágenes

Nombre del Presentador
Institución/Departamento

21 de mayo de 2025

Contenido

Definición y Propósito

Filtrado Espacial

El **filtrado espacial** se refiere a la modificación del valor de cada píxel de una imagen en función de los valores del propio píxel y sus vecinos. Es una técnica fundamental en el procesamiento de imágenes, utilizada principalmente para **realce (enhancement)** y restauración.

El nombre "filtro"se toma del procesamiento en el **dominio de la frecuencia** (Capítulo 4 del material original), donde "filtrarïmplica:

- Pasar, modificar o rechazar componentes de frecuencia específicos de una imagen.
- Ejemplo: Un *filtro paso-bajas* atenúa las altas frecuencias, resultando en un suavizado o difuminado (blurring) de la imagen.
- Efectos similares de suavizado se pueden lograr directamente en el dominio espacial.

Tipos de Filtros Espaciales

El filtrado espacial modifica una imagen reemplazando el valor de cada píxel por una función de los valores del píxel y sus vecinos.

Filtro Lineal Espacial

La operación realizada sobre los píxeles de la imagen es **lineal**. Nos centraremos inicialmente en estos filtros.

Filtro No Lineal Espacial

La operación realizada sobre los píxeles es **no lineal**. Se introducirán algunos filtros no lineales básicos más adelante (referencia a Sección 5.3 del material original).

El Kernel del Filtro

Un filtro espacial lineal realiza una operación de **suma de productos** entre una sub-área de la imagen f y una matriz llamada **kernel de filtro** w.

- El **kernel** (o núcleo) es un arreglo (generalmente 2D) de coeficientes.
- Sus **coeficientes** determinan la naturaleza y el comportamiento del filtro (e.g., suavizado, realce de bordes).
- El **tamaño del kernel** define la vecindad de píxeles considerada para cada operación.
- **Otros términos comunes** para el kernel:
  - Máscara (mask)
  - Plantilla (template)
  - Ventana (window)

Operación con un Kernel 3×3

Respuesta del Filtro $g(x, y)$

En cualquier punto (x, y) de la imagen, la respuesta $g(x, y)$ del filtro es la suma de productos de los coeficientes del kernel y los píxeles de la imagen cubiertos por el kernel:

$$\begin{aligned} g(x, y) = & w(-1, -1)f(x-1, y-1) + w(-1, 0)f(x-1, y) + w(-1, 1)f(x-1, y+1) \\ & + w(0, -1)f(x, y-1) + w(0, 0)f(x, y) + w(0, 1)f(x, y+1) \\ & + w(1, -1)f(x+1, y-1) + w(1, 0)f(x+1, y) + w(1, 1)f(x+1, y+1) \end{aligned} \tag{3-30}$$

- A medida que las coordenadas x e y varían, el centro del kernel se mueve de píxel a píxel, generando la imagen filtrada g.
- El coeficiente central del kernel, $w(0, 0)$, se alinea con el píxel en la ubicación (x, y) de la imagen original f.

Ilustración del Filtrado Lineal (Fig. 3.28)

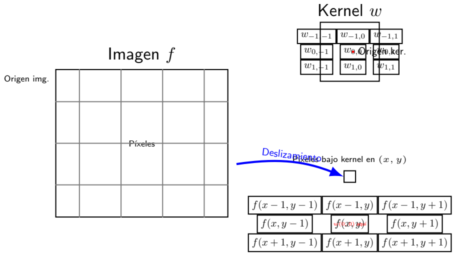

Figura: Mecánica del filtrado espacial lineal (conceptual, Fig. 3.28). El kernel se desliza sobre la imagen, calculando la suma de productos en (x, y).

Orígenes

El origen de la imagen suele ser la esquina superior izquierda. Para simplificar las expresiones, el origen del kernel se define en su centro, especialmente para kernels simétricos.

Expresión General y Tamaño del Kernel

Para un kernel de tamaño $m \times n$, se asume que $m = 2a + 1$ y $n = 2b + 1$, donde a, b son enteros no negativos. Esto implica que nos centramos en kernels de **tamaño impar** en ambas direcciones. El filtrado espacial lineal de una imagen de tamaño $M \times N$ con un kernel de $m \times n$ está dado por:

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t) f(x + s, y + t) \tag{3-31}$$

Donde x e y varían para que el centro (origen) del kernel visite cada píxel en f.

Herramienta Central

La ecuación (3-31) es una herramienta central en el filtrado lineal. Para un valor fijo de (x, y), implementa la suma de productos como en (3-30), pero para un kernel de tamaño impar arbitrario.

Definición de Correlación Espacial

La **correlación espacial** es el proceso ilustrado gráficamente en la Fig. 3.28 y descrito matemáticamente por la Ec. (3-31).

- Consiste en mover el centro de un kernel sobre una imagen.
- En cada ubicación, se calcula la suma de productos entre los coeficientes del kernel y los píxeles correspondientes de la imagen.

La correlación de un kernel w con una imagen $f(x, y)$, denotada $(w \star f)(x, y)$, es:

$$(w \star f)(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t) f(x + s, y + t) \tag{3-34}$$

Para el caso 1D, la Ec. (3-31) se convierte en:

$$g(x) = \sum_{s=-a}^{a} w(s) f(x + s) \tag{3-32}$$

Definición de Convolución Espacial

La mecánica de la **convolución espacial** es la misma que la correlación, con una diferencia clave:

- El kernel de correlación se **rota 180°** antes de realizar la operación de deslizamiento y suma de productos.

La convolución de un kernel w de tamaño $m \times n$ con una imagen $f(x, y)$, denotada $(w * f)(x, y)$, se define como:

$$(w * f)(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s, t) f(x - s, y - t) \qquad \text{(3-35)}$$

Interpretación de los Signos

Los signos negativos en los argumentos de $f(x - s, y - t)$ alinean las coordenadas de f y w cuando una de las funciones se rota 180°. Esta ecuación implementa el proceso que se conoce como **filtrado espacial lineal**.

Filtrado espacial lineal y convolución espacial son sinónimos.

Manejo de Bordes: Padding

Cuando el kernel se superpone con los bordes de la imagen, algunos de sus coeficientes caen fuera del área de la imagen.

- La suma de productos queda indefinida en estas áreas.
- **Solución: Padding (Relleno)**. Consiste en añadir píxeles alrededor de la imagen.
- **Zero-padding**: El método más común es rellenar con ceros.
- Si el kernel es de tamaño $1 \times m$ (en 1D), se necesitan $(m-1)/2$ ceros a cada lado de la función f.
- Para un kernel 2D de $m \times n$, se rellena con un mínimo de $(m-1)/2$ filas de ceros arriba/abajo y $(n-1)/2$ columnas de ceros a izquierda/derecha.
- El padding asegura que el centro del kernel pueda visitar cada píxel de la imagen original.

Otras opciones de padding

Existen otras estrategias de padding además del relleno con ceros (e.g., replicar bordes, padding simétrico), que se discuten en detalle en otras partes del material original.

Correlación/Convolución con un Impulso Discreto

Un **impulso unitario discreto** es una función que es 1 en una ubicación y 0 en todas las demás. Para una imagen 2D, un impulso de amplitud A en (x_0, y_0) es:

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \begin{cases} A & \text{si } x = x_0, y = y_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3-33}$$

(Para un impulso unitario, $A = 1$).

Correlación con un Impulso

Correlacionar un kernel w con un impulso unitario discreto produce una copia de w **rotada 180°** en la ubicación del impulso.

Convolución con un Impulso

Convolucionar un kernel (o cualquier función) w con un impulso unitario discreto produce una **copia exacta** de w en la ubicación del impulso. Propiedad fundamental en sistemas lineales.

Nota: Figuras 3.29 y 3.30 del texto original ilustran estos procesos detalladamente para casos 1D y 2D.

Ilustración Conceptual (Fig. 3.29 y 3.30)

Idea Principal de Fig. 3.29 (1D) y Fig. 3.30 (2D)

Estas figuras muestran secuencias paso a paso de:

- Una función/imagen f (que es un impulso unitario).
- Un kernel w (no necesariamente simétrico).
- El proceso de padding de f.
- **Correlación**:
    - Deslizamiento del kernel w sobre f (paddeada).
    - Cálculo de la suma de productos en cada desplazamiento.
    - Resultado: versión del kernel w **rotada 180°**, centrada en la posición original del impulso.
- **Convolución**:
    - El kernel w se rota 180° *antes* del proceso de deslizamiento.
    - Deslizamiento del kernel w_{rotado} sobre f (paddeada).
    - Cálculo de la suma de productos.
    - Resultado: copia **exacta** del kernel w original, centrada en la posición del impulso.

Tamaño del Resultado: "Full" vs "Same"

La cantidad de padding afecta el tamaño de la imagen resultante $g(x, y)$.

- **Padding para "Same.ºutput**: Si se paddea la imagen f tal que el centro del kernel visita cada píxel original de f y la imagen resultante g tiene el *mismo tamaño* que f. Es el caso más común. Se necesitan $(m-1)/2$ y $(n-1)/2$ elementos de padding.
- **Padding para "Full.ºutput**: Si se desea que *cada elemento* del kernel w $(m \times n)$ visite cada píxel de la imagen f $(M \times N)$.
  - Requiere más padding: $(m-1)$ filas y $(n-1)$ columnas.
  - El tamaño del arreglo resultante $(S_v \times S_h)$ es:

$$S_v = M + m - 1 \tag{3-36}$$

$$S_h = N + n - 1 \tag{3-37}$$

Nota: En Ecs. (3-36) y (3-37) del texto, M, N son dims. de imagen y m, n del kernel.

Consideraciones Algorítmicas

- Muchos algoritmos de filtrado espacial están basados en la correlación (Ec. 3-34).
- Para usar un algoritmo de **correlación** para realizar **convolución**: se introduce el kernel w rotado 180°.
- Para usar un algoritmo de **convolución** (Ec. 3-35) para realizar **correlación**: se introduce el kernel w rotado 180° (menos común).
- Es decir, cualquiera de las Ecs. (3-34) o (3-35) puede realizar la función de la otra rotando el kernel.
- **Importante**: El orden de las funciones en un algoritmo de correlación sí importa, porque la correlación no es conmutativa ni asociativa (ver Tabla 3.5).

Propiedades Fundamentales (Tabla 3.5)

Cuadro: Propiedades fundamentales de la convolución y correlación.

Propiedad	**Convolución ($*$)**	**Correlación ($\star$)**
Conmutativa	$f * g = g * f$	—
Asociativa	$f * (g * h) = (f * g) * h$	—
Distributiva	$f * (g + h) =$ $(f * g) + (f * h)$	$f \star (g + h) =$ $(f \star g) + (f \star h)$

(Un –ïndica que la propiedad no se cumple.)

Relevancia de las Propiedades de la Convolución

La conmutatividad y asociatividad de la convolución son cruciales:

- Permiten el **filtrado secuencial** eficiente.
- Son la base de la **teoría de sistemas lineales e invariantes al desplazamiento (LSI)**.
- Permiten la **separabilidad de kernels** (kernel 2D $\rightarrow$ dos convoluciones 1D).

Ejemplos de Kernels de Suavizado (Fig. 3.31)

Los kernels de suavizado (filtros paso-bajas) se usan para reducir ruido y difuminar detalles.

a) Box Kernel (Promediador):

$$\frac{1}{9}\times\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

eemplaza cada píxel por el promedio de su vecindad 3×3. Todos los eficientes son iguales.

(b) Gaussian Kernel (Ponderado):

$$\frac{1}{4{,}8976}\times\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0{,}3679 & 0{,}6065 & 0{,}3679 \\ \hline 0{,}6065 & 1{,}0000 & 0{,}6065 \\ \hline 0{,}3679 & 0{,}6065 & 0{,}3679 \\ \hline\end{array}$$

Los coeficientes siguen una Gaussiana. Dan más peso a píxeles centrales. Factor de norm. es suma de coefs.

Nota sobre Simetría

Ambos kernels son simétricos respecto a su centro. Por lo tanto, para estos kernels, la correlación y la convolución producirían el mismo resultado. No se requiere rotación previa para la convolución.

Terminología en la Literatura

Es común encontrar una terminología algo imprecisa:

- **"Filtro de convolución", "máscara de convolución", "kernel de convolución"** a menudo se usan para denotar un kernel de filtro espacial, sin implicar necesariamente que el kernel se use estrictamente para la operación matemática de convolución (podría usarse en una correlación).
- **Çonvolucionar un kernel con una imagen"** se usa frecuentemente de manera genérica para referirse al proceso de deslizamiento y suma de productos, sin diferenciar estrictamente entre correlación y convolución.

En este contexto (y en gran parte de la teoría de procesamiento de imágenes):

Cuando se habla de **filtrado espacial lineal**, se refiere a la **convolución** de un kernel con una imagen.

Filtrado Secuencial

Una imagen f puede ser filtrada secuencialmente, en Q etapas, usando un kernel diferente $(w_1, w_2, \ldots, w_Q)$ en cada etapa: $f \xrightarrow{w_1} g_1 \xrightarrow{w_2} g_2 \ldots \xrightarrow{w_Q} g_Q$ Debido a la propiedad **asociativa** de la convolución, esta operación multi-etapa es equivalente a una única operación de filtrado $w * f$, donde el kernel efectivo w es la convolución de todos los kernels individuales:

$$w = w_1 * w_2 * w_3 * \cdots * w_Q \tag{3-38}$$

Importancia

Esto permite, por ejemplo, diseñar filtros complejos a partir de filtros más simples, o analizar el efecto combinado de varias operaciones de filtrado. No se podría escribir una ecuación similar para la correlación debido a su falta de asociatividad.

Tamaño del Kernel en Filtrado Secuencial

Si todos los kernels individuales w_i en un filtrado secuencial de Q etapas son de tamaño $m \times n$, y se asume convolución "full.en cada paso intermedio (es decir, cada valor de un kernel visita cada valor del arreglo resultante del paso anterior), el kernel combinado w (de la Ec. 3-38) será de tamaño $W_v \times W_h$:

$$W_v = Q \times (m - 1) + m \tag{3-39}$$

$$W_h = Q \times (n - 1) + n \tag{3-40}$$

- Estas ecuaciones se derivan de aplicaciones sucesivas de las Ecs. (3-36) y (3-37) para el tamaño de una convolución "full".
- Ejemplo: Si $Q = 2$ kernels de 3×3 $(m = 3, n = 3)$:
  - $W_v = 2 \times (3 - 1) + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7$
  - $W_h = 2 \times (3 - 1) + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7$
  - El kernel combinado $w = w_1 * w_2$ sería de 7×7.

Puntos Clave del Filtrado Espacial Lineal

- Modifica píxeles mediante una **suma de productos** con un **kernel**.
- La **correlación** $(w \star f)(x, y) = \sum \sum w(s, t) f(x + s, y + t)$ es la aplicación directa de esta suma.
- La **convolución** $(w * f)(x, y) = \sum \sum w(s, t) f(x - s, y - t)$ implica rotar el kernel 180° (o ajustar índices) y es la base del filtrado lineal.
- Operar con un **impulso unitario** revela la diferencia:
  - Correlación $\rightarrow$ kernel rotado.
  - Convolución $\rightarrow$ kernel original.
- El **padding** es crucial para manejar los bordes de la imagen y controlar el tamaño de la salida.
- La convolución es **conmutativa y asociativa**, propiedades vitales para la teoría de sistemas y el filtrado secuencial eficiente.
- El tamaño del kernel resultante de un filtrado secuencial puede determinarse a partir de los tamaños de los kernels individuales.

Conclusiones

Importancia del Filtrado Espacial

El filtrado espacial lineal, fundamentado en la operación de convolución, es una de las herramientas más versátiles y fundamentales en el procesamiento digital de imágenes. Comprender su mecánica, la diferencia entre correlación y convolución, y las propiedades de estas operaciones es esencial para:

- Diseñar y aplicar filtros para una amplia gama de tareas (suavizado, realce de bordes, detección de características, etc.).
- Analizar el comportamiento de sistemas de procesamiento de imágenes.
- Desarrollar algoritmos eficientes.

Próximos Pasos

Las secciones y capítulos subsecuentes del material original explorarán tipos específicos de filtros espaciales (lineales y no lineales) y sus aplicaciones, así como el filtrado en el dominio de la frecuencia.

¿Preguntas? ¡Gracias por su atención!