

Transformaciones de Intensidad y Filtrado Espacial

Basado en el Cap. 3 de "Digital Image Processing"
(Gonzalez & Woods)

Nombre del Presentador (Adaptado de material técnico)

Universidad / Institución

1 de junio de 2025

Contenido

- 1 Introducción y Conceptos Fundamentales
- 2 Principios Básicos de Transformaciones de Intensidad y Filtrado Espacial
- 3 Acerca de los Ejemplos en este Capítulo
- 4 Introducción al Bit-Plane Slicing
- 5 Descomposición y Análisis
- 6 Reconstrucción y Aplicaciones
- 7 Definición y Propiedades del Histograma
- 8 Ecualización Discreta y Ejemplos
- 9 Resumen y Aplicaciones
- 10 Resumen y Aplicaciones (General)
- 11 Datos Iniciales y Pasos del Proceso
- 12 Resultados Gráficos (Figura 3.22 del libro)
- 13 Resumen y Conclusión
- 14 Ecualización de Histograma
- 15 Especificación de Histograma
- 16 Resumen y Conclusiones
- 17 Procesamiento Local de Histogramas

Dominio Espacial

El término *dominio espacial* se refiere al plano mismo de la imagen, y los métodos de procesamiento en esta categoría se basan en la manipulación directa de los píxeles en una imagen.

- Se contrasta con el procesamiento en el *dominio de la frecuencia* (o transformado), donde la imagen primero se transforma, luego se procesa, y finalmente se aplica la transformada inversa.
- Dos categorías principales de procesamiento en el dominio espacial:
 - **Transformaciones de intensidad:** Operan en píxeles individuales. Útiles para manipulación de contraste y segmentación por umbralización.
 - **Filtrado espacial:** Realiza operaciones sobre la vecindad de cada píxel. Útil para suavizado y realce de bordes.

Objetivos de Aprendizaje

Al finalizar este capítulo, el lector debería ser capaz de:

- Entender el significado del procesamiento en el dominio espacial y cómo difiere del procesamiento en el dominio de la frecuencia.
- Conocer las técnicas principales utilizadas para las transformaciones de intensidad.
- Comprender el significado físico de los histogramas de imagen y cómo pueden ser manipulados para el realce.
- Entender la mecánica del filtrado espacial y cómo se forman los filtros espaciales.
- Entender los principios de la convolución y correlación espacial.
- Familiarizarse con los principales tipos de filtros espaciales y cómo se aplican.
- Ser consciente de las relaciones entre los filtros espaciales y el concepto fundamental de los filtros paso bajo.
- Entender cómo se pueden utilizar combinaciones de métodos de realce cuando un solo enfoque es insuficiente.

Procesos en el Dominio Espacial

Definición General

Los procesos en el dominio espacial se expresan comúnmente como:

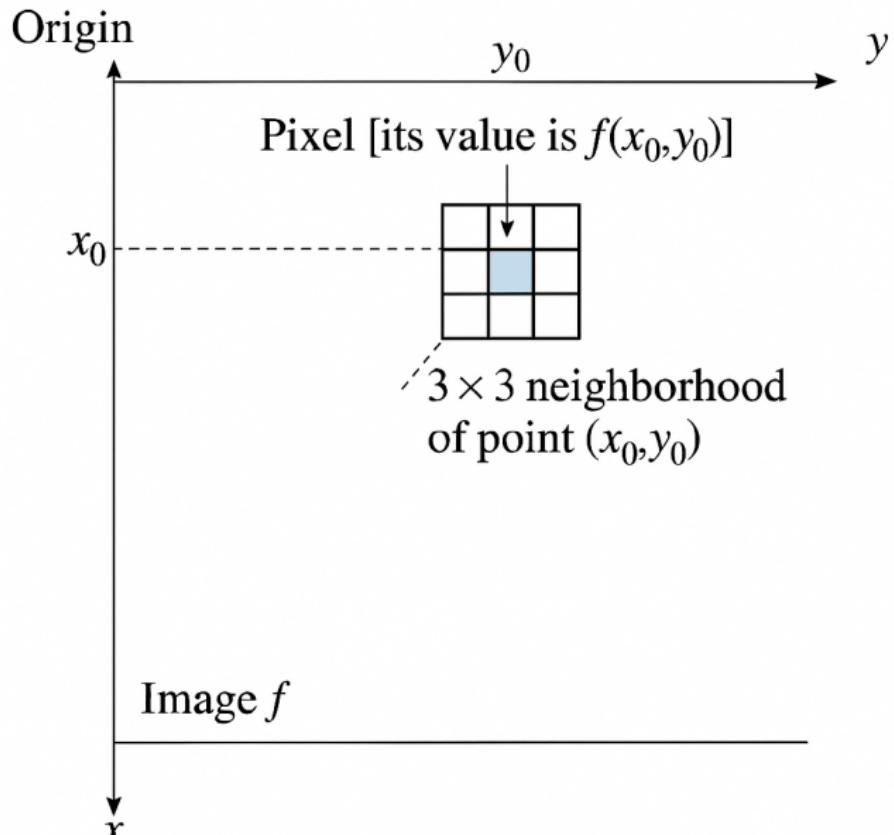
$$g(x, y) = T[f(x, y)] \quad (1)$$

donde:

- $f(x, y)$ es la imagen de entrada.
- $g(x, y)$ es la imagen procesada (salida).
- T es un operador definido sobre una vecindad del punto (x, y) .

El punto (x_0, y_0) es una ubicación arbitraria en la imagen, y la región pequeña alrededor de este es su *vecindad*.

Vecindad de un píxel



Operador T y Vecindad (Neighborhood)

Ilustración de la Vecindad (Original: Fig. 3.1)

Una vecindad de 3×3 alrededor de un punto (x_0, y_0) en una imagen f . La vecindad se mueve de píxel a píxel en la imagen para generar una imagen de salida. El valor del píxel en (x_0, y_0) es $f(x_0, y_0)$.

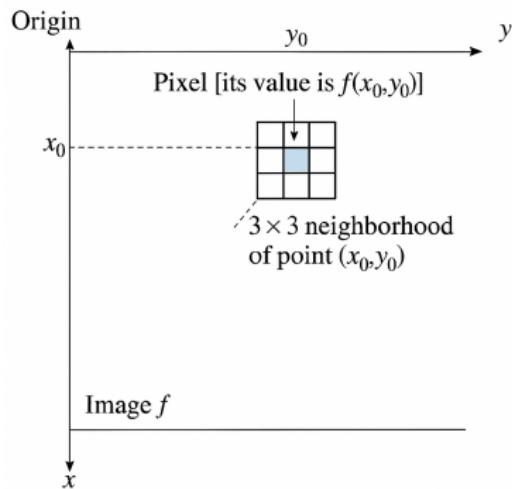


Figura: Representación de una vecindad 3×3 centrada en (x_0, y_0) .

Transformaciones de Intensidad (Mapeo de Nivel de Gris)

Definición

La forma más simple del operador T es cuando la vecindad es de tamaño 1×1 . En este caso, el valor de salida g en (x, y) solo depende del valor de f en ese mismo punto. Esto se conoce como una **transformación de nivel de gris o función de mapeo de intensidad**, y se denota como:

$$s = T(r) \quad (2)$$

donde:

- r denota el nivel de gris (intensidad de entrada) de $f(x, y)$.
- s denota el nivel de gris (intensidad de salida) de $g(x, y)$.

Ejemplos Comunes de $T(r)$

- **Estiramiento de contraste (Contrast stretching)**: Para expandir el rango dinámico de los niveles de gris.
- **Umbralización (Thresholding)**: Para crear una imagen binaria. Si

Ejemplos Gráficos de $T(r)$ (Fig. 3.2 Mejorada)

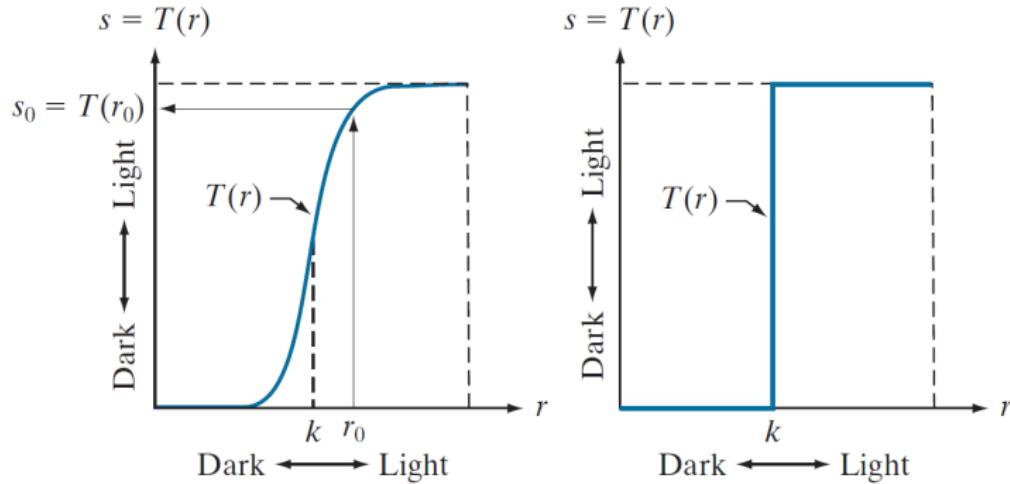


Figura: 3.2

Enfoque Principal: Realce de Imágenes

Aunque las transformaciones de intensidad y el filtrado espacial abarcan una amplia gama de aplicaciones, la mayoría de los ejemplos en este capítulo se centran en aplicaciones para el **realce de imágenes**.

- **Realce:** Proceso de manipular una imagen para que el resultado sea más adecuado que el original para una aplicación específica.
- La palabra específica es crucial: lo que funciona para realizar imágenes de rayos X puede no ser óptimo para imágenes infrarrojas.
- No existe una "teoría" general del realce de imágenes. Cuando se procesan imágenes para interpretación visual, el observador es el juez final de cuán bien funciona un método particular.
- El realce para percepción automática (machine perception) es más fácil de cuantificar.

Propósito Ilustrativo

El uso de ejemplos de realce de imágenes sirve como una forma efectiva de introducir las técnicas de procesamiento espacial. El material desarrollado tiene un alcance mucho más amplio que solo el realce de imágenes.

Resumen y Puntos Clave

- Las **transformaciones de intensidad** operan a nivel de píxel individual, modificando su valor basándose en una función $s = T(r)$.
- El **filtrado espacial** opera sobre una vecindad de píxeles para calcular el valor de salida del píxel central de dicha vecindad.
- Ambas son técnicas fundamentales en el dominio espacial para el preprocesamiento y realce de imágenes.
- Ecuaciones fundamentales:
 - Transformación general en el dominio espacial: $g(x, y) = T[f(x, y)]$
 - Transformación de intensidad (mapeo de nivel de gris): $s = T(r)$

Próximos Pasos en el Estudio

La discusión continuará con el procesamiento de histogramas, diferentes tipos de filtros espaciales (suavizado, realce) y sus aplicaciones detalladas.

Transformaciones Básicas de Intensidad en Imágenes Digitales

Basado en el Cap. 3 de "Digital Image Processing"
(Gonzalez & Woods)

Procesamiento Digital de Imágenes

Basado en literatura académica de referencia

Definición

Las transformaciones de intensidad modifican los niveles de gris de una imagen, mapeando cada valor de entrada r a una salida $s = T(r)$.

- Son implementadas por tablas de búsqueda (LUTs).
- Para una imagen de 8 bits: 256 posibles valores.
- Se agrupan en funciones: lineales, logarítmicas y de potencia.

Clasificación

- **Lineales:** Transformación negativa e identidad.
- **Logarítmicas:** Logarítmica e inversa logarítmica.
- **Potencia:** n -ésima potencia y raíz n -ésima.

Transformación Negativa

Ecuación

Para una imagen con niveles de intensidad en el rango $[0, L - 1]$, su negativo se define como:

$$s = L - 1 - r \quad (3-3)$$

Transformación Negativa

Ecuación

Para una imagen con niveles de intensidad en el rango $[0, L - 1]$, su negativo se define como:

$$s = L - 1 - r \quad (3-3)$$

Aplicaciones

- Realce de detalles en áreas oscuras.
- Utilidad clínica: imágenes médicas (mamografías).

Curvas de Transformación de Intensidad

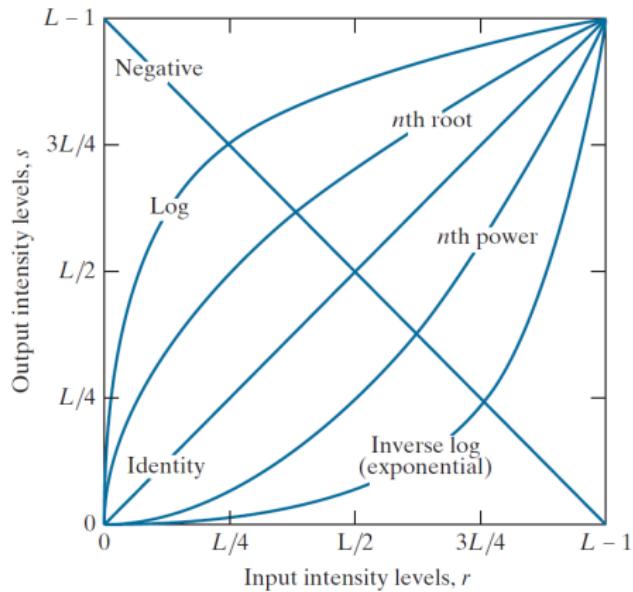
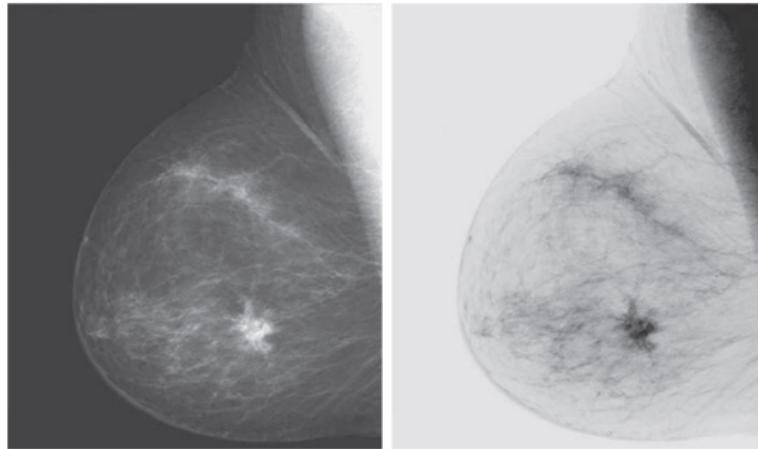


Figura: Tipos de funciones de transformación de intensidad.

Ejemplo Clínico: Mamografía



Observación

El negativo puede facilitar el análisis de detalles en tejidos blandos como el tejido mamario.

- Las transformaciones de intensidad son herramientas fundamentales para mejorar imágenes.
- Incluyen funciones lineales, logarítmicas y de potencia.
- La transformación negativa es útil en contextos clínicos y de contraste inverso.

Transformaciones Logarítmicas y de Potencia (Gamma)

Basado en el Cap. 3 de "Digital Image Processing"
(Gonzalez & Woods)

Procesamiento Digital de Imágenes

Basado en literatura académica de referencia

Transformación Logarítmica

Ecuación

$$s = c \log(1 + r) \quad (3-4)$$

- Expande intensidades bajas, comprime altas.
- Aplicada a espectros (por ejemplo, Fourier).
- Mejora visualización de detalles sutiles.

Ejemplo Espectro de Fourier

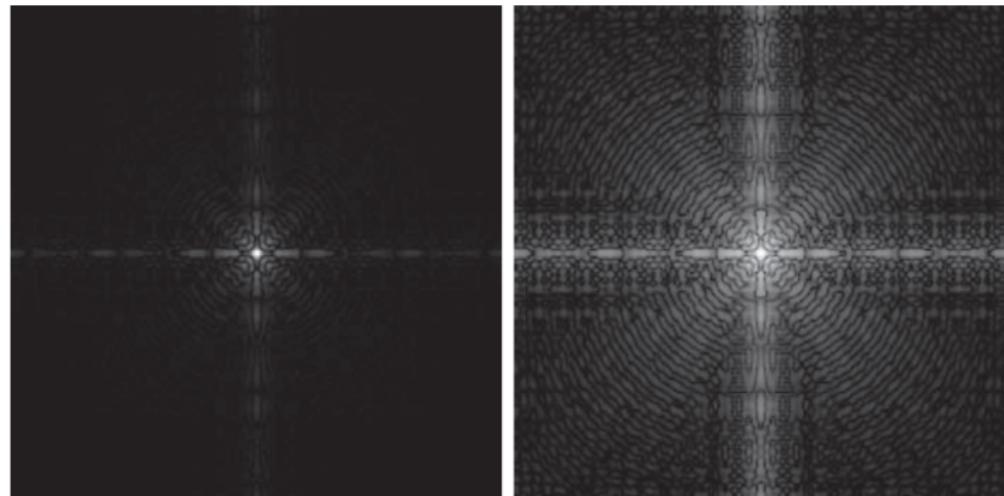


Figura: (a) Fourier spectrum displayed as a grayscale image. (b) Result of applying the log transformation in Eq. (3-4) with $c = 1$. Both images are scaled to the range [0, 255].

Transformación Potencia (Gamma)

Ecuación

$$s = cr^\gamma \quad (3-5)$$

- Control de brillo y contraste.
- **Corrección gamma** para pantallas.
- Cuando $\gamma = 1$, se obtiene la identidad.

Curvas Gamma (Fig. 3.6)

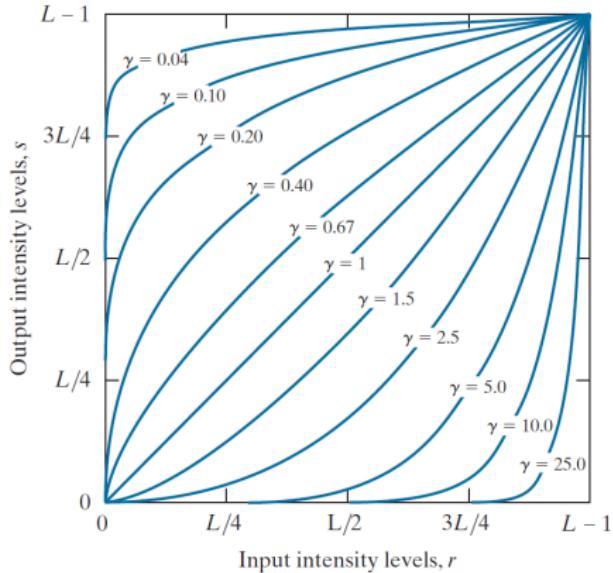


Figura: Plots of the gamma equation $s = c \cdot r^{\gamma}$ for various values of γ ($c = 1$ in all cases). Each curve was scaled independently so that all curves would fit in the same graph. Our interest here is on the shapes of the curves, not on their relative values.

Simulación y Corrección Gamma (Fig. 3.7)

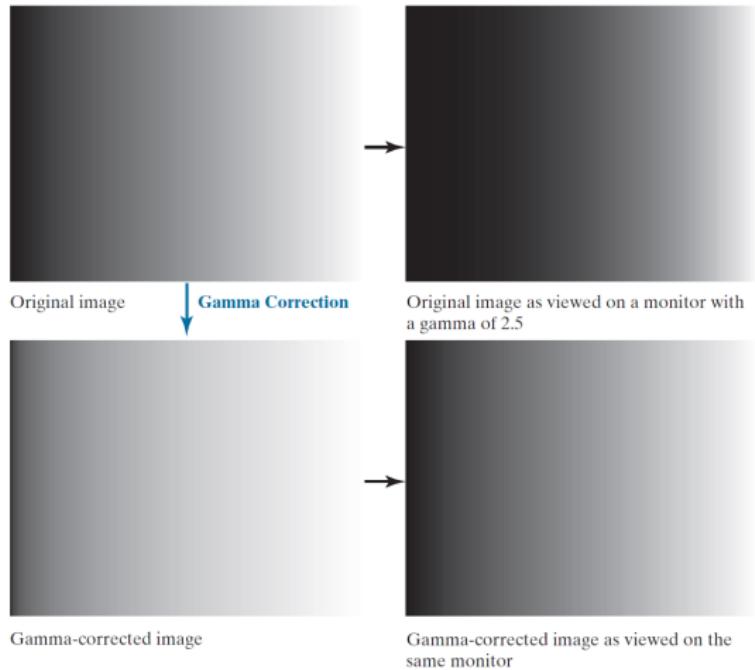


Figura: (a) Intensity ramp image. (b) Image as viewed on a simulated monitor with a gamma of 2.5. (c) Gammacorrected image. (d) Corrected image as viewed on the same monitor. Compare (d) and (a).

Aplicación Clínica: MRI (Fig. 3.8)

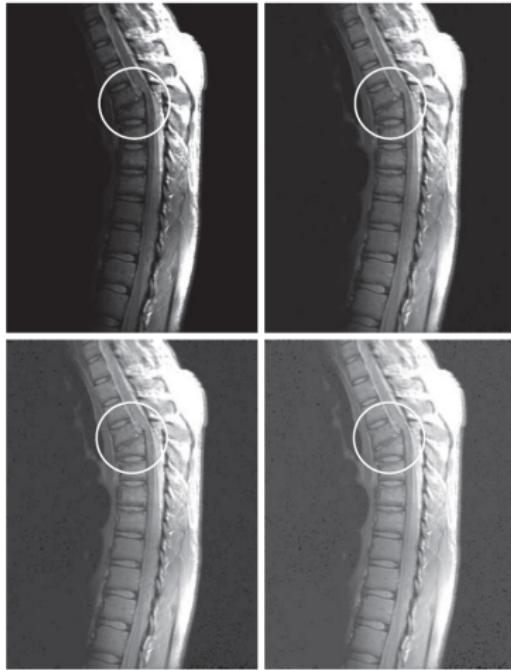


Figura: (a) Magnetic resonance image (MRI) of a fractured human spine (the region of the fracture is enclosed by the circle). (b)–(d) Results of applying the transformation in Eq. (3-5) with $c = 1$ and $g = 0.6$, 0.4, and 0.3, respectively. (Original image courtesy of Dr. David R. Pickens, Department of Radiology and Radiological Sciences, Vanderbilt University Medical Center.)

Aplicación Aérea: Corrección de Contraste (Fig. 3.9)



Figura: (a) Aerial image. (b)–(d) Results of applying the transformation in Eq. (3-5) with $g = 3.0$, 4.0 , and 5.0 , respectively. ($c = 1$ in all cases.) (Original image courtesy of NASA.)

Resumen

- Transformaciones logarítmicas mejoran intensidades bajas.
- Transformaciones gamma permiten ajustes finos de brillo y contraste.
- Se aplican a espectros, dispositivos de visualización e imágenes clínicas.

Descomposición en Planos de Bits (Bit-Plane Slicing)

Análisis Visual de la Contribución de Bits

Procesamiento Digital de Imágenes

Basado en literatura académica de referencia

¿Qué es el Bit-Plane Slicing?

Es una técnica de procesamiento de imágenes que descompone una imagen digital en una serie de imágenes binarias, donde cada imagen corresponde a un plano de bits específico de los valores de intensidad de los píxeles.

- Los valores de píxel en imágenes digitales (ej. escala de grises) son enteros representados por bits.
- Una imagen de 8 bits por píxel tiene valores de 0 a 255. Cada valor se representa con 8 bits.
- El Bit-Plane Slicing separa la contribución de cada posición de bit (0 a 7, o 1 a 8) a la apariencia general de la imagen.

Figura 3.13: Planos de Bits de una Imagen de 8 bits

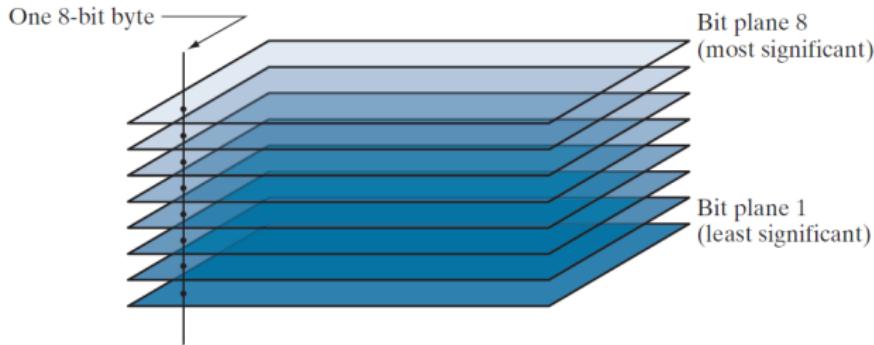
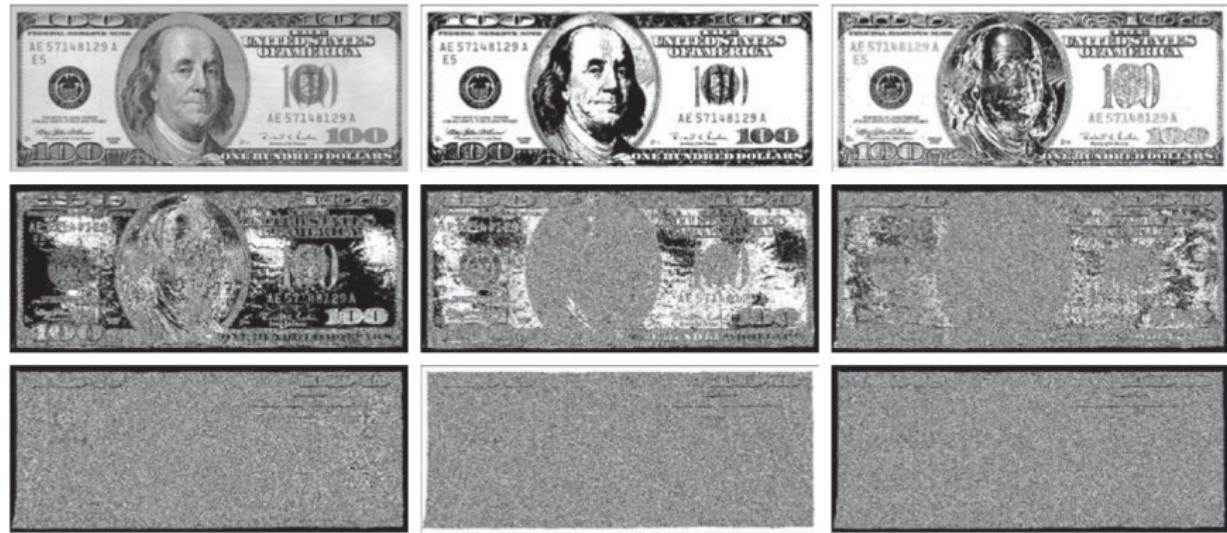


Figura: Ilustración conceptual de cómo un byte de 8 bits que representa un píxel puede descomponerse en 8 planos de bits.

Significado

- Plano 1 (LSB): Contiene el bit menos significativo de todos los píxeles.
- Plano 8 (MSB): Contiene el bit más significativo de todos los píxeles.

Figura 3.14: Imagen de 8 bits y sus Planos



a	b	c
d	e	f
g	h	i

Figura: Una imagen de 8 bits (a) y sus ocho planos de bits (b-i), del más (Plano 8) al menos significativo (Plano 1).

Observaciones Clave (basado en Fig 3.14)

- **Planos Superiores (MSB):** Los planos 8, 7, 6 y 5 contienen la mayor parte de la información visualmente significativa.
- **Planos Inferiores (LSB):** Los planos 4, 3, 2 y 1 aportan detalles sutiles de textura y a menudo parecen ruido.
- **Ejemplo (Valor 194):** 194 en binario es 11000010_2 , indicando bits MSB=1,1,0,0,0,0,1,0.

Reconstrucción a partir de Planos de Bits

Principio de Reconstrucción

Una imagen $I(x, y)$ de N bits se reconstruye sumando sus planos $B_n(x, y)$:

$$I(x, y) = \sum_{n=1}^N B_n(x, y) \cdot 2^{n-1}$$

Reconstrucción Aproximada

Usando solo planos de orden k a N :

$$I_{ap}(x, y) = \sum_{n=k}^N B_n(x, y) \cdot 2^{n-1}$$

Figura 3.15: Reconstrucción usando Planos MSB



Figura: Reconstrucción usando diferentes combinaciones de planos MSB. a) Planos 8 y 7, b) Planos 8,7,6, c) Planos 8,7,6,5

Aplicaciones Principales

- **Compresión:** Almacenar solo MSB (p.ej. 4 planos) reduce datos.
- **Análisis:** Cuantifica la importancia de cada bit.
- **Esteganografía:** Uso de LSB para ocultar información.

Resumen

- Los planos MSB contienen la estructura esencial.
- Los LSB aportan detalles finos.
- Permite reconstrucciones aproximadas y aplicaciones en compresión y ocultación.

3.3 Procesamiento de Histogramas en Imágenes Digitales

¿Qué es un Histograma?

Definición

Sea r_k , $k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$, las intensidades de una imagen digital de L niveles, $f(x, y)$.

- El **histograma no normalizado** de f se define como:

$$h(r_k) = n_k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, L - 1 \quad (3)$$

donde n_k es el número de píxeles en f con intensidad r_k . Las subdivisiones de la escala de intensidad se llaman *bins* del histograma.

- El **histograma normalizado** de f se define como:

$$p(r_k) = \frac{h(r_k)}{MN} = \frac{n_k}{MN} \quad (4)$$

donde M y N son el número de filas y columnas de la imagen.

Nota

Generalmente, se trabaja con histogramas normalizados. La suma de $p(r_k)$ para todos los valores de k es siempre 1. Los componentes de $p(r_k)$ son estimaciones de las probabilidades de los niveles de intensidad.

Relación entre Histograma y Apariencia de la Imagen

Imagen Oscura:

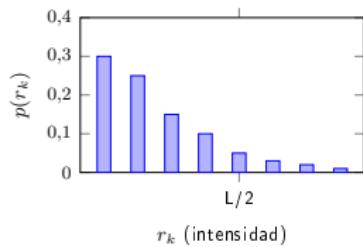
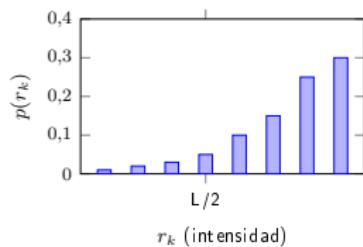


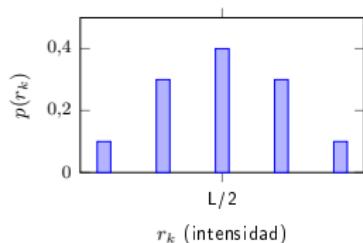
Imagen Clara:



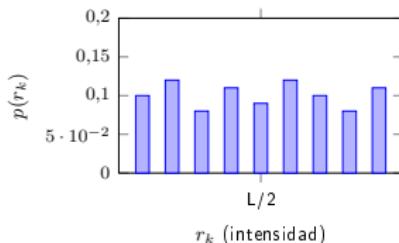
Bins concentrados en la parte inferior. Bins concentrados en la parte superior.

Relación entre Histograma y Apariencia (Continuación)

Bajo Contraste:



Alto Contraste:



Histograma estrecho, típicamente en el centro.

Histograma amplio y distribuido.

Observación

Una imagen con píxeles que ocupan todo el rango de intensidades y se distribuyen uniformemente tiende a tener alto contraste y mostrar gran detalle.

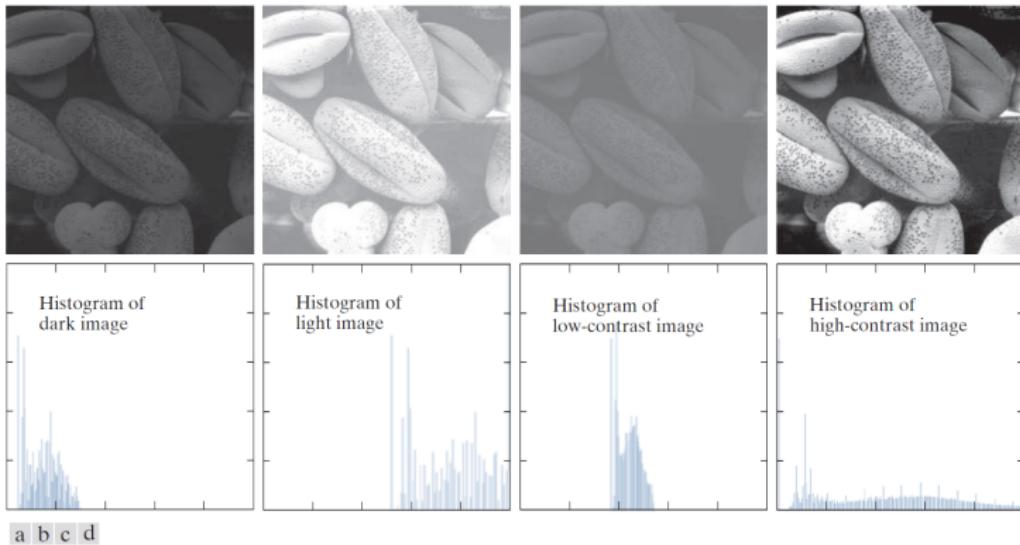


Figura: Four image types and their corresponding histograms. (a) dark; (b) light; (c) low contrast; (d) high contrast. The horizontal axis of the histograms are values of r_k and the vertical axis are values of $p(r_k)$.

Ecualización de Histograma

Transformaciones de Intensidad

Mapeo de Intensidad

Consideramos transformaciones de la forma:

$$s = T(r), \quad 0 \leq r \leq L - 1 \quad (5)$$

donde r es la intensidad de entrada y s es la intensidad de salida.

Transformaciones de Intensidad

Mapeo de Intensidad

Consideramos transformaciones de la forma:

$$s = T(r), \quad 0 \leq r \leq L - 1 \quad (5)$$

donde r es la intensidad de entrada y s es la intensidad de salida.

Condiciones para $T(r)$

- a) $T(r)$ es una función monotónicamente creciente en el intervalo $0 \leq r \leq L - 1$.
- b) $0 \leq T(r) \leq L - 1$ para $0 \leq r \leq L - 1$.

Para la transformación inversa $r = T^{-1}(s)$, la condición (a) se cambia a:

- a) $T(r)$ es una función **estrictamente** monotónicamente creciente.

Funciones Monotónicas y Estrictamente Monotónicas

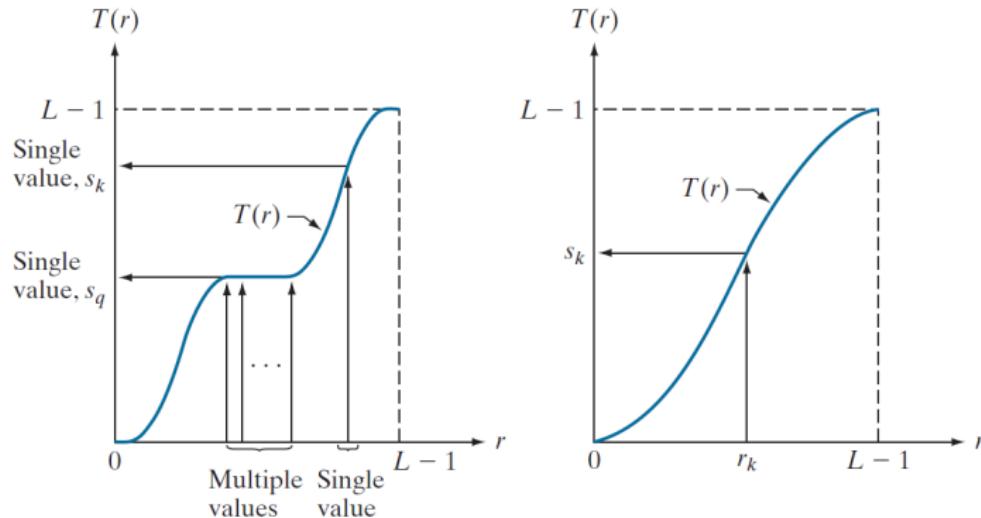


Figura: a) Mapeo uno-a-uno o muchos-a-uno, b) Mapeo uno-a-uno. (a) Monotonic increasing function, showing how multiple values can map to a single value. (b) Strictly monotonic increasing function. This is a one-to-one mapping, both ways.

PDF de la Intensidad Transformada (Caso Continuo)

Relación entre PDFs

Si $p_r(r)$ es la Función de Densidad de Probabilidad (PDF) de las intensidades de entrada r , y $T(r)$ es conocida, continua y diferenciable, la PDF de las intensidades transformadas s es:

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| \quad (6)$$

PDF de la Intensidad Transformada (Caso Continuo)

Relación entre PDFs

Si $p_r(r)$ es la Función de Densidad de Probabilidad (PDF) de las intensidades de entrada r , y $T(r)$ es conocida, continua y diferenciable, la PDF de las intensidades transformadas s es:

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| \quad (6)$$

Transformación Clave para Ecualización

Una transformación de particular importancia es:

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw \quad (7)$$

donde w es una variable dummy de integración. La integral es la Función de Distribución Acumulativa (CDF) de r .

PDF de la Intensidad Transformada (Caso Continuo)

Relación entre PDFs

Si $p_r(r)$ es la Función de Densidad de Probabilidad (PDF) de las intensidades de entrada r , y $T(r)$ es conocida, continua y diferenciable, la PDF de las intensidades transformadas s es:

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| \quad (6)$$

Transformación Clave para Ecualización

Una transformación de particular importancia es:

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw \quad (7)$$

donde w es una variable dummy de integración. La integral es la Función de Distribución Acumulativa (CDF) de r .

Derivada ds/dr

Usando la regla de Leibniz:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr} = (L - 1) \frac{d}{dr} \left[\int_0^r p_r(w) dw \right] = (L - 1)p_r(r) \quad (8)$$

Resultado de la Ecualización (Caso Continuo)

Sustituyendo $\frac{dr}{ds} = \left(\frac{ds}{dr}\right)^{-1} = \frac{1}{(L-1)p_r(r)}$ en la Ec. (4):

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{1}{(L-1)p_r(r)} \right| \\ = \frac{1}{L-1}, \quad \text{para } 0 \leq s \leq L-1 \quad (9)$$

Resultado Fundamental

La PDF resultante $p_s(s)$ es una **distribución uniforme**. Esto significa que la transformación de ecualización (Ec. 5) tiende a producir una imagen cuyas intensidades están distribuidas uniformemente en el rango $[0, L-1]$.

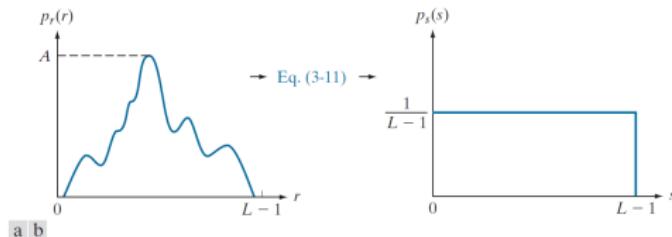


Figura: (a) An arbitrary PDF. (b) Result of applying Eq. (3-11) to the input PDF. The resulting PDF is always uniform, independently of the shape of the input.

Ecualización de Histograma para Imágenes Digitales (Discreta)

Probabilidad Discreta

La probabilidad de ocurrencia del nivel de intensidad r_k se aproxima por el histograma normalizado:

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{MN} \quad (10)$$

Ecualización de Histograma para Imágenes Digitales (Discreta)

Probabilidad Discreta

La probabilidad de ocurrencia del nivel de intensidad r_k se aproxima por el histograma normalizado:

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{MN} \quad (10)$$

Transformación de Ecualización Discreta

La forma discreta de la transformación (Ec. 5) es:

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j), \quad k = 0, 1, 2, \dots, L - 1 \quad (11)$$

Esta se conoce como ecualización de histograma o linealización de histograma. Los valores s_k calculados se redondean al entero más cercano.

Nota Importante

Debido a la naturaleza discreta y el redondeo, el histograma resultante no es perfectamente plano en la práctica, pero tiende a estar más extendido.

Ejemplo 3.5: Mecánica de la Ecualización

Supongamos una imagen de 3 bits ($L = 8$, intensidades 0..7) de 64×64 píxeles ($MN = 4096$).

Tabla 3.1: Distribución de intensidad e histograma

r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$	r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0 = 0$	790	0.19	$r_4 = 4$	329	0.08
$r_1 = 1$	1023	0.25	$r_5 = 5$	245	0.06
$r_2 = 2$	850	0.21	$r_6 = 6$	122	0.03
$r_3 = 3$	656	0.16	$r_7 = 7$	81	0.02

Ejemplo 3.5: Mecánica de la Ecualización

Supongamos una imagen de 3 bits ($L = 8$, intensidades 0..7) de 64×64 píxeles ($MN = 4096$).

Tabla 3.1: Distribución de intensidad e histograma

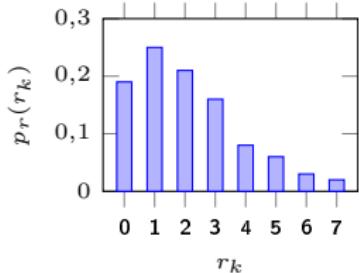
r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$	r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0 = 0$	790	0.19	$r_4 = 4$	329	0.08
$r_1 = 1$	1023	0.25	$r_5 = 5$	245	0.06
$r_2 = 2$	850	0.21	$r_6 = 6$	122	0.03
$r_3 = 3$	656	0.16	$r_7 = 7$	81	0.02

Aplicando Ec. (8) ($L - 1 = 7$):

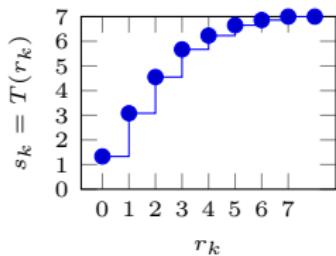
- $s_0 = 7 \sum_{j=0}^0 p_r(r_j) = 7p_r(r_0) = 7 \times 0,19 = 1,33 \rightarrow 1$
- $s_1 = 7 \sum_{j=0}^1 p_r(r_j) = 7(p_r(r_0) + p_r(r_1)) = 7 \times (0,19 + 0,25) = 3,08 \rightarrow 3$
- $s_2 = 7 \sum_{j=0}^2 p_r(r_j) = 7(0,19 + 0,25 + 0,21) = 7 \times 0,65 = 4,55 \rightarrow 5$
- $s_3 = 7(0,65 + 0,16) = 7 \times 0,81 = 5,67 \rightarrow 6$
- $s_4 = 7(0,81 + 0,08) = 7 \times 0,89 = 6,23 \rightarrow 6$
- $s_5 = 7(0,89 + 0,06) = 7 \times 0,95 = 6,65 \rightarrow 7$
- $s_6 = 7(0,95 + 0,03) = 7 \times 0,98 = 6,86 \rightarrow 7$
- $s_7 = 7(0,98 + 0,02) = 7 \times 1,00 = 7,00 \rightarrow 7$

Ejemplo 3.5: Histogramas y Función de Transformación

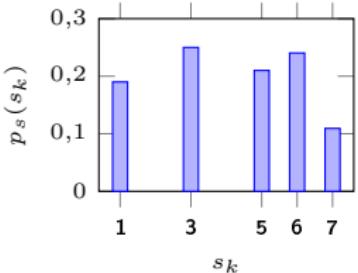
(a) Histograma Original



(b) Función $T(r_k)$



(c) Histograma Ecualizado



Observación del Ejemplo

El histograma ecualizado (c) muestra cómo las intensidades se han redistribuido, ocupando un rango más amplio y tendiendo a una distribución más uniforme, aunque no perfectamente plana. Algunos niveles de intensidad originales se mapean al mismo nivel de salida.

Ventajas de la Ecualización de Histograma

- **Mejora del Contraste:** Generalmente, la ecualización extiende el histograma de la imagen de entrada, resultando en un realce del contraste.
- **Automática:** El proceso se basa enteramente en la información extraída de la imagen dada (su histograma), sin necesidad de parámetros externos.
- **Adaptativa:** Se adapta a las características de cada imagen.

Ventajas de la Ecualización de Histograma

- **Mejora del Contraste:** Generalmente, la ecualización extiende el histograma de la imagen de entrada, resultando en un realce del contraste.
- **Automática:** El proceso se basa enteramente en la información extraída de la imagen dada (su histograma), sin necesidad de parámetros externos.
- **Adaptativa:** Se adapta a las características de cada imagen.

Transformación Inversa

La transformación inversa de s a r se denota como:

$$r_k = T^{-1}(s_k) \quad (12)$$

Esta transformación es importante para técnicas como el *histogram matching* (especificación de histograma). Para que sea única, todas las intensidades deben estar presentes en la imagen original (histograma sin bins vacíos).

- El **histograma** de una imagen describe la distribución de sus niveles de intensidad.
- La forma del histograma está directamente relacionada con la **apariencia visual** de la imagen (oscura, clara, contraste).
- La **ecualización de histograma** es una técnica que busca transformar una imagen para que su histograma sea lo más uniforme posible.
- **Teoría (Continua)**: Se basa en la CDF de la PDF de intensidades, resultando en una PDF de salida teóricamente uniforme.
- **Práctica (Discreta)**: Se usa la CDF del histograma normalizado. El resultado no es perfectamente plano pero tiende a mejorar el contraste significativamente.
- Es un método **automático y adaptativo** para el realce de contraste.

Usos Comunes

El procesamiento de histogramas, y en particular la ecualización, es fundamental en:

- Realce de contraste en imágenes médicas (rayos X, resonancias magnéticas).
- Mejora de fotografías subexpuestas o sobreexpuestas.
- Preprocesamiento en sistemas de visión por computadora para mejorar la detectabilidad de características.
- Normalización de imágenes para comparación o análisis.
- Segmentación de imágenes (umbralización basada en histograma).

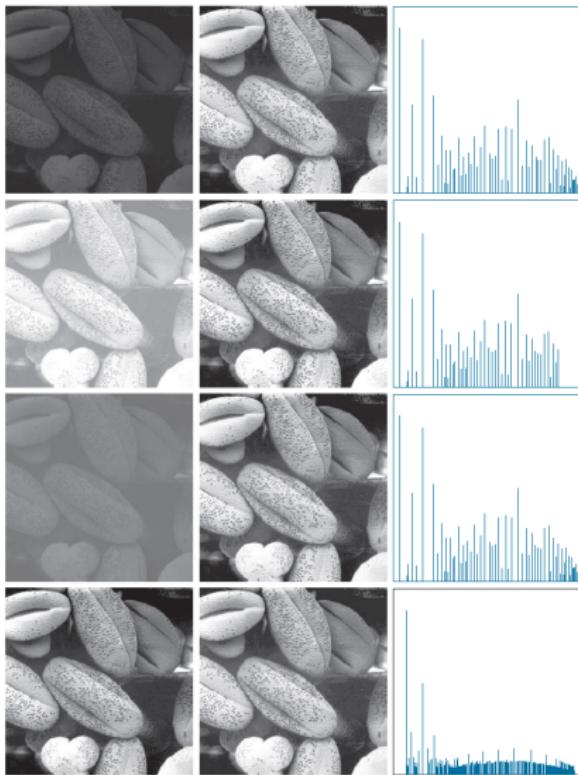


Figura: Left column: Images from Fig. 3.16. Center column: Corresponding histogram-equalized images. Right column: histograms of the images in the center column (compare with the histograms in Fig. 3.16).

Especificación de Histograma (Matching)

Introducción a la Especificación de Histograma

Concepto

La ecualización de histograma busca un histograma de salida uniforme. A veces, se desea especificar una forma particular para el histograma de la imagen procesada. Este método se llama **especificación de histograma o histogram matching**.

Introducción a la Especificación de Histograma

Concepto

La ecualización de histograma busca un histograma de salida uniforme. A veces, se desea especificar una forma particular para el histograma de la imagen procesada. Este método se llama **especificación de histograma o histogram matching**.

Variables

- r : intensidades de la imagen de entrada (PDF $p_r(r)$).
- z : intensidades de la imagen de salida (PDF deseada $p_z(z)$).

Especificación de Histograma: Caso Continuo

Transformaciones Fundamentales

Sea s una variable aleatoria tal que (repetición de Ec. (??)):

$$s = T(r) = (L - 1) \int_0^r p_r(w) dw \quad (13)$$

Definimos una función $G(z)$ sobre la variable z :

$$G(z) = (L - 1) \int_0^z p_z(v) dv = s \quad (14)$$

De las ecuaciones anteriores, $G(z) = s = T(r)$, por lo tanto:

$$z = G^{-1}(s) = G^{-1}[T(r)] \quad (15)$$

Procedimiento de Especificación (Continuo)

- ① Obtener $p_r(r)$ de la imagen de entrada y usarla en Ec. (??) para hallar $T(r)$.
- ② Usar la PDF especificada $p_z(z)$ en Ec. (??) para obtener la función $G(z)$.
- ③ Calcular la transformación inversa $z = G^{-1}(s)$. Este es el mapeo de s a z .
- ④ Obtener la imagen de salida:
 - Ecuallizar la imagen de entrada usando Ec. (??) (valores s).
 - Para cada píxel con valor s , aplicar el mapeo inverso $z = G^{-1}(s)$ para obtener el píxel correspondiente en la imagen de salida.

Nota

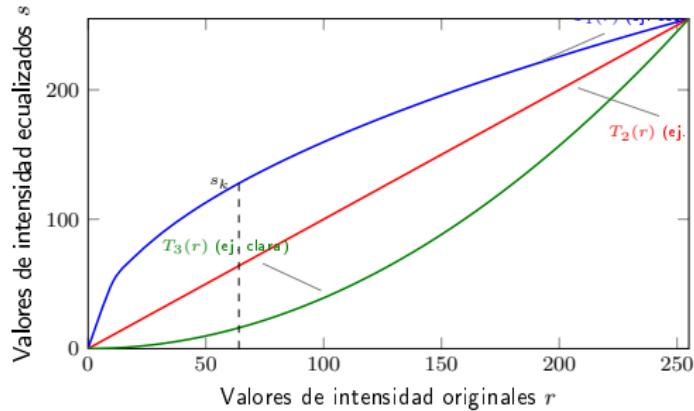
Encontrar expresiones analíticas para G^{-1} puede ser no trivial.

Funciones de Transformación (Ilustración Conceptual de Fig. 3.21)

Mapeo $s = T(r)$ para Ecualización

La Figura 3.21 del texto fuente muestra ejemplos de funciones de transformación $s = T(r)$ obtenidas para diferentes imágenes. Estas funciones mapean los niveles de intensidad originales r a los niveles de intensidad s de una imagen ecualizada.

Ilustración conceptual de funciones de transformación $s = T(r)$.



Especificación de Histograma: Caso Discreto

Formulación Discreta

La Ec. (??) en forma discreta es la transformación de ecualización (Ec. (??)):

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) \quad (16)$$

Especificación de Histograma: Caso Discreto

Formulación Discreta

La Ec. (??) en forma discreta es la transformación de ecualización (Ec. (??)):

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) \quad (16)$$

Dado s_k , la formulación discreta de Ec. (??) implica calcular:

$$G(z_q) = (L - 1) \sum_{i=0}^q p_z(z_i) \quad (17)$$

para un valor q tal que $G(z_q) \approx s_k$.

Especificación de Histograma: Caso Discreto

Formulación Discreta

La Ec. (??) en forma discreta es la transformación de ecualización (Ec. (??)):

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) \quad (16)$$

Dado s_k , la formulación discreta de Ec. (??) implica calcular:

$$G(z_q) = (L - 1) \sum_{i=0}^q p_z(z_i) \quad (17)$$

para un valor q tal que $G(z_q) \approx s_k$. Los valores z_q deseados se obtienen de la transformación inversa:

$$z_q = G^{-1}(s_k) \quad (18)$$

Nota

En la práctica, no se calcula G^{-1} directamente. Se usan tablas de consulta (look-up tables).

Procedimiento de Especificación (Discreto)

- ① Calcular el histograma $p_r(r_k)$ de la imagen de entrada. Usarlo en Ec. (??) para mapear las intensidades de entrada r_k a las intensidades s_k de la imagen ecualizada. Redondear s_k al rango $[0, L - 1]$.
- ② Calcular todos los valores de la función $G(z_q)$ usando Ec. (??) para $q = 0, 1, \dots, L - 1$, donde $p_z(z_i)$ son los valores del histograma especificado. Redondear los valores de $G(z_q)$ al rango $[0, L - 1]$. Almacenar estos $G(z_q)$ en una tabla de consulta.
- ③ Para cada valor de s_k ($k = 0, 1, \dots, L - 1$), usar los valores almacenados de $G(z_q)$ del Paso 2 para encontrar el valor z_q tal que $G(z_q)$ sea el más cercano a s_k . Almacenar estos mapeos de $s_k \rightarrow z_q$. Si hay múltiples z_q que dan la misma cercanía, se elige el menor por convención.
- ④ Formar la imagen con histograma especificado mapeando cada píxel ecualizado con valor s_k al correspondiente píxel con valor z_q en la imagen de salida, usando los mapeos del Paso 3.

Observación

El paso intermedio de ecualizar la imagen es conceptual y puede omitirse combinando T y G^{-1} .

- El **histograma** describe la distribución de intensidades.
- La **ecualización** busca un histograma uniforme, mejorando el contraste automáticamente.
- La **especificación (matching)** permite dar una forma deseada al histograma de salida.
- Ambas técnicas se basan en la CDF (o suma acumulada del histograma).
- Las implementaciones discretas involucran redondeo y aproximaciones.

Usos Comunes

El procesamiento de histogramas es fundamental en:

- Realce de contraste (ecualización).
- Lograr una apariencia específica (especificación).
- Normalización de imágenes para comparación.
- Segmentación (umbralización).
- Aplicaciones médicas, fotografía, visión por computadora.

Ejemplo 3.7 Especificación de Histograma (Matching)

Especificación de Histogramas

Definición

La especificación de histogramas (o igualación de histogramas) es una técnica de procesamiento de imágenes que busca transformar el histograma de una imagen para que coincida (aproximadamente) con un histograma especificado o deseado.

- Permite controlar de forma más precisa la distribución de las intensidades de los píxeles.
- Útil para mejorar el contraste de forma selectiva o para comparar imágenes procesadas bajo diferentes condiciones de iluminación.

Objetivo del Ejemplo

Ilustrar la mecánica de la especificación de histogramas, transformando una imagen (cuyo histograma ecualizado es conocido) para que su nuevo histograma se aproxime a uno especificado.

Paso 1: Histograma Ecualizado de la Imagen Original (s_k)

Se asume que se parte de una imagen cuyo histograma ya ha sido ecualizado (o se conocen los valores s_k resultantes de la ecualización). Estos valores $s_k = T(r_k)$ representan los niveles de gris transformados de la imagen original.

Valores s_k (del Ejemplo 3.5 del libro de texto)

Para una imagen de 8 bits (niveles 0 – 7), los valores s_k obtenidos tras la ecualización son:

- $s_0 = 1$
- $s_1 = 3$
- $s_2 = 5$
- $s_3 = 6$
- $s_4 = 6$
- $s_5 = 7$
- $s_6 = 7$
- $s_7 = 7$

Estos son los valores que se buscará mapear a nuevos niveles z_q .

Paso 2: Histograma Especificado ($P_z(z_q)$)

Se define el histograma deseado $P_z(z_q)$ para los niveles de intensidad z_q .

Tabla 3.2 (Parcial): Histograma Especificado

z_q	Specified $P_z(z_q)$
$z_0 = 0$	0.00
$z_1 = 1$	0.00
$z_2 = 2$	0.00
$z_3 = 3$	0.15
$z_4 = 4$	0.20
$z_5 = 5$	0.30
$z_6 = 6$	0.20
$z_7 = 7$	0.15

Estos valores son los que se usarán para calcular la función de transformación $G(z_q)$.

Paso 3: Calcular $G(z_q)$

La función $G(z_q)$ se calcula a partir de $P_z(z_q)$:

$$G(z_q) = (L - 1) \sum_{j=0}^q P_z(z_j) \quad (19)$$

donde $L = 8$, por lo tanto $L - 1 = 7$.

Valores $G(z_q)$ (fraccionales):

- $G(z_0) = 0,00$
- $G(z_1) = 0,00$
- $G(z_2) = 0,00$
- $G(z_3) = 1,05$
- $G(z_4) = 2,45$
- $G(z_5) = 4,55$
- $G(z_6) = 5,95$
- $G(z_7) = 7,00$

$G(z_q)$ redondeados (Tabla 3.3):

z_q	$G(z_q)$
0	0
1	0
2	0
3	1
4	2
5	5
6	6
7	7

Paso 4: Mapeo $s_k \rightarrow z_q$

Para cada s_k , se busca z_q tal que $G(z_q)$ sea el más cercano a s_k .

Regla de Mapeo

$s_k \rightarrow z_q$ tal que $|s_k - G(z_q)|$ es mínimo.

Tabla 3.4: Mapeo de s_k a z_q

Valores s_k únicos: $\{1, 3, 5, 6, 7\}$.

- $s_k = 1 \rightarrow z_3 = 3$ (ya que $G(z_3) = 1$)
- $s_k = 3 \rightarrow z_4 = 4$ (ya que $G(z_4) = 2$ es el más cercano)
- $s_k = 5 \rightarrow z_5 = 5$ (ya que $G(z_5) = 5$)
- $s_k = 6 \rightarrow z_6 = 6$ (ya que $G(z_6) = 6$)
- $s_k = 7 \rightarrow z_7 = 7$ (ya que $G(z_7) = 7$)

s_k	\rightarrow	z_q
1	\rightarrow	3
3	\rightarrow	4
5	\rightarrow	5
6	\rightarrow	6
7	\rightarrow	7

Figura 3.22 (b): Histograma Especificado $P_z(z_q)$

Fig. 3.22(b) Histograma Especificado

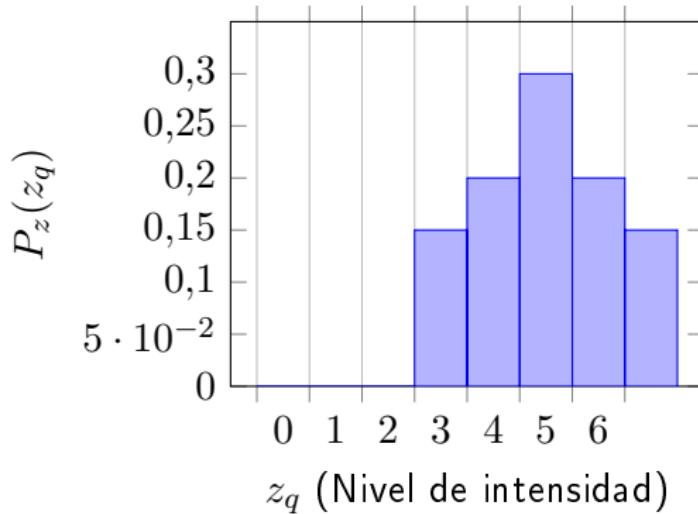


Figura: Histograma que se desea obtener.

Figura 3.22 (c): Función de Transformación $G(z_q)$

Fig. 3.22(c) Función de Transformación (Redondeada)

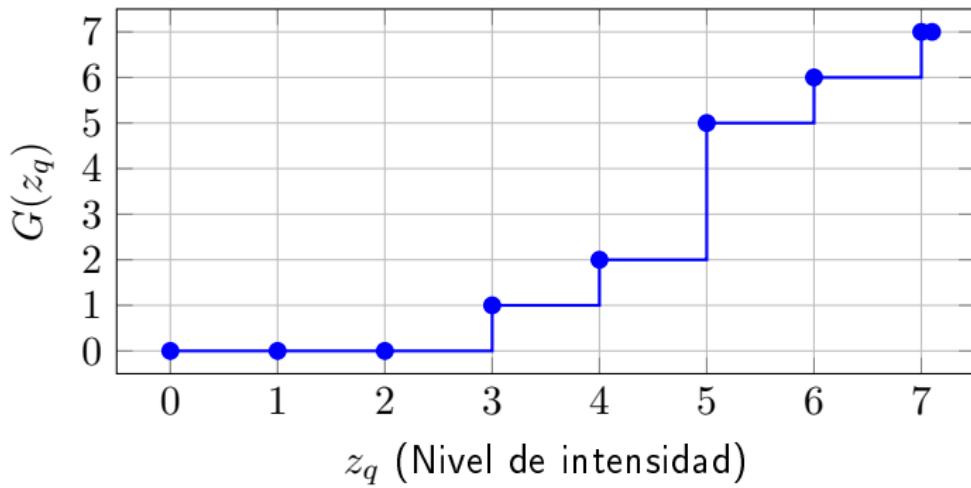


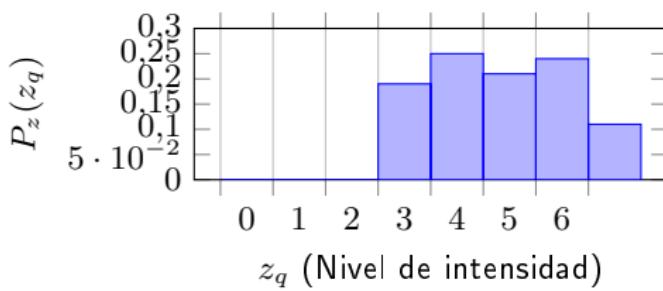
Figura: Función de transformación $G(z_q)$ obtenida y redondeada.

Figura 3.22 (d): Histograma Resultante

Tabla 3.2 (Parcial): Histograma Actual Obtenido

z_q	Actual $P_z(z_q)$
$z_0 = 0$	0.00
$z_1 = 1$	0.00
$z_2 = 2$	0.00
$z_3 = 3$	0.19
$z_4 = 4$	0.25
$z_5 = 5$	0.21
$z_6 = 6$	0.24
$z_7 = 7$	0.11

Fig. 3.22(d) Histograma Resultante



Resumen del Proceso

- ① **Obtener s_k :** Se parte de los niveles s_k de una imagen (usualmente ecualizada).
- ② **Definir $P_z(z_q)$:** Se especifica el histograma deseado $P_z(z_q)$.
- ③ **Calcular $G(z_q)$:** Se calcula $G(z_q) = (L - 1) \sum P_z(z_j)$ y se redondea.
- ④ **Mapear $s_k \rightarrow z_q$:** Cada s_k se mapea al z_q para el cual $G(z_q)$ es más cercano.
- ⑤ **Transformar Imagen:** Se reemplazan los valores de los píxeles según este mapeo.

Resultado

El histograma de la imagen resultante se aproxima al histograma especificado. Las diferencias se deben al redondeo y la naturaleza discreta de los niveles de intensidad.

Conclusión del Ejemplo

- El ejemplo ilustra cómo la especificación de histogramas permite moldear la distribución de intensidades.
- Obtener un histograma ecualizado (s_k) como paso intermedio simplifica el mapeo.
- Aunque el histograma resultante no es idéntico al especificado, la tendencia general se ajusta.

Observación Importante

La Fig. 3.22(a) (Histograma original) no se incluyó aquí por falta de datos en las imágenes, pero sería el inicio antes de obtener s_k .

Ejemplo 3.8 Comparación entre Ecualización del Histograma y Especificación del Histograma

Realce de Imágenes Basado en Histogramas

Concepto

Las técnicas de realce basadas en histogramas modifican los niveles de intensidad de una imagen para mejorar su contraste o resaltar ciertas características. El histograma de una imagen representa la distribución de sus niveles de gris.

Dos técnicas comunes son:

- **Ecualización de Histograma:** Intenta obtener un histograma lo más uniforme posible.
- **Especificación de Histograma (o Coincidencia de Histograma):** Transforma el histograma de una imagen para que coincida con una forma específica predefinida.

Contexto del Ejemplo

Analizaremos estas técnicas usando una imagen de Phobos (luna de Marte), caracterizada por grandes áreas oscuras.

Ecualización de Histograma: Fundamentos

Objetivo

Expandir el rango dinámico de los niveles de gris para mejorar el contraste global. La transformación busca producir una imagen cuyo histograma sea aproximadamente uniforme.

La transformación de ecualización para niveles de intensidad discretos r_k es:

$$s_k = T(r_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = (L - 1) \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{N} \quad (20)$$

Donde:

- r_k : Nivel de gris de entrada (original).
- s_k : Nivel de gris de salida (ecualizado).
- L : Número total de niveles de gris (e.g., 256).
- n_j : Número de píxeles con nivel de gris r_j .
- N : Número total de píxeles en la imagen.
- $p_r(r_j)$: Probabilidad estimada del nivel de gris r_j .

Esta ecuación corresponde a la función de distribución acumulativa (CDF) del histograma de entrada, escalada por $(L - 1)$.

Ejemplo: Imagen de Phobos y su Histograma Original

Figura 3.23(a): Imagen Original de Phobos

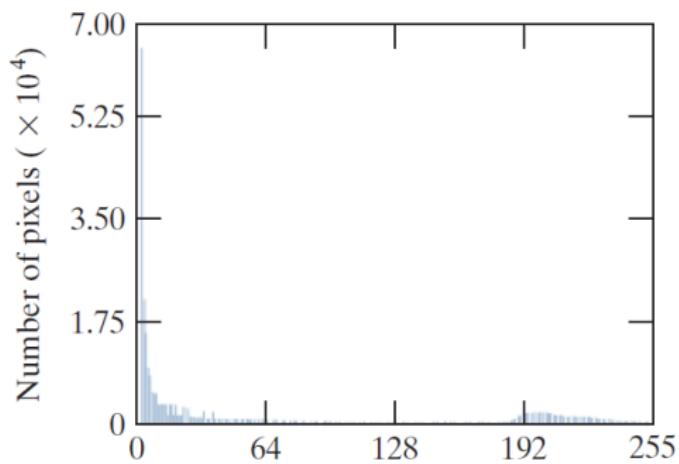
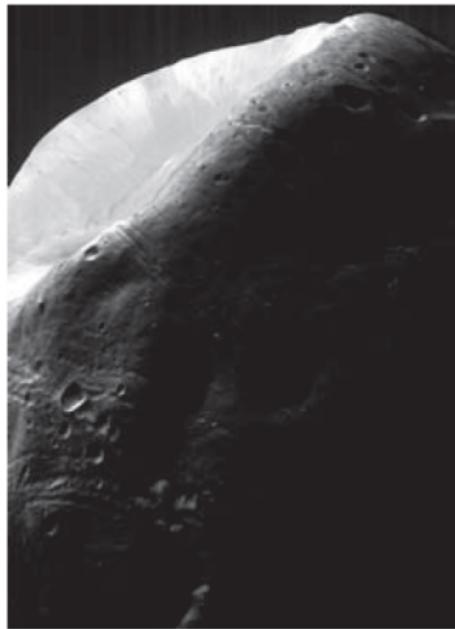


Figura: (a) An image, and (b) its histogram.

Resultado de la Ecualización de Histograma en Phobos

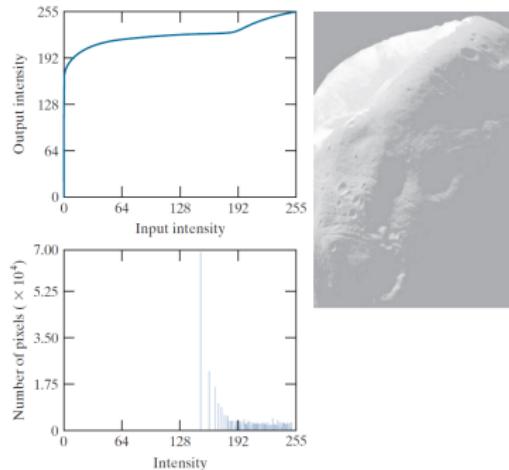


Figura: (a) Histogram equalization transformation obtained using the histogram in Fig. 3.23(b). (b) Histogram equalized image. (c) Histogram of equalized image.

Problema

La ecualización mapea un intervalo estrecho de píxeles oscuros a la parte alta de la escala de grises. El resultado es una imagen con apariencia lavada y pérdida de detalle en las zonas originalmente oscuras.

Especificación de Histograma: Fundamentos

Objetivo

Modificar una imagen para que su histograma coincida (aproximadamente) con una forma específica deseada, en lugar de simplemente aplanarlo. Esto permite un control más fino sobre el realce.

Proceso General:

- 1 Obtener la transformación de ecualización de la imagen original: $s = T(r)$.
- 2 Especificar la función de densidad de probabilidad deseada $p_z(z)$.
- 3 Calcular la transformación $G(z)$ basada en $p_z(z)$:

$$v_k = G(z_k) = (L - 1) \sum_{j=0}^k p_z(z_j) \quad (21)$$

- 4 Encontrar la transformación inversa $z_k = G^{-1}(s_k)$. Esto implica mapear los valores s_k (obtenidos de la ecualización de la imagen original) a los valores z_k usando la CDF del histograma especificado. Para cada s_k , se busca el z_j tal que $G(z_j) \geq s_k$ (se elige el menor j).
- 5 Aplicar G^{-1} a la imagen ecualizada (o directamente componer transformaciones). Los valores z_k son los nuevos niveles de gris.

Aplicación a Phobos: Especificación

Estrategia

Modificar el histograma original para que tenga una transición más suave en los niveles oscuros, preservando la forma general.

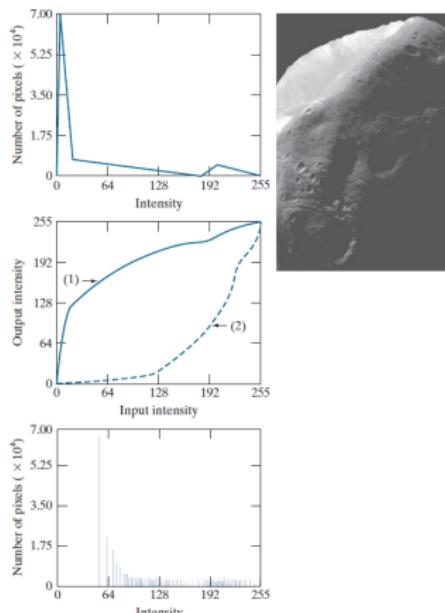
Fig. 3.25 Especificación del Histograma, a)

Histograma especificado,

b) Transformación $G(z_q)$, etiquetada como (1), y

$G^{-1}(s_k)$, etiquetada como (2). c) Resultado de la especificación del histograma. b)

Histograma de la imagen c)



Mejora

La imagen resultante de la especificación de histograma muestra una mejora significativa en la apariencia y visibilidad de detalles en comparación con la ecualización directa. Un cambio modesto en el histograma objetivo fue suficiente.

Ecualización de Histograma

- **Ventaja:** Simple, automático, no requiere parámetros.
- **Desventaja:** Puede producir resultados no deseados (e.g., "lavado") si el histograma original tiene grandes picos, ya que busca un histograma plano que no siempre es ideal.

Comparación y Conclusiones

Ecuación de Histograma

- **Ventaja:** Simple, automático, no requiere parámetros.
- **Desventaja:** Puede producir resultados no deseados (e.g., "lavado") si el histograma original tiene grandes picos, ya que busca un histograma plano que no siempre es ideal.

Especificación de Histograma

- **Ventaja:** Ofrece mayor control sobre la forma del histograma de salida, permitiendo realces más adaptados al contenido de la imagen o a un objetivo visual particular.
- **Desventaja:** Requiere la definición de un histograma objetivo, lo cual puede no ser trivial y podría necesitar experimentación.

Comparación y Conclusiones

Ecualización de Histograma

- **Ventaja:** Simple, automático, no requiere parámetros.
- **Desventaja:** Puede producir resultados no deseados (e.g., "lavado") si el histograma original tiene grandes picos, ya que busca un histograma plano que no siempre es ideal.

Especificación de Histograma

- **Ventaja:** Ofrece mayor control sobre la forma del histograma de salida, permitiendo realces más adaptados al contenido de la imagen o a un objetivo visual particular.
- **Desventaja:** Requiere la definición de un histograma objetivo, lo cual puede no ser trivial y podría necesitar experimentación.

Lección del Ejemplo de Phobos

Para imágenes con distribuciones de intensidad muy sesgadas, la especificación de histograma es a menudo una mejor elección que la ecualización directa si se desea un realce más natural y detallado.

Ejemplo 3.8 Comparison between histogram equalization and histogram specification

CLICK AQUI

Procesamiento del Histograma Local

Limitaciones del Procesamiento Global

Problema Principal

Los métodos globales (ecualización o especificación) modifican píxeles basados en el histograma de la **imagen completa**.

Esto es adecuado para un realce general, pero a menudo falla cuando el objetivo es:

- Realzar detalles en áreas pequeñas.
- Adaptarse a variaciones locales de iluminación o contraste.

La razón es que el número de píxeles en áreas pequeñas tiene una influencia insignificante en el cálculo de las transformaciones globales.

Solución

Diseñar funciones de transformación basadas en la distribución de intensidad de **vecindades de píxeles**.

Procesamiento Local de Histogramas: Metodología

Procedimiento

Las técnicas de procesamiento de histograma (ecualización/especificación) pueden adaptarse para el realce local:

- ① **Definir una vecindad:** Se elige una forma y tamaño para la vecindad (e.g., 3×3 , 5×5 píxeles).
- ② **Desplazar la vecindad:** El centro de la vecindad se mueve de píxel a píxel a través de la imagen.
- ③ **En cada ubicación:**
 - Se calcula el histograma de los píxeles **dentro de la vecindad actual**.
 - Se obtiene una función de transformación (ecualización o especificación) basada en este histograma local.
 - Esta función se usa para mapear la intensidad del **píxel central** de la vecindad.
- ④ **Repetir:** El proceso se repite para cada píxel de la imagen.

Consideraciones Computacionales

- **Actualización eficiente:** Al mover la vecindad un píxel, solo una fila/columna cambia. Es posible actualizar el histograma local incrementalmente en lugar de recalcularlo desde cero, ahorrando cómputo.
- **Regiones no solapadas:** Usar regiones que no se solapan reduce el cómputo, pero puede producir un efecto de bloques indeseable.

Ejemplo 3.9: Ecualización Local de Histogramas

Escenario del Ejemplo

Una imagen de 8 bits, 512×512 , con cinco cuadrados negros sobre un fondo gris claro. La imagen es ligeramente ruidosa (imperceptible). Hay objetos incrustados en los cuadrados oscuros, invisibles en la imagen original.

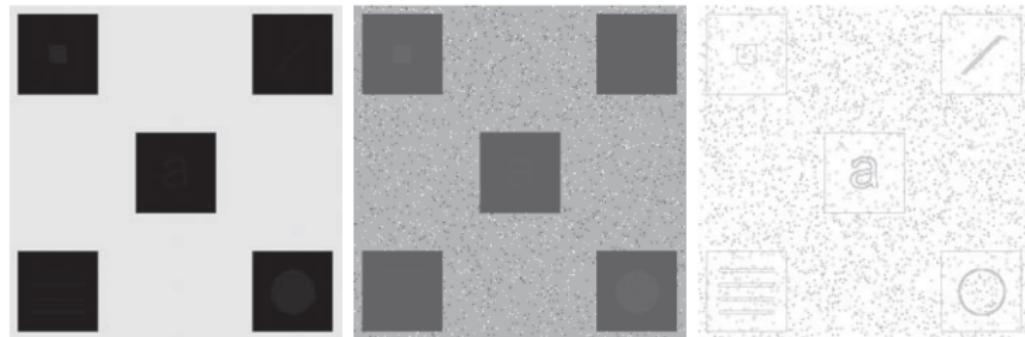


Figura: (a) Objetos dentro de los cuadrados no son visibles. (b) Ruido realizado, pero sin revelar detalles significativos de los objetos. (c) Detalle significativo visible dentro de los cuadrados oscuros.

Observación Clave

La ecualización local (con vecindad 3×3) revela detalles significativos dentro de los cuadrados oscuros. Los valores de intensidad de estos objetos son demasiado cercanos a los de los cuadrados y sus tamaños demasiado pequeños para influir significativamente en la ecualización global.

Ecualización de Histograma Global

- **Ventaja:** Simple, automático.
- **Desventaja:** Puede producir "lavado" si hay picos grandes; no siempre ideal. Falla en realzar detalles en áreas pequeñas si no son estadísticamente significativas globalmente.

Comparación y Conclusiones

Ecuallización de Histograma Global

- **Ventaja:** Simple, automático.
- **Desventaja:** Puede producir "lavado" si hay picos grandes; no siempre ideal. Falla en realzar detalles en áreas pequeñas si no son estadísticamente significativas globalmente.

Especificación de Histograma Global

- **Ventaja:** Mayor control sobre la forma del histograma de salida.
- **Desventaja:** Requiere definir un histograma objetivo. También sufre de las limitaciones globales para detalles locales.

Comparación y Conclusiones

Ecuallización de Histograma Global

- **Ventaja:** Simple, automático.
- **Desventaja:** Puede producir "lavado" si hay picos grandes; no siempre ideal. Falla en realzar detalles en áreas pequeñas si no son estadísticamente significativas globalmente.

Especificación de Histograma Global

- **Ventaja:** Mayor control sobre la forma del histograma de salida.
- **Desventaja:** Requiere definir un histograma objetivo. También sufre de las limitaciones globales para detalles locales.

Procesamiento Local de Histogramas

- **Ventaja:** Efectivo para realzar detalles en áreas pequeñas y adaptarse a condiciones locales. Revela información no visible con métodos globales.
- **Desventaja:** Computacionalmente más intensivo. Puede realzar ruido. La elección del tamaño de la vecindad es crucial.

Lección General

La elección entre métodos globales y locales (y entre ecualización y especificación) depende del contenido de la imagen y de los objetivos específicos del realce. Para detalles finos en regiones localizadas, el procesamiento local es superior.



UTILIZANDO LA ESTADÍSTICA DEL HISTOGRAMA PARA MEJORAR LA IMAGEN

CLICK AQUI

3.4 FUNDAMENTOS DEL FILTRADO ESPACIAL

OBJETIVO 3.4 CLICK AQUI

CORRELACIÓN ESPACIAL Y CONVOLUCIÓN

CORRELACIÓN Y CONVOLUCIÓN ESPACIAL CLICK AQUI

NÚCLEOS SEPARABLES DE FILTROS

NÚCLEOS SEPARABLES DE FILTROS

LOWPASS GAUSSIAN FILTER KERNELS

LOWPASS GAUSSIAN FILTER KERNELS

Ejemplos: LOWPASS GAUSSIAN FILTER KERNELS

Ejemplos: LOWPASS GAUSSIAN FILTER KERNELS

FILTROS DE ESTADÍSTICA DE ORDEN

FILTROS DE ESTADÍSTICA DE ORDEN

FILTROS ESPACIALES DE REALCE (PASA ALTAS)

3.6 FILTROS ESPACIALES DE REALCE (PASA ALTAS)

Enmascaramiento desenfocado y filtrado high-boost

Enmascaramiento desenfocado y filtrado high-boost

Derivadas de Primer Orden para Realce de Imágenes: El Gradiente

Derivadas de Primer Orden para Realce de Imágenes: El Gradiente

Filtros de Señal: Highpass, Bandreject y Bandpass derivados de Lowpass

3.7 Filtros de Señal: Highpass, Bandreject y Bandpass derivados de Lowpass

3.8 Métodos de Mejora Espacial en Procesamiento de Imágenes

Temporary page!

`LATEX` was unable to guess the total number of pages correctly. A
was some unprocessed data that should have been added to the
this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page
away, because `LATEX` now knows how many pages to expect for the
document.